ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

B. W. CONOLLY

Marche aléatoire dont la répartition de la longueur des étapes suit une loi exponentielle négative

Annales de l'I. H. P., section B, tome 2, nº 2 (1965-1966), p. 173-184
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1965__2_2_173_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. II, nº 2, 1965, p. 173-184. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Marche aléatoire dont la répartition de la longueur des étapes suit une loi exponentielle négative

par

B. W. CONOLLY

INTRODUCTION

1. Le présent travail a pour but d'étudier le comportement d'un mobile qui se déplace sur une droite illimitée de la manière suivante :

(*i*) la longueur s de chaque étape suit la loi exponentielle négative $\mu e^{-\mu s}ds$;
(*ii*) parvenu au point terminant une étape, le mobile se dirige soit à droite avec la probabilité p, soit à gauche avec probabilité $q(= 1 - p)$.

L'étude est divisée en deux parties dans lesquelles on se propose en particulier de calculer respectivement les valeurs suivantes :

(*i*) la densité de probabilité pour que le mobile se trouve dans l'intervalle élémentaire $(y, y + dy)$ à la fin de la $n^{\text{ième}}$ étape, ayant commencé son déplacement au point de coordonnée x;
(*ii*) la densité de probabilité liée pour que le mobile, sachant que le point de départ a pour coordonnée x,

a) franchisse l'origine pour la première fois au cours de la $n^{\text{ième}}$ étape,
b) et que la distance totale parcourue (mesurée du point initial jusqu'à l'origine) ait la valeur y.

La méthode suivie se fonde essentiellement sur les concepts bien connus de fonctions génératrices et de transformées de Laplace, mais en développant les calculs afin d'obtenir des résultats complets.

DENSITÉ DE PROBABILITÉ DE LA POSITION DU MOBILE A LA FIN DE LA N$^{\text{ième}}$ ÉTAPE

2. On suppose que le mobile commence sa marche au point ayant pour coordonnée x. Soit $R_n(x, y)$ la densité de probabilité pour que ce mobile se trouve dans l'intervalle élémentaire $(y, y + dy)$ à la fin de la $n^{\text{ième}}$ étape, où $y > x$. De même, soit $L_n(x, y)$ la densité correspondante pour $y < x$.

En considérant la position du mobile au bout de la $(n - 1)^{\text{ième}}$ étape, on a :

$$R_n(x, y) = q\mu\int_0^\infty R_{n-1}(x, y + s)e^{-\mu s}ds + p\mu\int_0^{y-x} R_{n-1}(x, y - s)e^{-\mu s}ds + p\mu\int_{y-x}^\infty L_{n-1}(x, y - s)e^{-\mu s}ds\,; \quad (1)$$

$$L_n(x, y) = p\mu\int_0^\infty L_{n-1}(x, y - s)e^{-\mu s}ds + q\mu\int_0^{x-y} L_{n-1}(x, y + s)e^{-\mu s}ds + q\mu\int_{x-y}^\infty R_{n-1}(x, y + s)e^{-\mu s}ds. \quad (2)$$

En considérant la position éventuelle du mobile au bout de sa première étape, on obtient de même :

$$R_n(x, y) = q\mu\int_0^\infty e^{-\mu s}R_{n-1}(x - s, y)ds + p\mu\int_0^{y-x} e^{-\mu s}R_{n-1}(x + s, y)ds + p\mu\int_{y-x}^\infty e^{-\mu s}L_{n-1}(x + s, y)ds, \quad (3)$$

avec une expression similaire pour $L_n(x, y)$.

La comparaison de l'équation (1) et de l'équation (3) montre que $R_n(x, y)$ est une fonction de $y - x$. De même $L_n(x, y)$ est une fonction de $x - y$.

