

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MICHEL DEPAIX

## Étude des distributions de certains processus de marche au hasard dans l'espace $Z^n$ limité par des barrières

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 1, n° 4 (1964-1965), p. 311-439

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1965\\_\\_1\\_4\\_311\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1965__1_4_311_0)

© Gauthier-Villars, 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Étude des distributions de certains processus de marche au hasard dans l'espace $Z^n$ limité par des barrières

par

Michel DEPAIX  
(Faculté des Sciences de Nancy).

---

SOMMAIRE. — On étudie dans cet article des chaînes de Markov homogènes dans le temps, définies sur un espace discret fini. On donne les expressions exactes des probabilités  $p_{M,M'}^{(i)}$  :

1° dans le cas d'un processus à une dimension avec 2 barrières absorbantes et une distribution de transition très générale

2° dans le cas d'un processus à  $n$  dimensions avec  $2n$  barrières semi-absorbantes, la distribution de transition étant du type :

$$p_{M,M'} = 0 \quad \text{si} \quad \| MM' \| > 1.$$

On en déduit quelques conséquences concernant les temps de premier passage, les temps de premier retour, ainsi qu'une expression exacte de la loi de distribution de l'écart entre deux distributions empiriques extraites d'une même loi continue.

SUMMARY. — This article is concerned with time-homogenous Markov chains defined on a limited, discrete space. The exact expressions of the probabilities  $p_{M,M'}^{(i)}$  are given:

1° in the case of a one-dimensional processus with two absorbing barriers and a very general transition distribution;

2° in the case of an  $n$ -dimensional processus with  $2n$  semi-absorbing barriers and such a transition distribution that  $p_{M,M'} = 0$  if  $\| MM' \| > 1$ .

Some consequences concerning the first-passage time and the return time are deduced, and an exact distribution of the maximum deviation between two empirical distributions, issued from the same continuous random variable, is given.

---

## CHAPITRE PREMIER

### GÉNÉRALITÉS SUR LES CHAINES DE MARKOV SUR UN ENSEMBLE FINI

#### 1. Définitions et notations.

Considérons un ensemble fini  $\varepsilon$  de  $N$  éléments; chacun de ces éléments sera appelé « point » ou « état ». Il est toujours possible d'envisager une bijection de  $\varepsilon$  sur un ensemble de  $N$  points de  $Z^n$  de sorte que chaque élément de  $\varepsilon$  soit repéré par l'ensemble  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  des coordonnées de son image dans  $Z^n$  ( $Z$  désigne ici l'ensemble des entiers positifs, négatifs ou nul). Dans toute l'étude l'ensemble  $\varepsilon$  sera identifié à un sous-ensemble fini de  $Z^n$ .

On définit sur  $\varepsilon$  une chaîne de Markov homogène dans le temps par la donnée :

a) d'une répartition initiale de probabilité sur  $\varepsilon$  :

$$p_x = \text{Pr} [\text{état } X \text{ à l'instant } 0]$$

avec :

$$\sum_{x \in \varepsilon} p_x = 1 ;$$

b) de probabilités de passage :

$$p_{x,y} = \text{Pr} [\text{passage de } X \text{ en } Y \text{ entre les instants } t_i \text{ et } t_{i+1}]$$

avec :

$$\sum_{y \in \varepsilon} p_{x,y} = 1.$$

Les instants  $t_i$  font partie d'un ensemble dénombrable  $T$ ; à l'aide d'un changement d'horloge on peut identifier  $T$  à l'ensemble  $N$  des entiers posi-

tifs ou nuls. Nous supposons dans la suite que cette identification a été faite.

La matrice carrée de type  $(N, N)$  des probabilités de passage sera notée  $P$ . On notera d'autre part :

$p_{x,y}^{(t)}$  la probabilité que le processus soit en l'état  $Y$  à l'instant  $t$ , conditionnelle au fait qu'il est en l'état  $X$  à l'instant  $0$ .

$p_x^{(t)}$  la probabilité que le processus soit en l'état  $X$  à l'instant  $t$ .

Ces différentes probabilités sont liées par les relations (Chapman-Kolmogorov) :

$$I.1.1 \quad p_x^{(t+1)} = \sum_{Y \in \mathcal{E}} p_y^{(t)} \cdot p_{y,x} \quad \forall X \in \mathcal{E}$$

$$I.1.2 \quad p_{x,y}^{(t+1)} = \sum_{Z \in \mathcal{E}} p_{x,z}^{(t)} \cdot p_{z,y} \quad \forall X, Y \in \mathcal{E}.$$

Ces relations s'interprètent aisément dès que l'on introduit les matrices  $P$ ,

$$\Pi_0 = (p_0, p_1, \dots, p_{N-1}) \quad \text{et} \quad \Pi_t = (p_0^{(t)}, p_1^{(t)}, \dots, p_{N-1}^{(t)}).$$

En effet, on a :

$$\Pi_{t+1} = \Pi_t \cdot P$$

d'où, en itérant :

$$I.1.3 \quad \Pi_t = \Pi_0 \cdot P^t.$$

Le vecteur  $\Pi_t$  des probabilités d'être dans un état donné à l'instant  $t$  ne dépend donc que de la puissance  $t^{\text{ième}}$  de la matrice des probabilités de passage; résultat extrêmement simple théoriquement.

Malheureusement, il est très difficile, en général, d'obtenir l'expression des différents termes de la matrice  $P^t$  et les différentes méthodes utilisées pour obtenir la matrice  $\Pi_t$  ne sont que des méthodes plus ou moins astucieuses permettant de contourner cet obstacle.

Dans toute notre étude la distribution initiale sera celle d'une masse 1 placée en un point  $X$  de  $\mathcal{E}$ , de sorte que

$$\Pi_0 = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$$

et que  $\Pi_t$  sera formé des probabilités  $p_{x,y}^{(t)}$ ,  $Y \in \mathcal{E}$  et coïncidera avec une ligne de la matrice  $P$ .

D'autre part, l'ensemble des états  $\mathcal{E}$  sera décomposé en

a) un ensemble (F) de points frontières ou points absorbants défini par :

$$\begin{aligned} p_{x,x} &= 1 & \forall X \in (F) \\ p_{x,y} &= 0 & \forall Y \in \mathcal{E}, Y \neq X ; \end{aligned}$$

b) un ensemble (E) de points « réguliers » défini par :

$$(E) = \mathcal{E} - (F).$$

Nous supposons de plus que pour presque tous les points réguliers la chaîne de Markov est à accroissements indépendants, c'est-à-dire que les probabilités de passage sont de la forme :

$$I.1.4 \quad p_{x,y} = p_{y-x} = p_H$$

avec :

$$\sum_H p_H = 1.$$

## 2. Quelques méthodes générales.

a) Supposons d'abord que l'ensemble des points de  $\mathcal{E}$  est régulier et introduisons une fonction génératrice des probabilités  $p_x^{(t)}$  au temps  $t$  :

$$I.2.1 \quad G^{(t)} = \sum_{x \in \mathcal{E}} p_x^{(t)} s^x.$$

On peut écrire :

$$G^{(t+1)} = \sum_{x \in \mathcal{E}} p_x^{(t+1)} s^x = \sum_{x \in \mathcal{E}} \left( \sum_{y \in \mathcal{E}} p_y^{(t)} \cdot p_{y,x} \right) s^x = \sum_{y \in \mathcal{E}} p_y^{(t)} s^y \left( \sum_{x \in \mathcal{E}} p_{x-y} s^{x-y} \right).$$

Posons  $A(s) = \sum_H p_H s^H$ , fonction génératrice des probabilités de passage.

Alors :

$$I.2.2 \quad G^{(t+1)} = A(s) \cdot G^{(t)}$$

et, en itérant :

$$G^{(t)} = [A(s)]^t G^{(0)}$$

où  $G^{(0)}$  désigne la fonction génératrice de la distribution de probabilité au temps 0. Supposons maintenant que les états 0 et  $N - 1$  sont absorbants

et que  $A(s) = p_{-1}s^{-1} + p_{+1}s$ . Il est alors possible par des considérations de symétries de déterminer une nouvelle fonction  $G^{(0)}$  telle que

$$G^{(t)} = [A(s)]^t G^{(0)}$$

représente encore la fonction génératrice des probabilités  $p_x^{(t)}$  : cette méthode a été employée par M. Tortrat [1].

Il ne semble malheureusement pas qu'elle soit applicable au cas où la fonction  $A(s)$  est plus compliquée.

b) Supposons maintenant qu'il existe un ensemble absorbant (F);  $p_x^{(t)}$  désignera la probabilité de l'état X à l'instant t sans qu'il y ait eu absorption. Envisageons alors un processus de même type mais où tous les points de  $\mathcal{E}$  seraient des points réguliers et soit  $q_x^{(t)}$  la probabilité de l'état X à l'instant t.

On a alors la relation :

$$I.2.3 \quad q_x^{(t)} = p_x^{(t)}\delta(X) + \sum_{Y \in (F)} \sum_{\tau=0}^t p_Y^{(\tau)} q_{x-Y}^{(t-\tau)}$$

où :

$$\begin{aligned} \delta(X) &= 0 & \text{si } X \in (F) \\ &= 1 & \text{si } X \in (F). \end{aligned}$$

Introduisons les fonctions génératrices dans le temps des probabilités

$p_x^{(t)}$  et  $q_x^{(t)}$  :

$$\mathcal{F}_x(s) = \sum_{t=0}^{\infty} p_x^{(t)} s^t$$

$$\mathcal{Q}_x(s) = \sum_{t=0}^{\infty} q_x^{(t)} s^t.$$

Les séries écrites sont absolument convergentes pour  $|s| < 1$  car :

$$p_x^{(t)} < 1 \text{ et } q_x^{(t)} < 1.$$

La relation I.2.3 ci-dessus peut être transformée de façon à faire apparaître les fonctions  $\mathcal{F}_x(s)$ ,  $\varphi_x(s)$  : multiplions les deux membres par  $s^t$  et sommions sur t de 0 à l'infini.

$$I.2.4 \quad \mathcal{Q}_x(s) = \mathcal{F}_x(s)\delta(X) + \sum_{Y \in (F)} \mathcal{F}_Y(s)\mathcal{Q}_{x-Y}(s).$$

Si l'on suppose connues les fonctions  $Q_x(s)$ , cette égalité permet de déterminer les fonctions  $\mathcal{F}_x(s)$  en deux étapes :

\* on écrit la relation pour tous les points  $X \in (F)$ , ce qui permet de déterminer les fonctions  $\mathcal{F}_Y(s)$ ,  $Y \in (F)$ ;

\*\* la relation donne ensuite  $\mathcal{F}_x(s)$  pour  $X \in (E)$ .

Cette méthode a été, en particulier, utilisée par Good [I] pour déterminer des moyennes et des variances d'instants de premier passage en un point donné.

Cette méthode semble excellente lorsque le nombre de points absorbants est petit, mais devient rapidement inutilisable lorsque ce nombre est grand : par exemple lors du cheminement aléatoire à  $n$  dimensions avec  $2n$  barrières semi-absorbantes que nous étudierons dans un chapitre ultérieur, cette méthode est inutilisable.

c) La relation I.1.1, dans le cas d'une chaîne à accroissements indépendants, s'écrit :

$$I.2.5 \quad p_x^{(t)} = \sum_{Y \in (E)} p_Y^{(t-1)} p_{X-Y} \quad X \in \delta.$$

Cette relation peut être interprétée comme une équation aux différences finies en  $t$  et en  $X, Y$  et être résolue par les méthodes propres aux équations aux différences finies.

Cette méthode a été utilisée, en particulier, par W. H. MacCréa et J. F. W. Whipple [I], par C. Jordan [I].

C'est cette méthode que nous emploierons principalement.

### 3. Types de chaînes de Markov étudiées dans cette thèse.

Nous distinguerons deux cas selon que  $\delta$  sera une partie de  $Z$  ou une partie de  $Z^n$ .

a)  $\delta$  est une partie finie de  $Z$ . Nous envisagerons un processus dont la fonction génératrice des probabilités de passage est

$$G(s) = \sum_{h=-n}^{+m} p_h s^h$$

$m$  et  $n$  sont deux entiers positifs ou nuls donnés. L'ensemble  $(E)$  sera constitué par le sous-ensemble de  $Z : \{-a, -a+1, \dots, b\}$  et l'ensemble  $(F)$  constituera un ensemble de deux barrières absorbantes épaisses :

$$F = \{-a-n, \dots, -a-1\} \cup \{b+1, \dots, b+m\}.$$

Cette étude comportera comme cas particulier le problème de la ruine d'un joueur :  $G(s) = p_{-1}s^{-1} + ps$ .

b)  $\mathcal{E}$  est une partie finie de  $Z^n$ .

Nous n'étudierons dans ce cas qu'une extension du processus envisagé dans le problème de la ruine d'un joueur :

l'ensemble  $\mathcal{E}$  sera le produit cartésien des ensembles  $(\mathcal{E}_i)$  de  $Z$  :

$$(\mathcal{E}_i) = \{ -a_i - 1, \dots, b_i + 1 \} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

l'ensemble (E) sera le produit cartésien des ensembles  $(E_i)$  de  $Z$  :

$$(E_i) = \{ -a_i, \dots, b_i \} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

et les probabilités de passage seront :

$$\left. \begin{array}{l} p_i = p_{x,y} = p_{y-x} \text{ avec } Y - X = \{ \delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \dots, \delta_{i,n} \} \\ q_i = p_{x,y} = p_{y-x} \text{ avec } Y - X = \{ -\delta_{i,1}, -\delta_{i,2}, \dots, -\delta_{i,n} \} \end{array} \right\} \text{ pour } X \in (E)$$

( $\delta_{i,j}$  est le symbole de Kronecker).

L'ensemble (F) sera soit absorbant, soit semi-absorbant, soit réfléchissant.

Dans tous les cas l'ensemble des états atteints successivement par le processus pourra être interprété comme une trajectoire d'une particule partant à l'instant 0 d'un état  $X_0$  (que nous prendrons comme origine dans  $\mathcal{E}$ ) et pouvant passer, entre les instants  $t$  et  $t + 1$ , de l'état  $X$  à l'état  $Y$  avec une probabilité  $p_{x,y}$ .

L'étude faite portera principalement sur la détermination des probabilités  $p_{x,y}^{(t)}$ , sur l'étude de l'absorption par les barrières absorbantes et sur quelques propriétés des temps de premier passage en un point donné.

## CHAPITRE II

### ÉTUDE D'UN CHEMINEMENT ALÉATOIRE A UNE DIMENSION

Soient  $a, b, m, n$  quatre entiers positifs et soient (E) et (F) les ensembles d'entiers relatifs :



Une chaîne de Markov homogène (dans l'espace et dans le temps) est définie sur l'ensemble  $(E) \cup (F)$  par les probabilités de passage :

$$\begin{aligned}
 p_{i,j} = p_{j-i} = p_h & \quad \text{pour} \quad \begin{cases} i \in (E) \\ h \in (F) \{ -n, n+1, \dots, 0, \dots, m \} \end{cases} \\
 p_{i,j} = 0 & \quad \text{pour} \quad i \in (F), j \neq i \\
 p_{i,i} = 1 & \quad \text{pour} \quad i \in (F)
 \end{aligned}$$

et les probabilités initiales  $p_i$  pour  $i \in (E) \cup (F)$ .

Cette chaîne est associée au cheminement aléatoire suivant : une particule part d'un point dont l'abscisse  $i$  appartient à l'ensemble  $(E) \cup (F)$  à l'instant zéro et entre les instants  $t, t+1$ , a une probabilité  $p_{i,j}$  de passer du point d'abscisse  $i$  au point d'abscisse  $j$ .

Pour tout  $i \in (E)$  la particule a une probabilité positive de passer du point de l'abscisse  $i$  en un autre point d'abscisse  $j$  de  $(E)$ .

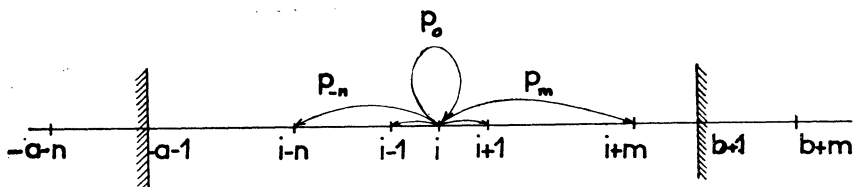


FIG. 1.

Pour tout  $i \in (F)$  la particule a une probabilité 1 d'y rester :  $(F)$  est l'ensemble des états absorbants de la chaîne. Dès que la particule atteint l'un des points dont l'abscisse appartient à  $(F)$ , le mouvement est terminé; ceci se produit dès que la particule atteint ou dépasse les points d'abscisses  $b+1$  ou  $-a-1$ .

Le comportement asymptotique d'une telle chaîne est connu :

\*  $\forall i, j \in (E)$  les probabilités  $p_{i,j}^{(t)}$  tendent vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infini, plus précisément il existe des nombres  $\alpha$  et  $\beta$  ( $\beta < 1$ ) tels que  $p_{i,j}^{(t)} < \alpha, \beta^t$  dès que  $t$  est assez grand;

\*\* il y a une probabilité 1 que le cheminement se termine en un point dont l'abscisse appartient à  $(F)$ .

La répartition à un instant donné, facile à déterminer dans le cas particulier  $n = m = 1$ , est beaucoup plus difficile à expliciter dans le cas général. Kemperman [1] en a donné récemment une expression. Nous nous proposons ici d'en donner une expression explicite, en utilisant une méthode générale de résolution d'une équation aux différences finies.

**1. Explicitation des équations  
à l'aide d'une fonction génératrice.**

Dans toute la suite de cet exposé, nous supposons que la chaîne de Markov est définie par les probabilités initiales :

$$\begin{cases} p_i = 0 & \forall i \neq 0 \\ p_0 = 1 \end{cases}$$

et les probabilités de passage :

$$\begin{cases} p_{i,j} = p_{j-i} = p_h & \begin{cases} i \in (E) \\ h \in \{-n, \dots, -1, 0, 1, \dots, m\} \end{cases} \\ p_{i,j} = 0 & \forall j \neq i \quad \text{pour } i \in (F) \\ = 1 & j = i. \end{cases}$$

Il s'agira donc d'une chaîne associée à un cheminement aléatoire du type exposé ci-dessus, la particule envisagée étant à l'instant initial à l'origine des abscisses.

Nous noterons  $p_{0,x}^{(t)}$  la probabilité que la particule soit au point d'abscisse  $x \in (E)$  à l'instant  $t$ , donc nécessairement sans qu'aucune absorption ne soit arrivée aux instants  $\tau$  avec  $0 \leq \tau \leq t$ .

Soit  $F(x, s)$  la fonction génératrice des probabilités  $p_{0,x}^{(t)}$  dans le temps :

$$F(x, s) = \sum_{t=0}^{\infty} p_{0,x}^{(t)} \cdot s^t.$$

Cette fonction de la variable complexe  $s$  est définie dans le cercle  $|s| < 1$  : la série  $\sum_t p_{0,x}^{(t)} s^t$  est absolument convergente pour  $|s| < 1$  car chaque coefficient  $p_{0,x}^{(t)}$  est majoré par 1.

Les probabilités  $p_{0,x}^{(t)}$  ( $x \in (E)$ ) sont définies par le système récurrentiel suivant :

II.1.1 
$$p_{0,x}^{(t+1)} = \sum_{h=-n}^{h=m} p_h \cdot p_{0,x-h}^{(t)} \quad \text{si } -a + m \leq x \leq b - n$$
  
(on suppose  $m + n \leq a + b$ )

II.1.2 
$$p_{0,x}^{(t+1)} = \sum_{h=-n}^{h=x+a} p_h \cdot p_{0,x-h}^{(t)} \quad \text{si } -a \leq x \leq -a + m - 1$$

$$\text{II.1.3} \quad p_{0,x}^{(t+1)} = \sum_{h=x-b}^{h=m} p_h \cdot p_{0,x-h}^{(t)} \quad \text{si } b-n+1 \leq x \leq b$$

$$\text{II.1.4} \quad \begin{cases} p_{0,x}^{(0)} = 0 & \text{quel que soit } x \text{ de } (E) = \{-a, \dots, b\} \text{ non nul} \\ p_{0,x}^{(0)} = 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

système obtenu à partir des relations de Chapman-Kolmogorov, appliquées à l'ensemble (E).

Cet ensemble d'équations permet d'obtenir la distribution de probabilité à chaque instant  $t$  pourvu que l'on ait la patience d'effectuer toutes les itérations. Un tel travail peut du reste se concevoir sur calculatrice électronique (il équivaut à l'itération de la matrice P des probabilités de passage). Nous nous proposons ici d'obtenir une expression formelle des probabilités  $p_{0,x}^{(t)}$  en transformant les équations 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 de façon à prendre pour nouvelles fonctions inconnues les fonctions génératrices  $F(x, s)$ ,  $x \in (E)$ , des probabilités  $p_{0,x}^{(t)}$ .

Multiplions les deux membres de chaque équation 1.1, 1.2, 1.3 par  $s^t$  et sommons sur  $t$  de 0 à l'infini :

$$\text{II.1.5} \quad \sum_{t=0}^{\infty} p_{0,x}^{(t+1)} s^t = \sum_{t=0}^{\infty} s^t \left( \sum_{h=-n}^{h=m} p_h \cdot p_{0,x-h}^{(t)} \right), \quad -a+m \leq x \leq b-n$$

$$\text{II.1.6} \quad \sum_{t=0}^{\infty} p_{0,x}^{(t+1)} s^t = \sum_{t=0}^{\infty} s^t \left( \sum_{h=-n}^{h=x+a} p_h \cdot p_{0,x-h}^{(t)} \right), \quad -a \leq x \leq -a+m-1$$

$$\text{II.1.7} \quad \sum_{t=0}^{\infty} p_{0,x}^{(t+1)} s^t = \sum_{t=0}^{\infty} s^t \left( \sum_{h=x-b}^{h=m} p_h \cdot p_{0,x-h}^{(t)} \right), \quad b-n+1 \leq x \leq b.$$

Chaque série étant absolument convergente dans le cercle  $|s| < 1$ , on peut permuter les sommations, d'où :

$$\text{II.1.8} \quad \left[ \frac{1}{s} F(x, s) - p_{0,x}^{(0)} \right] = \sum_{h=-n}^{h=m} p_h \cdot F(x-h, s), \quad -a+m \leq x \leq b-n$$

$$\text{II.1.9} \quad \left[ \frac{1}{s} F(x, s) - p_{0,x}^{(0)} \right] = \sum_{h=-n}^{h=x+a} p_h \cdot F(x-h, s), \quad -a \leq x \leq -a+m-1$$

$$\text{II.1.10} \quad \left[ \frac{1}{s} F(x, s) - p_{0,x}^{(0)} \right] = \sum_{h=x-b}^m p_h \cdot F(x-h, s), \quad b-n+1 \leq x \leq b.$$

On obtient ainsi un système de  $a + b + 1$  équations linéaires permettant de déterminer les  $a + b + 1$  fonctions inconnues  $F(x, s)$ ,  $x \in (E)$ . M. Fréchet [1], utilisant cette méthode, a ainsi donné une expression formelle des probabilités  $p_{0,x}^{(t)}$  que nous allons rappeler ici maintenant.

Écrivons ce système sous la forme :

$$\text{II.1.11} \quad \sum_{h=x+a}^{h=-n} \left( p_h - \delta_{0,h} \frac{1}{s} \right) F(x-h, s) = -\frac{1}{s} p_{0,x}^{(0)}, \quad -a \leq x \leq -a+m-1$$

$$\text{II.1.12} \quad \sum_{h=+m}^{h=-n} \left( p_h - \delta_{0,h} \frac{1}{s} \right) F(x-h, s) = -\frac{1}{s} p_{0,x}^{(0)}, \quad -a+m \leq x \leq b-n$$

$$\text{II.1.13} \quad \sum_{h=m}^{h=x-b} \left( p_h - \delta_{0,h} \frac{1}{s} \right) F(x-h, s) = -\frac{1}{s} p_{0,x}^{(0)}, \quad b-n+1 \leq x \leq b$$

où  $\delta_{0,h}$  vaut 0 si  $h$  est différent de 0 et vaut 1 si  $h$  vaut 0.

Le déterminant de ce système présente une forme particulière :

$$\text{II.1.14} \quad D\left(\frac{1}{s}\right) = \begin{array}{ccccccc} p_0 - \frac{1}{s} & & p_{-1} \dots \dots p_{-n} & & 0 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_m & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & p_{-n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & p_{-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & 0 & & p_m \dots \dots p_1 & & p_0 - \frac{1}{s} \end{array}$$

Il peut être développé sous la forme d'un polynôme en  $\frac{1}{s}$  de la façon suivante :

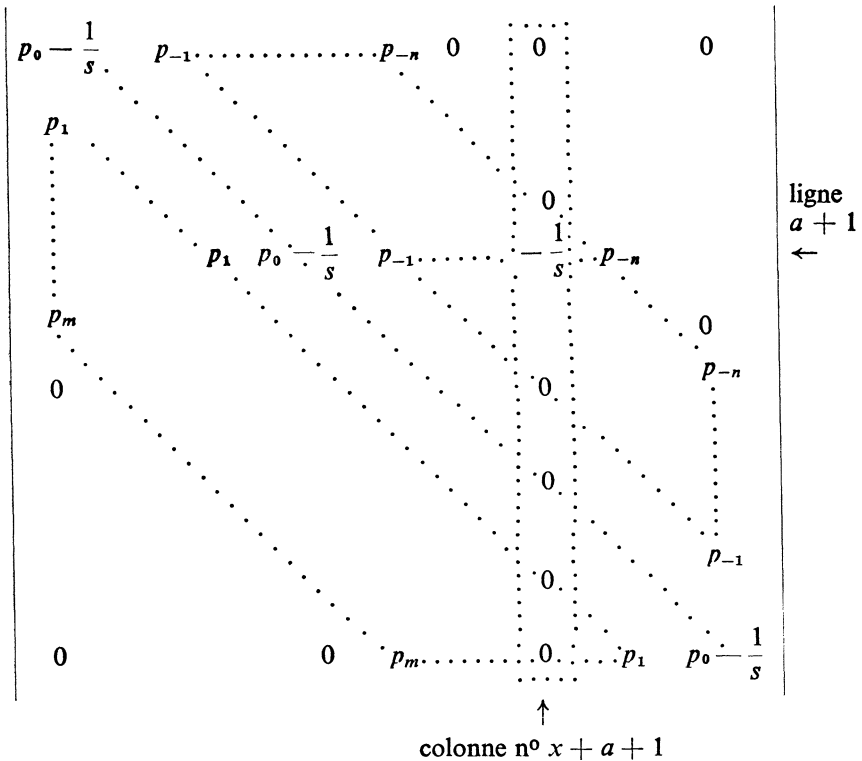
$$\text{II.1.15} \quad D\left(\frac{1}{s}\right) = D(0) + \sum_{\alpha=1}^{a+b+1} (-1)^\alpha \left(\frac{1}{s}\right)^\alpha \Sigma \Delta^\alpha$$

où  $\Delta_\alpha$  désigne un déterminant d'ordre  $a + b + 1 - \alpha$  obtenu à partir de  $D(0)$  en supprimant les lignes et les colonnes relatives à  $\alpha$  de ses termes diagonaux; la sommation  $\Sigma\Delta_\alpha$  est une sommation sur les  $C_{a+b+1}^\alpha$  déterminants  $\Delta_\alpha$  pouvant être obtenus de la façon indiquée ci-dessus.

Pour simplifier l'écriture nous poserons  $a_\alpha = \Sigma\Delta_\alpha$ ; ainsi :

$$\text{II.1.16} \quad D\left(\frac{1}{s}\right) = D(0) + \sum_{\alpha=1}^{a+b+1} (-1)^\alpha a_\alpha \left(\frac{1}{s}\right)^\alpha.$$

Toute fonction  $F(x, s)$  est égale au quotient par  $D\left(\frac{1}{s}\right)$  du déterminant (dans l'hypothèse d'une masse initiale 1 placée au point d'abscisse 0) :



déterminant que l'on peut écrire  $-\frac{1}{s} \cdot \Delta_{a+1, x+a+1}$ , où  $\Delta_{a+1, x+a+1}$  est le mineur du terme de la  $a + 1^{\text{eme}}$  ligne,  $x + a + 1^{\text{eme}}$  colonne dans le

déterminant  $D\left(\frac{1}{s}\right)$ . Ce mineur est un polynôme en  $\frac{1}{s}$  de degré  $a + b - 1$  ; on peut ainsi écrire :

II.1.27  $F(x, s)$

$$= \frac{-\frac{1}{s} \cdot \sum_{\beta=0}^{a+b-1} b_{\beta} \left(\frac{1}{s}\right)^{\beta}}{D(0) + \sum_{\alpha=1}^{a+b+1} (-1)^{\alpha} a_{\alpha} \left(\frac{1}{s}\right)^{\alpha}} = \frac{-s \cdot \sum_{\beta=0}^{a+b-1} b_{\beta} s^{a+b-1-\beta}}{D(0)s^{a+b+1} + \sum_{\alpha=1}^{a+b+1} (-1)^{\alpha} a_{\alpha} s^{a+b+1-\alpha}}$$

Les probabilités  $p_{0,x}^{(t)}$  peuvent être obtenues en développant  $F(x, s)$  en série entière de variable  $s$ . Ce développement peut être obtenu soit en effectuant le quotient selon les puissances croissantes de  $s$  du polynôme numérateur de  $F(x, s)$  par le polynôme dénominateur, soit en cherchant une décomposition de la fraction rationnelle  $F(x, s)$  en éléments simples. Cette seconde méthode permet d'obtenir assez facilement une expression de  $p_{0,x}^{(t)}$  en fonction des racines d'un certain polynôme.

Supposons d'une part  $D(0) \neq 0$  et d'autre part que le dénominateur de  $F(x, s)$ , soit  $D(0)s^{a+b+1} + \sum_{\alpha=1}^{a+b+1} (-1)^{\alpha} a_{\alpha} s^{a+b+1-\alpha}$ , possède  $a + b + 1$  racines distinctes (Ces racines ne sont autres que les inverses des valeurs propres de la matrice dont le déterminant est  $D(0)$ ).

Ce dénominateur peut alors être écrit  $D(0) (s - \rho_1) \dots (s - \rho_{a+b+1})$  en désignant par  $\rho_i (i = 1, 2, \dots, a + b + 1)$  les racines. Le degré du numérateur de  $F(x, s)$  étant  $a + b$ , inférieur au degré du dénominateur,  $F(x, s)$  est décomposable en éléments simples :

II.1.18  $F(x, s) = \sum_{i=1}^{a+b+1} \frac{A_i}{s - \rho_i}$  où  $A_i = \frac{-\rho_i \sum_{\beta=0}^{a+b-1} b_{\beta} (\rho_i)^{a+b-1-\beta}}{D(0) \prod_{j \neq i} (\rho_i - \rho_j)}$ .

Pour  $s$  inférieur en module au minimum  $m$  des modules des  $\rho_i$ , on peut développer :

$$\frac{1}{s - \rho_i} = -\frac{1}{\rho_i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{s}{\rho_i}} = -\frac{1}{\rho_i} \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{s}{\rho_i}\right)^t$$

d'où :

$$F(x, s) = \sum_{i=1}^{a+b+1} - \frac{A_i}{\rho_i} \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{s}{\rho_i}\right)^t.$$

Chaque série étant absolument convergente pour  $|s| < m$ , on peut intervertir l'ordre des sommations :

$$\text{II.1.19} \quad F(x, s) = \sum_{t=0}^{\infty} s^t \sum_{i=1}^{a+b+1} - \frac{A_i}{\rho_i^{t+1}}$$

d'où :

$$\text{II.1.20} \quad p_{0,x}^{(t)} = \sum_{i=1}^{a+b+1} - \frac{A_i}{\rho_i^{t+1}}.$$

L'expression des probabilités  $p_{0,x}^{(t)}$  dépend ainsi de la connaissance des racines d'une équation de degré  $a + b + 1$  en général. Cette expression est intéressante pour l'étude asymptotique du cas général, mais ne peut être utilisée pour l'étude de  $p_{0,x}^{(t)}$  pour  $t$  fini.

La solution que nous allons présenter maintenant, formellement aussi lourde dans le cas général, a l'avantage, d'une part, de dépendre des racines d'un polynôme de degré  $m + n$  (donc de degré inférieur à  $a + b + 1$ ), d'autre part de conduire à des formules explicites en  $s$ .

## 2. Résolution d'une équation aux différences finies.

Revenons au système des équations 1.8, 1.9, 1.10 :

$$\text{II.2.1} \quad \frac{1}{s} F(x, s) - \sum_{h=-n}^m p_h \cdot F(x-h, s) = \frac{1}{s} p_{0,x}^{(0)} \quad -a + m \leq x \leq b - n.$$

$$\text{II.2.2} \quad \frac{1}{s} F(x, s) - \sum_{h=-n}^{x+a} p_h \cdot F(x-h, s) = \frac{1}{s} p_{0,x}^{(0)} \quad -a \leq x \leq -a + m - 1.$$

$$\text{II.2.3} \quad \frac{1}{s} F(x, s) - \sum_{h=x-b}^m p_h \cdot F(x-h, s) = \frac{1}{s} p_{0,x}^{(0)} \quad b - n + 1 \leq x \leq b.$$

Ce système est équivalent à une équation aux différences finies accompagnée de conditions aux limites. Soit, en effet, une fonction  $F^*(x, s)$  définie

sur l'ensemble  $(E) \cup (F) = \{-a - m, \dots, -a, \dots, 0, \dots, b, \dots, b + n\}$ , vérifiant d'une part II.2.4,  $F^*(x, s) = 0$  pour  $x \in (F)$  et d'autre part :

$$\text{II.2.5} \quad \frac{1}{s} F^*(x, s) - \sum_{h=-n}^{h=m} p_h \cdot F^*(x - h, s) = \frac{1}{s} p_{0,x}^{(0)} \quad \text{pour } x \in (E).$$

Il est évident que  $F^*(x, s)$  satisfait à l'équation II.2.1. Afin d'établir que  $F^*(x, s)$  satisfait à l'équation II.2.2, il suffit de remarquer que pour  $x$  compris entre  $-a$  et  $-a + m - 1$ , les différents termes de la somme :

$$\sum_{h=x+a+1}^{h=m} p_h \cdot F^*(x - h, s)$$

sont nuls (car  $x - h \leq -a - 1$ ); donc l'équation aux différences finies II.2.5 se réduit à l'équation II.2.2 pour  $-a \leq x \leq -a + m - 1$ .

On établit de la même façon que  $F^*(x, s)$  satisfait à l'équation II.2.3. Réciproquement, la fonction  $F(x, s)$ , solution du système II.2.1, II.2.2, II.2.3 permet de construire une fonction  $F^*(x, s)$  :

$$\begin{aligned} \text{II.2.6} \quad F^*(x, s) &= \{0, 0, \dots, 0, F(-a, s), \dots, F(b, s), 0, \dots, 0\} \\ \text{pour } x &= \{-a - m, \dots, -a - 1, -a, \dots, b, b + 1, \dots, b + n\} \\ &= (E) \cup (F) \end{aligned}$$

qui satisfait à la fois aux conditions II.2.4 et à l'équation II.2.5. On a ainsi établi le

LEMME II.1. — *Le système d'équations II.2.1, II.2.2, II.2.3 est équivalent à l'équation aux différences finies :*

$$\begin{aligned} \text{2.5} \quad \frac{1}{s} F^*(x, s) - \sum_{h=-n}^{h=m} p_h F^*(x - h, s) &= \frac{1}{s} p_{0,x}^{(0)} \\ &\times \in (E) = \{-a, -a + 1, \dots, 0, \dots, b\} \end{aligned}$$

*complétée par les conditions aux limites :*

$$\text{2.4} \quad F^*(x, s) = 0 \quad \text{pour } x \in (F).$$

L'unicité de la solution de l'ensemble II.2.4, II.2.5 est ainsi liée à l'unicité de la solution de l'ensemble II.2.1, II.2.2, II.2.3. Or, cette dernière est assurée dès que le système II.2.1, II.2.2, II.2.3 est un système de Cramer, c'est-à-dire dès que son déterminant principal est non nul.





en posant :

$$\text{II.2.9} \quad \left\{ \begin{array}{l} q_h = p_h \quad \text{pour tout } h \text{ non nul} \\ q_0 = p_0 - \frac{1}{s}. \end{array} \right.$$

Le changement de variable  $x - m = y$  donne :

$$\text{II.2.10} \quad \sum_{h=-n}^{h=m} q_h F^*(y + m - h, s) = -\frac{1}{s} p_{0,m+y}^{(0)} \quad -a - m \leq y \leq b - m$$

ou enfin :

$$\text{II.2.11} \quad \sum_{k=0}^{k=m+n} q_{m-k} F^*(y + k, s) = V(y) \quad -a - m \leq y \leq b - m$$

C'est cette forme II.2.11 qui sera utilisée dans la suite de ce paragraphe. L'équation homogène associée est :

$$\text{II.2.12} \quad \sum_{k=0}^{k=m+n} q_{m-k} F^*(y + k, s) = 0.$$

On sait (Jordan [I]) que si l'on connaît  $m + n$  solution  $u_i$  linéairement indépendantes de II.2.12, la solution générale en est :

$$F^*(y, s) = \sum_{i=1}^{m+n} A_i u_i,$$

les  $A_i$  formant  $m + n$  constantes arbitraires.

Cherchons une solution sous la forme  $u(y) = r^y$ . La substitution de  $r^x$  à  $F^*(x, s)$  dans l'équation II.2.12 donne :

$$\text{II.2.13} \quad \sum_{k=0}^{k=m+n} q_{m-k} r^{y+k} = 0$$

soit, après simplification par  $r_k$  :

$$\text{II.1.14} \quad \sum_{k=0}^{k=m+n} q_{m-k} r^k = 0.$$

Cette équation algébrique, de degré  $m + n$ , a en général  $m + n$  racines distinctes que nous noterons  $r_i \ i \in \{1, 2, \dots, m + n\}$ . Les fonctions  $u_i(y) = r_i^y$  sont linéairement indépendantes lorsque les racines sont distinctes, ce qui

est toujours réalisable : en effet, le résultant des deux polynômes :

$$P(z) = \sum_{k=0}^{k=m+n} q_{m-k} z^k \quad \text{et} \quad P'(z) = \sum_{k=1}^{k=m+n} q_{m-k} \cdot k z^{k-1}$$

peut être mis sous la forme (Sylvester) :

$$R = \begin{pmatrix} q_{-n} & \dots & \dots & \dots & q_m & 0 & 0 \\ 0 & q_{-n} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & q_{-n} & \dots & \dots & q_m & 0 \\ (m+n)q_{-n} & \dots & \dots & \dots & q_{m-1} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & (m+n)q_{-n} & \dots & \dots & q_{m-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$\left. \begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} \right\} m+n-1 \text{ lignes}$   
 $\left. \begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} \right\} m+n \text{ lignes}$

La condition d'existence d'une racine double de l'équation II.2.14 se traduit par la relation  $R = 0$ , que l'on peut interpréter comme une équation en  $s$  (seuls les termes  $q_0$  des  $m+n$  premières lignes et les termes  $m q_0$  des  $m+n-1$  autres lignes dépendent de  $s$  :  $q_0 = p_0 - \frac{1}{s}$ ) de degré au plus égal à  $2(m+n) - 1$ . Il suffit donc de choisir  $s$  distinct de ces valeurs pour être assuré que les fonctions  $u_i(y) = r_i^y$  sont linéairement indépendantes.

La solution générale de l'équation homogène II.2.12 est donc :

II.2.15 
$$F^*(y, s) = \sum_{i=1}^{m+n} A_i r_i^y$$

les  $A_i$  constituant un ensemble de  $m+n$  fonctions de  $s$  arbitraires.

**B) Recherche d'une solution particulière de l'équation complète.**

L'équation complète II.2.11 :

$$\sum_{k=0}^{k=m+n} q_{m-k} F^*(y+k, s) = V(y) \quad -a-m \leq y \leq b-m$$

peut être écrite symboliquement :

$$\text{II.2.16} \quad \sum_{k=0}^{k=m+n} q_{m-k} E^k F^*(y, s) = V(y)$$

(en désignant par  $E$  l'opérateur défini par les égalités :

$$E\varphi(y) = \varphi(y + 1), \quad E^k\varphi = \varphi(y + k))$$

soit encore :

$$\text{II.2.17} \quad \psi(E)F^*(y, s) = V(y)$$

où  $\psi(E)$  désigne l'opérateur défini par :  $\psi(E) = \sum_{k=0}^{k=m+n} q_{m-k} E^k$ .

L'égalité II.2.17 montre que si l'on sait définir l'opérateur  $[\psi(E)]^{-1}$  inverse de  $\psi(E)$ , la solution particulière cherchée s'écrira :

$$\text{II.2.18} \quad F^*(y, l) = [\psi(E)]^{-1}V(y).$$

Pour la définition de  $[\psi(E)]^{-1}$  et la justification des calculs qui vont suivre nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de C. Jordan déjà indiqué.

En tant que polynôme de la variable  $E$ ,  $\psi(E)$  admet pour racines les valeurs  $r_i, i = \{1, 2, \dots, m + n\}$  déjà rencontrées (racines de l'équation II.2.14). Alors la fraction rationnelle  $\frac{1}{\psi(E)}$  de la variable  $E$  peut être décomposée en éléments simples :

$$\text{II.2.19} \quad \frac{1}{\psi(E)} = \frac{1}{q_{-n}} \sum_{i=1}^{i=m+n} \frac{b_i}{E - r_i}.$$

Comme  $\psi(E) = q_{-n}(E - r_1) \dots (E - r_{m+n})$ , on obtient aisément :

$$\text{II.2.20} \quad \frac{1}{b_i} = (r_i - r_1) \dots (r_i - r_{m+n}) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=m+n} (r_i - r_j).$$

Si l'on sait définir l'opérateur  $b_i(E - r_i I)^{-1}$ , où  $I$  désigne l'opérateur unité, on définira l'inverse de  $\psi(E)$  par :

$$\text{II.2.21} \quad [\psi(E)]^{-1} = \frac{q_{-n}}{1} \sum_{i=1}^{i=m+n} b_i(E - r_i I)^{-1}.$$

Or, il est aisé de définir l'opérateur  $(E - r_i I)^{-1}$  :

$$(E - r_i I)^{-1}V(y) = \varphi(y) \leftrightarrow V(y) = (E - r_i I)\varphi(y).$$

Prenons une fonction  $\varphi(y)$  de la forme  $r_i^y \Phi(y)$ ; alors :

$$\begin{aligned} (E - r_i I)\varphi(y) &= (E - r_i I)(r_i^y \Phi(y)) \\ &= r_i^{y+1} \Phi(y+1) - r_i^{y+1} \Phi(y) = r_i^{y+1} [\Phi(y+1) - \Phi(y)] \end{aligned}$$

soit :

$$\text{II.2.22} \quad (E - r_i I)\varphi(y) = r_i^{y+1} \Delta \Phi(y) = V(y).$$

Ainsi la fonction  $\Phi(y)$  est définie par la nouvelle égalité :

$$\text{II.2.23} \quad \Delta \Phi(y) = r_i^{-y-1} V(y)$$

ce qui suppose que  $r_i$ , racine de l'équation II.2.14 n'est pas nulle (mais les probabilités  $p_m$  et  $p_{-n}$  étant supposées non nulles, les quantités  $q_m$  et  $q_{-n}$  ne sont pas nulles : l'équation II.2.14 est effectivement de degré  $m+n$  et n'a aucune racine nulle).

L'égalité II.2.23 permet de déterminer facilement la fonction  $\Phi(y)$  que nous écrivons :

$$\text{II.2.24} \quad \Phi(y) = \Delta^{-1}[r_i^{-y-1} V(y)]$$

et l'on aura ainsi défini l'opérateur  $(E - r_i I)^{-1}$  par la relation :

$$\text{II.2.25} \quad (E - r_i I)^{-1}V(y) = r_i^y \Delta^{-1}[r_i^{-y-1} V(y)].$$

En résumé, la solution particulière de l'équation complète II.2.11 peut être écrite :

$$\text{II.2.26} \quad F^*(y, s) = \frac{1}{q_{-n}} \sum_{i=1}^{i=m+n} b_i r_i^y \Delta^{-1}[r_i^{-y-1} V(y)]$$

$$\text{avec} \quad \frac{1}{b_i} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=m+n} (r_i - r_j).$$

Il ne reste plus qu'à expliciter l'expression  $\Delta^{-1}[r_i^{-y-1} V(y)]$ . Or :

$$\Delta^{-1}f(z) = g(z) \text{ équivaut à } f(z) = \Delta g(z),$$

c'est-à-dire  $f(z) = g(z+1) - g(z)$ .

Écrivons cette égalité pour  $z = -a - m, \dots, y - 1$  :

$$\begin{aligned} f(-a - m) &= g(-a - m + 1) - g(-a - m) \\ f(-a - m + 1) &= g(-a - m + 2) - g(-a - m + 1) \\ &\dots \dots \dots \\ f(y - 1) &= g(y) - g(y - 1) \end{aligned}$$

et sommons membre à membre : 
$$\sum_{z=-a-m}^{z=y-1} f(z) = g(y) - g(-a-m).$$

II.2.27 Soit 
$$\Delta^{-1}f(y) = k + \sum_{z=-a-m}^{y-1} f(z).$$

Appliquons cette formule au cas particulier qui nous intéresse :

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}[r_i^{-y-1}V(y)] &= k + \sum_{z=-a-m}^{y-1} r_i^{-y-1}V(y) \\ &= k - \frac{1}{s} \sum_{z=-a-m}^{y-1} r_i^{-y-1}p_{0,m+y}^{(0)}. \end{aligned}$$

Or : 
$$p_{0,m+y}^{(0)} = 0 \text{ pour } y \neq -m$$
  

$$= 1 \text{ pour } y = -m.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}[r_i^{-y-1}V(y)] &= k_i && \text{si } y - 1 < -m, \text{ soit } y < -m + 1 \\ &= k_i - \frac{1}{s} r_i^{+m-1} && \text{si } y \geq -m + 1. \end{aligned}$$

La solution de l'équation II.2.11 est donc :

II.2.28 
$$F^*(y, s) = \begin{cases} \frac{1}{q-n} \sum_{i=1}^{m+n} k_i b_i r_i^y & \text{si } y < -m + 1 \\ \frac{1}{q-n} \sum_{i=1}^{m+n} k_i b_i r_i^y - \frac{1}{sq-n} \sum_{i=1}^{m+n} b_i r_i^{y+m-1} & \text{si } y \geq -m + 1. \end{cases}$$

On retrouve du reste la solution générale de l'équation homogène II.2.12 :  $\sum_i k_i b_i r_i^y$ , augmentée de la solution particulière cherchée :

II.2.29 
$$F^*(x, s) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -m + 1 \\ -\frac{1}{sq-n} \sum_{i=1}^{m+n} b_i r_i^{x+m-1} & \text{si } x \geq -m + 1 \end{cases}$$

**C) Résolution du système II.2.4 et II.2.5.**

Revenons au système que nous nous proposons de résoudre :

II.2.5 
$$\frac{1}{s} F^*(x, s) - \sum_{h=-n}^{h=m} p_h F^*(x-h, s) = \frac{1}{s} p_{0,x}^{(0)} \quad x \in (E)$$

avec :

II.2.4  $F^*(x, s) = 0$  pour  $x \in (F)$ .

Nous venons de déterminer la solution générale de l'équation II.2.5 :

II.2.30 
$$F^*(x, s) = \sum_{i=1}^{i=m+n} A_i r_i^x - \frac{1}{sq_{-n}} \gamma_{-m+1}(x) \sum_{i=1}^{i=m+n} b_i r_i^{x+m-1}.$$

Dans cette expression nous conviendrons que :

$$\begin{aligned} \gamma_{-m+1}(x) &= 0 & \text{si } x < -m + 1 \\ &= 1 & \text{si } x \geq -m + 1. \end{aligned}$$

Les  $m + n$  constantes  $A_i$  seront déterminés par les  $m + n$  conditions 2.4 :

II.2.31 
$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=m+n} A_i r_i^x &= 0 & x \in \{-a - m, \dots, -a - 1\} \\ \sum_{i=1}^{i=m+n} A_i r_i^x &= \frac{1}{sq_{-n}} \sum_{i=1}^{m+n} b_i r_i^{x+m-1} & x \in \{b + 1, \dots, b + n\}. \end{aligned} \right.$$

La solution de ce système de  $m + n$  équations linéaires peut être écrite au moyen de déterminants :

II.2.32 
$$A_i = \frac{1}{q_{-n}} \begin{vmatrix} r_1^{-a-m} & \dots & r_{i-1}^{-a-m} & 0 & \dots & r_{i+1}^{-a-m} & \dots & r_{m+n}^{-a-m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r_1^{-a-1} & & r_{i-1}^{-a-1} & 0 & & r_{i+1}^{-a-1} & & r_{m+n}^{-a-1} \\ \\ r_1^{b+1} & & r_{i-1}^{b+1} & \frac{1}{s} \sum_j b_j r_j^{b+m} & & r_{i+1}^{b+1} & & r_{m+n}^{b+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r_1^{b+n} & & r_{i-1}^{b+n} & \frac{1}{s} \sum_j b_j r_j^{b+m+n-1} & & r_{i+1}^{b+n} & & r_{m+n}^{b+n} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} r_1^{-a-m} & \dots & r_{m+n}^{-a-m} \\ \vdots & & \vdots \\ r_1^{-a-1} & & r_{m+n}^{-a-1} \\ \\ r_1^{b+1} & & r_{m+n}^{b+1} \\ \vdots & & \vdots \\ r_1^{b+n} & \dots & r_{m+n}^{b+n} \end{vmatrix}$$

Mettons en facteur  $r_j^{-a-m}$  dans chaque colonne des deux déterminants : toutes simplifications faites,  $A_i$  peut être écrit :

$$A_i = \frac{r_i^{a+m}}{sp_{-n}} \cdot \frac{\Delta_{m,n}^i(a+b+1)}{\Delta_{m,n}(a+b+1)}$$

avec :

$$\text{II.2.33} \quad \Delta_{m,n}(a+b+1) = \begin{vmatrix} 1 & \vdots & 1 \\ r_1 & \vdots & r_{m+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1^{m-1} & \vdots & r_{m+n}^{m-1} \\ r_1^{m+a+b+1} & \vdots & r_{m+n}^{m+a+b+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1^{m+a+b+n} & \vdots & r_{m+n}^{m+a+b+n} \end{vmatrix}$$

$$\text{II.2.34} \quad \Delta_{m,n}^i(a+b+1) = \begin{vmatrix} 1 & \vdots & 0 & \vdots & 1 \\ r_1 & \vdots & 0 & \vdots & r_{m+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1^{m-1} & \vdots & 0 & \vdots & r_{m+n}^{m-1} \\ r_1^{m+a+b+1} & \sum_j b_j r_j^{b+m} & \vdots & \vdots & r_{m+n}^{m+a+b+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1^{m+a+b+n} & \sum_j b_j r_j^{b+m+n-1} & \vdots & \vdots & r_{m+n}^{m+a+b+n} \end{vmatrix}$$

colonne n°  $i$

La fonction  $F^*(x, s)$  ainsi déterminée coïncide, sur l'ensemble (E), avec la solution  $F(x, s)$  du système II.2.1, II.2.2 et II.2.3. On a ainsi établi le théorème :

THÉORÈME. — La fonction génératrice des probabilités  $p_{0,x}^{(i)}$  dans la chaîne de Markov définie au début de ce chapitre est pour  $x \in (E)$  :

$$\text{II.2.35} \quad F(x, s) = \frac{1}{sp_{-n}} \sum_{i=1}^{i=m+n} r_i^{x+a+m} \cdot \frac{\Delta_{m,n}^i(a+b+1)}{\Delta_{m,n}(a+b+1)} - \gamma_{-m+1}(x) b_i r_i^{x+m-1}$$



Dans cette expression on désigne par :

\*  $r_i$  une des  $m + n$  racines distinctes de l'équation :

$$p_m + p_{m-1}r + \dots + p_1r^{m-1} + \left(p_0 - \frac{1}{s}\right)r^m + p_{-1}r^{m+1} + \dots + p_{-n}r^{m+n} = 0.$$

\*  $b_i$  l'inverse du produit  $\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m+n} (r_i - r_j)$ .

\*  $\Delta_{m,n}(a + b + 1)$  et  $\Delta_{m,n}^i(a + b + 1)$  les déterminants des formules II.2.33 et II.2.34.

\*  $\gamma_u(x)$  une fonction valant 1 si  $x \geq u$ , 0 ailleurs.

## CHAPITRE III

### FORMULES EXPLICITES DES PROBABILITÉS DE PASSAGE

#### 1. Étude de la structure de la solution II.2.36.

La fonction génératrice des probabilités  $F(x, s)$  déterminée au chapitre précédent a été explicitée au moyen des racines de l'équation :

$$\text{III.1.1} \quad p_m + p_{m-1}r + \dots + p_1r^{m-1} + \left(p_0 - \frac{1}{s}\right)r^m + p_{-1}r^{m+1} + \dots + p_{-n}r^{m+n} = 0.$$

Cette équation a ses coefficients qui ne dépendent que de  $s$  et des probabilités de passage. Dans la suite de ce chapitre nous désignerons par  $\Phi$  la fonction génératrice de ces probabilités de passage :

$$\text{III.1.2} \quad \Phi(r) = p_m r^m + p_{m-1} r^{m-1} + \dots + p_1 r + p_0 + p_{-1} r^{-1} + \dots + p_{-n} r^{-n}$$

de sorte que l'équation III.1.1 peut être écrite :

$$\text{III.1.3} \quad r^m \left[ \Phi\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{s} \right] = 0.$$

Faisons d'abord quelques remarques sur les racines de cette équation qui joue un rôle important dans notre solution.

a) **Étude sommaire des racines de l'équation III.1.2.** — On a déjà établi dans le chapitre précédent que l'on peut choisir  $s$  dans un domaine du cercle  $|s| < 1$  tel que les racines de l'équation III.1.2 soient distinctes. Il est possible de préciser ce résultat pour certaines valeurs de  $s$  :

Remarquons d'abord que l'équation n'a pas de racine nulle puisque  $p_m$  est distinct de 0. L'équation III.1.3 est donc équivalente à l'équation :

$$\Phi\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{s} = 0$$

soit :

$$\text{III.1.4} \quad p_m r^{-m} + p_{m-1} r^{+m+1} + \dots + p_0 + \dots + p_{-n} r^n = \frac{1}{s}.$$

Supposons  $s$  de module très petit, alors  $\frac{1}{s}$  est grand en module et le premier membre de l'égalité III.1.4 est grand en module, ce qui implique soit  $r$  soit  $\frac{1}{r}$  grand en module.

Ainsi lorsque  $s$  est petit en module, les racines de l'équation III.1.3 peuvent être séparées en deux groupes :

\* l'ensemble des  $m$  racines de module petit, voisines des  $m$  racines  $m^{\text{ièmes}}$  complexes de  $s \cdot p_m$ ;

\* l'ensemble des  $n$  racines de module grand, voisines des  $n$  racines  $n^{\text{ièmes}}$  complexes de  $\frac{1}{p_{-n}s}$ .

On peut, de plus, déterminer un développement limité de ces racines sous la forme suivante :

\* soit  $z_k$  une racine  $m^{\text{ième}}$  complexe de  $p_m \cdot s$ , alors il existe une racine  $r_k$  de III.1.3 voisine de  $z_k$  lorsque  $|s|$  est petit et :

$$\text{III.1.5} \quad r_k \sim z_k + \frac{1}{m} \cdot \frac{p_{m-1}}{p_m} (z_k)^2 + \left[ \frac{1}{m} \cdot \frac{p_{m-2}}{p_m} + \frac{1}{m^2} \left( \frac{p_{m-1}}{p_m} \right)^2 \right] z_k^3$$

$k \in \{1, 2, \dots, m\}$

\* soit  $\zeta_l$  une racine  $n^{\text{ième}}$  complexe de  $\frac{1}{p_{-n}s}$ , alors il existe une racine  $r_l$  de III.1.3 voisine de  $\zeta_l$  lorsque  $|s|$  est petit et :

$$\text{III.1.6} \quad r_l \sim \zeta_l - \frac{1}{n} \cdot \frac{p_{-n+1}}{p_{-n}} + \left[ -\frac{p_{-n+2}}{np_{-n}} + \frac{n-1}{2n} \left( \frac{p_{-n+1}}{p_{-n}} \right)^2 \right] \zeta_l$$

$l \in \{m+1, m+2, \dots, m+n\}$ .

Nous ne donnerons pas la démonstration de ce résultat, qui n'est pas essentiel pour notre étude.

b) **Structure de la solution II.2.36.** — La fonction  $\gamma_{-m+1}(x)$  étant nulle pour  $x \leq -m$ , la solution se présente sous deux formes : il semble ainsi s'introduire une certaine dissymétrie entre les rôles des barrières. En réalité nous allons montrer que l'on peut présenter ces deux formes de solution d'une seule façon.

Transformons d'abord le numérateur de la fraction rationnelle entrant dans l'expression de  $F(x, s)$  :

$$\text{III.1.7} \quad N^* = \sum_{i=1}^{i=m+n} r_i^{x+a+m} \Delta_{m,n}^i(a+b+1)$$

$$N^* = \frac{1}{p-n} \sum_{i=1}^{i=m+n} r_i^{x+a+m} \begin{vmatrix} 1 & \vdots & 0 & \vdots & 1 \\ r_1 & \vdots & 0 & \vdots & r_{m+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1^{m-1} & \vdots & 0 & \vdots & r_{m+n}^{m-1} \\ r_1^{m+a+b+1} & \vdots & \sum_j b_j r_j^{b+m} & \vdots & r_{m+n}^{m+a+b+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1^{m+a+b+n} & \vdots & \sum_j b_j r_j^{b+m+n-1} & \vdots & r_{m+n}^{m+a+b+n} \end{vmatrix}$$

colonne n°  $i$

Dans chaque déterminant  $\Delta_{m,n}^i(a+b+1)$  amenons, par une suite de transpositions des colonnes, la colonne n°  $i$  en tête :

$$\text{III.1.8} \quad N^* = \frac{1}{p-n} \sum_{i=1}^{i=m+n} (-1)^{i+1} r_i^{x+a+m} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & r_1 & \vdots & r_{m+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & r_1^{m-1} & \vdots & r_{m+n}^{m-1} \\ \sum_j b_j r_j^{b+m} & r_1^{m+a+b+1} & \vdots & r_{m+n}^{m+a+b+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_j b_j r_j^{b+m+n-1} & r_1^{m+a+b+n} & \vdots & r_{m+n}^{m+a+b+n} \end{vmatrix}$$

la colonne en  $r_i$  manque

$N^*$  peut être considéré, au signe près, comme le développement d'un déterminant d'ordre  $m + n + 1$  suivant les éléments de sa  $m + 1$ <sup>ème</sup> ligne :

$$\text{III.1.9 } N^* = (-1)^{m+1} \frac{1}{p-n} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & r_1 & \vdots & r_{m+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & r_1^{m-1} & \vdots & r_{m+n}^{m-1} \\ 0 & r_1^{x+a+m} & \vdots & r_{m+n}^{x+a+m} \\ \sum_j b_j r_j^{b+m} & r_1^{m+a+b+1} & \vdots & r_{m+n}^{m+a+b+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_j b_j r_j^{b+m+n-1} & r_1^{m+a+b+n} & \vdots & r_{m+n}^{m+a+b+n} \end{vmatrix}$$

La solution II.2.35 peut ainsi être écrite, pour  $x \leq -m$  :

$$\text{III.1.10 } F(x, s) = \frac{N^*}{s \Delta_{m,n}(a+b+1)}.$$

Lorsque  $x \geq -m + 1$ , il y a lieu d'ajouter un terme :

$$\begin{aligned}
 F(x, s) &= \frac{N^*}{s \Delta_{m,n}(a+b+1)} - \frac{1}{s p-n} \sum_{j=1}^{m+n} b_j r_j^{x+m-1} \\
 &= \frac{1}{s \Delta_{m,n}(a+b+1)} \left[ N^* - \sum_{j=1}^{m+n} \frac{1}{p-n} b_j r_j^{x+m-1} \Delta_{m,n}(a+b+1) \right].
 \end{aligned}$$

L'expression entre crochets s'écrit, d'après III.1.7 :

$$\begin{aligned}
 [ ] &= \sum_{i=1}^{m+n} \left[ r_i^{x+a+m} \Delta_{m,n}^i(a+b+1) - \frac{1}{p-n} b_i r_i^{x+m-1} \Delta_{m,n}(a+b+1) \right] \\
 [ ] &= \frac{1}{p-n} \sum_{i=1}^{m+n} r_i^{x+a+m} \begin{vmatrix} 1 & \vdots & 0 & -b_i r_i^{-a-1} & \vdots & 1 \\ r_1 & \vdots & 0 & -b_i r_i^{-a} & \vdots & r_{m+n} \\ r_1^{m-1} & \vdots & 0 & -b_i r_i^{m-a-2} & \vdots & r_{m+n}^{m-1} \\ r_1^{m+a+b+1} & \vdots & \sum_{j=1}^{m+n} b_j r_j^{b+m} & -b_i r_i^{b+m} & \vdots & r_{m+n}^{m+a+b+1} \\ r_1^{m+a+b+n} & \vdots & \sum_{j=1}^{m+n} b_j r_j^{b+m+n-1} & -b_i r_i^{b+m+n-1} & \vdots & r_{m+n}^{m+a+b+n} \end{vmatrix} \\
 &\hspace{15em} \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{colonne } n^o i}
 \end{aligned}$$

Dans chaque déterminant du second membre, multiplions la première colonne par  $-b_1 r_1^{-a-1}$ , la seconde par  $-b_2 r_2^{-a-1}$ , etc. (excepté la colonne n°  $i$ ) et ajoutons à la colonne n°  $i$  l'ensemble des  $n - 1$  colonnes obtenues :

$$[ ] = \frac{1}{p-n} \sum_{i=1}^{m+n} r_i^{x+a+m} \begin{vmatrix} 1 & \vdots & -\sum_{j=1}^{m+n} b_j r_j^{-a-1} & \vdots & 1 \\ r_1 & \vdots & \vdots & \vdots & r_{m+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1^{m-1} & \vdots & -\sum_{j=1}^{m+n} b_j r_j^{m-a-2} & \vdots & r_{m+n}^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1^{m+a+b+1} & \vdots & 0 & \vdots & r_{m+n}^{m+a+b+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1^{m+a+b+n} & \vdots & 0 & \vdots & r_{m+n}^{m+a+b+n} \end{vmatrix}$$

colonne n°  $i$

La même transformation que ci-dessus permet alors d'écrire la solution pour  $x \geq -m + 1$  sous la forme :

III.1.11 
$$F(x, s) = \frac{N^{**}}{s \Delta_{m,n}(a + b + 1)}$$

avec :

III.1.12 
$$N^{**} = -\frac{(-1)^{m+1}}{p-n} \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{m+n} b_j r_j^{-a-1} & 1 & \vdots & 1 \\ \vdots & r_1 & \vdots & r_{m+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{m+n} b_j r_j^{m-a-2} & r_1^{m-1} & \vdots & r_{m+n}^{m-1} \\ 0 & r_1^{x+a+m} & \vdots & r_{m+n}^{x+a+m} \\ 0 & r_1^{m+a+b+1} & \vdots & r_{m+n}^{m+a+b+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & r_1^{m+a+b+n} & \vdots & r_{m+n}^{m+a+b+n} \end{vmatrix}$$

Multiplions la seconde colonne par  $-b_1 r_1^{-a-1}$ , la seconde par  $-b_2 r_2^{-a-1}$ , la dernière par  $-b_{m+n} r_{m+n}^{-a-1}$  et ajoutons ces colonnes à la première :

$$\text{III.1.13} \quad N^{**} = \frac{(-1)^{m+1}}{p-n} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & r_1^{m-1} & \dots & r_{m+n}^{m-1} \\ \sum_{j=1}^{m+n} b_j r_j^{x+m-1} & r_1^{x+a+m} & \dots & r_{m+n}^{x+a+m} \\ \sum_{j=1}^{m+n} b_j r_j^{b+m} & r_1^{m+a+b+1} & \dots & r_{m+n}^{m+a+b+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{m+n} b_j r_j^{b+m+n-1} & r_1^{m+a+b+n} & \dots & r_{m+n}^{m+a+b+n} \end{vmatrix}$$

En comparant les formules III.1.9 et III.1.13, on s'aperçoit que la solution peut être écrite, quel que soit  $x$  :

$$\text{III.1.14} \quad F(x, s) = \frac{N}{s \cdot \Delta_{m,n}(a+b+1)}$$

à condition de poser :

$$\text{III.1.15} \quad N = \frac{(-1)^{m+1}}{p-n} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & r_1^{m-1} & \dots & r_{m+n}^{m-1} \\ \gamma_{-m+1}(x) \sum_{j=1}^{m+n} b_j r_j^{x+m-1} & r_1^{x+a+m} & \dots & r_{m+n}^{x+a+m} \\ \sum_{j=1}^{m+n} b_j r_j^{b+m} & r_1^{m+a+b+1} & \dots & r_{m+n}^{m+a+b+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{m+n} b_j r_j^{b+m+n-1} & r_1^{m+a+b+n} & \dots & r_{m+n}^{m+a+b+n} \end{vmatrix}$$

La solution  $F(x, s)$  est ainsi le quotient de deux déterminants  $N$  et  $\Delta_{m,n}(a+b+1)$ .  $\Delta_{m,n}(a+b+1)$  est une fonction entière, antisymétrique des racines de l'équation  $r^m \left[ \Phi\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{s} \right] = 0$ . Cette fonction est manifestement divisible par le produit  $\prod_{i < j} (r_i - r_j)$  qui, au signe près, représente

le développement du déterminant de Vandermonde que nous noterons  $\Delta_{m,n}(0)$ .