SOLUTION DES ÉQUATIONS (1) ET (2)

3. On trouve de façon immédiate que :

$$R_1(x, y) = p\mu e^{-\mu(y-x)}\,; \quad (4)$$

$$L_1(x, y) = q\mu e^{-\mu(x-y)}\,; \quad (5)$$

$$R_2(x, y) = p\mu e^{-\mu(y-x)}[q + p\ \ (y - x)]\,; \quad (6)$$

$$L_2(x, y) = q\mu e^{-\mu(x-y)}[p + q\mu(x - y)]. \quad (7)$$

On est donc conduit à rechercher des solutions de la forme

$$R_n(x, y) = e^{-\mu(y-x)}\rho_n(y - x), \tag{8}$$

$$L_n(x, y) = e^{-\mu(x-y)}\lambda_n(x - y). \tag{9}$$

Évidemment, on peut transformer R_n en L_n (ou *vice versa*) en remplaçant p par q et x par y.

4. En introduisant les fonctions génératrices et les transformées de Laplace, on a

$$\rho(\delta, t) = \sum_{n \geqslant 1} \rho_n(\delta)t^n, \tag{10}$$

$$r(z, t) = \int_0^\infty e^{-z\delta}\rho(\delta, t)d\delta, \tag{11}$$

$$r_n(z) = \int_0^\infty e^{-z\delta}\rho_n(\delta)d\delta, \tag{12}$$

avec des définitions semblables pour $\lambda(\delta, t)$, $l(z, t)$ et $l_n(z)$. Évidemment,

$$r(z, t) = \sum_{n \geqslant 1} r_n(z)t^n, \tag{13}$$

et

$$l(z, t) = \sum_{n \geqslant 1} l_n(z)t^n. \tag{14}$$

5. Remarquons d'abord que

$$r_n(\mu) + l_n(\mu) = 1, \tag{15}$$

puisque au bout d'une étape quelconque le mobile doit se trouver quelque part sur la droite. Alors

$$\int_x^\infty R_n(x, y)dy + \int_{-\infty}^x L_n(x, y)dy = 1, \tag{16}$$

ou

$$\int_0^\infty e^{-\mu\delta}\rho_n(\delta)d\delta + \int_0^\infty e^{-\mu\delta}\lambda_n(\delta)d\delta = 1, \tag{17}$$

d'où (15). Donc pour $|t| < 1$, $\mathrm{R}lz \geqslant \mu$, $r(z, t) + l(z, t)$ est une fonction analytique. En particulier,

$$r(\mu, t) + l(\mu, t) = t/(1 - t). \tag{18}$$

6. On peut facilement obtenir deux équations intégrales pour $\rho_n(\delta)$ et $\lambda_n(\delta)$ à partir de (1) et (2).

Puis en utilisant la transformation de Laplace, on tire :

$$r_n(z) = \frac{q\mu}{(2\mu - z)} \left\{ r_{n-1}(z) - r_{n-1}(2\mu) \right\} + \frac{p\mu}{z} \left\{ r_{n-1}(z) + l_{n-1}(2\mu) \right\} \tag{19}$$

et

$$l_n(z) = \frac{p\mu}{(2\mu - z)} \left\{ l_{n-1}(z) - l_{n-1}(2\mu) \right\} + \frac{q\mu}{z} \left\{ l_{n-1}(z) + r_{n-1}(2\mu) \right\}. \tag{20}$$

Les solutions des équations aux différences finies (19) et (20) peuvent s'exprimer comme :

$$r_n(z) = \mu^n \left\{ \frac{q}{2\mu - z} + \frac{p}{z} \right\}^n - l_n(2\mu - z). \tag{21}$$

L'équation (15) étant donnée, il s'ensuit que $r_n(2\mu)$ et $l_n(2\mu)$ sont analytiques, de sorte que $l_n(2\mu - z)$ doit annuler la singularité apparente en (21) au point $z = 2\mu$. On suppose alors que $r_n(z)$ ainsi que $l_n(z)$ sont des polynômes d'ordre n des puissances inverses de z.

7. En multipliant (19) par t^n, en sommant pour $n \geqslant 2$ et en utilisant les résultats $r_1(z) = p\mu/z$, $l_1(z) = q\mu(z)$, on obtient

$$r(z, t) = \frac{q\mu tzr(2\mu, t) - p\mu t(2\mu - z)l(2\mu, t) - p\mu t(2\mu - z)}{z^2 - \mu z(2 - qt + pt) + 2p\mu^2 t}. \tag{22}$$

On obtient une formule semblable pour $l(z, t)$ dans laquelle p et q sont interchangés.