Le rapport  $\frac{\Delta_{m,n}(a+b+1)}{\Delta_{m,n}(0)}$  est alors une expression entière, symétrique, des racines de l'équation  $r^m \left[ \Phi\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{s} \right] = 0$  et comme tel peut être exprimé sous forme d'un polynôme des coefficients de cette équation.

Développons N suivant les éléments de la première colonne :

$$\text{III.1.16} \quad N = \frac{\gamma_{-m+1}(x)}{p-n} \left( \sum_{j=1}^{m+n} b_j r_j^{x+m-1} \right) \Delta_{m,n}(a+b+1) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{p-n} \left( \sum_{k=0}^{m+n} b_j r_j^{b+m+k} \right) D_k$$

où l'on a substitué la notation  $D_k$  aux notations :

$$\text{III.1.17} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta(0, 1, 2, \dots, m-1, x+a+m, m+a+b+1, m+a+b+2, \dots, \\ m+a+b+k, m+a+b+k+2, m+a+b+k+3, \dots, m+a+b+n) \\ \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n-2 \\ \Delta(0, 1, 2, \dots, m-1, x+a+m, m+a+b+2, m+a+b+3, \dots, \\ m+a+b+n) \text{ pour } k=0 \\ \Delta(0, 1, 2, \dots, m-1, x+a+m, m+a+b+1, m+a+b+2, \dots, \\ m+a+b+n-1) \text{ pour } k=n-1. \end{array} \right.$$

Ces déterminants, ainsi que  $\Delta_{m,n}(a+b+1)$ , sont des déterminants d'ordre  $m+n$ , du type :

$$\text{III.1.18} \quad \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+n}) = \begin{vmatrix} r_1^{\alpha_1} & r_2^{\alpha_1} & \dots & r_{m+n}^{\alpha_1} \\ r_1^{\alpha_2} & r_2^{\alpha_2} & \dots & r_{m+n}^{\alpha_2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_1^{\alpha_{m+n}} & r_2^{\alpha_{m+n}} & \dots & r_{m+n}^{\alpha_{m+n}} \end{vmatrix}$$

Un raisonnement analogue à celui fait ci-dessus permet d'affirmer que le rapport du déterminant  $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+n})$  au déterminant de Vandermonde  $\Delta(0, 1, 2, \dots, m+n-1)$  est une expression symétrique, entière des racines de l'équation  $r^m \left[ \Phi\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{s} \right] = 0$ , donc est exprimable sous forme d'un polynôme des coefficients de cette équation.

En résumé, la forme III.1.14 de  $F(x, s)$  peut être mise sous la forme du

rapport de deux expressions entières, symétriques, des racines de l'équation caractéristique :

III.1.19

$$F(x, s) = \frac{\frac{N}{\Delta(0, 1, \dots, m+n+1)}}{s \cdot \frac{\Delta(0, 1, \dots, m-1, m+a+b+1, m+a+b+2, \dots, m+a+b+n)}{\Delta(0, 1, \dots, m+n+1)}}$$

donc sous la forme du rapport de deux polynômes en  $\frac{1}{s}$ . Dès que l'on connaîtra ces polynômes, il sera relativement facile de développer  $F(x, s)$  en  $s$  au voisinage de  $s = 0$  et partant de déterminer les probabilités  $p_{0,x}^{(t)}$ .

**2. Recherches sur l'explicitation en  $s$  des éléments de  $F(x,s)$ .**

Les expressions III.1.16 et III.1.19 montrent que  $F(x, s)$  dépend essentiellement des deux expressions  $\sum_{j=1}^{j=m+n} b_j r_j^\alpha$  et  $\frac{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+n})}{\Delta(0, 1, \dots, m+n-1)}$  (les  $\alpha_i$  désignent des entiers non négatifs).

Nous étudierons successivement chacune d'elles, nous en donnerons une fonction génératrice, puis leur explicitation en  $s$ .

**A) Recherche de fonctions génératrices.**

a) Étude de

$$S_\alpha = \sum_{i=1}^{j=p} b_j r_j^\alpha, \alpha \geq 0, \quad \text{avec} \quad b_j = \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{i=p} (r_j - r_i)}$$

les  $r_i, i = 1, 2, \dots, p$  étant racines de l'équation  $P(r) \equiv a_0 r^p + \dots + a_p = 0$ .

\* Considérons d'abord la fraction rationnelle :  $\frac{r^\alpha}{\prod_{i=1}^p (r - r_j)} \quad 0 \leq \alpha \leq p - 1$



et sa décomposition en éléments simples :

$$\text{III.2.1} \quad \frac{r^\alpha}{\prod_{j=1}^p (r - r_j)} \equiv \sum_{j=1}^p \frac{A_j}{r - r_j}.$$

On obtient facilement :

$$A_j = \frac{r_j^\alpha}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p (r_j - r_i)} = b_j r_j^\alpha.$$

Donnons alors à  $r$  la valeur 0 dans l'identité III.2.1 :

$$0 = \sum_{j=1}^p b_j r_j^{\alpha-1}$$

d'où le

LEMME III.1. — *Quel que soit l'entier  $\alpha$  compris entre  $-1$  et  $p-2$  et quelle que soit l'équation de degré  $p$  dont les racines distinctes et non nulles*

*sont  $r_1, r_2, \dots, r_p$ , l'expression :* 
$$\sum_{j=1}^p \frac{r_j^\alpha}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p (r_j - r_i)}$$
*est nulle.*

\*\* Désignons maintenant par  $\psi(t)$  la fonction génératrice de  $S_\alpha$  :

$$\text{III.2.2} \quad \psi(t) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} S_\alpha t^\alpha = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^p b_j r_j^\alpha \right) t^\alpha.$$

La série du second membre converge absolument pour  $|t| \cdot \sup_j |r_j| < 1$  et l'on peut alors intervertir l'ordre des sommations :

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \sum_{j=1}^p b_j \sum_{\alpha=0}^{\infty} (r_j t)^\alpha = \sum_{j=1}^p \frac{b_j}{1 - r_j t} \\ &= -\frac{1}{t} \sum_{j=1}^p \frac{1}{\left(r_j - \frac{1}{t}\right) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p (r_j - r_i)}. \end{aligned}$$

Envisageons alors l'équation ayant pour racines  $r_1, r_2, \dots, r_p$  et  $\frac{1}{t}$  et appliquons-lui le lemme III.1 avec  $\alpha = 0$  :

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{j=p} \frac{1}{\left(r_j - \frac{1}{t}\right) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{i=p} (r_j - r_i)}}_{-t\psi(t)} + \frac{1}{\sum_{i=1}^{i=p} \left(\frac{1}{t} - r_i\right)} = 0.$$

On obtient ainsi :

$$\psi(t) = \frac{1}{t \prod_{i=1}^{i=p} \left(\frac{1}{t} - r_i\right)}.$$

Or, on sait que l'on a :

$$P(r) \equiv a_0 r^p + \dots + a_p \equiv a_0 \prod_{i=1}^{i=p} (r - r_i).$$

Le dénominateur de  $\psi(t)$  n'est donc autre que  $\frac{1}{a_0} t \cdot P\left(\frac{1}{t}\right)$ , d'où le

LEMME III.2. — Pour tout polynôme  $P(r)$  de degré  $p$ , ayant pour racines distinctes  $r_1, r_2, \dots, r_p$ , les expressions :  $S_\alpha = \sum_{j=1}^{j=p} \frac{r_j^\alpha}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}} (r_j - r_i)}$  ont pour fonction génératrice :

III.2.3 
$$\psi(t) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} S_\alpha t^\alpha = \frac{a_0}{t P\left(\frac{1}{t}\right)}.$$

Dans le cas particulier de notre étude, le polynôme  $P(r)$  est :

$$\begin{aligned} P(r) &= r^m \left[ \Phi\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{s} \right], \text{ de degré } m + n \\ &\equiv p_{-n} r^{m+n} + \dots + \left(p_0 - \frac{1}{s}\right) r^m + \dots + p_m. \end{aligned}$$

D'après le lemme la fonction génératrice des expressions  $S_\alpha$  est :

$$\psi(t) = \frac{p-n}{t \cdot t^{-m} \left[ \Phi(t) - \frac{1}{s} \right]} = \frac{p-n t^{m-1}}{\Phi(t) - \frac{1}{s}}$$

soit, en multipliant les deux termes de cette fraction par  $t^n$  pour conserver un polynôme en  $t$  au dénominateur :

III.2.4 
$$\psi(t) = \frac{p-n t^{m+n-1}}{t^n \left[ \Phi(t) - \frac{1}{s} \right]}$$

b) Étude des rapports  $\frac{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)}{\Delta(0, 1, \dots, p-1)}$  définis à partir des racines distinctes  $r_1, r_2, \dots, r_p$  d'un polynôme  $P(r)$  de degré  $p$  par l'égalité :

III.2.5 
$$\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = \begin{vmatrix} r_1^{\alpha_1} & r_2^{\alpha_1} & \dots & r_p^{\alpha_1} \\ r_1^{\alpha_2} & r_2^{\alpha_2} & \dots & r_p^{\alpha_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{\alpha_p} & r_2^{\alpha_p} & \dots & r_p^{\alpha_p} \end{vmatrix}$$

Nous désignerons dans la suite de cet exposé par  $\xi_p$  l'ensemble  $\{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \}$  les  $\alpha_i$  étant des entiers non négatifs et par  $E[\xi_p] = \frac{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)}{\Delta(0, 1, \dots, p-1)}$ .

Soit  $\chi(t_1, t_2, \dots, t_p)$  la fonction génératrice des expressions  $E[\xi_p]$  :

III.2.6 
$$\chi(t_1, t_2, \dots, t_p) = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \dots \sum_{\alpha_p=0}^{\infty} \frac{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)}{\Delta(0, 1, \dots, p-1)} t_1^{\alpha_1} \cdot t_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot t_p^{\alpha_p}$$

La série multiple du second membre converge absolument pour :

$$|t_i| \cdot \sup_j |r_j| < 1$$

quel que soit  $i$ . On peut alors sommer séparément sur  $\alpha_1$ , sur  $\alpha_2, \dots$ , sur  $\alpha_p$ . On obtient ainsi :

III.2.7 
$$\frac{1}{\Delta(0, 1, 2, \dots, p-1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1-t_1 r_1 & 1-t_2 r_2 & \dots & 1-t_p r_p \\ 1-t_2 r_1 & 1-t_2 r_2 & \dots & 1-t_2 r_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1-t_p r_1 & 1-t_p r_2 & \dots & 1-t_p r_p \end{vmatrix} = \chi(t_1, t_2, \dots, t_p)$$

Développons ce déterminant, que nous désignons par  $\mathcal{D}$  pour simplifier, suivant la règle usuelle :

$$\text{III.2.8} \quad \mathcal{D} = \sum_{\mathfrak{J} \in \mathfrak{P}} (-1)^I \frac{1}{1 - t_1 r_{i_1}} \frac{1}{1 - t_2 r_{i_2}} \frac{1}{1 - t_p r_{i_p}}$$

formule où  $\mathfrak{J} = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$  désigne une permutation des  $p$  premiers nombres entiers, où  $I$  désigne le nombre d'inversions de la permutation  $\mathfrak{J}$  et où  $\mathfrak{P}$  désigne l'ensemble des permutations  $\mathfrak{J}$ . Ainsi :

$$\mathcal{D} = \sum_{\mathfrak{J} \in \mathfrak{P}} (-1)^I \prod_{k=1}^{k=p} \frac{1}{1 - t_k r_{i_k}}.$$

Réduisons au même dénominateur les termes du second membre :

$$\mathcal{D} = \sum_{\mathfrak{J} \in \mathfrak{P}} (-1)^I \prod_{k=1}^{k=p} \frac{\prod_{j=1}^{j=p} (1 - t_k r_{i_j})}{\prod_{j=1}^p (1 - t_k r_{i_j})}.$$

Le dénominateur commun est alors le produit :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{k=p} \prod_{j=1}^{j=p} (1 - t_k r_{i_j}) &= \prod_{k=1}^{k=p} \prod_{j=1}^{j=p} t_k \left( \frac{1}{t_k} - r_{i_j} \right) \\ &= \prod_{k=1}^{k=p} t_k^p \prod_{j=1}^{j=p} \left( \frac{1}{t_k} - r_{i_j} \right). \end{aligned}$$

Dans cette expression  $\prod_{j=1}^{j=p} \left( \frac{1}{t_k} - r_{i_j} \right)$  représente  $\frac{1}{a_0} P\left(\frac{1}{t_k}\right)$  car l'ensemble des  $r_{i_j}, j = 1, 2, \dots, p$ , est l'ensemble des racines de  $P(r)$ . Ainsi le dénominateur commun est  $\prod_{k=1}^{k=p} \frac{1}{a_0} t_k^p P\left(\frac{1}{t_k}\right)$ . Notons que l'on a :

$$\frac{1}{a_0} t_k^p P\left(\frac{1}{t_k}\right) \equiv 1 + a'_1 t_k + \dots + a'_p t_k^p$$

avec :

$$a'_i = \frac{a_i}{a_0}.$$

$\mathcal{D}$  se présente donc sous la forme :

$$\text{III.2.9} \quad \mathcal{D} = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} (-1)^{\sum_{k=1}^{k=p} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^j} (1 - t_k r_{ij})}{\prod_{\gamma=1}^{k=p} [1 + a'_1 t_k + \dots + a'_p t_k^p]} .$$

Le numérateur de  $\mathcal{D}$  est un polynôme en  $t_1, t_2, \dots, t_p, r_1, r_2, \dots, r_p$ , de degré  $p - 1$  relativement à chacune de ces variables. Or, la formule III.2.7 montre que  $\mathcal{D}$  s'annule lorsqu'on substitue à la variable  $t_k$  ( $k \in 1, 2, \dots, p$ ) la variable  $t_{k'}$  ( $k' \in 1, 2, \dots, p, k' \neq k$ ); de même  $\mathcal{D}$  s'annule lorsqu'on substitue à la variable  $r_j$  la variable  $r_{j'}$  ( $j$  et  $j' \in 1, 2, \dots, p; j \neq j'$ ).

Le numérateur de  $\mathcal{D}$  est donc divisible à la fois par le produit  $\prod_{k \neq k'} (t_k - t_{k'})$  et par le produit  $\prod_{j \neq j'} (r_j - r_{j'})$  : ce numérateur est divisible par le déterminant de Vandermonde des  $t_k$ , soit  $\Delta_t(0, 1, \dots, p - 1)$  et par celui des  $r_j$ , soit  $\Delta_r(0, 1, \dots, p - 1)$ , donc est divisible par leur produit. Chacun de ces déterminants, par exemple :

$$\Delta_t(0, 1, \dots, p - 1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_p \\ t_1^2 & t_2^2 & \dots & t_p^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ t_1^{p-1} & t_2^{p-1} & \dots & t_p^{p-1} \end{vmatrix}$$

est un polynôme de degré  $p - 1$  relativement à chacune de ses variables : le quotient du numérateur de  $\mathcal{D}$  par le produit :

$$\Delta_t(0, 1, \dots, p - 1) \cdot \Delta_r(0, 1, \dots, p - 1)$$

est nécessairement une constante et l'on a :

$$\mathcal{D} = \mathbb{K} \cdot \frac{\Delta_t(0, 1, \dots, p - 1) \cdot \Delta_r(0, 1, \dots, p - 1)}{\prod_{k=1}^{k=p} [1 + a'_1 t_k + \dots + a'_p t_k^p]}$$

ce qui permet d'écrire la fonction génératrice  $\chi(t_1, t_2, \dots, t_p)$  :

$$\chi(t_1, t_2, \dots, t_p) = \mathbb{K} \cdot \frac{\Delta_t(0, 1, \dots, p - 1)}{\prod_{k=1}^{k=p} [1 + a'_1 t_k + \dots + a'_p t_k^p]} .$$

Pour déterminer la constante  $K$  il suffit de constater que le coefficient de  $t_1^0 t_2^1 t_3^2 \dots t_p^{p-1}$  dans le développement de  $\chi(t_1, t_2, \dots, t_p)$  est égal à 1 : or, dans le développement du second membre de l'égalité ci-dessus il n'existe qu'un seul terme en  $t_1^0 t_2^1 \dots t_p^{p-1}$ , c'est  $K t_1^0 t_2^1 \dots t_p^{p-1}$ , provenant de la diagonale principale du déterminant  $\Delta_t(0, 1, \dots, p - 1)$ . En effet tout terme du développement du second membre est le produit d'un terme du développement du déterminant par un terme venant du développement de :

$$\frac{1}{\prod_k [1 + a_1 t_k + \dots + a_p t_k^p]} .$$

Le terme en  $t_1^0 \dots$  ne peut venir que du produit d'un terme en  $t_1^0$  du déterminant par un terme ne comportant pas  $t_1$  du développement de la fraction ; un terme en  $t_1^0 t_2^1 \dots$  ne peut provenir du terme en  $t_2^0$  du déterminant, car un tel terme aurait nécessairement un facteur en  $t_1^{\alpha_1}$ , avec  $\alpha_1 \neq 0$  (tout terme du développement d'un déterminant ne contient qu'un facteur et un seul provenant de chaque ligne et de chaque colonne), ce terme vient donc du produit d'un terme en  $t_1^0 t_2^1 \dots$  du déterminant par un terme ne comportant ni  $t_1$  ni  $t_2$  du développement de la fraction, etc. Donc  $K = 1$  et l'on a le

LEMME III.3. — *Pour tout polynôme  $P(r)$  de degré  $p$ , ayant pour racines distinctes  $r_1, r_2, \dots, r_p$ , l'expression  $\frac{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)}{\Delta(0, 1, \dots, p - 1)}$  a pour fonction génératrice :*

$$\begin{aligned} \text{III.2.10} \quad \chi(t_1, t_2, \dots, t_p) &= \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \sum_{\alpha_p=0}^{\infty} \frac{\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_p)}{\Delta(0, 1, \dots, p - 1)} t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \dots t_p^{\alpha_p} \\ &= \frac{\Delta(0, 1, \dots, p - 1)}{\prod_{k=1}^{k=p} \frac{1}{a_0} t_k^p P\left(\frac{1}{t_k}\right)} . \end{aligned}$$

Dans le cas particulier de cette étude, on a  $P(r) \equiv r^m \left[ \Phi\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{s} \right]$ ,  $a_0 = p - n$

donc :

$$\text{III.2.11} \quad \chi(t_1, t_2, \dots, t_p) = \frac{\Delta_t(0, 1, \dots, m + n - 1)}{\prod_{k=1} \frac{1}{p-n} t_k^n \left[ \Phi(t_k) - \frac{1}{s} \right]} .$$

B) Explication en  $s$ .

a) Développement au voisinage de 0 de la fraction rationnelle :

$$R(t) \equiv \frac{1}{1 + b_1 t + \dots + b_p t^p}.$$

On sait que si  $|u| < 1$  la fraction  $\frac{1}{1+u}$  est développable en série entière au voisinage du  $u = 0$  :

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + \dots + (-1)^\lambda u^\lambda + \dots$$

Donc si  $t$  est assez petit en module pour que  $|b_1 t + \dots + b_p t^p| < 1$ , on peut écrire le développement :

$$\begin{aligned} R(t) &\equiv 1 - (b_1 t + \dots + b_p t^p) + (b_1 t + \dots + b_p t^p)^2 + \dots \\ &\quad + (-1)^\lambda (b_1 t + \dots + b_p t^p)^\lambda + \dots \\ &\equiv 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} c_\mu t^\mu. \end{aligned}$$

Le coefficient  $c_\mu$  de  $t^\mu$  est la somme des coefficients des termes en  $t^\mu$  provenant des différentes parenthèses. Or :

$$\begin{aligned} (b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_p t^p)^\lambda &= \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_p = \lambda} \frac{\lambda!}{k_1! k_2! \dots k_p!} (b_1 t)^{k_1} (b_2 t^2)^{k_2} \dots (b_p t^p)^{k_p} \\ &= \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_p = \lambda} \frac{\lambda!}{k_1! k_2! \dots k_p!} b_1^{k_1} b_2^{k_2} \dots b_p^{k_p} \cdot t^{k_1 + 2k_2 + \dots + pk_p}. \end{aligned}$$

Le terme en  $t^\mu$  de ce développement a pour coefficient :

$$\sum_{k_1 + 2k_2 + \dots + pk_p = \mu} \frac{\lambda!}{i=p} \prod_{i=1}^{i=p} b_i^{k_i}$$

la sommation portant sur tous les ensembles d'entiers positifs ou nuls  $(k_1, k_2, \dots, k_p)$  de somme égale à  $\lambda$  qui vérifient en plus :

$$k_1 + 2k_2 + \dots + pk_p = \mu.$$

Un tel terme ne peut du reste se présenter qu'à partir de  $\lambda_1$  tel que :

$$p(\lambda_1 - 1) < \mu \leq p\lambda_1$$

et ne se présentera plus dès que  $\lambda$  dépassera  $\lambda_2$  tel que  $\lambda_2 = \mu$ .

Notons que le nombre  $\lambda_1$  ainsi introduit est l'entier immédiatement supérieur ou égal au quotient  $\frac{\mu}{p}$ . Nous conviendrons d'écrire :

$$\lambda_1 = \left] \frac{\mu}{p} \right[.$$

Le coefficient  $c_\mu$  se présente, avec cette notation, sous la forme :

$$c_\mu = \sum_{\lambda = \left] \frac{\mu}{p} \right[}^{\lambda = \mu} \sum_{\{k_i\}} (-1)^{\lambda_1} \lambda ! \prod_{i=1}^{i=p} \frac{b_i^{k_i}}{k_i !}$$

avec  $\{k_i\} = \{ \text{entiers non négatifs } k_i, i = 1, 2, \dots, p, \text{ tels que :}$

$$\sum_i k_i = \lambda, \quad \sum_i ik_i = \mu \}.$$

D'où le

LEMME III.4. — Si  $|t|$  est assez petit pour que  $|b_1 t + \dots + b_p t^p| < 1$ , on a le développement :

$$\text{III.2.12} \quad \frac{1}{1 + b_1 t + \dots + b_p t^p} = 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\lambda = \left] \frac{\mu}{p} \right[}^{\lambda = \mu} \sum_{\{k_i\}} (-1)^{\lambda_1} \lambda ! \prod_{i=1}^{i=p} \frac{b_i^{k_i}}{k_i !} \right\} t^\mu.$$

Remarque. — Le coefficient  $c_\mu$  peut également être écrit :

$$c_\mu = \sum_{\{k_i\}} (k_1 + k_2 + \dots + k_p) ! \prod_{i=1}^{i=p} \frac{(-b_i)^{k_i}}{k_i !}$$

avec ici  $\{k_i\} = \{ \text{entiers non négatifs } k_i \text{ tels que } \sum_i ik_i = \mu \}$ .

b) Explicitation des expressions  $S_\alpha$  en fonction de  $s$ .

Nous avons vu (formule III.2.4) que la fonction génératrice des expressions  $S_\alpha$  est :

$$\psi(t) = \frac{p-n t^{m+n-1}}{t^n \left[ \Phi(t) - \frac{1}{s} \right]}$$

avec :

$$t^n \left[ \Phi(t) - \frac{1}{s} \right] = p-n + p_{-n+1} t + \dots + \left( p_0 - \frac{1}{s} \right) t^n + \dots + p_m t^{m+n}.$$



On peut alors écrire :

$$\psi(t) = \frac{t^{m+n-1}}{1 + b_1 t + \dots + b_{m+n} t^{m+n}} = t^{m+n-1} \cdot R(t)$$

avec :

$$b_i = \frac{p_{-n+i}}{p_{-n}} \quad \text{si } i \neq n, \quad \text{et } b_n = \frac{1}{p_{-n}} \left( p_0 - \frac{1}{s} \right).$$

Le lemme III.4 précédent donne immédiatement le développement de  $\psi(t)$  au voisinage de l'origine.  $S_\alpha$  est le coefficient du terme en  $t^{\alpha-(m+n-1)}$  du développement de  $R(t)$  :

$$S_\alpha = \sum_{\lambda = \left\lfloor \frac{\alpha-(m+n-1)}{m+n} \right\rfloor}^{\lambda = \alpha-(m+n-1)} \sum_{\{k_i\}} (-1)^{\lambda} \lambda! \prod_{i=1}^{i=m+n} \frac{b_i^{k_i}}{k_i!}$$

où  $\{k_i\} = \{ \text{entiers non négatifs } k_i \text{ tels que :}$

$$\sum_{i=1}^{i=m+n} k_i = \lambda, \quad \sum_{i=1}^{i=m+n} i \cdot k_i = \alpha - (m+n-1) \}$$

soit, en explicitant les  $b_i$  :

$$S_\alpha = \sum_{\lambda = \left\lfloor \frac{\alpha^*}{m+n} \right\rfloor}^{\lambda = \alpha^*} \sum_{\{k_i\}} (-1)^{\lambda} \lambda! \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{i=m+n} \left( \frac{p_{-n+i}}{p_{-n}} \right)^{k_i} \frac{1}{k_i!} \left( \frac{p_0 - \frac{1}{s}}{p_{-n}} \right)^{k_n} \frac{1}{k_n!}$$

où l'on pose, pour simplifier,  $\alpha^* = \alpha - (m+n-1)$  et

$\{k_i\} = \{ \text{entiers non négatifs } k_i \text{ tels que } \sum_i k_i = \lambda, \sum_i i k_i = \alpha^* \}$ .

Soit en définitive :

$$\text{III.2.13} \quad S_\alpha = \sum_{\lambda = \left\lfloor \frac{\alpha^*}{m+n} \right\rfloor}^{\lambda = \alpha^*} \frac{(-1)^{\lambda} \lambda!}{(p_{-n})^\lambda} \sum_{\{k_i\}} \frac{\left( \frac{p_0 - \frac{1}{s}}{p_{-n}} \right)^{k_n}}{k_n!} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{i=m+n} \frac{p_{-n+i}^{k_i}}{k_i!}$$

$S_\alpha$  est ainsi une somme de polynômes en  $\frac{1}{s}$ , de degrés  $k_n$ . Notons que la condition  $\sum_i i k_i = \alpha^*$  implique  $n k_n \leq \alpha^*$ . En désignant par  $\left[ \frac{\alpha^*}{n} \right] = \alpha'$  la partie entière du quotient  $\frac{\alpha^*}{n}$ , alors on peut montrer le

LEMME III.5. —  $S_\alpha$  est un polynôme en  $\frac{1}{s}$  de degré  $\alpha' = \left\lfloor \frac{\alpha^*}{n} \right\rfloor$  :

\* Si  $\alpha^* = n\alpha'$ ,  $\alpha'$  entier, il existera dans la somme des termes correspondant à  $\lambda = \alpha'$  car :

$$\left\lfloor \frac{\alpha^*}{m+n} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{\alpha^*}{n} \right\rfloor \leq \alpha^* \quad \text{pour } m \geq 1.$$

Parmi ces termes, il en existera un tel que :

$$k_n = \alpha', \text{ les autres } k_i \text{ étant nuls.}$$

Donc  $S_\alpha$  sera bien de degré  $\alpha' = \left\lfloor \frac{\alpha^*}{n} \right\rfloor$  en  $\frac{1}{s}$ .

\* Si  $\alpha^* = n.\alpha' + r$ ,  $0 \leq r < n$ , envisageons les termes correspondant à  $\lambda = \alpha' + 1$ . Parmi eux il en existera un correspondant à  $k_n = \alpha'$ ,  $k_r = 1$ , les autres  $k_i$  étant nuls, donc  $S_\alpha$  est bien de degré  $\alpha' = \left\lfloor \frac{\alpha^*}{n} \right\rfloor$  en  $\frac{1}{s}$ .

L'expression  $S_\alpha$  peut donc être écrite sous la forme :

$$\text{III.2.14} \quad S_\alpha = \sum_{\mu=0}^{\mu=\alpha'} \frac{1}{\mu!} C(\alpha^*, \mu) \left( p_0 - \frac{1}{s} \right)^\mu.$$

Le coefficient  $C(\alpha^*, \mu)$  s'obtient en remarquant qu'un terme en  $\left( p_0 - \frac{1}{s} \right)^\mu$  ne se présente dans la sommation III.2.13 que si  $\lambda \geq \mu$ . Donc :

$$C(\alpha^*, \mu) = \sum_{\lambda = \text{Sup} \left\{ \left\lfloor \frac{\alpha^*}{m+n} \right\rfloor, \mu \right\}}^{\lambda = \alpha^*} \frac{(-1)^{\lambda\lambda}!}{p^{\lambda-n}} \sum_{\{k_i\}} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{i=m+n} \frac{(p_{-n+i})^{k_i}}{k_i!}$$

$\{k_i\} = \{ \text{entiers non négatifs } k_i \text{ tels que } \sum_i k_i = \lambda - \mu, \sum_i ik_i = \alpha^* - n\mu \}$ .

On peut finalement expliciter  $S_\alpha$  en  $s$ .

$$S_\alpha = \sum_{\nu=0}^{\nu=\alpha'} B(\alpha^*, \nu) \cdot \frac{1}{s^\nu}$$

à condition de poser :

$$B(\alpha^*, \nu) = \sum_{\mu=\nu}^{\mu=\alpha'} \frac{(-1)^\nu C(\alpha^*, \mu)}{\mu!} p_0^{\mu-\nu} \binom{\mu}{\nu}.$$

Nous utilisons la notation  $\binom{\mu}{\nu}$  pour désigner le nombre de combinaisons de  $\mu$  objets distincts pris  $\nu$  à  $\nu$  :

$$\binom{\mu}{\nu} = \frac{\mu(\mu - 1) \dots (\mu - \nu + 1)}{\nu !}.$$

Nous avons ainsi établi le :

LEMME III. 6. — L'expression  $S_\alpha$  est identique au polynôme en  $\frac{1}{s}$  de degré

$$\alpha' = \left[ \frac{\alpha^*}{n} \right] = \left[ \frac{\alpha - (m + n - 1)}{n} \right] :$$

III. 2. 15 
$$S_\alpha = \sum_{\nu=0}^{\nu=\alpha'} B(\alpha^*, \nu) \frac{1}{s^\nu}$$

défini par l'ensemble des égalités suivantes :

III. 2. 16 
$$C(\beta, \mu) = \sum_{\lambda=\text{Sup}}^{\lambda=\beta} \left\{ \frac{\beta}{m+n}, \mu \right\} \frac{(-1)^{\lambda} \lambda !}{p^{\lambda-n}} \sum_{\{k_i\}} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{i=m+n} \frac{(p-n+i)^{k_i}}{k_i !}$$

la seconde sommation étant faite sur l'ensemble des  $k_i, i \neq n$ , vérifiant :

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{i=m+n} k_i = \lambda - \mu, \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{i=m+n} ik_i = \beta - n\mu$$

III. 2. 17 
$$B(\beta, \nu) = \sum_{\mu=\nu}^{\mu=\left[ \frac{\beta}{n} \right]} (-1)^\nu \frac{C(\beta, \mu)}{\mu !} p_0^{\mu-\nu} \binom{\mu}{\nu} 0 \leq \nu \leq \left[ \frac{\beta}{n} \right].$$

Remarquons que nous avons obtenu le résultat suivant :

Le coefficient du terme en  $t^\alpha$  du développement de la fraction :

$$\frac{1}{1 + b_1 t + \dots + b_{m+n} t^{m+n}} \quad \text{où} \quad b_i = \frac{p-n+i}{p-n} \quad \text{si} \quad i \neq n, \quad b_n = \frac{1}{p-n} \left( p_0 - \frac{1}{s} \right)$$

est le polynôme en  $\frac{1}{s}$  :

$$\sum_{\nu=0}^{\alpha'} B(\alpha, \nu) \frac{1}{s^\nu} \quad \text{où} \quad \alpha' = \left[ \frac{\alpha}{n} \right]$$

et où  $B(\alpha, \nu)$  est le coefficient défini par la formule III.2.17 ci-dessus. Ainsi :

$$\text{III.2.18} \quad \frac{1}{1 + b_1 + \dots + b_{m+n}t^{m+n}} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \left( \sum_{\nu=0}^{\alpha'} B(\alpha, \nu) \frac{1}{s^\nu} \right) t^\alpha$$

pourvu que  $b_i = \frac{p-n+i}{p-n}$  pour  $i \neq n$ , et  $b_n = \frac{1}{p-n} \left( p_0 - \frac{1}{s} \right)$ .

c) Explicitation des expressions :

$$\frac{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+n})}{\Delta(0, 1, \dots, m+n-1)} = E(\mathcal{E}_{m+n}).$$

Nous avons vu (formule III.2.11) que la fonction génératrice de ces expressions est :

$$\text{III.2.19} \quad \chi(t_1, t_2, \dots, t_{m+n}) = \frac{\Delta_t(0, 1, \dots, m+n-1)}{\prod_{k=1}^{m+n} \frac{1}{p-n} t_k^n \left[ \Phi(t_k) - \frac{1}{s} \right]}$$

où  $\Delta_t(0, 1, \dots, m+n-1)$  désigne le déterminant de Vandermonde :

$$\Delta_t(0, 1, \dots, m+n-1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_{m+n} \\ t_1^2 & t_2^2 & \dots & t_{m+n}^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ t_1^{m+n-1} & t_2^{m+n-1} & \dots & t_{m+n}^{m+n-1} \end{vmatrix}$$

Soit  $\mathfrak{J}$  une permutation des nombres  $0, 1, \dots, m+n-1$  :

$$\mathfrak{J} = \{ i_1, i_2, \dots, i_{m+n} \}$$

et soit  $I$  le nombre d'inversions de cette permutation. Le déterminant de Vandermonde des  $t$  peut être développé sous la forme :

$$\text{III.2.20} \quad \Delta_t(0, 1, \dots, m+n-1) = \sum_{\mathfrak{J} \in \mathfrak{F}} (-1)^I t_1^{i_1} t_2^{i_2}, \dots, t_{m+n}^{i_{m+n}}$$

la sommation étant faite sur l'ensemble  $\mathfrak{F}$  de toutes les permutations possibles. Un terme en  $t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \dots t_{m+n}^{\alpha_{m+n}}$  du développement de  $\chi(t_1, t_2, \dots, t_{m+n})$  provient des produits des différents termes en  $t_1^{i_1} t_2^{i_2} \dots t_{m+n}^{i_{m+n}}$ , où :

$$i_j \leq \alpha_j \quad j = 1, 2, \dots, m+n,$$

par ceux en  $t_1^{\alpha_1 - i_1} t_2^{\alpha_2 - i_2} \dots t_{m+n}^{\alpha_{m+n} - i_{m+n}}$  provenant du développement de la fraction :

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^{k=m+n} \frac{1}{p-n} t_k^n \left[ \Phi(t_k) - \frac{1}{s} \right]}$$

Posons  $\beta_j = \alpha_j - i_j, j = 1, 2, \dots, m+n$ . Un terme  $t_1^{\beta_1} t_2^{\beta_2} \dots t_{m+n}^{\beta_{m+n}}$  est le produit du terme en  $t_1^{\beta_1}$  venant du développement de :

$$\frac{1}{\frac{1}{p-n} t_1^n \left[ \Phi(t_1) - \frac{1}{s} \right]} \equiv R(t_1)$$

par le terme en  $t_2^{\beta_2}$  venant du développement  $R(t_2)$ , etc.

En utilisant le résultat III.2.18 nous voyons qu'un tel terme a pour coefficient :

$$\prod_{j=1}^{j=m+n} \left( \sum_{v_j=0}^{\beta'_j} B(\beta_j, v_j) \frac{1}{s^{v_j}} \right) \quad \text{avec} \quad \beta'_j = \left[ \frac{\beta_j}{n} \right],$$

Il est évident que ce terme n'existe que si  $\beta_j = \alpha_j - i_j \geq 0$  quel que soit  $j$ . Pour obtenir le coefficient du terme en  $t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \dots t_{m+n}^{\alpha_{m+n}}$  du développement de  $\chi(t_1, t_2, \dots, t_{m+n})$  il suffira d'ajouter les coefficients ci-dessus correspondant à toutes les permutations  $\mathfrak{J}$  pour lesquelles  $\alpha_j \geq i_j$ .

On désignera par  $\mathfrak{F}_1$  l'ensemble des permutations telles que  $\alpha \geq i_j \forall j$  et par  $I$  le nombre d'inversions d'une telle permutation  $\mathfrak{J}$  :

$$\text{III.2.21} \quad E(\mathfrak{E}_{m+n}) = \sum_{\mathfrak{J} \in \mathfrak{F}_1} (-1)^I \prod_{j=1}^{j=m+n} \left( \sum_{v_j=0}^{\beta'_j} B(\beta_j, v_j) \frac{1}{s^{v_j}} \right).$$

A chaque permutation  $\mathfrak{J}$  correspond un polynôme en  $\frac{1}{s}$  de degré :

$$\beta'_1 + \beta'_2 + \dots + \beta'_{m+n} \quad \text{posons} \quad N = \sup_{\mathfrak{J}} \beta'_1 + \beta'_2 + \dots + \beta'_{m+n}.$$

L'expression  $E(\mathfrak{E}_{m+n})$  est identique à un polynôme en  $\frac{1}{s}$  de degré  $N$  :

$$E(\mathfrak{E}_{m+n}) = \sum_{v=0}^{v=N} L(\mathfrak{E}_{m+n}, v) \cdot \frac{1}{s^v} \quad \text{avec}$$

$$\text{III.2.22} \quad L(\mathfrak{E}_{m+n}, v) = \sum_{\mathfrak{J} \in \mathfrak{F}_1} (-1)^I \sum_{\{v_j\}} \prod_{j=1}^{j=m+n} B(\beta_j, v_j)$$

la seconde sommation étant faite sur l'ensemble des entiers  $v_j$  positifs ou

nuls vérifiant  $\sum_{j=1}^{j=m+n} v_j = v$ .

D'où le

LEMME III.7. — *Le rapport  $\frac{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+n})}{\Delta(0, 1, \dots, m+n-1)}$  est identique au polynôme en  $\frac{1}{s}$  :*

$$\text{III.2.23} \quad \frac{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+n})}{\Delta(0, 1, \dots, m+n-1)} = \sum_{v=0}^{v=N} L(\mathcal{E}_{m+n}, v) \frac{1}{s^v}$$

défini par les égalités suivantes :

- \*  $\mathcal{E}_{m+n}$  est l'ensemble des entiers  $\{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+n} \}$
- \*  $\mathcal{J}$  est une permutation  $\{ i_1, i_2, \dots, i_{m+n} \}$  des entiers  $\{ 0, 1, \dots, m+n-1 \}$  telle que  $\beta_j = \alpha_j - i_j \geq 0 \forall j$  ;  $I$  est le nombre d'inversions de  $\mathcal{J}$ .
- $\mathcal{J}_1$  est l'ensemble de ces permutations :

$$* \quad N = \text{Sup}_{\mathcal{J} \in \mathcal{J}_1} \beta'_1 + \beta'_2 + \dots + \beta'_{m+n} = \text{Sup}_{\mathcal{J} \in \mathcal{J}_1} \left[ \frac{\beta_1}{n} \right] + \left[ \frac{\beta_2}{n} \right] + \dots + \left[ \frac{\beta_{m+n}}{n} \right]$$

$$* \quad C(\beta, \mu) = \sum_{\lambda = \text{Sup} \left\{ \left[ \frac{\beta}{m+n}, \mu \right] \right\}}^{\lambda = \beta} \frac{(-1)^{\lambda} \lambda !}{p^{\lambda-n}} \sum_{\{k_i\}}^{i=m+n} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^{i=m+n} \frac{(p_{-n+i})^{k_i}}{k_i !}$$

la seconde sommation étant faite sur l'ensemble des entiers  $k_i, i \neq n$ , vérifiant :

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{i=n} k_i = \lambda - \mu \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{i=n} i k_i = \beta - n\mu$$

$$* \quad B(\beta, v) = \sum_{\mu=v}^{\mu = \left[ \frac{\beta}{n} \right]} (-1)^v \frac{C(\beta, \mu)}{\mu !} P_0^{\mu-v} \left( \frac{\mu}{v} \right)$$

$$* \quad L(\mathcal{E}_{m+n}, v) = \sum_{\mathcal{J} \in \mathcal{J}_1} (-1)^I \left\{ \sum_{\{v_j\}}^{j=m+n} \prod_{j=1}^{j=m+n} B(\beta_j, v_j) \right\}$$

la seconde sommation étant faite sur l'ensemble des entiers  $v_j$  vérifiant :

$$\sum_{-1}^{j=m+n} v_j = v \quad 0 \leq v_j \leq \left[ \frac{\beta_j}{n} \right].$$

*Remarque.* — Il est possible d'exprimer sous la forme d'une intégrale certains des résultats présentés ci-dessus.

En effet, reprenons la fonction génératrice des  $S_\alpha$  :

$$\psi(t) = p_{-n} \cdot \frac{1}{t^{-m+1} \left[ \Phi(t) - \frac{1}{s} \right]} .$$

Le coefficient de  $t^\alpha$  du développement au voisinage de  $t = 0$  de cette fraction rationnelle est le résidu relatif au pôle  $t = 0$  de  $\frac{1}{t^{\alpha+1}} \cdot \psi(t)$ . Donc :

$$\text{III.2.24} \quad S_\alpha = \frac{p_{-n}}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dt}{t^{\alpha+2-m} \left[ \Phi(t) - \frac{1}{s} \right]} .$$

Dans cette formule  $\gamma$  désigne un contour fermé du plan complexe de la variable  $t$  entourant l'origine et ne contenant en son intérieur aucun des zéros de  $\Phi(t) - \frac{1}{s}$ .

L'expression  $\Phi(t) - \frac{1}{s}$  peut être écrite :

$$\begin{aligned} \Phi(t) - \frac{1}{s} &= p_{-n}t^{-n} + p_{-n+1}t^{-n+1} + \dots + p_0 + \dots + p_m t^m - \frac{1}{s} \\ &= p_{-n}t^{-n} \left[ 1 + \frac{p_{-n+1}}{p_{-n}}t + \dots + \frac{p_m}{p_{-n}}t^{m+n} - \frac{1}{sp_{-n}}t^n \right] \\ &= p_{-n}t^{-n} \left( 1 + \frac{p_{-n+1}}{p_{-n}}t + \dots + \frac{p_m}{p_{-n}}t^{m+n} \right) \\ &\quad \left[ 1 - \frac{1}{sp_{-n}} \cdot \frac{t^n}{1 + \frac{p_{-n+1}}{p_{-n}}t + \dots + \frac{p_m}{p_{-n}}t^{m+n}} \right] . \end{aligned}$$

Si le contour  $\gamma$  est assez voisin de l'origine, la fraction rationnelle qui apparaît dans le crochet est petite en module et l'on peut alors développer :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 - \frac{1}{sp_{-n}} \cdot \frac{t^n}{1 + \frac{p_{-n+1}}{p_{-n}}t + \dots + \frac{p_m}{p_{-n}}t^{m+n}}} \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{(sp_{-n})^\mu} \cdot \frac{t^{n\mu}}{\left( 1 + \frac{p_{-n+1}}{p_{-n}}t + \dots + \frac{p_m}{p_{-n}}t^{m+n} \right)^\mu} . \end{aligned}$$

La série est uniformément convergente en tout point d'un disque  $|t| < t_0$  ( $t_0$  assez petit) car elle est équivalente en module à la série géométrique :

$$\sum \left( \frac{t}{sp-n} \right)^{\mu\alpha}$$

On peut intervertir l'ordre des signes de sommation dans  $S_\alpha$  :

$$\begin{aligned} S_\alpha &= \frac{p-n}{2\pi i} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{(sp-n)^\mu} \int_{\gamma'} \frac{dt}{t^{\alpha+2m-n\mu} \left( 1 + \frac{p-n+1}{p-n} t + \dots + \frac{p_m}{p-n} t^{m+n} \right)^\mu \Phi(t)} \\ &= \frac{p-n}{2\pi i} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{s^\mu} \int_{\gamma'} \frac{dt}{t^{\alpha+2-m} [\Phi(t)]^{\mu+1}} \end{aligned}$$

Notons que dès que  $\alpha + 2 - m - n(\mu + 1)$  sera négatif ou nul, l'expression sous le signe somme n'aura plus de résidu pour  $t = 0$  et l'intégrale sera nulle. Donc :

$$\text{III.2.25} \quad S_\alpha = \frac{p-n}{2\pi i} \sum_{\mu=0}^{\left[ \frac{\alpha-(m+n-1)}{n} \right]} \frac{1}{s^\mu} \int_{\gamma'} \frac{dt}{t^{\alpha+2-m} [\Phi(t)]^{\mu+1}}$$

expression à rapprocher de III.2.15 :

$$S_\alpha = \sum_{\nu=0}^{\nu=\alpha'} B(\alpha^*, \nu) \frac{1}{s^\nu}$$

Ce rapprochement conduit à l'expression intégrale des coefficients  $B(\beta, \mu)$  :

$$\text{III.2.26} \quad B(\beta, \mu) = \frac{p-n}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{dt}{t^{\beta+1+n} [\Phi(t)]^{\mu+1}}$$

Malheureusement les coefficients  $L(\delta_{m+n}, \nu)$  n'ont pas d'expression intégrale simple, du moins dans le cas général.

### 3° Explicitation des probabilités $p_0^{(t)}, x$ .

#### A) Expression de la fonction $F(x, s)$ indépendamment des racines de l'équation caractéristique II.2.37.

Les formules III.1.16 et III.1.19 nous permettent d'écrire  $F(x, s)$  à l'aide des expressions  $S_\alpha$  et  $E(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+n})$  que nous venons d'étudier :

$$\text{III.3.1} \quad F(x, s) = \frac{\gamma_{-m+1}(x)}{sp-n} \cdot S_{x+m-1} + \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{(-1)^k}{sp-n} S_{b+m+k} \cdot \frac{E[\delta_{m+n}(x, k)]}{E[\delta_{m+n}(b+1, 0)]}$$



Dans cette formule,  $\varepsilon_{m+n}(x, k)$  désigne l'ensemble :

$$\varepsilon_{m+n}(x, k) = \{0, 1, \dots, m-1, m+a+x, \dots, \underbrace{m+a+b+1+i, \dots}_{n-1 \text{ termes}}\}$$

où les  $n-1$  derniers termes sont obtenus en remplaçant successivement  $i$  par les entiers de la suite  $0, 1, \dots, n-1$  où  $k$  a été éliminé.

Ainsi  $\varepsilon_{m+n}(b+1, 0)$  représente l'ensemble :

$$\varepsilon_{m+n}(b+1, 0) = \{0, 1, \dots, m-1, m+a+b+1, m+a+b+2, \dots, m+a+b+n\}$$

Développons en polynômes de la variable  $\frac{1}{s}$  les éléments qui entrent dans la composition de  $F(x, s)$  :

$$a) \quad S_{x+m-1} \left\{ \begin{array}{l} = \sum_{v=0}^{v=(x+m-1)'} B[(x+m-1)^*, v] \cdot \frac{1}{s^v} \quad \text{si } x \geq m+n-1 \\ = 0 \quad \text{si } -1 \leq x+m-1 \leq m+n-2. \end{array} \right.$$

Ce terme est précédé de la fonction  $\gamma_{-m+1}(x)$ , nulle pour  $x \leq -m$ , égale à 1 pour  $x \geq -m+1$ , donc le produit  $\gamma_{-m+1}(x)S_{x+m-1}$  est nul pour  $x \leq n-1$ , il n'intervient qu'à partir de  $x = n$ ; nous le remplacerons par le produit  $\gamma_n(x)S_{x+m-1}$ .

D'autre part, d'après le lemme III.6 :

$$(x+m-1)^* = x+m-1 - (m+n-1) = x-n$$

$$(x+m-1)' = \left[ \frac{x-n}{n} \right] = \left[ \frac{x}{n} \right] - 1$$

donc :

$$\text{III.3.2} \quad \gamma_n(x)S_{x+m-1} = \sum_{v=0}^{\left[ \frac{x}{n} \right] - 1} B(x-n, v) \frac{1}{s^v} \quad \text{pour } x \geq n.$$

b)  $S_{b+m+k}$  s'obtiendra de la même façon :

$$(b+m+k)^* = b+m+k - (m+n-1) = b+k+1-n$$

$$(b+m+k)' = \left[ \frac{b+k+1-n}{n} \right] = \left[ \frac{b+k+1}{n} \right] - 1$$

donc :

$$\text{III.3.3} \quad S_{b+m+k} = \sum_{v=0}^{\left[ \frac{b+k+1}{n} \right] - 1} B(b+k+1-n, v) \frac{1}{s^v}.$$

c) D'après le lemme III.7,  $E[\xi_{m+n}(x, k)]$  est le polynôme :

$$\text{III.3.4 } E[\xi_{m+n}(x, k)] = \sum_{v=0}^{v=N_k} L[\xi_{m+n}(x, k), v] \frac{1}{s^v} \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Remarquons que les permutations  $\mathfrak{J} = \{i_1, i_2, \dots, i_{m+n}\}$  des entiers  $\{0, 1, \dots, m+n-1\}$  telles que  $\beta_j = \alpha_j - i_j \geq 0$  sont nécessairement du type  $\{0, 1, \dots, m-1, i_{m+1}, \dots, i_{m+n}\}$  donc  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m = 0$ .

Par ailleurs le degré du polynôme est :

$$N_k = \text{Sup}_{\mathfrak{J} \in \mathfrak{F}_1} \left[ \frac{\beta_1}{n} \right] + \dots + \left[ \frac{\beta_{m+n}}{n} \right].$$

LEMME III.8. — Le degré  $N_k$  du polynôme  $E[\xi_{m+n}(x, k)]$  vérifie :

$$N_k \leq a + b + 1 - \left\lfloor \frac{b + k + 1 - x}{n} \right\rfloor ; k = 0, 1, \dots, n-1$$

l'égalité ayant lieu lorsque  $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}$ .

Nous ne donnerons la démonstration que pour  $1 \leq k \leq n-2$ , les cas  $k = 0$  et  $k = n-1$  nécessitant un raisonnement très voisin et conduisant à la même formule.

Écrivons le quotient entier de  $\beta_j$  par  $n$  :

$$\beta_j = n\beta'_j + r_j \quad r_j < n$$

et sommions sur  $j$  :

$$\sum_j \beta_j = n \sum_j \beta'_j + \sum_j r_j.$$

Comme  $\beta_j = \alpha_j - i_j$ , la somme  $\sum_j \beta_j$  est indépendante de la permutation  $\mathfrak{J}$  et vaut :

$$\sum_{j=m+1}^{m+n} \beta_j = \sum_{j=m+1}^{m+n} \alpha_j - [m + (m+1) + \dots + (m+n-1)].$$

Donc rechercher  $\text{Sup}_{\mathfrak{J} \in \mathfrak{F}_1} \sum_j \beta'_j$  revient à faire apparaître une permutation  $\mathfrak{J}_0$  réalisant le minimum de  $\sum_j r_j$ .

D'autre part, on a  $\beta_j \equiv r_j \pmod n$ , d'où :

$$\sum_j \beta_j \equiv \sum_j r_j \pmod n$$

l'ensemble des sommes  $\sum_j r_j$  est de la forme  $r + \lambda n$ , où  $0 \leq r < n$ .

S'il existe une permutation  $\mathfrak{J}_0$  de  $\mathfrak{F}_1$  telle que  $\sum_j r_j = r$ , elle réalise le minimum de  $\sum_j r_j$ , donc le maximum de  $\sum_j \beta_j$ . D'autre part, comme pour cette permutation  $\mathfrak{J}_0$ , on a :

$$\sum_j \beta_j = n \sum_j \left[ \frac{\beta_j}{n} \right] + r \quad 0 \leq r < n,$$

alors :

$$\sup_{\mathfrak{J} \in \mathfrak{F}_1} \sum_j \left[ \frac{\beta_j}{n} \right] = \left[ \frac{\sum_j \beta_j}{n} \right].$$

Désignons par  $\theta$  le reste du quotient de  $a + b + 1$  par  $n$  :

$$a + b + 1 \equiv \theta \pmod n \quad 0 \leq \theta < n.$$

Le tableau suivant donne l'ensemble des  $\alpha_j (j = m + 1, \dots, m + n)$ , la permutation  $\mathfrak{J}_0$ , l'ensemble des  $\beta_j$  correspondants, ainsi que les restes  $r_j$ .

$\alpha$	$\mathfrak{J}_0$	$\beta$	$r$
$m + a + x$	$m + (\theta + k)^*$	$a + x - (\theta + k)^*$	$r_{m+1}$
$m + a + b + 1$	$m + \theta$	$a + b + 1 - \theta$	0
$m + a + b + 2$	$m + (\theta + 1)^*$	$a + b + 2 - (\theta + 1)^*$	0
.....	.....	.....	.....
$m + a + b + k$	$m + (\theta + k - 1)^*$	$a + b + k - (\theta + k - 1)^*$	0
$m + a + b + k + 2$	$m + (\theta + k + 1)^*$	$a + b + k + 2 - (\theta + k + 1)^*$	0
$m + a + b + k + 3$	$m + (\theta + k + 2)^*$	$a + b + k + 3 - (\theta + k + 2)^*$	0
.....	.....	.....	.....
$m + a + b + n$	$m + (\theta + n - 1)^*$	$a + b + n - (\theta + n - 1)^*$	0

Dans la colonne  $\mathfrak{J}_0$ ,  $(\theta + k)^*$  désigne le reste du quotient entier de  $\theta + k$  par  $n$ . Comme on a pris  $n$  nombres consécutifs :  $\theta, \theta + 1, \dots, \theta + n - 1$ , les restes forment une permutation des nombres  $\{0, 1, \dots, n - 1\}$  et  $\mathfrak{J}_0$  est bien une permutation des nombres  $\{m, m + 1, \dots, m + n - 1\}$ .

D'autre part,  $a + b + 1 \equiv \theta$  donne :

$$a + b + k \equiv \theta + k - 1 \equiv (\theta + k - 1)^*$$

donc :

$$a + b + k - (\theta + k - 1)^* \equiv 0 \pmod{n}.$$

Ainsi pour la permutation  $\mathfrak{J}_0$  on a  $\sum_j r_j = r_{m+1} < n$ . Le raisonnement présenté ci-dessus permet d'écrire :

$$\text{Sup}_{\mathfrak{J}} \sum_j \beta'_j = \left\lceil \frac{\sum_j \beta_j}{n} \right\rceil.$$

Or :

$$\begin{aligned} \sum_j \beta_j &= \sum_j \alpha_j - \sum_j i_j = nm + na + (n-1)b + x - k - 1 \\ &+ \frac{n(n+1)}{2} - nm - \frac{(n-1)n}{2} = n(a+b+1) - (b+k+1-x) \end{aligned}$$

d'où :

$$\left\lceil \frac{\sum_j \beta_j}{n} \right\rceil = \left\lceil a + b + 1 - \frac{b+k+1-x}{n} \right\rceil = a + b + 1 - \left\lfloor \frac{b+k+1-x}{n} \right\rfloor$$

(Rappelons que  $\lceil a \rceil$  désigne l'entier supérieur ou égal à  $a$ ).

Le tableau ci-contre montre que presque tous les  $\beta_j$  sont positifs. Seul  $\beta_{m+1} = a + x - (\theta + k)^*$  est soit négatif, soit positif, soit nul. La permutation  $\mathfrak{J}_0$  fait donc partie de  $\mathfrak{F}_1$  pourvu que  $a + x - (\theta + k)^* \geq 0$ . Notons que quel que soit  $x$  cette condition est réalisée pour au moins une valeur de  $k$  :  $k = n - \theta$  pour laquelle  $(\theta + k)^* = 0$ .

Lorsque la permutation  $\mathfrak{J}_0$  ne fait pas partie de  $\mathfrak{F}_1$ , cela ne signifie pas que  $\text{Sup}_{\mathfrak{J} \in \mathfrak{F}_1} \sum_j \left\lceil \frac{\beta_j}{n} \right\rceil$  n'est pas égal à  $\left\lceil \frac{1}{n} \sum_j \beta_j \right\rceil$  : d'autres permutations que  $\mathfrak{J}_0$  peuvent réaliser le même minimum de  $\sum_j r_j$  et conduire au même résultat.