8. La connaissance complète de $r(z, t)$ exige que les fonctions $r(2\mu, t)$, $l(2\mu, t)$ soient déterminées. On y parvient en remarquant que $r(z, t)$ est analytique pour $|\, t \,| < 1$, $\mathrm{R}lz \geqslant \mu$. Soient ω_1, ω_2 les zéros du dénominateur de (22), c'est-à-dire

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \mu \left\{ 1 + \frac{1}{2}(p - q)t + \mathrm{R} \right\}, \\ \omega_2 &= \mu \left\{ 1 + \frac{1}{2}(p - q)t - \mathrm{R} \right\}, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

où

$$\mathrm{R}^2 = \left(1 - \frac{1}{2}t\right)^2 - pqt^2 \tag{24}$$

et soient ω_1^1 et ω_2^1 les zéros du dénominateur de l'expression de $l(z, t)$. Il est clair qu'on peut les obtenir en interchangeant p et q dans l'expression (23). Pour tout p et $0 < t < 1$, on peut montrer facilement que ω_1 ainsi que ω_1^1

ne sont pas inférieurs à μ. Il en résulte que le numérateur de (22) doit s'annuler pour $z = \omega_1$ tandis que celui de l'expression correspondante pour $l(z, t)$ doit s'annuler pour $z = \omega_1^1$. Ainsi on obtient

$$r(z, t) = t(p\omega_1^1 + q\omega_2)/2\mathrm{R}(z - \omega_2), \tag{25}$$

$$l(z, t) = t(q\omega_1 + p\omega_2^1)/2\mathrm{R}(z - \omega_2^1), \tag{26}$$

d'où

$$\rho(\delta, t) = t(p\omega_1^1 + q\omega_2)e^{\delta\omega_2}/2\mathrm{R}, \tag{27}$$

et

$$\lambda(\delta, t) = t(q\omega_1 + p\omega_2^1)e^{\delta\omega_2^1}/2\mathrm{R}. \tag{28}$$

On a donc complètement déterminé les fonctions génératrices $\mathrm{R}(x, y, t)$ et $\mathrm{L}(x, y, t)$ des densités $\mathrm{R}_n(x, y)$ et $\mathrm{L}_n(x, y)$.

9. Le cas où $p = q = \dfrac{1}{2}$ est d'un intérêt particulier. $\mathrm{R}(x, y, t)$ et $\mathrm{L}(x, y, t)$ sont alors identiques, mais x et y sont interchangés. On a

$$\mathrm{R}(x, y, t) = \mu t e^{-\mu\delta\sqrt{(1-t)}}/2\sqrt{(1-t)}, \tag{29}$$

où $\delta = y - x$ et

$$\begin{aligned}\mathrm{R}_n(x, y) &= \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n\mathrm{R}(x, y, t)}{dt^n}\right]_{t=0} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}} \mathrm{R}(x, y, z)dz/z^{n+1},\end{aligned} \tag{30}$$

où C est un contour simple fermé autour de l'origine, tel que $\mathrm{R}(x, y, z)$ soit une fonction analytique de z à l'intérieur de, et sur, C. La transformation $\zeta = 1 - \sqrt{(1 - z)}$ donne

$$\mathrm{R}_n(x, y) = \frac{\mu}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}'} e^{-\mu\delta(1-\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta^n(2 - \zeta)^n}, \tag{31}$$

où C′ est un contour simple fermé qui inclut $\zeta = 0$, mais exclut $\zeta = 2$. En calculant le résidu correspondant à $\zeta = 0$, on obtient

$$\mathrm{R}_n(x, y) = \frac{\mu e^{-\mu\delta}}{2^{2n-1}}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(2\mu\delta)^r}{r!}\binom{2n - r - 2}{n - 1}, \tag{32}$$

où $\delta = y - x$. La formule pour $L_n(x, y)$ est identique sauf que, en ce cas, $\delta = x - y$. En raison de cette symétrie et de l'équation (16) on est naturellement conduit à écrire :

$$\frac{1}{2} = \int_x^\infty R_n(x, y)dy = \frac{1}{2^n} \sum_{r=0}^{n-1} \binom{2n - r - 2}{n - 1} \frac{1}{2^{n-1-r}}, \tag{33}$$

pour tout n. Par ailleurs, la formule (33) peut se démontrer directement, ce qui fournit une vérification de (32).