*Cas particulier.* — Le dénominateur de  $F(x, s)$  dépend de  $E[\delta_{m+n}(b+1), 0]$ ; dans ce cas  $\alpha'_j = a + b + j$ ,  $j \in \{m+1, m+2, \dots, m+n\}$  et la permutation  $\mathfrak{J}_0$  est formée des  $i_j = m + (\theta + j - m - 1)^*$ , donc :

$$\begin{aligned} \beta_j &= a + b + j - m - (\theta + j - m - 1)^* = a + b + 1 - \theta & m+1 \leq j \leq m+n-\theta \\ &= a + b + 1 - \theta + n & m+n-\theta+1 \leq j \leq m+n \\ & & (\text{pour } \theta \text{ non nul}). \end{aligned}$$

Tous les  $\beta_j$  sont ainsi divisibles par  $n$  : les restes  $r_j$  sont nuls et, ce qui est plus intéressant, les  $\beta_j$  sont tous positifs car  $\theta$  est inférieur à  $n - 1$  et  $a + b + 1$  est supérieur ou égal à  $n$  (la présence des barrières absorbantes fait que seuls les  $n \leq a + b + 1$  peuvent être envisagés). Ainsi dans ce cas  $J_0 \in \mathcal{F}_1$  et l'on a :

$$N = a + b + 1.$$

Remarquons que dans ce cas particulier  $J_0$  est la seule permutation annulant tous les  $r_j$  : toute autre permutation  $J \in \mathcal{F}_1$  conduira à  $\sum_j \left\lfloor \frac{\beta_j}{n} \right\rfloor$  inférieur à  $\left\lfloor \frac{1}{n} \sum_j \beta_j \right\rfloor$ . Donc le coefficient du terme en  $\frac{1}{s^N}$  est obtenu à partir de la seule permutation  $J_0$  :

$$L[\mathcal{E}_{m+n}(b+1, 0), N] = (-1)^{\nu_0} \sum_{\{\nu_j\}_{j=m+1}^{m+n}} \prod_{j=m+1}^{m+n} B(\beta_j, \nu_j)$$

avec :

$$\sum_{j=m+1}^{m+n} \nu_j = N \quad 0 \leq \nu_j \leq \left\lfloor \frac{\beta_j}{n} \right\rfloor.$$

Comme  $N = \sum_j \left\lfloor \frac{\beta_j}{n} \right\rfloor$ , le seul ensemble de  $\nu_j$  dont la somme vaut  $N$  est formé des  $\nu_j = \left\lfloor \frac{\beta_j}{n} \right\rfloor$ , donc :

$$L[\mathcal{E}_{m+n}(b+1, 0), N] = (-1)^{\nu_0} \prod_{j=m+1}^{m+n} B\left(\beta_j, \left\lfloor \frac{\beta_j}{n} \right\rfloor\right).$$

La formule intégrale III.2.26 donne dans ce cas :

$$B\left(\beta_j, \left\lfloor \frac{\beta_j}{n} \right\rfloor\right) = \frac{p-n}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dt}{t^{\beta_j+1+n} [\Phi(t)]^{\left\lfloor \frac{\beta_j}{n} \right\rfloor+1}}.$$

On a vu ci-dessus que les  $n - \theta$  premiers  $\beta_j$  non nuls valent  $a + b + 1 - \theta$ , les  $\theta$  derniers valant  $a + b + 1 - \theta + n$ . Posons alors :

$$a + b + 1 = ne + \theta \quad (e \text{ est le quotient entier de } a + b + 1 \text{ par } n).$$

Pour  $m + 1 \leq j \leq m + n - \theta$ ,  $\beta_j = ne$  :

$$\begin{aligned} B(ne, e) &= \frac{p_{-n}}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{dt}{t^{n(e+1)+1} [\Phi(t)]^{e+1}} \\ &= \frac{p_{-n}}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{dt}{t [p_{-n} + p_{-n+1}t + \dots + p_m t^{m+n}]^{e+1}}. \end{aligned}$$

Ce terme est égal au produit par  $p_{-n}$  du résidu relatif au pôle  $t = 0$  de la fraction  $\frac{1}{t [p_{-n} + \dots + p_m t^{m+n}]^{e+1}}$ , soit à :

$$B(ne, e) = p_{-n} \times \frac{1}{(p_{-n})^{e+1}} = \frac{1}{(p_{-n})^e}.$$

Pour  $m + n - \theta + 1 \leq j \leq m + n$  (si  $\theta \neq 0$ ) le même raisonnement conduit à :

$$B\left(\beta_j, \left[\frac{\beta_j}{n}\right]\right) = B(ne + n, e + 1) = \frac{1}{(p_{-n})^{e+1}}$$

d'où :

$$\text{III.3.6} \quad L[\xi_{m+n}(b + 1, 0), N] = (-1)^{I_0} \cdot \left(\frac{1}{p_{-n}^e}\right)^{n-\theta} \left(\frac{1}{p_{-n}^{e+1}}\right)^\theta = (-1)^{I_0} \frac{1}{p_{-n}^{a+b+1}}$$

Enfin, la permutation  $\mathfrak{J}_0$  étant :

$$\mathfrak{J}_0 = \left\{ \underbrace{m + \theta, m + \theta + 1, \dots, m + n - 1}_{n - \theta \text{ termes}}, \underbrace{m, m + 1, \dots, m + \theta - 1}_{\theta \text{ termes}} \right\}$$

il y a  $\theta(n - \theta)$  inversions donc  $I_0 = \theta(n - \theta)$ .

On a ainsi établi la formule particulière :

$$\text{III.3.7} \quad E[\xi_{m+n}(b + 1, 0)] = \sum_{v=0}^{v=a+b+1} L[\xi_{m+n}(b + 1, 0), v] \frac{1}{s^v}$$

avec :

$$L[\xi_{m+n}(b + 1, 0), a + b + 1] = (-1)^{\theta(n-\theta)} \cdot \frac{1}{p_{-n}^{a+b+1}}.$$

En rassemblant finalement tous les résultats de ce paragraphe on peut énoncer le :

**THÉORÈME III.1.** — Une chaîne de Markov étant définie sur l'espace des entiers  $\{-a - n, \dots, b + m\}$  ( $a, b, m, n$  entiers positifs) par les probabilités de passage :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{x, x+h} = p_h \\ p_{-a-i, -a-i} = 1 \\ p_{b+j, b+j} = 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} h = -n, -n + 1, \dots, m - 1, m \\ x \in \{-a, \dots, b\} \\ i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ j \in \{1, 2, \dots, m\} \end{array} \right.$$

et les probabilités initiales :

$$\begin{cases} p_x = 0 & x \neq 0 \\ p_0 = 1 \end{cases}$$

la fonction génératrice des probabilités de passage :  $F(x, s) = \sum_{t=0}^{\infty} p_{0,x}^{(t)} s^t$  est :

$$\text{III.3.8 } F(x, s) = \frac{\gamma_n(x)}{sp-n} \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{x}{n} \rfloor - 1} B(x-n, \nu) \frac{1}{s^\nu} + \frac{1}{sp-n} \sum_{k=0}^{x-n-1} (-1)^k \left\{ \sum_{\nu_k=0}^{\lfloor \frac{b+k+1}{n} \rfloor - 1} B(b+k+1-n, \nu_k) \frac{1}{s^{\nu_k}} \right\} \frac{\sum_{\nu_k=0}^{N_k} L[\mathcal{E}_{m+n}(x, k), \nu_k] \frac{1}{s^{\nu_k}}}{\sum_{\nu=0}^{a+b+1} L[\mathcal{E}_{m+n}(b+1), 0] \frac{1}{s^\nu}}$$

où l'on a posé :

\*  $\gamma_n(x)$  fonction valant 1 pour  $x \geq n, 0$  ailleurs :

\* 
$$B(x, \nu) = \frac{p-n}{2\pi i} \int_c \frac{dz}{z^{x+n+1} [\Phi(z)]^{\nu+1}}$$

$$\Phi(z) = p-nz^{-n} + \dots + p_0 + p_1z + \dots + p_mz^m.$$

c) contour entourant l'origine, n'ayant en son intérieur aucun des zéros de  $\Phi(z)$  :

\* 
$$L[\mathcal{E}_{m+n}(x, k), \nu] = \sum_{\mathfrak{J} \in \mathfrak{F}_1} (-1)^t \sum_{\{\nu_j\}} \prod_{j=m+1}^{m+n} B(\beta_j, \nu_j)$$

$$\mathcal{E}_{m+n}(x, k) = \{ 0, 1, \dots, m-1, m+a+x, m+a+b+1, \dots, m+a+b+k, m+a+b+k+2, \dots, m+a+b+n \}$$

$$= \{ \alpha_j \}$$

$\mathfrak{J} = \{ i_j \} (j = m+1, \dots, m+n)$  est une permutation des entiers  $(m, m+1, \dots, m+n-1)$

$$\mathfrak{F}_1 = \{ \mathfrak{J} : \beta_j = \alpha_j - i_j \geq 0 \quad \forall j \}$$

$$\{ \nu_j \} = \left\{ \text{entiers positifs ou nuls tels que } \sum_{j=1}^{m+n} \nu_j = \nu, 0 \leq \nu_j \leq \left\lfloor \frac{\beta_j}{n} \right\rfloor \right\}$$

\* 
$$N_k = \text{Sup}_{\mathfrak{J} \in \mathfrak{F}_1} \sum_{j=m+1}^{m+n} \left\lfloor \frac{\beta_j}{n} \right\rfloor$$

*Remarques :*

1° Le coefficient  $B(x, \nu)$  dont on a donné une forme intégrale dans l'énoncé ci-dessus s'écrit sous forme explicite :

$$B(x, \nu) = \sum_{\mu=\nu}^{\lfloor \frac{x}{n} \rfloor} (-1)^\nu \frac{\binom{\mu}{\nu}}{\mu!} p_0^{\mu-\nu} \left\{ \sum_{\lambda = \text{Sup} \left\{ \lfloor \frac{x}{m+n} \rfloor, \mu \right\}}^x \frac{(-1)^{\lambda} \lambda!}{p^{\lambda-n}} \sum_{\{k_i\}}^{i=m+n} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}} \frac{(p-n+i)^{k_i}}{k_i!} \right\}$$

où  $\{k_i\} = \{ \text{entiers positifs ou nuls } k_i \text{ tels que } \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{m+n} k_i = \lambda - \mu,$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{m+n} i k_i = x - n\mu \}$$

2° Le premier terme de l'expression III.3.8, polynôme en  $\frac{1}{s}$ , ne sert qu'à éliminer les termes en  $\frac{1}{s}$  pouvant apparaître lors du développement du second terme.  $F(x, s)$  est ainsi identique à la partie régulière de ce second terme ce que nous écrivons :

$$F(x, s) = \mathcal{R}e \frac{1}{sp-n} \sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k \left\{ \sum_{\nu_k=0}^{\lfloor \frac{b+k+1}{n} \rfloor - 1} B(b+k+1-n, \nu_k) \frac{1}{s^{\nu_k}} \left\{ \frac{\sum_{\nu_k=0}^{\nu_k=N_k} L[\mathcal{E}_{m+n}(x, k), \nu_k] \frac{1}{s^{\nu_k}}}{\sum_{\nu=0}^{a+b+1} L[\mathcal{E}_{m+n}(b+1, 0), \nu] \frac{1}{s^\nu}} \right\} \right.$$

Cette forme de la solution est celle qui, rappelée en II.1.17, avait été donnée par M. Fréchet. Nous avons ainsi pu développer en  $\frac{1}{s}$  les déterminants figurant dans cette formule II.1.17. Il faut noter que la méthode employée utilise le fait que la chaîne de Markov étudiée est à la fois homogène dans le temps et dans l'espace : elle ne peut être utilisée dans le cas général d'une chaîne de Markov sur un ensemble fini d'états possibles.



**B) Expression des probabilités  $p_{0,x}^{(t)}$  indépendamment des racines de l'équation caractéristique II.2.37.**

La fonction  $F(x, s)$  étant la fonction génératrice des probabilités  $p_{0,x}^{(t)}$  :

$$F(x, s) = \sum_{t=0}^{\infty} p_{0,x}^{(t)} s^t$$

on obtiendra les probabilités  $p_{0,x}^{(t)}$  en développant  $F(x, s)$  en  $s$  au voisinage de  $s = 0$ . La remarque précédente montre qu'il suffit de développer en  $s$  la partie régulière du second terme de l'expression III.3.8 de  $F(x, s)$ . Dans cette expression chaque terme de la somme figurant au numérateur est un polynôme en  $\frac{1}{s}$  de degré :

$$d_k = \left[ \frac{b+k+1}{n} \right] - 1 + N_k.$$

On a vu au lemme III.8 que  $N_k \leq a + b + 1 - \left\lfloor \frac{b+k+1-x}{n} \right\rfloor$ , l'égalité étant atteinte pour au moins une valeur de  $k$ .

Donc :

$$d_k \leq \left[ \frac{b+k+1}{n} \right] + a + b - \left\lfloor \frac{b+k+1-x}{n} \right\rfloor.$$

Écrivons les égalités de définition des entiers intervenant dans l'égalité ci-dessus :

$$b+k+1 = n \left[ \frac{b+k+1}{n} \right] + r \quad 0 \leq r < n$$

$$b+k+1-x = n \left\lfloor \frac{b+k+1-x}{n} \right\rfloor - r' \quad 0 \leq r' < n$$

et retranchons membre à membre :

$$x = n \left\{ \left[ \frac{b+k+1}{n} \right] - \left\lfloor \frac{b+k+1-x}{n} \right\rfloor \right\} + r + r'.$$

Ainsi :

$$\left[ \frac{b+k+1}{n} \right] - \left\lfloor \frac{b+k+1-x}{n} \right\rfloor \text{ est égal soit à } \left[ \frac{x}{n} \right] \text{ (lorsque } r+r' < n)$$

$$\text{soit à } \left[ \frac{x}{n} \right] - 1 \text{ (lorsque } r+r' \geq n).$$

En définitive on a :

$$d_k \leq a + b + \left\lceil \frac{x}{n} \right\rceil$$

l'égalité pouvant avoir lieu suivant les différentes valeurs de  $k$  et de  $x$ . Afin d'avoir une formule générale nous conviendrons que :

$$\text{Sup}_k d_k = a + b + \left\lceil \frac{x}{n} \right\rceil$$

le coefficient de  $\frac{1}{s^{a+b+\lceil \frac{x}{n} \rceil}}$  étant nul lorsque ce Sup vaut  $a + b + \left\lceil \frac{x}{n} \right\rceil - 1$ .

Le polynôme du numérateur de l'expression III.3.9 est ainsi un polynôme en  $\frac{1}{s}$  de degré  $a + b + \left\lceil \frac{x}{n} \right\rceil$ . Nous l'écrivons :

$$\text{III.3.10} \quad \sum_{\mu=0}^{a+b+\lceil \frac{x}{n} \rceil} D(\mu, x) \frac{1}{s^\mu} = \frac{1}{s^{a+b+\lceil \frac{x}{n} \rceil}} \sum_{\mu=0}^{a+b+\lceil \frac{x}{n} \rceil} D(a+b+\lceil \frac{x}{n} \rceil - \mu, x) s^{\mu}$$

avec :

$$\text{III.3.11} \quad D(\mu, x) = \sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k \sum_{\{v_k, v'_k\}} L[\mathcal{E}_{m+n}(x, k), v_k] \cdot B(b+k+1-n, v'_k)$$

où :

$$\{v_k, v'_k\} = \{ \text{entiers } v_k, v'_k \text{ tels que}$$

$$v_k + v'_k = \mu, 0 \leq v_k \leq N_k, 0 \leq v'_k \leq \left\lceil \frac{b+k+1}{n} \right\rceil - 1 \}$$

Le dénominateur de l'expression III.3.9 peut être écrit :

$$\sum_{v=0}^{v=a+b} L[\mathcal{E}_{m+n}(b+1, 0), v] \frac{1}{s^v} + (-1)^{\theta(n-\theta)} \frac{1}{p_{-n}^{a+b+1}} \cdot \frac{1}{s^{a+b+1}}$$

ou encore :

$$\frac{(-1)^{\theta(n-\theta)}}{(sp_{-n})^{a+b+1}} \left[ 1 + \sum_{v=1}^{a+b+1} (-1)^{\theta(n-\theta)} (p_{-n})^{a+b+1} L[\mathcal{E}_{m+n}(b+1, 0), a+b+1-v] s^v \right]$$

Cette dernière forme permet d'écrire le développement au voisinage de  $s = 0$  de la fraction rationnelle :

$$\frac{1}{\sum_{\nu=0}^{a+b+1} L[\xi_{m+n}(b+1, 0), \nu] \frac{1}{s^\nu}}$$

en utilisant la formule III.2.12 :

III.3.12

$$\frac{1}{\sum_{\nu=0}^{a+b+1} L[\xi_{m+n}(b+1, 0), \nu] \cdot \frac{1}{s^\nu}} = (-1)^{\theta(n-\theta)} (sp_{-n})^{a+b+1} \left\{ 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} s^\mu M(\mu) \right\}$$

avec :

$$III.3.13 \quad M(\mu) = \sum_{\lambda=\lfloor \frac{\mu}{a+b+1} \rfloor}^{\lambda=\mu} (-1)^{\lambda+\lambda\theta(n-\theta)} (p_{-n})^{\lambda(a+b+1)} \lambda! \sum_{\{k_i\}}^{i=a+b+1} \prod_{i=1}^{i-1} \frac{1}{k_i!}$$

$$(L[\xi_{m+n}(b+1, 0), a+b+1-i])^{k_i}$$

où :

$$\{k_i\} = \left\{ k_i : \sum_i k_i = \lambda \quad \text{et} \quad \sum_i i k_i = \mu \right\}.$$

En définitive l'expression III.3.9 peut être écrite, compte tenu des formules III.3.10 et III.3.13 :

$$\frac{1}{sp_{-n}} \cdot \frac{1}{s^{a+b+\lfloor \frac{x}{n} \rfloor}} \left\{ \sum_{\mu=0}^{a+b+\lfloor \frac{x}{n} \rfloor} D\left(a+b+\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor - \mu, x\right) s^\mu \right\} \cdot (-1)^{\theta(n-\theta)} (sp_{-n})^{a+b+1} \left\{ 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} M(\mu) s^\mu \right\}$$

soit :

$$(-1)^{\theta(n-\theta)} \frac{p_{-n}^{a+b}}{s^{\lfloor \frac{x}{n} \rfloor}} \left\{ \sum_{\mu=0}^{a+b+\lfloor \frac{x}{n} \rfloor} D\left(a+b+\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor - \mu, x\right) s^\mu \right\} \cdot \left\{ 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} M(\mu) s^\mu \right\}.$$

Le terme en  $s^t$  de ce développement a pour coefficient :

$$p_{0,x}^{(t)} = (-1)^{\theta(n-\theta)} p_{-n}^{a+b} \sum_{\{\mu, \mu'\}} D\left(a+b+\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor - \mu, x\right) M(\mu')$$

où :

$$\{\mu, \mu'\} = \left\{ \mu \text{ et } \mu' \text{ tels que } \mu + \mu' = t + \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor, 0 \leq \mu \leq a + b + \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor, 0 \leq \mu' \right\}$$

D'où le

**THÉORÈME III.2.** — Une chaîne de Markov étant définie sur l'espace des entiers  $\{-a - n, \dots, 0, \dots, b + m\}$  ( $a, b, m, n$  sont quatre entiers positifs) par les probabilités de passage :

$$\begin{cases} p_{x,x+h} = p_h & h \in \{-n, \dots, +m\} \\ & x \in \{-a, \dots, 0, \dots, b\} \\ p_{-a-i,-a-i} = 1 & i \in \{1, \dots, n\} \\ p_{b+j,b+j} = 1 & j \in \{1, \dots, m\} \end{cases}$$

et les probabilités initiales :

$$\begin{cases} p_x = 0 & x \neq 0 \\ p_0 = 1 \end{cases}$$

les probabilités de passage  $p_{0,x}^{(t)}$  sont :

$$\text{III.3.14 } p_{0,x}^{(t)} = (-1)^{\theta(n-\theta)} p_{-n}^{a+b} \sum_{\mu=0}^{a+b+\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor} D(\mu, x) \cdot M(\mu + t - a - b)$$

où l'on a posé :

$$\theta \equiv a + b + 1 \text{ modulo } n$$

$$D(\mu, x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sum_{\{v_k, v'_k\}} L[\mathcal{E}_{m+n}(x, k), v_k] \cdot B(b + k + 1 - n, v'_k)$$

$\{v_k, v'_k\} = \{ \text{entiers non négatifs } v_k, v'_k \text{ tels que } :$

$$v_k + v'_k = \mu, \quad 0 \leq v_k \leq N_k, \quad 0 \leq v'_k \leq \left\lfloor \frac{b + k + 1}{n} \right\rfloor - 1 \}$$

$$M(\mu) = \sum_{\lambda=\left\lfloor \frac{\mu}{a+b+1} \right\rfloor}^{\lambda=\mu} (-1)^{\lambda+\lambda\theta(n-\theta)} (p_{-n})^{\lambda(a+b+1)} \lambda! \sum_{\{k_i\}} \prod_{i=1}^{i=a+b+1} \frac{1}{k_i!}$$

$$(L[\mathcal{E}_{m+n}(b + 1, 0), a + b + 1 - i])^{k_i}$$

$$\{k_i\} = \left\{ \text{entiers non négatifs } k_i \text{ tels que } \sum_{i=1}^{a+b+1} k_i = \lambda \text{ et } \sum_{i=1}^{a+b+1} ik_i = \mu \right\}.$$

Conventionnellement  $M(\mu) = 0$  pour  $\mu < 0$ .

Les coefficients  $B(x, \mu)$  et  $L[\delta_{m+n}(x, k), \nu]$  ont été définis au théorème III. 1.

#### 4. Quelques résultats concernant les temps de premier passage.

A) Nous introduisons dans ce paragraphe les notations suivantes <sup>(1)</sup> :

Soit  $X_t$  la variable aléatoire représentant l'état du processus à l'instant  $t$  :

$$\text{III. 4. 1} \quad p_{M,M'}^{(t)} = \Pr [X_t = x_{M'} / X_0 = x_M].$$

En prenant M comme point origine des abscisses, cette probabilité coïncide avec ce que nous avons noté dans le paragraphe précédent  $p_{0,x}^{(t)}$  ( $x$  est alors l'abscisse  $x_{M'}$  du point M'). La fonction génératrice de ces probabilités sera  $P_{M,M'}(s)$ . Lorsque M sera pris comme point origine, cette fonction coïncidera avec la fonction  $F(x, s)$  présentée au paragraphe précédent.

$$\text{III. 4. 2} \quad {}_B p_{M,M'}^{(t)} = \Pr [X_t = x_{M'}, X_\tau \neq x_B, 0 < \tau < t / X_0 = x_M].$$

Il s'agit de la probabilité de passage du point M au point M' durant l'intervalle de temps  $t$  sans être passé au point B. Sa fonction génératrice sera notée  $B^p M, M'(s)$ .

En particulier :

$$\text{III. 4. 3} \quad {}_M' p_{M,M'}^{(t)} = \Pr [X_t = x_{M'}, X_\tau \neq x_{M'}, 0 < \tau < t / X_0 = x_M]$$

est la probabilité de premier passage au point M' à l'instant  $t$ , le processus étant parti du point M à l'instant 0.

En utilisant les axiomes du calcul des probabilités on établit facilement la relation :

$$\text{III. 4. 4} \quad p_{M,M'}^{(t)} = {}_B p_{M,M'}^{(t)} + {}_B p_{M,B}^{(1)} \cdot p_{B,M'}^{(t-1)} + {}_B p_{M,B}^{(2)} \cdot p_{B,M'}^{(t-2)} + \dots + {}_B p_{M,B}^{(t-1)} \cdot p_{B,M'}^{(1)}$$

valable quelle que soit la disposition des points B, M, M'.

---

<sup>(1)</sup> Ces notations sont celles de Kai Lai Chung [1].

En multipliant les deux membres par  $s^t$  et en sommant sur  $t$  de 2 à l'infini on obtient, lorsque  $B \neq M'$  :

$$\text{III.4.5} \quad P_{M,M'}(s) = {}_B P_{M,M'}(s) + {}_B P_{M,B}(s) \cdot P_{B,M'}(s)$$

lorsque  $B = M'$  :

$$\text{III.4.6} \quad P_{M,M'}(s) = {}_{M'} P_{M,M'}(s) \cdot P_{M',M'}(s)$$

enfin, lorsque  $B, M$  et  $M'$  sont confondus :

$$\text{III.4.7} \quad P_{M,M}(s) = 1 + {}_M P_{M,M}(s) \cdot P_{M,M}(s).$$

Il résulte de ces formules :

$$\text{III.4.8} \quad {}_M P_{M,M}(s) = 1 - \frac{1}{P_{M,M}(s)}$$

$$\text{III.4.9} \quad {}_{M'} P_{M,M'}(s) = \frac{P_{M,M'}(s)}{P_{M',M'}(s)}.$$

Ainsi connaissant la fonction génératrice des probabilités de passage  $P_{M,M}(s)$  il est facile d'obtenir la fonction génératrice des probabilités de premier passage en  $M'$  :  ${}_{M'} P_{M,M'}(s)$ , la fonction génératrice des probabilités de premier retour en  $M$  :  ${}_M P_{M,M}(s)$  et enfin la fonction génératrice des probabilités de passage de  $M$  en  $M'$  sans passer par  $B$ .

Remarquons que  $P_{M,M}(s) = F(0, s)$ , avec nos anciennes notations ; pour obtenir  ${}_{M'} P_{M,M'}(s)$  il suffit de remplacer, dans  $F(0, s)$ ,  $a$  par  $a' = a + x_{M'}$  et  $b$  par  $b' = b - x_{M'}$ .

**B) Premier retour à l'origine.**

Prenons pour point origine le point  $M$  associé à l'état du processus au temps 0. Alors  $P_{M,M}(s)$  s'obtient en annulant  $x$  dans l'expression III.3.8 de  $F(x, s)$  :

$$P_{M,M}(s) = \frac{1}{s^{p-n}} \cdot \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left\{ \sum_{\nu=0}^{\left[ \frac{b+k+1}{n} \right] - 1} B(b+k+1-n, \nu) \frac{1}{s^\nu} \right\} \left\{ \sum_{\nu=0}^{N_k} L[\xi_{m+n}(0, k), \nu] \frac{1}{s^\nu} \right\}}{\sum_{\nu=0}^{a+b+1} L[\xi_{m+n}(b+1, 0), \nu] \frac{1}{s^\nu}}.$$

Soit, en utilisant la notation III.3.10 :

$$\begin{aligned}
 P_{M,M}(s) &= \frac{1}{sp_{-n}} \cdot \frac{\sum_{v=0}^{a+b} D(v, 0) \frac{1}{s^v}}{\sum_{v=0}^{a+b+1} L[\varepsilon_{m+n}(b+1, 0), v] \frac{1}{s^v}} \\
 &= \frac{1}{p_{-n}} \cdot \frac{\sum_{v=0}^{a+b} D(a+b-v, 0) s^v}{\sum_{v=0}^{a+b+1} L[\varepsilon_{m+n}(b+1, 0), a+b+1-v] s^v} .
 \end{aligned}$$

En remarquant que le développement au voisinage de  $s = 0$  de cette fraction doit commencer par 1, on obtient la relation :

$$D(a+b) = p_{-n} L[\varepsilon_{m+n}(b+1, 0), a+b+1]$$

soit, d'après la relation III.3.7 :

$$D(a+b) = (-1)^{\theta(n-\theta)} p_{-n}^{-a-b} .$$

Remplaçons alors dans  $P_{M,M}(s)$  les coefficients  $D(a+b)$  et

$$L[\varepsilon_{m+n}(b+1, 0), a+b+1]$$

par leurs expressions :

$$P_{M,M}(s) = \frac{1}{p_{-n}} \cdot \frac{(-1)^{\theta(n-\theta)} p_{-n}^{-a-b} + \sum_{v=1}^{a+b} D(a+b-v, 0) s^v}{(-1)^{\theta(n-\theta)} p_{-n}^{-a-b-1} + \sum_{v=1}^{a+b+1} L[\varepsilon_{m+n}(b+1, 0), a+b+1-v] s^v}$$

d'où :

III.4.10

$$P_{M,M}(s) = \frac{1 + \sum_{v=1}^{a+b} (-1)^{\theta(n-\theta)} p_{-n}^{a+b} D(a+b-v, 0) s^v}{1 + \sum_{v=1}^{a+b+1} (-1)^{\theta(n-\theta)} p_{-n}^{a+b+1} L[\varepsilon_{m+n}(b+1, 0), a+b+1-v] s^v} .$$

La fonction génératrice des probabilités de premier retour en  $M$  est ainsi :

$$\begin{aligned}
 \text{III.4.11 } \quad & {}_M P_{M,M}(s) \\
 &= 1 - \frac{1 + \sum_{v=1}^{a+b+1} (-1)^{\theta(n-\theta)} p_{-n}^{a+b+1} L[\xi_{m+n}(b+1, 0), a+b+1-v] s^v}{1 + \sum_{v=1}^{a+b} (-1)^{\theta(n-\theta)} p_{-n}^{a+b} D(a+b-v, 0) s^v}.
 \end{aligned}$$

En utilisant la même technique que dans le paragraphe précédent, on obtient :

$$\begin{aligned}
 {}_M P_{M,M}(s) &= 1 - \left\{ 1 + \sum_{v=1}^{a+b+1} (-1)^{\theta(n-\theta)} p_{-n}^{a+b+1} L[\xi_{m+n}(b+1, 0), a+b+1-v] s^v \right\} \\
 &\cdot \left\{ 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} s^\mu \left( \sum_{\{k_j\}} \frac{(k_1+k_2+\dots+k_{a+b})!}{k_1! \dots k_{a+b}!} \prod_{j=1}^{a+b} (-1)^{\theta(n-\theta)} p_{-n}^{a+b} D(a+b-v, 0)^{k_j} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

où  $\{k_j\}$  représente l'ensemble des groupes d'entiers non négatifs  $k_1, k_2, \dots, k_{a+b}$  vérifiant  $\sum_{j=1}^{a+b} j k_j = \mu$ .

On peut alors en déduire facilement les probabilités  ${}_M P_{M,M}^{(l)}$  en posant :

III.4.12

$$N(\mu) = \sum_{\{k_j\}} \frac{(k_1+k_2+\dots+k_{a+b})!}{k_1! \dots k_{a+b}!} \prod_{j=1}^{a+b} (-1)^{\theta(n-\theta)} p_{-n}^{a+b} D(a+b-v, 0)^{k_j}$$

où  $\{k_j\} = \{ \text{entiers non négatifs } k_1, k_2, \dots, k_{a+b} \text{ tels que } \sum_{j=1}^{a+b} j k_j = \mu \}$ ,

on a :

$$\begin{aligned}
 \text{III.4.13 } \quad & {}_M P_{M,M}^{(l)} = -(-1)^{\theta(n-\theta)} p_{-n}^{a+b+1} \sum_{v=1}^{a+b+1} L[\xi_{m+n}(b+1, 0), v] \\
 & N(t+v-a-b-1) - N(t).
 \end{aligned}$$

Par convention  $N(\mu) = 0$  si  $\mu < 0$ . Le coefficient  $L$  a été défini en III.2.22. Comme l'ensemble  $(E)$  est formé de points non récurrents (voir Kai Lai

Chung [1]), la série  $\sum_{l=0}^{\infty} P_{M,M}^{(l)}$  converge, donc  $P_{M,M}(1)$  existe et est fini,



non nul en général. En considérant les variables  $Y_t$  valant 1 si  $X_t = x_M$  et 0 sinon, on voit que  $P_{M,M}(1)$  représente le nombre moyen de retours du processus en M. Nous désignerons par  $m_{M,M}$  ce nombre :

$$\text{III.4.14} \quad m_{M,M} = P_{M,M}(1) = \frac{1}{p_{-n}} \cdot \frac{\sum_{v=0}^{a+b} D(a+b-v, 0)}{\sum_{v=0}^{a+b+1} L[\mathcal{E}_{m+n}(b+1, 0), a+b+1-v]}.$$

La quantité  ${}_M P_{M,M}(1)$  existe donc dès que  $m_{M,M} \neq 0$  et l'on a :

$${}_M P_{M,M}(1) = 1 - \frac{1}{m_{M,M}}.$$

Cette quantité n'est autre que la probabilité pour que le processus revienne au moins une fois en M, donc  $\frac{1}{m_{M,M}}$  est la probabilité pour que le processus ne revienne plus en M. L'égalité :

$$1 = \frac{1}{m_{M,M}} + \sum_{t=1}^{\infty} {}_M p_{M,M}^{(t)}$$

montre que l'on peut introduire une variable aléatoire  $T_{M,M}$  non définie avec une probabilité  $\frac{1}{m_{M,M}}$ , valant  $t$  avec une probabilité  ${}_M p_{M,M}^{(t)}$ .  $T_{M,M}$  est appelée habituellement temps de premier passage en M lorsque le processus part de M.

### C) Premier passage en un point donné, autre que l'origine.

Dans ce paragraphe nous prendrons pour origine M le point de départ du processus et nous désignerons par  $x$  l'abscisse du point M' (nous supposons  $x < 0$  de façon à simplifier l'expression de  $P_{M,M'}(s)$ , cette hypothèse ne restreignant pas la généralité).

La fonction génératrice  $P_{M',M'}(s)$  s'obtient en remplaçant dans l'expression III.4.10 de  $P_{M,M}(s)$   $a$  par  $a' = a + x$  et par  $b' = b - x$  (il s'agit

d'un simple changement d'origine). Ce changement sera indiqué par un affectant les coefficients :

III.4.15

$$P_{M',M'}(s) = \frac{1 + \sum_{v=1}^{a+b} (-1)^{\theta(n-\theta)} p_{-n}^{a+b} D'(a+b-v, 0) s^v}{1 + \sum_{v=1}^{a+b+1} (-1)^{\theta(n-\theta)} p_{-n}^{a+b+1} L[\xi_{m+n}(b+1, 0), a+b+1-v] s^v}.$$

Le dénominateur, ne dépendant que de la somme  $a + b$ , reste invariant dans ce changement.

D'autre part, on peut écrire, compte tenu de III.3.10 :

$$III.4.16 \quad P_{M,M'}(s) = \frac{1}{s^{p-n}} \cdot \frac{\frac{1}{s^{a+b+\lfloor \frac{x}{n} \rfloor}} \sum_{\mu=0}^{a+b+\lfloor \frac{x}{n} \rfloor} D\left(a+b+\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor - \mu, x\right) s^\mu}{\frac{1}{s^{a+b+1}} \sum_{\mu=0}^{a+b+1} L[\xi_{m+n}(b+1, 0), a+b+1-\mu] s^\mu}$$

d'où :

$$III.4.17 \quad M'P_{M,M'}(s) = \frac{s^{-\lfloor \frac{x}{n} \rfloor} \sum_{\mu=0}^{a+b+\lfloor \frac{x}{n} \rfloor} D\left(a+b+\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor - \mu, x\right) s^\mu}{1 + \sum_{v=1}^{a+b} (-1)^{\theta(n-\theta)} p_{-n}^{a+b} D'(a+b-v, 0) s^v}.$$

Le développement de cette fraction au voisinage de  $s = 0$  s'obtient de la même façon que ci-dessus.

Si l'on désigne par  $N'(\mu)$  la valeur prise par  $N(\mu)$  lorsqu'on y remplace  $D(a+b-v)$  par  $D'(a+b-v)$ , on a :

$$III.4.18 \quad M'P_{M,M'}^{(t)} = \frac{1}{p-n} \sum_{v=0}^{a+b+\lfloor \frac{x}{n} \rfloor} D(v, x) N'(t+v-a-b).$$

### 5. Étude sommaire de l'absorption.

L'ensemble des points absorbants du processus étudié (ensemble que nous notons (F)) est séparé en deux ensembles disjoints :

$$F_{-a} = \{-a - n, \dots, -a - 1\} \quad \text{et} \quad F_b = \{b + 1, \dots, b + m\}$$

constituant ce que nous appellerons deux barrières épaisses.

On voit facilement que l'absorption au point  $-a - j$  ( $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) de  $F_{-a}$ , entre les instants  $t$  et  $t + 1$ , est :

$$\text{III. 5.1} \quad w_{-a-j}^{(t+1)} = \sum_{h=0}^{h=n-j} p_{0,-a+h}^{(t)} \cdot p_{-j-h}$$

La fonction génératrice de cette absorption est :

$$W_{-a-j}(s) = \sum_{t=0}^{\infty} w_{-a-j}^{(t+1)} s^{t+1} = s \sum_{t=0}^{\infty} s^t \left( \sum_{h=0}^{n-j} p_{0,-a+h}^{(t)} \cdot p_{-j-h} \right)$$

soit :

$$\text{III. 5.2} \quad W_{-a-j}(s) = s \sum_{h=0}^{n-j} p_{-j-h} \cdot F(-a + h, s)$$

(Nous avons repris ici les notations antérieures au paragraphe 4).

En utilisant la forme III.4.16 de  $F(x, s)$ , on obtient :

$$\text{III. 5.3} \quad W_{-a-j}(s) = \frac{s \sum_{h=0}^{n-j} p_{-j-h} \binom{-a+h}{n}}{p_{-n} \sum_{h=0} \binom{-a+h}{n}} \cdot \frac{\sum_{\mu=0}^{a+b+\left[\frac{-a+h}{n}\right]} D\left(a+b+\left[\frac{-a+h}{n}\right] - \mu, -a+h\right) s^{\mu}}{\sum_{\mu=0}^{a+b+1} L[\mathcal{E}_{m+n}(b+1, 0), a+b+1-\mu] s^{\mu}}$$

Pour l'absorption au point  $b + j$  ( $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ) de  $F_b$ , entre les instants  $t$  et  $t + 1$ , on obtient de même :

$$w_{b+j}^{(t+1)} = \sum_{h=0}^{m-j} p_{0,b-h}^{(t)} \cdot p_{j+h}$$

dont la fonction génératrice est :

$$W_{b+j}(s) = s \sum_{h=0}^{m-j} p_{j+h} \cdot F(b-h, s)$$

soit, en explicitant :

$$W_{b+j}(s) = \mathcal{R}_e \frac{s}{p^{-n}} \sum_{h=0}^{m-j} \frac{p_{j+h}}{s^{\lfloor \frac{b-h}{n} \rfloor}} \cdot \frac{\sum_{\mu=0}^{a+b+\lfloor \frac{b-h}{n} \rfloor} D\left(a+b+\left[\frac{b-h}{n}\right] - \mu, b-h\right) s^\mu}{\sum_{\mu=0}^{a+b+1} L[\mathcal{E}_{m+n}(b+1, 0), a+b+1-\mu] s^\mu}$$

(Rappelons que  $\mathcal{R}_e$  signifie ici : partie régulière de ...).

L'absorption par la barrière  $F_{-a}$  a pour fonction génératrice :

$$W_{-a}(s) = \sum_{j=1}^n W_{-a-j}(s) = s \sum_{i=1}^n \sum_{h=0}^{n-j} p_{-j-h} F(-a+h, s).$$

Si l'on pose :

$$\begin{cases} q_{-n} = p_{-n} + p_{-n+1} \dots + p_{-1} \\ q_{-n+1} = p_{-n+1} + \dots + p_{-1} \\ \dots \\ q_{-1} = p_{-1} \end{cases}$$

l'égalité précédente devient :

III.5.4 
$$W_{-a}(s) = s \sum_{h=0}^{n-1} F(-a+h, s) \cdot q_{-h}.$$

Notons que cette égalité peut être obtenue directement en mettant en évidence les probabilités  $q_{-h}$  de passage du point  $-a+h$  dans l'ensemble absorbant  $F_{-a}$ .

De même en posant :

$$\begin{cases} q_1 = p_1 \\ q_2 = p_1 + p_2 \\ \dots \\ q_m = p_1 + p_2 + \dots + p_m \end{cases}$$

la fonction génératrice de l'absorption par la barrière  $F_b$  s'écrit :

III.5.5 
$$W_b(s) = s \sum_{h=0}^{m-1} F(b-h, s) \cdot q_h.$$

La fonction génératrice de l'absorption par l'ensemble (F) est donc :

$$\text{III. 5.6} \quad W(s) = W_{-a}(s) + W_b(s) = s \sum_{h=0}^{n-1} F(-a+h, s) \cdot q_{-h} + s \sum_{h=0}^{m-1} F(b-h, s) q_h.$$

Remarquons que l'on a :

$$\sum_{x \in (F)} w_x^{(t+1)} + \sum_{x \in (E)} p_{0,x}^{(t+1)} = \sum_{x \in (E)} p_{0,x}^{(t)}.$$

Multiplions les deux nombres par  $s^{t+1}$  et sommons de  $t = 0$  à l'infini :

$$W(s) + \sum_{x \in (E)} \{ F(x, s) - p_{0,x}^{(0)} \} = s F(x, s)$$

d'où :

$$\text{III. 5.7} \quad W(s) = 1 - (1-s) \sum_{x \in (E)} F(x, s).$$

On a bien entendu  $W(1) = 1$ , ce que l'on ne peut pas vérifier facilement à partir de l'expression explicite de  $F(x, s)$ .

Notons, en outre, que  $W(s)$  est la fonction génératrice associée à la variable aléatoire  $\tau$ , nombre de pas effectués avant absorption :

$$\text{Pr} [\tau = t] = w^{(t)}.$$

La moyenne de cette variable aléatoire est :

$$E\tau = \lim_{s \rightarrow 1} W'(s).$$

Or :

$$W'(s) = - (1-s) \sum_{x \in E} F'_s(x, s) + \sum_{x \in E} F(x, s).$$

Le fait que  $W(s) \rightarrow 1$  lorsque  $s \rightarrow 1$  montre que  $F(x, s)$  a une limite finie lorsque  $s$  tend vers 1. Cette fraction rationnelle en  $s$  étant définie pour  $s = 1$  a une dérivée finie pour  $s = 1$ . Donc :

$$E\tau = W'(1) = \sum_{x \in (E)} F(x, 1).$$

## CHAPITRE IV

## ÉTUDE DE QUELQUES CAS PARTICULIERS

## 1. Cheminement symétrique.

$$\text{Cas } \Phi(r) = pr + qr^{-1}.$$

Nous nous contenterons de montrer que nos formules redonnent les résultats connus, sans en faire une étude approfondie (voir en particulier A. Torrat [1]).

La forme II.2.36 de la solution est particulièrement simple ici :

$$\Phi(r) = pr + qr^{-1}$$

conduit à l'équation caractéristique :

$$p - \frac{1}{s}r + qr^2 = 0.$$

Posons alors  $p = \sigma\theta$  et  $q = \frac{\sigma}{\theta}$ , ce qui équivaut à  $pq = \sigma^2, \frac{p}{q} = \theta^2$ .

L'équation caractéristique s'écrit, avec ces notations :

$$\sigma\theta - \frac{1}{s}r + \frac{\sigma}{\theta}r^2 = 0.$$

Les racines sont  $r_1 = \theta e^\varphi$  et  $r_2 = \theta e^{-\varphi}$ , à condition de lier  $\varphi$  à  $s$  par la relation :

$$\text{IV.1.1} \quad \text{Ch } \varphi = \frac{1}{2\sigma s}.$$

Les différentes expressions apparaissant dans l'expression II.2.36 s'expriment simplement en fonction de  $\varphi$  :

$$b_1 = \frac{1}{r_1 - r_2} = \frac{1}{2\theta \text{Sh } \varphi} \quad b_2 = \frac{1}{r_2 - r_1} = -b_1$$

$$\sum_{i=1}^{i=2} b_i r_i^{x+m-1} = \frac{r_1^x - r_2^x}{r_1 - r_2} = \theta^{x-1} \frac{\text{Sh } x\varphi}{\text{Sh } \varphi}.$$

$$\Delta_{1,1}(a + b + 1) = \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ r_1^{a+b+2} & r_2^{a+b+2} \end{array} \right| = r_2^{a+b+2} - r_1^{a+b+2} \\ = -2\theta^{a+b+2} \text{Sh}(a + b + 2)\varphi$$

$$\Delta_{1,1}^1(a + b + 1) = \frac{\theta}{\sigma} \left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \theta^b \frac{\text{Sh}(b + 1)\varphi}{\text{Sh } \varphi} & r_2^{a+b+2} \end{array} \right| = -\frac{\theta^{b+1}}{\sigma} \cdot \frac{\text{Sh}(b + 1)\varphi}{\text{Sh } \varphi}$$

$$\Delta_{1,1}^2(a + b + 1) = \frac{\theta}{\sigma} \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ r_1^{a+b+2} & \theta^b \frac{\text{Sh}(b + 1)\varphi}{\varphi \text{Sh}} \end{array} \right| = \frac{\theta^{b+1}}{\sigma} \cdot \frac{\text{Sh}(b + 1)\varphi}{\text{Sh } \varphi}$$

La fonction génératrice des probabilités  $p_{0,x}^{(r)}$  est ainsi :

$$F(x, s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{[r_2^{x+a+1} - r_1^{x+a+1}] \frac{\theta^{b+1}}{\sigma} \cdot \frac{\text{Sh}(b + 1)\varphi}{\text{Sh } \varphi}}{-2\theta^{a+b+1} \text{Sh}(a + b + 2)\varphi} - \gamma_0(x) \frac{\theta}{s\sigma} \cdot \theta^{x-1} \frac{\text{Sh } x\varphi}{\text{Sh } \varphi}$$

$$\text{IV.1.2 } F(x, s) = \frac{\theta^x}{s\sigma} \cdot \left[ \frac{\text{Sh}(x + a + 1)\varphi \cdot \text{Sh}(b + 1)\varphi}{\text{Sh}(a + b + 2)\varphi \cdot \text{Sh } \varphi} - \gamma_0(x) \frac{\text{Sh } x\varphi}{\text{Sh } \varphi} \right]$$

C'est sous cette forme que MacCrea et Whipple [I] ont donné la solution du même problème.

L'expression III.3.8 de notre solution donne l'explicitation en  $s$  de cette fonction génératrice. Elle pourrait être obtenue directement à partir de la formule IV.1.2, à condition de déterminer l'expression de  $\text{Sh } k\varphi$  en fonction de  $\text{Ch } \varphi$ . Nous donnons ci-après l'expression de  $F(x, s)$ , tous calculs faits :

si  $p = \sigma\theta$  et  $q = \frac{\sigma}{\theta}$ , on a :

IV.1.3

$$F(x, s) = \frac{\theta^x}{\sigma s} \left[ \frac{\left\{ \sum_{v=0}^b (-1)^{\frac{b-v}{2}} \binom{b+v}{v} \frac{1}{(\sigma s)^v} \right\} \cdot \left\{ \sum_{v=0}^{a+x} (-1)^{\frac{a+x-v}{2}} \binom{a+x+v}{v} \frac{1}{(\sigma s)^v} \right\}}{\sum_{v=0}^{a+b+1} (-1)^{\frac{a+b+1-v}{v}} \binom{a+b+1-v}{v} \frac{1}{(\sigma s)^v}} - \gamma_1(x) \sum_{v=0}^{x-1} (-1)^{\frac{x-1-v}{2}} \binom{x-1+v}{v} \frac{1}{(\sigma s)^v} \right]$$

Dans cette expression le coefficient  $\binom{b+v}{2 \nu}$  doit être considéré comme

nul si  $b$  et  $\nu$  sont de parité différente. Un changement très simple d'indice de sommation permet d'éviter cette convention : on peut écrire de même :

IV.1.4

$$F(x, s) = \frac{\theta^x}{\sigma s} \left[ \frac{\left\{ \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{b}{2} \rfloor} (-1)^\nu \binom{b-\nu}{\nu} \frac{1}{(\sigma s)^{b-2\nu}} \right\} \cdot \left\{ \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{a+x}{2} \rfloor} (-1)^\nu \binom{a+x-\nu}{\nu} \frac{1}{(\sigma s)^{a+x-2\nu}} \right\}}{\sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{a+b+1}{2} \rfloor} (-1)^\nu \binom{a+b+1+\nu}{\nu} \frac{1}{(\sigma s)^{a+b+1-2\nu}} - \gamma_1(x) \sum_{\mu=0}^{\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor} (-1)^\mu \binom{x-1-\mu}{\mu} \frac{1}{(\sigma s)^{x-1-2\mu}}} \right].$$

Enfin, la formule III.3.15 donne dans ce cas particulier  $p_{0,x}^{(t)} = 0$  si  $x$  et  $t$  sont de parité différente et sinon :

$$IV.1.5 \quad p_{0,x}^{(t)} = \left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^x \sum_{\mu=0}^{\lfloor \frac{a+b+x}{2} \rfloor} \left\{ (-1)^\mu \sigma^{2\mu} \sum_{\nu+\nu'=\mu} \binom{a+x-\nu}{\nu} \binom{b-\nu'}{\nu'} \right\} \\ \left. \sum_{\{\lambda\}} (-1)^{\lambda} \lambda! \sum_{\{k_{2j}\}} \prod_j \left[ (-1)^j \binom{a+b+1-j}{j} \sigma^{2j} \right]^{k_{2j}} \right\}$$

Dans cette expression  $\{\lambda\}$  représente l'ensemble des entiers vérifiant :

$$\left\lfloor \frac{t+x-2\mu}{a+b+1} \right\rfloor \leq \lambda \leq t+x-2\mu$$

et  $\{k_{2j}\}$  représente l'ensemble des entiers  $k_{2j}, j = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{a+b+1}{2} \rfloor$ , vérifiant :

$$\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{a+b+1}{2} \rfloor} k_{2j} = \lambda \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{a+b+1}{2} \rfloor} j \cdot k_{2j} = t+x-2\mu.$$



2. Cas  $\Phi(r) = pr^m + qr^{-n}$ .

Ce cas correspond au cheminement aléatoire d'une particule qui, entre les instants  $t$  et  $t + 1$ , peut passer de l'état  $x$ , soit à l'état  $x + m$  (probabilité  $p$ ), soit à l'état  $x - n$  (probabilité  $q$ ). Deux barrières absorbantes sont disposées l'une en  $-a - 1$ , l'autre en  $b + 1$ .

Il s'agit ainsi d'une généralisation de ce qui a été présenté dans le paragraphe précédent. Des formules explicites de la solution ont été données par Korolyuk [1], par Chang Li-Chien [1] et par Kemperman [1] (cas  $n = 1$  seulement pour ce dernier auteur). L'expression de la solution que nous allons présenter est du type de celle donnée par Kemperman, plus simple que celle de Korolyuk et Chang Li-Chien.

Remarquons d'abord que l'on pourra toujours choisir  $m$  et  $n$  premiers entre eux, car si l'on désigne par  $d$  le plus grand commun diviseur de  $m$  et de  $n$ , seuls les points d'abscisses  $k \cdot d$  ( $k$  entier) peuvent être atteints par une particule lors du cheminement aléatoire défini par  $\Phi(r) = pr^m + qr^{-n}$  : le changement d'unité qui consiste à prendre une nouvelle unité égale à  $d$  fois l'ancienne nous ramène à un cheminement aléatoire caractérisé par :

$$\Phi(r) = pr^{m'} + qr^{-n'} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = dm' \\ n = dn' \end{cases}$$

où  $m'$  et  $n'$  sont premiers entre eux.

Les formules III.3.8 (ou plutôt III.3.1) et III.3.15 donnant respectivement  $F(x, s)$  et  $p_{0,x}^{(t)}$  doivent être adaptées au cas particulier envisagé ici.

L'écriture  $\Phi(r) = pr^m + qr^{-n}$  implique que l'on a posé :

$$\text{IV.2.1} \quad p_{-n} = q, p_{-n+i} = 0 \quad \forall i \in \{-n + 1, \dots, 0, \dots, m - 1\}$$

$$p_m = p.$$

a) **Étude des coefficients  $C(\beta, \mu)$ .** — Les coefficients  $C(\beta, \mu)$  présentés dans le lemme III.6 (formule III.2.16) vont être simplifiés :

$$C(\beta, \mu) = \sum_{\lambda = \text{Sup} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ m+n \end{matrix} \right\}, \mu}^{\lambda = \beta} \frac{(-1)^{\lambda} \lambda!}{p^{\lambda-n}} \sum_{\{k_i\}} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{i=m+n} \frac{(p_{-n+i})^{k_i}}{k_i!}$$

$\{k_i\} = \{k_i \text{ entiers positifs ou nuls tels que :}$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{m+n} k_i = \lambda - \mu \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{m+n} ik_i = \beta - n\mu \}.$$

Dans cette formule, seuls les termes correspondant à  $i = m + n$  ne sont pas nuls : il ne restera donc que les termes en  $\frac{p_m^{k_{m+n}}}{k_{m+n}!}$  si ces termes existent, c'est-à-dire si l'on peut avoir à la fois :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{m+n} = \lambda - \mu \\ (m+n)k_{m+n} = \beta - n\mu. \end{array} \right.$$

Ces égalités exigent que l'on ait  $(m+n)(\lambda - \mu) = \beta - n\mu$  donc que  $\beta - n\mu$  soit un entier positif ou nul, multiple de  $m+n$ . Ainsi chaque fois que  $\beta - n\mu$  n'est pas un entier positif ou nul multiple de  $m+n$ , le coefficient  $C(\beta, \mu)$  est nul.

Envisageons alors le cas où  $\beta - n\mu = k(m+n)$  (nous identifions maintenant  $k$  à  $k_{m+n}$ ).

Les entiers  $n$  et  $m$  étant premiers entre eux,  $n$  et  $m+n$  le sont aussi. D'après un théorème de Bezout, il existe deux entiers positifs ou négatifs  $u$  et  $v$  tels que :

IV.2.2 
$$u(m+n) + vn = 1.$$

On a donc les égalités :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = n\mu + k(m+n) \\ \beta = nv\beta + u\beta(m+n) \end{array} \right.$$

qui impliquent  $n(\mu - v\beta) = (m+n)(u\beta - k)$  et après le théorème de Gauss  $\mu - v\beta$  est un multiple de  $m+n$  :

IV.2.3 
$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = v\beta + \rho(m+n) \\ k = u\beta - \rho n. \end{array} \right.$$

Il en résulte :

IV.2.4 
$$\lambda = k + \mu = (u+v)\beta + \rho m.$$

La formule (rappelée ci-dessus) donnant  $C(\beta, \mu)$  montre que ce coefficient est déterminé pourvu qu'il existe un entier  $\lambda$  compris entre :

$$\text{Sup} \left\{ \left\lceil \frac{\beta}{m+n} \right\rceil, \mu \right\} \text{ et } \beta ;$$

et un entier  $k \geq 0$  tels que :

IV.2.5 
$$\left\{ \begin{array}{l} k = \lambda - \mu \\ (m+n)k = \beta - n\mu. \end{array} \right.$$

Or, nous venons de voir que ces deux égalités impliquent l'existence d'un nombre entier  $\rho$  positif ou négatif tel que :

$$\begin{cases} \mu = v\beta + \rho(m+n) \\ k = u\beta - \rho n \\ \lambda = (u+v)\beta + \rho m. \end{cases}$$

Il suffit donc de déterminer l'ensemble des valeurs de  $\rho$  conduisant à :

$$\text{IV.2.6} \quad \left\{ \begin{array}{l} k \geq 0 \\ \text{Sup} \left\{ \left\lfloor \frac{\beta}{m+n} \right\rfloor, \mu \right\} \leq \lambda \leq \beta. \end{array} \right.$$

Des égalités IV.2.5, on tire  $mk = \beta - n\lambda$ , donc l'inégalité  $k \geq 0$  implique  $\beta - n\lambda \geq 0$  soit  $\lambda \leq \left\lfloor \frac{\beta}{n} \right\rfloor \leq \beta$ .

Des mêmes égalités, on tire  $(m+n)\lambda = \beta + m\mu$ , donc l'inégalité  $\mu \geq 0$  implique  $(m+n)\lambda \geq \beta$  soit  $\lambda \geq \left\lfloor \frac{\beta}{m+n} \right\rfloor$ .

Ainsi, lorsque les égalités IV.2.5 sont réalisées; les inégalités IV.2.6 équivalent à :

$$\begin{cases} k \geq 0 \\ \mu \geq 0 \end{cases}$$

d'où :

$$\text{IV.2.7} \quad \left\lfloor -\frac{v\beta}{m+n} \right\rfloor \leq \rho \leq \left\lfloor \frac{u\beta}{n} \right\rfloor.$$

En conclusion de cette étude on peut énoncer le

LEMME IV.2.1. — Lorsque  $\Phi(r) = pr^m + qr^{-n}$ , un entier positif  $\beta$  étant donné,

si  $\left\lfloor -\frac{v\beta}{m+n} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{u\beta}{n} \right\rfloor$  alors  $C(\beta, \mu) = 0$  quel que soit  $\mu$ ;

si  $\left\lfloor -\frac{v\beta}{m+n} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{u\beta}{n} \right\rfloor$  alors seuls ne sont pas nuls les  $C(\beta, \mu)$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = v\beta + \rho(m+n) \\ \left\lfloor -\frac{v\beta}{m+n} \right\rfloor \leq \rho \leq \left\lfloor \frac{u\beta}{n} \right\rfloor \end{array} \right.$$

et l'on a :

$$\begin{aligned} \text{IV.2.8} \quad C \{ \beta, v\beta + \rho(m+n) \} &= C(\beta, \mu) \\ &= \frac{\mu!}{q^\mu} (-1)^{(u+v)\beta + \rho m} \binom{(u+v)\beta + \rho m}{v\beta + \rho(m+n)} \left(\frac{p}{q}\right)^{\mu\beta - \rho n}. \end{aligned}$$

La formule présentée ci-dessus s'obtient immédiatement à partir de la formule III.2.16 :

$$C(\beta, \mu) = (-1)^\lambda \frac{\lambda!}{q^\lambda} \cdot \frac{p^k}{k!} = (-1)^{\lambda\mu} ! \binom{\lambda}{\mu} \left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{q^\mu}$$

en utilisant le fait que  $\lambda = k + \mu$ .

b) **Étude des coefficients**  $B(\beta, \mu)$ . — Les coefficients  $B(\beta, \mu)$  sont déterminés par la formule III.2.17 qui, étant donné que  $p_0$  est nul, se réduit à :

$$B(\beta, \mu) = (-1)^\mu \frac{C(\beta, \mu)}{\mu!}.$$

D'après le lemme ci-dessus :

Si  $\left] -\frac{v\beta}{m+n} \right[ > \left[ \frac{u\beta}{n} \right]$  alors  $B(\beta, \mu) = 0$  quel que soit  $\mu$ .

Si  $\left] -\frac{v\beta}{m+n} \right[ \leq \left[ \frac{u\beta}{n} \right]$  alors seuls les  $B(\beta, \mu)$  tels que :

$$\text{IV.2.9} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu = v\beta + \rho(m+n) \\ \left] -\frac{v\beta}{m+n} \right[ \leq \rho \leq \left[ \frac{u\beta}{n} \right] \end{array} \right.$$

ne sont pas nuls. Ils valent :

$$\text{IV.2.10} \quad B(\beta, \mu) = \frac{1}{q^\mu} \left(-\frac{p}{q}\right)^{u\beta - \rho n} \binom{(u+v)\beta + \rho m}{v\beta + \rho(m+n)}.$$

c) **Détermination des expressions**  $S_\alpha$ . — Ces expressions sont données par la formule III.2.15 :

$$S_\alpha = \sum_{\mu=0}^{\mu=\left[\frac{\alpha^*}{n}\right]} B(\alpha^*, \mu) \frac{1}{s^\mu} \quad \text{où} \quad \alpha^* = \alpha - (m+n-1).$$

D'après l'étude faite précédemment on a :

IV.2.11 si  $\left] -\frac{v\alpha^*}{m+n} \right[ > \left[ \frac{u\alpha^*}{n} \right]$  alors  $S_\alpha = 0$

si  $\left] -\frac{v\alpha^*}{m+n} \right[ \leq \left[ \frac{u\alpha^*}{n} \right]$

alors :

$$S_\alpha = \sum_{\rho=\left[-\frac{v\alpha^*}{m+n}\right]}^{\rho=\left[\frac{u\alpha^*}{n}\right]} \left(-\frac{p}{q}\right)^{u\alpha^* - \rho n} \binom{(u+v)\alpha^* + \rho m}{v\alpha^* + \rho(m+n)} \frac{1}{(qs)^{v\alpha^* + \rho(m+n)}}.$$

Effectuons le changement d'indice de sommation :

$$\rho = \left[ \frac{u\alpha^*}{n} \right] - \mu$$

et posons :

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha^*) &= \left[ \frac{u\alpha^*}{n} \right] - \left[ \frac{v\alpha^*}{m+n} \right] = \left[ \frac{u\alpha^*}{m+n} \right] + \left[ \frac{v\alpha^*}{m+n} \right] \\ \mathbf{R}\left(\frac{u\alpha^*}{n}\right) &= u\alpha^* - n \left[ \frac{u\alpha^*}{n} \right] \end{aligned}$$

(ces deux expressions représentent deux entiers positifs du fait de nos conventions). On trouve facilement :

$$S_\alpha = \frac{\left(-\frac{p}{q}\right)^{\mathbf{R}\left(\frac{u\alpha^*}{n}\right)}}{(qs)^{(m+n)\varphi(\alpha^*) + \mathbf{R}\left(\frac{v\alpha^*}{m+n}\right)}} \sum_{\mu=0}^{\mu=\varphi(\alpha^*)} (qs)^{(m+n)\mu} \left(-\frac{p}{q}\right)^{n\mu} \binom{(m+n)\varphi(\alpha^*) + \mathbf{R}\left(\frac{u\alpha^*}{n}\right) + \mathbf{R}\left(\frac{v\alpha^*}{m+n}\right) - m\mu}{\mathbf{R}\left(\frac{u\alpha^*}{n}\right) + n\mu}$$

formule que nous écrirons plus simplement :

$$\text{IV.2.12 } S_\alpha = \left(-\frac{p}{q}\right)^{\mathbf{R}\left(\frac{u\alpha^*}{n}\right)} \cdot (qs)^{-\psi(\alpha^*)} \cdot \sum_{\mu=0}^{\varphi(\alpha^*)} \left(-\frac{p}{q}\right)^{n\mu} b_\mu(\alpha^*) (qs)^{\mu(m+n)}$$

en posant :

$$\text{IV.2.13 } \psi(\alpha) = (m+n)\varphi(\alpha) + \mathbf{R}\left(\frac{v\alpha}{m+n}\right) = (m+n) \left[ \frac{u\alpha}{n} \right] + v\alpha$$

et :

$$b_\mu(\alpha) = \binom{\psi(\alpha) + \mathbf{R}\left(\frac{u\alpha}{n}\right) - m\mu}{\mathbf{R}\left(\frac{u\alpha}{n}\right) + n\mu}.$$

*d) Détermination des expressions*  $E[\mathcal{E}_{m+n}(x, k)]$ . — On a vu (formules III.3.4 et III.2.22) :

$$E[\mathcal{E}_{m+n}(x, k)] = \sum_{v=0}^{N_k} L[\mathcal{E}_{m+n}(x, k), v] \frac{1}{s^v}$$

avec :

$$IV.2.14 \quad L[\mathcal{E}_{m+n}(x, k), \nu] = \sum_{\mathfrak{J} \in \mathcal{F}_1} (-1)^t \sum_{\left\{ \nu_j : \sum_j \nu_j = \nu \right\}} \prod_{j=m+1}^{m+n} B(\beta_j, \nu_j).$$