DISTANCE PARCOURUE JUSQU'AU PREMIER PASSAGE A L'ORIGINE

10. La seconde partie a pour objet d'étudier la densité $u_n(x, y)$. Cette fonction définit la probabilité que le mobile, ayant commencé son trajet au point X de coordonnée x, arrive pour la première fois à l'origine au bout de, ou pendant la $n^{\text{ième}}$ étape en ayant parcouru une distance totale s telle que $y \leqslant s \leqslant y + dy$. On suppose d'abord que $x > 0$. Nous donnerons l'expression de la fonction génératrice de $u_n(x, y)$ pour $x > 0$, ainsi d'ailleurs que dans le cas particulier où $x = 0$.

11. Supposons que la première étape soit à droite, et désignons par $f_n(x, y)$ la densité de probabilité conditionnelle exprimant que le mobile arrive pour la première fois à l'origine au bout de, ou pendant, la $n^{\text{ième}}$ étape, ayant parcouru une distance totale s telle que $y \leqslant s \leqslant y + dy$ ($y \geqslant x$). Soit $g_n(x, y)$ la densité correspondante à une première étape dirigée à gauche. Puisque la définition de $u_n(x, y)$ est telle que la direction de la première étape est indifférente, il s'ensuit que

$$u_n(x, y) = pf_n(x, y) + qg_n(x, y) \tag{34}$$

pour $y > 0$; $n \geqslant 1$.

12. Dans le cas où le mobile va directement à l'origine la distance parcourue est exactement x. Soit $h_n(x)$ la probabilité conditionnelle poui que le mobile, s'étant dirigé d'abord à gauche, arrive pour la première fois à l'origine au cours de, ou pendant, la $n^{\text{ième}}$ étape, ayant parcouru une distance x exactement. On a

$$h_n(x) = q\mu \int_0^x e^{-\mu\varepsilon} h_{n-1}(x - \varepsilon)d\varepsilon$$

pour $n > 1$ et pour $n = 1$,

$$h_1(x) = \mu \int_x^\infty e^{-\mu\varepsilon} d\varepsilon = e^{-\mu x}.$$

Il s'ensuit que

$$h_n(x) = e^{-\mu x}(q\mu x)^{n-1}/(n-1)\,!, \tag{35}$$

et que la fonction génératrice a pour expression :

$$\begin{aligned} \mathrm{H}(x, t) &= \sum_{n \geqslant 1} h_n(x) t^n \\ &= t e^{-\mu x(1-qt)}. \end{aligned} \tag{36}$$

13. Aucune des trois fonctions f_n, g_n, u_n n'existe pour $y < x$. D'ailleurs toutes les trois sont nulles pour $n = 1$, $y > x$, car la longueur d'un parcours à l'origine ne peut pas dépasser x si le mobile ne parcourt qu'une étape. Pour $n > 1$, $y > x$, f_n, g_n et u_n sont liées par l'équation (34) et les équations suivantes :

$$\begin{aligned} f_n(x, y) = \frac{1}{2} q\mu e^{-\frac{1}{2}\mu(y-x)} h_{n-1} \left\{ \frac{1}{2}(x+y) \right\} \\ + \mu \int_0^{\frac{1}{2}(y-x)} e^{-\mu\varepsilon} u_{n-1}(x+\varepsilon, y-\varepsilon) d\varepsilon, \end{aligned} \tag{37}$$

$$g_n(x, y) = \mu \int_0^x e^{-\mu\varepsilon} u_{n-1}(x-\varepsilon, y-\varepsilon) d\varepsilon, \tag{38}$$

chaque équation étant obtenue en considérant la position du mobile au bout de la première étape dans les différents cas. Des équations semblables sont satisfaites par les fonctions génératrices $\mathrm{F}(x, y, t)$, $\mathrm{G}(x, y, t)$ et $\mathrm{U}(x, y, t)$ dont la définition est :

$$\mathrm{F}(x, y, t) = \sum_{n \geqslant 2} t^n f_n(x, y). \tag{39}$$

Il est intéressant de remarquer que chacune des fonctions F, G, U est solution de l'équation des télégraphistes $\Delta^2 \mathcal{F} = 0$, où

$$\Delta^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mu t(p-q)\frac{\partial}{\partial x} - \mu(2-t)\frac{\partial}{\partial y} - \mu^2(1-t). \tag{40}$$