L'étude des coefficients  $B(\beta_j, \nu_j)$ , faite ci-dessus, montre que seuls les coefficients pour lesquels on a :

$$\nu_j = v\beta_j + (m+n)\rho_j \left[ \frac{-v\beta_j}{m+n} \right] \leq \rho_j \leq \left[ \frac{u\beta_j}{n} \right]$$

ne sont pas nuls. Donc dans  $L[\mathcal{E}_{m+n}(x, k), \nu]$  seuls resteront les termes correspondant aux permutations  $\mathfrak{J}$  vérifiant, outre  $\beta_j \geq 0 \mathbf{A}_j$  :

$$\left[ \frac{-v\beta_j}{m+n} \right] \leq \left[ \frac{u\beta_j}{n} \right] \quad \forall \mathfrak{J}.$$

On désignera par  $\mathcal{F}_2$  l'ensemble de ces permutations :

$$IV.2.15 \quad \mathfrak{J} \in \mathcal{F}_2 \iff \beta_j \geq 0 \quad \text{et} \quad \left[ \frac{-v\beta_j}{m+n} \right] \leq \left[ \frac{u\beta_j}{n} \right] \quad \forall \mathfrak{J}.$$

D'autre part, en sommant :

$$\nu = \sum_j \nu_j = v \sum_j \beta_j + (m+n) \sum_j \rho_j$$

on s'aperçoit que seuls des termes en  $\frac{1}{s^\nu}$  avec  $\nu = v \sum_j \beta_j + (m+n)\rho$  apparaissent. Les exposants  $\nu$  sont compris entre  $\nu_1(x, k)$  et  $\nu_2(x, k)$  définis par :

IV.2.16

$$\nu_1(x, k) = \text{Sup}_{\mathfrak{J} \in \mathcal{F}_2} \left\{ v \sum_j \beta_j + (m+n) \sum_j \left[ \frac{u\beta_j}{n} \right] \right\} = v \sum_j \beta_j + (m+n)\rho''(x, k)$$

$$\nu_2(x, k) = \text{Inf}_{\mathfrak{J} \in \mathcal{F}_2} \left\{ v \sum_j \beta_j + (m+n) \sum_j \left[ \frac{-v\beta_j}{m+n} \right] \right\} = v \sum_j \beta_j + (m+n)\rho'(x, k).$$

Dans ces expressions on a tenu compte du fait que la somme  $\sum_{j=m+1}^{m+n} \beta_j$  ne dépend pas de la permutation  $\mathfrak{J}$  :

$$IV.2.17 \quad \sum_{j=m+1}^{m+n} \beta_j = \sum_{j=m+1}^{m+n} \alpha_j - \sum_{j=m+1}^{m+n} i_j = n(a+b+1) + x - (b+k+1).$$

L'expression  $E[\xi_{m+n}(x, k)]$  peut ainsi être écrite en introduisant les notations des formules IV.2.16 :

$$E[\xi_{m+n}(x, k)] = \sum_{\rho = \rho'(x,k)}^{\rho''(x,k)} L[\xi_{m+n}(x, k), v \sum_j \beta_j + (m+n)\rho] \frac{1}{v \sum_j \beta_j + (m+n)\rho}.$$

Les coefficients  $L[ \ ]$  deviennent :

$$\begin{aligned} L[\xi_{m+n}(x, k), v \sum_j \beta_j + (m+n)\rho] &= \sum_{\mathfrak{J} \in \mathfrak{J}_2} (-1)^t \sum_{\{\rho_j: \sum_j \rho_j = \rho\}} \prod_{j=m+1}^{m+n} \frac{\left(-\frac{p}{q}\right)^{u\beta_j - n\rho_j}}{q^{v\beta_j + (m+n)\rho_j}} \binom{(u+v)\beta_j + m\rho_j}{v\beta_j + (m+n)\rho_j} \\ &= \frac{\left(-\frac{p}{q}\right)^u \sum_j \beta_j - n\rho}{v \sum_j \beta_j + (m+n)\rho} \cdot \sum_{\mathfrak{J} \in \mathfrak{J}_2} (-1)^t \sum_{\{\rho_j: \sum_j \rho_j = \rho\}} \prod_{j=m+1}^{m+n} \binom{(u+v)\beta_j + m\rho_j}{v\beta_j + (m+n)\rho_j}. \end{aligned}$$

Il apparaît ainsi un coefficient indépendant de  $p$  et de  $q$  :

$$IV.2.18 \quad L_\rho^*(x, k) = \sum_{\mathfrak{J} \in \mathfrak{J}_2} (-1)^t \sum_{\{\rho_j: \sum_j \rho_j = \rho\}} \prod_{j=m+1}^{j=m+n} \binom{(u+v)\beta_j + m\rho_j}{v\beta_j + (m+n)\rho_j}$$

formé d'une somme de produits de « coefficients du binôme de Newton ». Introduisons cette notation dans l'expression de  $E[\xi_{m+n}(x, k)]$  :

$$E[\xi_{m+n}(x, k)] = \sum_{\rho = \rho'(x,k)}^{\rho''(x,k)} \frac{\left(-\frac{p}{q}\right)^u \sum_j \beta_j - n\rho}{v \sum_j \beta_j + (m+n)\rho} L_\rho^*(x, k) \frac{1}{v \sum_j \beta_j + (m+n)\rho}.$$

Remplaçons l'indice de sommation  $\rho$  par  $\tau$  et posons  $\rho'' - \tau = \rho$  :

$$IV.2.19 \quad E[\xi_{m+n}(x, k)]$$

$$= \frac{\left(-\frac{p}{q}\right)^u \sum_j \beta_j - n\rho''(x,k)}{v \sum_j \beta_j + (m+n)\rho''(x,k)} \sum_{\rho = \rho''(x,k) - \rho'(x,k)}^{\rho''(x,k) - \rho'(x,k)} \left(-\frac{p}{q}\right)^{n\rho} L_{\rho''(x,k) - \rho}^*(x, k) (qs)^{\rho(m+n)}.$$

Les deux expressions  $\rho'(x, k)$  et  $\rho''(x, k)$  sont, en général, difficiles à expliciter. On peut cependant établir les résultats suivants :

\* si  $\mathfrak{F}_2 \equiv \mathfrak{F}$ , ce qui se produit si, quel que soit  $j$ , on a  $\beta_j \geq n(m+n)$ , on a :

$$IV.2.20 \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho''(x, k) = u(a+b+1) - \left[ \frac{u(b+k+1-x)}{n} \right] \\ \rho'(x, k) = u(a+b+1) - \left[ \frac{a+b+1-v(b+k+1-x)}{m+n} \right] + \varepsilon \end{array} \right.$$

$\varepsilon$  valant soit 0 soit + 1 ;

\* dans le cas  $k = 0, x = b + 1$  (ce cas correspond au dénominateur de  $F(x, s)$ ) :

$$IV.2.21 \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho''(b+1, 0) = u(a+b+1) \\ \rho'(b+1, 0) = u(a+b+1) - \left[ \frac{a+b+1}{m+n} \right]. \end{array} \right.$$

*Cas particulier.* — On a vu au chapitre précédent (formule III.3.6) que l'expression  $E[\xi_{m+n}(b+1, 0)]$  est effectivement de degré  $a+b+1$  en  $\frac{1}{s}$ , ce qui justifie la valeur  $\rho'' = u(a+b+1)$  ci-dessus, avec :

$$L[\xi_{m+n}(b+1, 0), a+b+1] = (-1)^{\theta(n-\theta)} \frac{1}{q^{a+b+1}} \quad \theta \equiv a+b+1 \pmod{n}.$$

En utilisant ce résultat et les formules IV.2.19 et IV.2.21 on obtient :

$$IV.2.22 \quad E[\xi_{m+n}(b+1, 0)] = \frac{(-1)^{\theta(n-\theta)}}{(qs)^{a+b+1}} \left\{ 1 + (-1)^{\theta(n-\theta)} \sum_{\rho=1}^{\left[ \frac{a+b+1}{m+n} \right]} \left( -\frac{p}{q} \right)^{n\rho} L_{u(a+b+1)-\rho}^*(b+1, 0) \cdot (qs)^{(m+n)\rho} \right\}$$

Nous pouvons maintenant écrire la fonction génératrice  $F(x, s)$  donnée par la formule III.3.1 en utilisant les résultats IV.2.12, IV.2.19 et IV.2.22 :

$$F(x, s) = \text{partie régulière de } \sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k F_k(x, s)$$



où :

IV.2.23  $F_k(x, s) =$

$$\frac{(-1)^{\theta(n-\theta)} \left(-\frac{p}{q}\right)^{\alpha_1(x,k)}}{(qs)^{\alpha_2(x,k)}} \left\{ \sum_{\mu=0}^{\varphi(b+k-n+1)} \left(-\frac{p}{q}\right)^{n\mu} b_{\mu}(b+k-n+1)(qs)^{(m+n)\mu} \right\} \\ \left\{ \sum_{\mu=0}^{\rho''-\rho'} \left(-\frac{p}{q}\right)^{n\mu} L_{\rho''-\mu}^*(x, k)(qs)^{(m+n)\mu} \right\} \\ \cdot \frac{1 + (-1)^{\theta(n-\theta)} \sum_{\mu=1}^{\left[\frac{a+b+1}{m+n}\right]} \left(-\frac{p}{q}\right)^{n\mu} L_{u(a+b+1)-\mu}^*(b+1, 0)(qs)^{\mu(m+n)}}{.}$$

Afin de simplifier l'écriture, on a dû poser :

$$\alpha_1(x, k) = R\left(\frac{u(b+k-n+1)}{n}\right) + u \sum_j \beta_j - n\rho''(x, k) \\ = ux + un(a+b) - n \left\{ \rho''(x, k) + \left[\frac{u(b+k-n+1)}{n}\right] \right\}$$

$$\alpha_2(x, k) = \psi(b+k-n+1) + v \sum_j \beta_j + (m+n)\rho''(x, k) - a - b \\ = vx - (m+n)u(a+b) + (m+n) \left\{ \rho''(x, k) + \left[\frac{u(b+k-n+1)}{n}\right] \right\}.$$

Le numérateur de  $F_k(x, s)$  est un polynôme en  $qs$  que l'on peut écrire :

$$\text{IV.2.24} \quad \sum_{\mu=0}^{d(x,k)} \left(-\frac{p}{q}\right)^{n\mu} D_{\mu}(x, k)(qs)^{\mu(m+n)}$$

avec :

$$\text{IV.2.25} \quad D_{\mu}(x, k) = \sum_{\{\mu_1, \mu_2\}} b_{\mu_1}(b+k-n+1) L_{\rho''(x,k)-\mu_2}^*(x, k)$$

ou :

$$\{\mu_1, \mu_2\} = \{\mu_1, \mu_2 : \mu_1 + \mu_2 = \mu, 0 \leq \mu_1 \leq \varphi(b+k-n+1), \\ 0 \leq \mu_2 \leq \rho''(x, k) - \rho'(x, k)\}.$$

On a posé :

$$d(x, k) = \rho''(x, k) - \rho'(x, k) + \varphi(b+k-n+1).$$

Les coefficients  $D_\mu(x, k)$  sont des sommes de produits de « coefficients du binôme de Newton », tout comme  $L_p^*(x, k)$ . Le dénominateur de  $F_k(x, s)$  est de la forme  $1 + l_1(qs)^{m+n} + \dots + l_N(qs)^{(m+n)N}$  et l'on peut appliquer le lemme III.4 : si  $|s|$  est assez petit, on a :

$$\frac{1}{1 + l_1(qs)^{m+n} + \dots + l_N(qs)^{(m+n)N}} = 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\lambda=-}^{\lambda=\mu} \binom{\lambda-\mu}{\lambda-} \binom{\mu}{N} (-1)^{\lambda} \lambda! \sum_{\{k_i\}} \prod_{i=1}^{i=N} \frac{(l_i)^{k_i}}{k_i!} \right\} (qs)^{(m+n)\mu}.$$

Dans cette expression le produit  $\prod_i l_i^{k_i}$  vaut :

$$\prod_{i=1}^{i=\lfloor \frac{a+b+1}{n} \rfloor} (-1)^{\theta(n-\theta)k_i} \left(\frac{p}{q}\right)^{nik_i} (L_{u(a+b+1)-i}^*)^{k_i}.$$

Comme  $\{k_i\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{entiers non négatifs } k_i \text{ tels que} \\ \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{a+b+1}{m+n} \rfloor} k_i = \lambda \text{ et} \\ \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{a+b+1}{m+n} \rfloor} ik_i = \mu \end{array} \right\}$  ce produit se simplifie :

$$\prod_i (l_i)^{k_i} = (-1)^{\lambda\theta(n-\theta)} \left(-\frac{p}{q}\right)^{n\mu} \prod_{i=1}^{\lfloor \frac{a+b+1}{m+n} \rfloor} (L_{u(a+b+1)-i}^*)^{k_i}.$$

Posons alors :

$$IV.2.26 \quad M(\mu) = \sum_{\lambda=-}^{\mu} \binom{\mu}{\lfloor \frac{a+b+1}{m+n} \rfloor} \left[ \sum_{\{k_i\}} (-1)^{\lambda+\lambda\theta(n-\theta)} \lambda! \prod_{i=1}^{i=\lfloor \frac{a+b+1}{m+n} \rfloor} \frac{(L_{u(a+b+1)-i}^*)^{k_i}}{k_i!} \right].$$

Ce coefficient est indépendant de  $p$  et de  $q$ , c'est une combinaison linéaire de produits de « coefficients du binôme ».

Le développement du dénominateur de  $F_k(x, s)$  au voisinage de  $s = 0$  s'écrit ainsi :

$$1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(-\frac{p}{q}\right)^{n\mu} \cdot M(\mu) \cdot (qs)^{(m+n)\mu}$$

et l'on a :

$$\begin{aligned}
 F_k(x, s) &= (-1)^{\theta(n-\theta)} \cdot \frac{\left(-\frac{p}{q}\right)^{\alpha_1(x,k)}}{(qs)^{\alpha_2(x,k)}} \\
 &\cdot \left\{ \sum_{\mu=0}^{d(x,k)} \left(-\frac{p}{q}\right)^{n\mu} D_{\mu}(x, k)(qs)^{(m+n)\mu} \right\} \left\{ 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(-\frac{p}{q}\right)^{n\mu} M(\mu)(qs)^{(m+n)\mu} \right\} \\
 &= (-1)^{\theta(n-\theta)} \frac{\left(-\frac{p}{q}\right)^{\alpha_1(x,k)}}{(qs)^{\alpha_2(x,k)}} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(-\frac{p}{q}\right)^{n\mu} (qs)^{(m+n)\mu} \left\{ \sum_{\{\mu_1, \mu_2\}} D_{\mu_1}(x, k) \cdot M(\mu_2) \right\}
 \end{aligned}$$

où  $\{\mu_1, \mu_2\} = \{\text{entiers non négatifs } \mu_1 \text{ et } \mu_2 \text{ tels que :}$

$$\mu_1 + \mu_2 = \mu, 0 \leq \mu_1 \leq d(x, k)\}.$$

La contribution à la probabilité  $p_{0,x}^{(t)}$  de  $F_k(x, s)$  est ainsi :

$$(-1)^{\theta(n-\theta)} \frac{\left(-\frac{p}{q}\right)^{\alpha_1(x,k)}}{q^{\alpha_2(x,k)}} q^{(m+n)\mu} \left(-\frac{p}{q}\right)^{n\mu} \cdot \sum_{\{\mu_1, \mu_2\}} D_{\mu_1}(x, k) M(\mu_2)$$

pourvu que  $(m+n)\mu - \alpha_2(x, k) = t$ .

Substituons à  $\alpha_2(x, k)$  l'expression écrite plus haut :

$$t = (m+n)\mu - vx + (m+n)u(a+b) - (m+n) \left\{ \rho''(x, k) + \left[ \frac{u(b+k-n+1)}{n} \right] \right\}.$$

Soit :

$$t = -vx + (m+n) \left\{ \mu + u(a+b) - \rho''(x, k) - \left[ \frac{u(b+k-n+1)}{n} \right] \right\}.$$

La contribution à  $p_{0,x}^{(t)}$  de  $F_k(x, s)$  est donc nulle si  $t + vx$  n'est pas un multiple de  $m+n$  : on retrouve le fait qu'à un instant  $t$  donné le processus ne peut être qu'en certains points de l'ensemble  $\{-a, \dots, +b\}$  s'il n'est pas absorbé auparavant.

Posons alors  $t + vx = \tau(m+n)$  de sorte que  $\mu$  est lié à  $t$  par l'intermédiaire de  $\tau$  :

$$\text{IV.2.27} \quad \tau = \mu + u(a+b) - \rho''(x, k) - \left[ \frac{u(b+k-n+1)}{n} \right].$$

Désignons par  $\mu_k(x, t)$  la valeur définie ci-dessus. On a ainsi :

$$\tau - \mu_k(x, t) = (a+b)u - \rho''(x, k) - \left[ \frac{u(b+k-n+1)}{n} \right]$$

de sorte que :

$$\alpha_1(x, k) = ux + n\tau - n\mu_k(x, t)$$

$$\alpha_2(x, k) = vx - (m+n)\tau + (m+n)\mu_k(x, t)$$

et la contribution de  $F_k(x, s)$  à  $p_{0,x}^{(t)}$  est :

$$(-1)^{\theta(n-\theta)} (-p)^{ux+n\tau} q^{m\mu-\alpha_1-\alpha_2} \sum_{\{\mu_1, \mu_2\}} D_{\mu_1}(x, k) M(\mu_2)$$

si  $t + vx = \tau(m+n)$  et 0 sinon.

Remarquons que :

$$ux + n\tau = ux + n \frac{t + vx}{m + n} = \frac{nt + x}{m + n} \quad \text{car} \quad u(m+n) + vn = 1$$

et :

$$m\mu_k(x, t) - \alpha_1(x, k) - \alpha_2(x, k) = -(u+v)x + m\tau = \frac{mt - x}{m + n}.$$

On obtient ainsi finalement l'expression des probabilités de passage compte tenu des formules IV.2.25 et IV.2.26.

Si  $t + vx = \tau(m+n)$  :

$$\text{IV.2.28} \quad p_{0,x}^{(t)} = (-1)^{\theta(n-\theta)} (-p)^{\frac{nt+x}{m+n}} q^{\frac{mt-x}{m+n}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sum_{\{\mu_1, \mu_2\}} D_{\mu_1}(x, k) M(\mu_2)$$

$\{\mu_1, \mu_2\} = \{\text{entiers non négatifs } \mu_1 \text{ et } \mu_2 \text{ tels que :}$

$$\mu_1 + \mu_2 = \mu_k(x, t), \quad 0 \leq \mu_1 \leq d(x, k) \}$$

$$\text{où} \left\{ \begin{array}{l} \theta \equiv a + b + 1 \pmod{n}, \quad 0 \leq \theta < n \\ \mu_k(x, t) = \tau - (a+b)u + \rho''(x, t) + \left[ \frac{(b+k-n+1)u}{n} \right] \\ d(x, k) = \rho''(x, k) - \rho'(x, k) + \left[ \frac{(b+k-n+1)u}{n} \right] + \left[ \frac{(b+k-n+1)v}{m+n} \right] \end{array} \right.$$

et  $p_{0,x}^{(t)} = 0$  si  $t + vx \neq \tau(m+n)$ .

*Remarque.* — Une particule allant du point d'abscisse 0 au point d'abscisse  $x$  en  $t$  sauts de  $+m$  ou de  $-n$  fait nécessairement  $k$  sauts de  $+m$  et  $l$  sauts de  $-n$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} t = k + l \\ x = mk - nl. \end{array} \right.$$

On obtient immédiatement  $k = \frac{x + nt}{m + n}$  et  $l = \frac{mt - x}{m + n}$ .

La probabilité que la particule décrive un chemin donné à l'avance est  $p^k q^l = p^{\frac{x+nt}{m+n}} q^{\frac{mt-x}{m+n}}$  et la probabilité  $p_{0,x}^{(t)}$  n'est autre que le produit de  $p^k q^l$  par le nombre de chemins non absorbés conduisant de 0 à  $x$  au temps  $t$ . La formule IV.2.30 met ainsi en évidence ce nombre de chemins non absorbés :

$$N_{0,x}^{(t)} = (-1)^{\theta(n-\theta)} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sum_{\{\mu_1, \mu_2\}} D_{\mu_1}(x, k) M(\mu_2)$$

pourvu que  $t + vx = \tau(m+n)$  et que :

$$\mu_1 + \mu_2 = \tau - u(a+b) + \rho''(x, k) + \left[ \frac{u(b+k-n+1)}{n} \right]$$

avec :

$$0 \leq \mu_1 \leq \rho''(x, k) - \rho'(x, k) + \left[ \frac{u(b+k-n+1)}{n} \right] + \left[ \frac{v(b+k-n+1)}{m+n} \right].$$

### 3. Cas $\Phi(r) = pr^m + qr^{-1}$ .

Il s'agit là d'un cas particulier du type de chaîne de Markov présenté dans le paragraphe précédent. Dans ce cas les formules se simplifient : comme  $n = 1$ , il n'y a plus de sommation de  $k = 0$  à  $k = n - 1$  et les coefficients  $b_\mu$  et  $L^*$  introduits dans le paragraphe précédent se réduisent à des « coefficients du binôme de Newton ».

Partons de l'expression IV.2.23 et examinons les différentes expressions qui y figurent :

\* Remarquons d'abord qu'il n'y a plus qu'une seule permutation  $\mathfrak{J}$  (et c'est ce fait qui est à l'origine de toutes les simplifications qui vont apparaître) :  $\mathfrak{J} = \{m\}$ . Donc  $\beta_{m+1} = m + a + x - m = a + x$ .

Comme  $x$  est compris entre  $-a$  et  $b$ ,  $\beta_{m+1}$  est positif ou nul et l'on est dans le cas  $\mathfrak{F}_1 \equiv \mathfrak{F}$ .

On voit facilement que l'on peut prendre  $u = 1$ ,  $v = -m$ , de sorte que la condition :

$$\left] \frac{-v\beta_{m+1}}{m+n} \right[ \leq \left[ \frac{u\beta_{m+1}}{n} \right]$$

s'écrit :

$$\left] \frac{m(a+x)}{m+1} \right[ \leq a+x$$

soit :

$$\left] a + x - \frac{a + x}{m + 1} \left[ \leq a + x$$

ou enfin :

$$a + x - \left[ \frac{a + x}{m + 1} \right] \leq a + x$$

condition toujours réalisée puisque  $a + x$  est positif ou nul.

Ainsi l'on a  $\mathcal{F}_2 \equiv \mathcal{F}$  (voir IV.2.5).

\* Les expressions  $\rho''(x, 0)$  et  $\rho'(x, 0)$  définies par les égalités IV.2.16 deviennent :

$$\rho''(x, 0) = \left[ \frac{u_{m+1}^\beta}{n} \right] = a + x$$

$$\rho'(x, 0) = \left[ \frac{m\beta_{m+1}}{m+1} \right] = a + x - \left[ \frac{a + x}{m + 1} \right].$$

Il en résulte, d'après les formules IV.2.24 :

$$\alpha_1(x, 0) = x + a + b - \{a + x + b\} = 0$$

$$\alpha_2(x, 0) = -mx - (m + 1)(a + b) + (m + 1)(a + x + b) = x.$$

\* On a :

$$\varphi(b) = b + \left[ \frac{-mb}{m+1} \right] = b + \left[ \frac{b}{m+1} - b \right] = \left[ \frac{b}{m+1} \right]$$

$$\psi(b) = (m + 1)b - mb = b$$

et :

$$b_\mu(b) = \begin{pmatrix} \psi(b) + 0 - m\mu \\ 0 + \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - m\mu \\ \mu \end{pmatrix}.$$

\* Enfin, d'après IV.2.18 :

$$L_{\rho''(x,0)-\mu}^*(x, 0) = \begin{pmatrix} (1 - m)(a + x) + m\rho \\ -m(a + x) + (m + 1)\rho \end{pmatrix}$$

pourvu que le paramètre  $\rho = \rho''(x, 0) - \mu = a + x - \mu$  soit compris entre  $a + x - \left[ \frac{a + x}{m + 1} \right]$  et  $a + x$ , c'est-à-dire pourvu que  $0 \leq \mu \leq \left[ \frac{a + x}{m + 1} \right]$ , ce qui est effectivement réalisé puisque, dans la formule IV.2.23, l'on somme sur  $\mu$  de 0 à  $\rho'' - \rho' = \left[ \frac{a + x}{m + 1} \right]$ . On a, de ce fait :

$$L_{a+x-\mu}^*(x, 0) = \begin{pmatrix} a + x - m\mu \\ \mu \end{pmatrix}.$$

La fonction génératrice des probabilités  $p_{0,x}^{(t)}$  s'écrit dans ce cas :

$$\begin{aligned}
 \text{IV.3.1 } F(x, s) &= \operatorname{Re} \frac{1}{(qs)^x} \\
 &= \frac{\left\{ \sum_{\mu=0}^{\left[ \frac{b}{m+1} \right]} \left( -\frac{p}{q} \right)^\mu \binom{b-m\mu}{\mu} (qs)^{(m+1)\mu} \right\} \left\{ \sum_{\mu=0}^{\left[ \frac{a+x}{m+1} \right]} \left( -\frac{p}{q} \right)^\mu \binom{a+x-m\mu}{\mu} (qs)^{(m+1)\mu} \right\}}{1 + \sum_{\mu=1}^{\left[ \frac{a+b+1}{m+1} \right]} \left( -\frac{p}{q} \right)^\mu \binom{a+b+1-m\mu}{\mu} (qs)^{(m+1)\mu}}
 \end{aligned}$$

Ce résultat n'est qu'une généralisation de ce que nous avons présenté en IV.1.4 (cas où  $m$  vaut 1).

La formule IV.2.30 donne les probabilités  $p_{0,x}^{(t)}$  : on obtient facilement, tous calculs faits :

$$\text{IV.3.2 } p_{0,x}^{(t)} = (-p)^{\frac{t+x}{m+1}} q^{\frac{mt-x}{m+1}} \sum_{\mu_1=0}^{\left[ \frac{b}{m+1} \right]} \sum_{\mu_2=0}^{\left[ \frac{a+x}{m+1} \right]} \binom{b-m\mu_1}{\mu_1} \binom{a+x-m\mu_2}{\mu_2} M(\tau+x-\mu_1-\mu_2)$$

si  $t+x = \tau(m+1)$ , et 0 sinon. L'expression  $M(\mu)$  figurant dans  $p_{0,x}^{(t)}$  est définie par :

$$\text{IV.3.3 } M(\mu) = \sum_{\lambda=\left[ \frac{\mu}{\left[ \frac{a+b+1}{m+1} \right]} \right]}^{\lambda=\mu} (-1)^{\lambda\lambda} ! \sum_{\{k_i\}} \prod_{i=1}^{\left[ \frac{a+b+1}{m+1} \right]} \frac{1}{k_i!} \binom{a+b+1-mi}{i}^{k_i}$$

(avec la convention  $M(\mu) = 0$  si  $\mu < 0$ ).

$$\{k_i\} = \left\{ \text{entiers non négatifs } k_i \text{ vérifiant } \sum_i k_i = \lambda, \sum_i ik_i = \mu \right\}.$$

Notons que l'on peut écrire également  $M(\mu)$  sous la forme :

$$\text{IV.3.4 } M(\mu) = \sum_{\{k_i\}} \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_N)!}{k_1! k_2! \dots k_N!} \prod_{i=1}^{i=N} (-1)^{k_i} \binom{a+b+1-mi}{i}^{k_i}$$

$$\text{où } N = \left[ \frac{a+b+1}{m+1} \right]$$

$$\{k_i\} = \left\{ \text{entiers non négatifs } k_i \text{ tels que } \sum_{i=1}^N ik_i = \mu \right\}.$$

Comme au paragraphe précédent, on peut remarquer que la probabilité  $p_{0,x}^{(t)}$  est le produit de la probabilité d'un chemin aléatoire particulier partant du point d'abscisse 0 et arrivant au point d'abscisse  $x$  sans avoir été absorbé par le nombre de tels chemins  $N_{0,x}^{(t)}$ . On a ainsi, lorsque :

$$\Phi(r) = pr^m + qr^{-1} :$$

$$N_{0,x}^{(t)} = (-1)^{m+1} \sum_{\mu_1=0}^{t+x} \binom{\lfloor \frac{b}{m+1} \rfloor}{\mu_1} \binom{\lfloor \frac{a+x}{m+1} \rfloor}{\mu_2} \binom{b - m\mu_1}{\mu_1} \binom{a + x - m\mu_2}{\mu_2} M(\tau + x - \mu_1 - \mu_2)$$

lorsque  $t + x = \tau(m + 1)$  et 0 sinon.

4. Cas  $\Phi(r) = p(r^m + r^{m-1} + \dots + r + 1 + r^{-1} + \dots + r^{-n})$ .

Dans ce type de chaîne de Markov, il y a équiprobabilité de passage de « l'état »  $x$  à un « état »  $x + h$ ,  $h \in \{m, m - 1, \dots, -n\}$ . En principe,

on a  $p = \frac{1}{m + n + 1}$ .