14. Les équations analogues à (34), (37) et (38) pour les fonctions génératrices sont

$$\mathrm{U}(x, y, t) = p\mathrm{F}(x, y, t) + q\mathrm{G}(x, y, t), \tag{41}$$

$$F(x, y, t) = \frac{1}{2} q\mu t e^{-\frac{1}{2}\mu(y-x)} H \left\{ \frac{1}{2}(x+y), t \right\} + \mu t \int_0^{\frac{1}{2}(y-x)} e^{-\mu\varepsilon} U(x+\varepsilon, y-\varepsilon, t) d\varepsilon, \quad (42)$$

$$G(x, y, t) = \mu t \int_0^x e^{-\mu\varepsilon} U(x-\varepsilon, y-\varepsilon, t) d\varepsilon. \quad (43)$$

On introduit maintenant la transformée intégrale

$$\overline{U}(x, z, t) = \int_x^\infty e^{-zy} U(x, y, t) dy, \quad (44)$$

tout en remarquant que la transformée de Laplace de $U(x, y, t)$ par rapport à y, $U^*(x, z, t)$ est liée à $\overline{U}(x, z, t)$ par l'équation :

$$U^*(x, z, t) = qe^{-zx} H(x, t) + \overline{U}(x, z, t). \quad (45)$$

Substituons (42) et (43) dans (41), puis appliquons la transformée (44) au résultat. Nous obtenons par suite

$$\overline{U}(x, z, t) = \frac{pq\mu t^2 e^{-x(a-\mu qt)}}{(2a - \mu qt)} + p\mu t e^{ax} \int_x^\infty e^{-as} \overline{U}(s, z, t) ds + q\mu t e^{-ax} \int_0^x e^{as} \overline{U}(s, z, t) ds, \quad (46)$$

où

$$a = \mu + z. \quad (47)$$

15. Pour résoudre l'équation (46) on introduit encore une transformée intégrale, soit :

$$\overline{\overline{U}}(w, z, t) = \int_0^\infty e^{-xw} \overline{U}(x, z, t) dx. \quad (48)$$

On tire de (46)

$$\overline{\overline{U}}(w, z, t) = \frac{p\mu t(w+a)}{\{ w^2 + \mu t w(p-q) - (a^2 - a\mu t) \}} \cdot \left[\frac{\frac{1}{2} qt(w-a) + \overline{\overline{U}}(a, z, t)\left(a - \frac{1}{2}\mu qt\right)(a + w - \mu qt)}{\left(a - \frac{1}{2}\mu qt\right)(a + w - \mu qt)} \right]. \quad (49)$$

Cette expression détermine $\overline{\overline{U}}(w, z, t)$ sauf pour la valeur particulière $\overline{\overline{U}}(a, z, t)$. Mais pour achever la détermination de $\overline{\overline{U}}(w, z, t)$, on doit faire des hypothèses sur le comportement de $u_n(x, y)$.

16. Considérons la probabilité E_0 pour que la longueur du parcours soit x (passage à l'origine dès la première étape) et la probabilité E_1 pour que, la marche terminée, le parcours soit plus long que x. Alors, en utilisant le paragraphe 12,

$$E_0 = q \sum_{n \geqslant 1} h_n(x) = qe^{-\mu x p}. \tag{50}$$

Évidemment E_0 est tel que :

(*i*) $$E_0 \leqslant q \leqslant 1, \qquad x \geqslant 0;$$

(*ii*) $$E_0 \to 0 \quad \text{pour} \quad x \to \infty.$$

De plus :

$$E_0 + E_1 \leqslant 1$$

pour tout $x (\geqslant 0)$ et il s'en suit que E_1 doit rester finie et qu'il doit exister une limite finie au plus égale à l'unité lorsque x tend vers l'infini. Or,

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_x^\infty \sum_{n \geqslant 1} u_n(x, y) dy \\ &= \overline{U}(x, 0, 1), \end{aligned} \tag{51}$$

de sorte que $\overline{U}(x, z, t)$ doit être une fonction analytique du moins lorsque $0 < t \leqslant 1$ et $Rlz \geqslant 0$. Le comportement de E_1 indique que la fonction $\overline{\overline{U}}(w, z, t)$ est analytique du moins lorsque $0 < t \leqslant 1$, $Rlz \geqslant 0$, $Rlw > 0$.

17. Ce point établi, reconsidérons l'équation (49). Les zéros du dénominateur sont :

$$w = w_0 = \mu q t - a, \tag{52}$$

$$w = w_1 = -\frac{1}{2}\Big[\mu t(p - q) + s\Big] \tag{53}$$

$$w = w_2 = \frac{1}{2}\Big[-\mu t - (p - q) + s\Big] \tag{54}$$

expressions dans lesquelles

$$s^2 = \mu^2 t^2 (p - q)^2 + 4\lambda^2 \tag{55}$$

$$\lambda^2 = a^2 - a\mu t \tag{56}$$

et

$$a = \mu + z.$$

18. Pour les valeurs de t et de z prises en considérations, il est évident que

$$\left.\begin{aligned} Rl w_0 < 0 \\ Rl w_1 < 0 \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

mais,

$$Rl w_2 > 0.$$

Donc, le numérateur de (49) doit contenir un facteur $w - w_2$, ce qui détermine $\overline{\overline{U}}(a, z, t)$ et donne enfin :

$$\overline{\overline{U}}(w, z, t) = \frac{pq\mu t^2}{(a + w_1 - \mu qt)(a + w_2 - \mu qt)} \left[\frac{w_1 + a}{w - w_1} - \frac{\mu qt}{w - \mu qt + a}\right], \tag{58}$$

d'où par inversion,

$$\overline{U}(x, z, t) = \frac{1}{\mu}\left[(w_1 + a)e^{w_1 x} - \mu qte^{-(a-\mu qt)x}\right], \tag{59}$$

et, en utilisant (45),

$$U^*(x, z, t) = \frac{1}{\mu}(a + w_1)e^{w_1 x}. \tag{60}$$

19. Les transformées de Laplace de $F(x, y, t)$ et $G(x, y, t)$ sont définies par :

$$F^*(x, z, t) = \int_x^\infty e^{-zy}F(x, y, t)dy,$$

$$G^*(x, z, t) = e^{-zx}H(x, t) + \int_x^\infty e^{-zy}G(x, y, t)dy.$$

On obtient alors à partir de (43)

$$G^*(x, z, t) = te^{w_2 x}, \tag{61}$$

et $F^*(x, z, t)$ à partir de la transformée de l'équation (41).

20. Par inversion on obtient dans le cas $y > x$, $x > 0$,

$$G(x, y, t) = \mu xt^2\sqrt{\left[\frac{pq}{(y^2 - x^2)}\right]}e^{-\mu y(1-\frac{1}{2}t)-\frac{1}{2}\mu t(p-q)x}I_1(R), \tag{62}$$

$$U(x, y, t) = \frac{\mu xpqt^2}{(y+x)}e^{-\mu y(1-\frac{1}{2}t)-\frac{1}{2}\mu t(p-q)x}$$
$$\times\left[I_0(R) + \left\{\frac{y - x}{x} + \mu qt(y + x)\right\}\frac{I_1(R)}{R}\right], \tag{63}$$

où

$$R = \mu t\sqrt{pq(y^2 - x^2)}. \tag{64}$$

et I_0, I_1 sont les fonctions modifiées de Bessel de première espèce.

21. Jusqu'à ce point, nous avons traité le cas où le mobile commence sa marche en un point situé à droite de l'origine. Il est évident que l'on peut étudier d'une manière semblable le cas où $x < 0$.

22. Dans le cas où $x = 0$ (le mobile commence son trajet à l'origine), le premier pas peut être dirigé à droite, ou à gauche. D'ailleurs, dans le cas extrême, le mobile peut se diriger au point de coordonnée $\frac{1}{2}y$ ou $-\frac{1}{2}y$ revenant à l'origine en $(n-1)$ étapes. En envisageant alors toutes les positions intermédiaires à l'issue de la première étape et en utilisant les notations employées auparavant, on obtient :

$$u_n(0, y) = \mu p\left[\frac{1}{2} q e^{-\frac{1}{2}\mu y} h_{n-1}\left(\frac{1}{2} y\right) + \int_0^{\frac{1}{2}y} e^{-\mu\varepsilon} u_{n-1}(\varepsilon, y-\varepsilon) d\varepsilon\right]$$
$$+ \mu q\left[\frac{1}{2} p e^{-\frac{1}{2}\mu y} h'_{n-1}\left(\frac{1}{2} y\right) + \int_0^{\frac{1}{2}y} e^{-\mu\varepsilon} u'_{n-1}(\varepsilon, y-\varepsilon) d\varepsilon\right], \quad (65)$$

où h' et u' signifient que p et q sont interchangés dans les fonctions h et u correspondants. A l'issue de calculs identiques à ceux que nous avons déjà effectués, nous obtenons

$$\overline{\mathrm{U}}(0, z, t) = \frac{1}{\mu}(2a - \mu t - s), \quad (66)$$

s étant donnée par (55).

Or, dans ce cas, $\overline{\mathrm{U}}(0, z, t)$ est la transformée de Laplace de la fonction génératrice. Par inversion on tire :

$$\mathrm{U}(0, y, t) = \frac{2t\sqrt{pq}}{y} e^{-\frac{1}{2}\mu y(2-t)} \mathrm{I}_1\left(\mu t y\sqrt{pq}\right). \quad (67)$$

23. Il paraît difficile et sans doute inutile d'expliciter la forme générale des densités de probabilité $u_n(x, y)$ et $u_n(0, y)$ par lesquelles nous avons débuté cette partie de l'étude. Toutefois, on peut faire les observations générales suivantes.

24. Considérons d'abord la probabilité pour qu'au cours de sa marche le mobile ne franchisse jamais l'origine (fin de processus). Cette probabilité est évidemment $\mathrm{U}^*(x, 0, 1)$. On obtient

(i) *quand* $p \leqslant q$

$$w_1 = 0 \quad (68)$$

$$\mathrm{U}^*(x, 0, 1) = 1,$$

de sorte que la fin du mouvement (passage à l'origine) est presque certaine quand les étapes veis la gauche ont une probabilité supérieure à celles vers la droite, ainsi que lorsque ces deux probabilités sont égales. Mais

(ii) *quand* $p > q$

$$w_1 = -\mu(p - q) \tag{69}$$
$$U^*(x, 0, 1) = 2qe^{-\mu x(p-q)}$$

il y a une probabilité non nulle que la marche ne se termine jamais. Ces conclusions sont valables pour le cas $x > 0$ et pour $x < 0$ les conclusions sont inverses. Pour $x = 0$, on conclut de (66) que seul le cas $p = q$ produit un retour certain à l'origine. Dans le cas $p > q$, la probabilité est $2q$, tandis qu'elle est $2p$ dans le cas $p < q$.

25. La longueur moyenne $\bar{y}$ du trajet jusqu'à l'origine est donnée par

$$\bar{y} = -[\partial U^*/\partial z]_{z=0,\ t=1}.$$

Lorsque $x > 0, p < q$,

$$\bar{y} = (\mu x + 2p)/\{\mu(q - p)\}, \tag{70}$$

autrement $\bar{y}$ est infini. Lorsque $x = 0$, $\bar{y}$ est toujours infini.

26. On peut remarquer que $U(x, y, 1)$ est la densité de probabilité pour que la longueur du premiei passage à l'origine soit y ($y > x$) et il y a une concentration de probabilité pour $y = x$ donnée par $qe^{-\mu px}$. La distribution possède alors une discontinuité au point $y = x$.

Août 1964.