Les coefficients  $B(\beta, \mu)$  intervenant dans l'expression III.3.8 de la fonction génératrice  $F(x, s)$  des probabilités de passage sont relativement simples. Partons de la forme intégrale :

$$B(\beta, \mu) = \frac{p}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z^{\beta+1+n} [\Phi(z)]^{\mu+1}}$$

et remarquons que l'on a  $\Phi(z) = pz^{-n} \cdot \frac{1 - z^{m+n+1}}{1 - z}$ . Donc :

$$B(\beta, \mu) = \frac{1}{p^\mu} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(1 - z)^{\mu+1}}{(1 - z^{m+n+1})^{\mu+1}} \cdot \frac{dz}{z^{\beta+1-n\mu}}$$

$B(\beta, \mu)$  est ainsi le produit de  $\frac{1}{p^\mu}$  et du coefficient du terme en  $z^{\beta-n\mu}$  du développement, au voisinage de  $z = 0$ , de la fraction :

$$\begin{aligned} \left( \frac{1 - z}{1 - z^{m+n+1}} \right)^{\mu+1} &= (1 - z)^{\mu+1} (1 - z^{m+n+1})^{-\mu-1} \\ &= \left\{ \sum_{\lambda_1=0}^{\mu+1} \binom{\mu+1}{\lambda_1} (-z)^{\lambda_1} \right\} \left\{ \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \binom{-\mu-1}{\lambda_2} (-z^{m+n+1})^{\lambda_2} \right\} \end{aligned}$$



On obtient finalement :

$$IV.4.1 \quad B(\beta, \mu) = \frac{1}{p^\mu} \sum_{\{\lambda_1, \lambda_2\}} (-1)^{\lambda_1 + \lambda_2} \binom{\mu + 1}{\lambda_1} \binom{-\mu - 1}{\lambda_2} = \frac{1}{p^\mu} \cdot B^*(B, \mu)$$

où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  vérifient :

$$\begin{cases} \lambda_1 + (m + n + 1)\lambda_2 = \beta - n\mu \\ 0 \leq \lambda_1 \leq \mu + 1 \\ 0 \leq \lambda_2. \end{cases}$$

On a ainsi fait apparaître un coefficient indépendant de  $p$  :  $B^*(\beta, \mu)$ . Le coefficient  $L[\varepsilon_{m+n}(x, k), \nu]$  peut alors être écrit, d'après le théorème III.1 :

$$L[\varepsilon_{m+n}(x, k), \nu] = \sum_{j \in J_1} (-1)^j \sum_{\{\nu_j\}} \prod_{j=m+1}^{m+n} \frac{1}{p^{\nu_j}} B^*(\beta_j, \nu_j)$$

où la seconde sommation est faite sur l'ensemble des entiers non négatifs  $\nu$  tels que :

$$\sum_{j=m+1}^{m+n} \nu_j = \nu, \quad 0 \leq \nu_j \leq \left\lfloor \frac{\beta_j}{n} \right\rfloor.$$

On voit que l'on peut mettre en facteur  $\frac{1}{p^\nu}$  et écrire :

$$IV.4.2 \quad L[\varepsilon_{m+n}(x, k), \nu] = \frac{1}{p^\nu} L^*[\varepsilon_{m+n}(x, k), \nu].$$

Le coefficient  $L^*$  est une somme de produits de « coefficients du binôme de Newton », indépendante de  $p$ . Les coefficients  $D(\mu, x)$  et  $M(\mu)$  apparaissant dans l'expression des probabilités  $p_{0,x}^{(\mu)}$  sont également de cette forme :

IV.4.3

$$*D(\mu, x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sum_{\{\nu_k, \nu'_k\}} \frac{1}{p^{\nu_k}} L^*[\varepsilon_{m+n}(x, k), \nu_k] \cdot \frac{1}{p^{\nu'_k}} B^*(b + k - n + 1, \nu'_k)$$

avec :

$$\begin{cases} \nu_k + \nu'_k = \mu \\ 0 \leq \nu_k \leq N_k \\ 0 \leq \nu'_k \leq \left\lfloor \frac{b + k + 1}{n} \right\rfloor - 1 \end{cases}$$

donc :

$$D(\mu, x) = \frac{1}{p^\mu} D^*(\mu, x)$$

$$*M(\mu) = \sum_{\{k_i\}} \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_{a+b+1})!}{k_1! k_2 \dots k_{a+b+1}!} \prod_{i=1}^{a+b+1} (-1)^{k_i+k_i\theta(n-\theta)} (p)^{k_i(a+b+1)} \cdot \frac{1}{p^{(a+b+1-i)k_i}} (L_{a+b+1-i}^*)^{k_i}$$

où  $\{k_i\} = \left\{ \text{entiers non négatifs } k_i \text{ tels que } \sum_{i=1}^{a+b+1} ik_i = \mu \right\}$

et :

$$L_{a+b+1-i}^* = L^*[\delta_{m+n}(b+1, 0), a+b+1-i].$$

On voit également que :

IV.4.4  $M(\mu) = p^\mu M^*(\mu)$

$$= p^\mu \sum_{\{k_i\}} \frac{(k_1 + \dots + k_{a+b+1})!}{k_1! \dots k_{a+b+1}!} \prod_{i=1}^{a+b+1} (-1)^{k_i+k_i\theta(n-\theta)} (L_{a+b+1-i}^*)^{k_i}$$

L'expression III.3.14 de  $p_{0,x}^{(t)}$  s'écrit, avec ces notations :

$$p_{0,x}^{(t)} = (-1)^{\theta(n-\theta)} p^{a+b} \sum_{\mu=0}^{a+b+\lfloor \frac{x}{n} \rfloor} \frac{1}{p^\mu} D^*(\mu, x) \cdot p^{\mu+t-a-b} M^*(\mu+t-a-b)$$

soit :

IV.4.5  $p_{0,x}^{(t)} = (-1)^{\theta(n-\theta)} p^t \sum_{\mu=0}^{a+b+\lfloor \frac{x}{n} \rfloor} D^*(\mu, x) M^*(\mu+t-a-b).$

En interprétant cette chaîne de Markov par un cheminement aléatoire, on voit immédiatement que la probabilité attachée à un chemin donné partant de l'origine et atteignant le point d'abscisse  $x$  au temps  $t$  sans être absorbé est  $p^t$ . Ainsi  $p_{0,x}^{(t)}$  est le produit de  $p^t$  par le nombre de chemins non absorbés, allant de 0 à  $x$  durant le temps  $t$ . Ce nombre est évidemment le même lorsque la fonction génératrice des probabilités de passage de l'instant  $t$  à l'instant  $t+1$  n'est plus :

$$\Phi(r) = p(r^m + \dots + r^{-n})$$

mais est :

$$\Phi(r) = p_m r^m + \dots + p_{-n} r^{-n}.$$

Ce nombre de chemins non absorbés est :

$$\text{IV.4.6} \quad N_{0,x}^{(t)} = (-1)^{\theta(n-\theta)} \sum_{\mu=0}^{a+b+\left[\frac{x}{n}\right]} D^*(\mu, x) M^*(\mu + t - a - b)$$

compte tenu des formules IV.4.1, 2, 3, 4, 5.

### 5. Application aux tests non paramétriques de Kolmogorov et de Smirnov.

Soit une variable aléatoire réelle continue,  $X$ , de fonction de répartition  $F(x)$  et soit  $F_n(x)$  la fonction de répartition d'un  $n$ -échantillon tiré de cette variable. Ce  $n$ -échantillon est supposé constitué de  $n$ -valeurs indépendantes, presque sûrement distinctes  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Il est intéressant, pour plusieurs raisons, de connaître la loi de probabilité de l'écart existant entre  $F(x)$  et  $F_n(x)$  et plus précisément, de connaître les probabilités :

$$\text{IV.5.1} \quad Q_n(\alpha, \beta) = \Pr [-\alpha < F_n(x) - F(x) < \beta, \text{ tout } x].$$

Ces probabilités ne dépendent pas de  $F(x)$ , comme on peut s'en assurer en considérant la variable aléatoire  $Y = F(X)$  qui est répartie uniformément sur  $[0, 1]$ . Il en résulte un test non paramétrique, appelé test de Kolmogorov, test qui permet d'examiner si un échantillon sort d'une population de loi continue donnée.

L'expression limite de ces probabilités (lorsque  $n$  tend vers l'infini) a été donnée par Kolmogorov [1] et l'expression exacte de  $Q_n(\alpha, \beta)$  est connue depuis les travaux de Gnedenko, Korolyuk, Kemperman. Nous nous contenterons de montrer que nos résultats conduisent à l'expression exacte de  $Q_n(\alpha, \beta)$ .

Considérons d'autre part deux échantillons indépendants, respectivement de  $n$  et de  $m$  valeurs, tirés d'une même loi continue. Chaque échantillon est constitué de valeurs indépendantes, presque sûrement distinctes. Dans ce cas, il est intéressant de connaître la loi de probabilité de l'écart existant entre les fonctions de répartition  $F_n(x)$  et  $F_m(x)$  de chaque échantillon et plus précisément, de connaître les probabilités :

$$\text{IV.5.2} \quad P_{n,m}(\alpha, \beta) = \Pr [-\alpha < F_n(x) - F_m(x) < \beta, \text{ tout } x].$$

Ces probabilités ne dépendent pas de la loi dont les échantillons sont extraits : il en résulte un test non paramétrique, appelé test de Smirnov,

qui permet d'examiner si deux échantillons sortent d'une même population de loi continue.

L'expression limite de ces probabilités,  $n$  et  $m$  tendant vers l'infini, leur rapport ayant une limite finie, a été donnée par Smirnov et une expression exacte des  $P_{n,m}(\alpha, \beta)$  a été donnée par Korolyuk [1], Chang Li Chien [1] et, dans un cas particulier, par Kemperman [1]. Nous donnerons dans ce paragraphe une expression exacte de  $P_{n,m}(\alpha, \beta)$ , expression qui a le mérite de n'être pas trop compliquée.

**A) Construction d'un processus aléatoire permettant de déterminer  $P_{n,m}(\alpha, \beta)$ .**

Soit  $\tau$  le plus grand diviseur commun à  $m$  et  $n$  :

IV.5.3 
$$\begin{cases} m = \tau\mu \\ n = \tau\nu \end{cases} \quad \mu \text{ et } \nu \text{ premiers entre eux.}$$

La différence  $F_n(x) - F_m(x)$  est, pour  $x$  donné, un multiple de  $\frac{1}{\tau\mu\nu}$  car, en désignant par  $k$  et  $l$  respectivement le nombre d'éléments du premier et du second échantillon inférieurs à  $x$ , on a :

$$F_n(x) - F_m(x) = \frac{k}{n} - \frac{l}{m} = \frac{k}{\tau\nu} - \frac{l}{\tau\mu} = \frac{1}{\tau\mu\nu} (k\mu - l\nu).$$

Posons enfin :

$$\alpha = \frac{a+1}{\tau\mu\nu}, \quad \beta = \frac{b+1}{\tau\mu\nu}$$

l'égalité IV.5.2 devient :

IV.5.4  $P_{n,m}(\alpha, \beta) = \Pr [-a - 1 < k(x)\mu - l(x)\nu < b + 1, \text{ tout } x].$

Soient  $x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1$  et  $x_1^2, x_2^2, \dots, x_m^2$  les éléments de chaque échantillon. Mélangeons ces éléments et classons-les par ordre de grandeur croissante, soit  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+m}$  cette suite. On démontre facilement (voir par exemple Tortrat [2]) que la distribution de l'ensemble des variables aléatoires  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m+n})$  est symétrique pourvu que les échantillons soient tirés d'une loi continue. La probabilité pour que  $\xi_i$  ( $i$  fixé) soit du type  $x^1$  est donc  $p = \frac{n}{m+n}$  et la probabilité pour que  $\xi_i$  soit du type  $x^2$  est  $q = \frac{m}{m+n}$ .

Associons alors à chaque  $\xi_i$  une variable aléatoire  $Z_i$  valant  $\mu$  si  $\xi_i$  est du type  $x^1$  et  $-\nu$  si  $\xi_i$  est du type  $x^2$  :

$$\begin{aligned} \Pr [Z_i = \mu] &= p \\ \Pr [Z_i = -\nu] &= q. \end{aligned}$$

Considérons le processus aléatoire défini par  $s_j = \sum_{i=1}^{j} Z_i$ . Si dans ces  $j$  premières valeurs de la suite  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m+n}$  on a  $k$  éléments  $x^1$  et  $l$  éléments  $x^2$ , alors :

$$s_j = k\mu - lv.$$

Remarquons que l'on a nécessairement  $s_{m+n} = 0$ . Donc, l'égalité IV.5.4 devient :

$$IV.5.5 \quad P_{n,m}(\alpha, \beta) = \Pr [-a - 1 < s_j < b + 1, \text{ tout } j/s_{m+n} = 0].$$

On obtiendra cette probabilité en envisageant un processus aléatoire du type défini ci-dessus par  $s_j$ , mais en y ajoutant deux barrières absorbantes, l'une en  $-a - 1$ , l'autre en  $b + 1$  et en ne retenant que les chemins aléatoires reliant le point O au point O au temps  $m + n$ . Il s'agit ainsi d'un processus du type étudié aux paragraphes 2 et 3 de ce même chapitre; on en déduit donc :

$$P_{n,m}(\alpha, \beta) = \frac{p^n q^m N_{0,0}^{(m+n)}}{p^n q^m \binom{m+n}{n}} = \binom{m+n}{n}^{-1} N_{0,0}^{(m+n)}$$

**B) Expression exacte de  $P_{n,m}(\alpha, \beta)$ .**

Utilisons la formule IV.2.31 dans laquelle nous remplaçons  $m$  par  $\mu$ ,  $n$  par  $\nu$ ,  $x$  par 0 :

$$N_{0,0}^{\tau(\mu+\nu)} = (-1)^{\theta(\nu-\theta)} \sum_{k=0}^{\nu-1} (-1)^k \sum_{\{l_1, l_2\}} D_{l_1}(0, k) M(l_2)$$

la seconde sommation étant faite sur l'ensemble des entiers non négatifs  $l_1$  et  $l_2$  vérifiant :

$$l_1 + l_2 = \tau - u(a + b) + \rho''(0, k) + \left[ \frac{u(b + k - \nu + 1)}{\nu} \right] = \tau_k^*$$

$$0 \leq l_1 \leq \rho''(0, k) - \rho'(0, k) + \varphi(b + k - \nu + 1).$$

Comme  $D_l(0, k)$  est, d'après la formule IV.2.26 :

$$D_l(0, k) = \sum_{\{s_1, s_2\}} b_{s_1}(b + k - \nu + 1) L_{\rho''(0, k) - s_2}^*(0, k)$$

la sommation étant faite sur l'ensemble des entiers non négatifs  $s_1$  et  $s_2$  vérifiant :

$$\begin{cases} s_1 + s_2 = l \\ 0 \leq s_1 \leq \varphi(b + k - \nu + 1) \\ 0 \leq s_2 \leq \rho''(0, k) - \rho'(0, k). \end{cases}$$

On voit facilement que l'on peut écrire :

$$N_{0,0}^{\tau(\mu+\nu)} = (-1)^{\theta(\nu-\theta)} \sum_{k=0}^{\nu-1} (-1)^k \sum_{s_1=0}^{\varphi(b+k-\nu+1)} \sum_{s_2=0}^{\rho''(0,k)-\rho'(0,k)} b_{s_1}(b+k-\nu+1) L_{\rho''(0,k)-s_2}^* M(\tau_k^* - s_1 - s_2).$$

Les coefficients  $b_{s_1}$ ,  $L_{\rho''-s'}^*$ ,  $M(s)$  sont définis respectivement par les égalités IV.2.14, IV.2.18 et IV.2.28.

En définitive, on a le :

THÉORÈME. —  $F_n(x)$  et  $F_m(x)$  étant les fonctions de répartition de deux échantillons d'ordre  $n$  et  $m$ , indépendants, extraits d'une même loi continue, on a :

$$IV.5.6 \quad \Pr \left[ \frac{-a-1}{\tau\mu\nu} < F_n(x) - F_m(x) < \frac{b+1}{\tau\mu\nu}, \text{ tout } x \right] = \frac{N_{0,0}^{(m+n)}}{\binom{m+n}{n}}.$$

Dans cette formule, on a posé :

\*  $m = \tau\mu$ ,  $n = \tau\nu$ ,  $\mu$  et  $\nu$  entiers premiers entre eux

$u$  et  $v$  sont deux entiers relatifs vérifiant  $u(\mu + \nu) + v\nu = 1$ .

$$* \varphi(\alpha) = \left[ \frac{u\alpha}{\nu} \right] + \left[ \frac{v\alpha}{\mu + \nu} \right]$$

$$* b_l(\alpha) = \begin{pmatrix} \mu \left[ \frac{u\alpha}{\nu} \right] + (u + v)\alpha - \mu l \\ u\alpha - \nu \left[ \frac{u\alpha}{\nu} \right] + \nu l \end{pmatrix}$$

\*  $\{\alpha_j\}_k = \{a, a + b + 1, \dots, a + b + k, a + b + k + 2, \dots, a + b + \nu\}$

$j$  varie de  $\mu + 1$  à  $\mu + \nu$  (ainsi  $\alpha_{\mu+1} = a$ ).

$\mathfrak{J} = \{i_j\}$  est une permutation des entiers  $\{0, 1, \dots, \nu - 1\}$ .

$I$  est le nombre d'inversions de  $\mathfrak{J}$ .

On pose  $\beta_j = \alpha_j - i_j$ .

$$\mathfrak{F}_2 = \left\{ \mathfrak{J} \text{ telles que } \forall j : \beta_j \geq 0 \text{ et } \left[ \frac{-v\beta_j}{\mu+v} \right] \leq \left[ \frac{u\beta_j}{v} \right] \right\}$$

$$\rho''(0, k) = \text{Sup}_{\mathfrak{J} \in \mathfrak{F}_2} \sum_{j=\mu+1}^{\mu+v} \left[ \frac{u\beta_j}{v} \right]$$

$$\rho'(0, k) = \text{Inf}_{\mathfrak{J} \in \mathfrak{F}_2} \sum_{j=\mu+1}^{\mu+v} \left[ \frac{-v\beta_j}{\mu+v} \right]$$

$$* L_p^*(0, k) = \sum_{\mathfrak{J} \in \mathfrak{F}_2} (-1)^t \sum_{\{\rho_j\}} \sum_{j=\mu+1}^{\mu+v} \left( \begin{matrix} (u+v)\beta_j + \mu\rho_j \\ v\beta_j + (\mu+v)\rho_j \end{matrix} \right)$$

$$\text{où } \{\rho_j\} = \left\{ \text{entiers } \rho_j \text{ tels que } \sum_{j=\mu+1}^{\mu+v} \rho_j = \rho, \left[ \frac{-v\beta_j}{\mu+v} \right] \leq \rho_j \leq \left[ \frac{u\beta_j}{v} \right] \right\}$$

$$* M(s) = \sum_{\{k_i\}} \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_N)!}{k_1! k_2! \dots k_N!} \prod_{i=1}^N \frac{(-1)^{k_i + k_i\theta(v-6)}}{k_i!} (L_{u(a+b+1)-i}^*)^{k_i}$$

où  $\theta \equiv a + b + 1 \pmod{v}$ ,  $0 \leq \theta < v - 1$

$$\{k_i\} = \left\{ \text{entiers non négatifs } k_i \text{ tels que } \sum_{i=1}^N ik_i = s \right\}$$

$$N = \left[ \frac{a+b+1}{\mu+v} \right]$$

$$* N_{0,0}^{(m+n)} = (-1)^{\theta(v-\theta)} \sum_{k=0}^{v-1} (-1)^k \sum_{s_1=0}^{\varphi(b+k-v+1)} \sum_{s_2=0}^{\rho''(0,k) - \rho'(0,k)} b_{s_1}(b+k-v+1) L_{\rho''(0,k)-s_2}^* M(\tau_k^* - s_1 - s_2)$$

où :

$$\tau_k^* = \tau - u(a+b) + \rho''(0, k) + \left[ \frac{u(b+k-v+1)}{v} \right].$$

La formule IV.5.6 que nous venons de présenter résout entièrement le problème de la détermination des probabilités  $P_{n,m}(\alpha, \beta)$ . Malheureusement, elle est encore assez compliquée et nous n'avons pas réussi à retrouver la loi limite de Smirnov (lorsque  $\tau$  tend vers l'infini).

**C) Cas particuliers.**

Lorsque  $\nu = 1$ , c'est-à-dire lorsque  $m = \mu n$  les formules précédentes se simplifient énormément. En utilisant la formule IV.3.5 on obtient :

$$\begin{aligned} \text{IV.5.7 } \Pr \left[ \frac{-a-1}{\mu n} < F_n(x) - F_m(x) < \frac{b+1}{\mu n}, \text{ tout } x \right] \\ = \frac{(-1)^n}{\binom{m+n}{n}} \sum_{s_1=0}^{\left[ \frac{b}{\mu+1} \right]} \sum_{s_2=0}^{\left[ \frac{a}{\mu+1} \right]} \binom{b-\mu s_1}{s_1} \binom{a-\mu s_2}{s_2} M(n-s_1-s_2) \end{aligned}$$

avec :

$$M(s) = \sum_{\{k_i\}} \frac{(k_1 + \dots + k_N)!}{k_1! \dots k_N!} \prod_{i=1}^N (-1)^{k_i} \left( \frac{a+b+1-\mu_i}{i} \right)^{k_i}$$

où :

$$N = \left\lceil \frac{a+b+1}{\mu+1} \right\rceil$$

$$\text{et } \{k_i\} = \left\{ \text{entiers non négatifs } k \text{ tels que } \sum_{i=0}^N ik_i = s \right\}$$

La formule IV.5.7 est celle qu'a donnée Kemperman [1] (formule 5.36). Lorsque  $\mu$  tend vers l'infini, la fonction de répartition de l'échantillon de taille  $m = \mu n$  tend vers la fonction de répartition de la variable aléatoire dont l'échantillon est issu. Kemperman a ainsi déduit :

$$Q_n(\alpha, \beta) \text{ de } P_{n,\mu n}(\alpha, \beta)$$

par un passage à la limite. Nous nous contentons ici de donner le résultat :

$$Q_n\left(\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right) = n! n^{-n} \sum_{s_1=0}^{[a]} \sum_{s_2=0}^{[b]} (-1)^{s_1+s_2} \frac{(a-s_1)^{s_1}}{s_1!} \cdot \frac{(b-s_2)^{s_2}}{s_2!} \cdot M^*(n-s_1-s_2)$$

où :

$$M^*(s) = (-1)^s \sum_{\{k_i\}} \frac{(k_1 + \dots + k_N)!}{k_1! \dots k_N!} \prod_{i=1}^N \left\{ -\frac{(a+b-i)^i}{i!} \right\}^{k_i}$$

où :

$$N = [s]$$

$$\text{et } \{k_i\} = \left\{ \text{entiers non négatifs } k_i \text{ tels que } \sum_{i=1}^N ik_i = s \right\}$$



## CHAPITRE V

**ÉTUDE D'UNE CHAÎNE DE MARKOV HOMOGENÈE  
DANS LE TEMPS, A  $n$  DIMENSIONS,  
L'ESPACE DES ÉTATS  
COMPORTANT  $2n$  BARRIÈRES SEMI-ABSORBANTES**

Dans tout ce chapitre nous désignerons par  $(E_i)$  l'ensemble d'entiers relatifs :

$$(E_i) = \{-a_i, -a_i + 1, \dots, 0, \dots, b_i\}$$

( $a_i$  et  $b_i$  sont deux entiers positifs ou nuls), par  $(E)$  l'ensemble :

$$(E_1)X(E_2)X \dots X(E_n).$$

$(E)$  est donc l'ensemble des suites d'entiers :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{où} \quad -a_i \leq x_i \leq b_i \text{ quel que soit } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Nous appellerons « point » une telle suite d'entiers. Nous désignerons par  $U_i$  le point  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  où  $x_j = \delta_{ij}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  ( $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker) et par  $O$  le point  $(0, 0, \dots, 0)$ . L'ensemble  $(E)$  ainsi défini est un sous-ensemble de l'espace vectoriel sur le corps des réels à  $n$ -dimensions dont une base est constituée par les points  $U_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Nous appellerons points voisins de  $M$  dans la direction n°  $i$  les points :

$$\begin{aligned} M + U_i &= (x_1, x_2, \dots, x_i + 1, \dots, x_n) \\ M - U_i &= (x_1, x_2, \dots, x_i - 1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Enfin, nous désignerons par  $(F)$  l'ensemble des points du type :

$$(x_1, x_2, \dots, -a_i - 1, \dots, x_n) \quad \text{ou} \quad (x_1, x_2, \dots, b_i + 1, \dots, x_n).$$

### 1. Définition d'une chaîne de Markov sur l'espace $(E) + (F)$ .

L'espace des états étant l'ensemble  $(E) + (F)$ , une chaîne de Markov est définie par :

$$\begin{array}{lll} \text{les probabilités initiales } p_M^{(0)} = 0 & \text{si} & M \neq O \\ & 1 & \text{si} & M = O ; \end{array}$$

les probabilités de passage :

$$V.1.1 \quad \left. \begin{array}{l} p_{M, M+U_i} = p_i \\ p_{M, M-U_i} = q_i \end{array} \right\} \text{ pour tout } M \in (E) \text{ tel que } -a_i + 1 \leq x_i \leq b_i - 1$$

$$V.1.2 \quad \left. \begin{aligned} p_{M,M} &= \gamma_i^1 p_i \\ p_{M,M-u_i} &= q_i \end{aligned} \right\} \text{ pour tout } M \in (E) \text{ tel que } x_i = b_i$$

$$V.1.3 \quad \left. \begin{aligned} p_{M,M+u_i} &= p_i \\ p_{M,M} &= \gamma_i^0 q_i \end{aligned} \right\} \text{ pour tout } M \in (E) \text{ tel que } x_i = -a_i$$

$$p_{M,M} = 1 \quad \text{pour tout } M \in (F).$$

Nous supposons  $\sum_i (p_i + q_i) = 1$ .

Cet ensemble de probabilités de passage montre qu'il existe dans chaque direction deux barrières semi-absorbantes, l'une en  $-a_i - 1$ , l'autre en  $b_i + 1$ . Les coefficients  $\gamma_i^1$  et  $\gamma_i^0$  sont des coefficients de réflexion. Ils sont tous compris entre 0 et 1.

Un tel processus a déjà été envisagé, dans certains cas particuliers, entre autres, par MacCrea et Whipple [1], Polya [1], Jordan [1], Henze [1]. Nous donnerons dans ce chapitre l'expression des probabilités de passage  $p_{0,M}^{(t)}$  et nous étudierons quelques propriétés de ces chaînes de Markov.

### 2. Recherche des probabilités $p_{0,M}^{(t)}$ .

Les probabilités  $p_{0,M}^{(t)}$  vérifient le système suivant :

$$(I) \quad \left\{ \begin{aligned} p_{0,M}^{(t+1)} &= \sum_{j=1}^{j=n} p_j \cdot p_{0,M-u_j}^{(t)} + q_j \cdot p_{0,M+u_j}^{(t)} \\ &\text{pour tout } M \in (E) \text{ tel que, } \forall j - a_j + 1 \leq x_j \leq b_j - 1 \\ p_{0,M}^{(t+1)} &= \sum_{j \neq i} \left\{ p_j \cdot p_{0,M-u_j}^{(t)} + q_j p_{0,M+u_j}^{(t)} \right\} + p_i p_{0,M-u_i}^{(t)} + \gamma_i^1 p_i p_{0,M}^{(t)} \\ &\text{pour tout } M \in (E) \text{ tel que } x_i = b_i \text{ et } \forall j \neq i, -a_j + 1 \leq x_j \leq b_j - 1 \\ p_{0,M}^{(t+1)} &= \sum_{j \neq i} \left\{ p_j \cdot p_{0,M-u_j}^{(t)} + q_j p_{0,M+u_j}^{(t)} \right\} + \gamma_i^0 q_i p_{0,M}^{(t)} + q_i p_{0,M+u_i}^{(t)} \\ &\text{pour tout } M \in (E) \text{ tel que } x_i = -a_i \text{ et } \forall j \neq i, -a_j + 1 \leq x_j \leq b_j - 1 \\ p_{0,M}^{(t+1)} &= \sum_{j \neq i_1 \text{ et } i_2} \left( p_j \cdot p_{0,M-u_j}^{(t)} + q_j \cdot p_{0,M+u_j}^{(t)} \right) + p_{i_1} \cdot p_{0,M-u_{i_1}}^{(t)} \\ &\quad + \gamma_{i_1}^1 p_{i_1} \cdot p_{0,M}^{(t)} + p_{i_2} \cdot p_{0,M-u_{i_2}}^{(t)} + \gamma_{i_2}^1 p_{i_2} \cdot p_{0,M}^{(t)} \\ &\text{pour tout } M \in (E) \text{ tel que } x_{i_1} = b_{i_1}, x_{i_2} = b_{i_2}, \text{ et } \forall j \neq i_1, i_2 : \\ &\quad -a_j + 1 \leq x_j \leq b_j - 1, \text{ etc...} \\ p_{0,M}^{(t)} &= 0 \quad \text{si } M \neq O \\ &= 1 \quad \text{si } M = O. \end{aligned} \right.$$

Introduisons une fonction  $f(t, M)$  définie sur  $(E) + (F)$  qui coïncide avec  $p_{0,M}^{(i)}$  lorsque  $M \in (E)$  et qui vérifie la première équation ci-dessus en tout point de  $(E)$ .

LEMME V. 1. — *Le système :*

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} f(t+1, M) = \sum_{j=1}^n p_j \cdot f(t, M - U_j) + q_j \cdot f(t, M + U_j) \quad M \in (E) \\ q_i f(t, M + U_i) = \gamma_i^1 p_i f(t, M) \quad \text{pour tout } M \in (E) \text{ tel que } x_i = b_i \\ p_i f(t, M - U_i) = \gamma_i^0 q_i f(t, M) \quad \text{pour tout } M \in (E) \text{ tel que } x_i = -a_i \\ \left\{ \begin{array}{l} f(0, M) = 0 \quad \text{si } M \neq O \\ f(0, O) = 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

possède une solution unique coïncidant avec  $p_{0,M}^{(i)}$  pour  $M \in (E)$ .

Établissons d'abord l'équivalence des systèmes (I) et (II) :

\* La probabilité  $p_{0,M}^{(i)}$  vérifiant la 1<sup>re</sup> égalité de (I) vérifie la 1<sup>re</sup> égalité de (II) pourvu qu'elle corresponde à un point  $M$  tel que :

$$\forall j - a_j + 1 \leq x_j \leq b_j - 1.$$

Si  $x_i = b_i$  la seconde égalité de (I) équivaut à l'ensemble de la première et de la seconde égalité de (II), etc.

Donc les probabilités  $p_{0,M}^{(i)}$  vérifient le système (II) pour  $M \in (E)$ .

D'autre part, les dernières égalités de (I) et de (II) sont identiques.

\* Réciproquement on voit immédiatement que toute fonction  $f(t, M)$ , solution de (II) est également solution de (I).

Enfin, la solution du système (II) est unique car il s'agit d'un système récurrentiel sur un espace fini : partant d'une distribution donnée sur  $(E)$  au temps 0, on ne peut construire au temps 1 qu'une seule distribution, elle-même n'engendrant au temps 2 qu'une seule distribution, etc. Nous résoudrons le système (II), plus simple que le système (I), en y introduisant les notations suivantes, destinées à symétriser les relations :

$$V.2.1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{p_i}{q_i} = \theta_i^2 \\ p_i q_i = \sigma_i^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} p_i = \theta_i \sigma_i \\ q_i = \frac{\sigma_i}{\theta_i} \end{array} \right.$$

La relation  $\sum_{i=1}^n (p_i + q_i) = 1$  devient ainsi :

$$V.2.2 \quad \sum_{i=1}^n \sigma_i \left( \theta_i + \frac{1}{\theta_i} \right) = 1$$

et la 1<sup>re</sup> relation de (II) devient :

$$f(t + 1, M) = \sum_{j=1}^n \sigma_j \left\{ \theta_j f(t, M - U_j) + \frac{1}{\theta_j} f(t, M + U_j) \right\}$$

Poursuivons cette symétrisation en écrivant :

$$V.2.3 \quad f(t, M) = \theta_1^{x_1} \dots \theta_n^{x_n} \cdot f^*(t, M) \quad \text{pour } M \in (E).$$

La fonction  $f^*(t, M)$  est alors l'unique solution du système :

$$(III) \quad \begin{cases} f^*(t + 1, M) = \sum_{j=1}^n \sigma_j \{ f^*(t, M - U_j) + f^*(t, M + U_j) \} & M \in (E) \\ f^*(t, M + U_i) = \gamma_i^1 \theta_i f^*(t, M) & M \in (E) \text{ et } x_i = b_i \\ f^*(t, M - U_j) = \frac{\gamma_j^0}{\theta_j} f^*(t, M) & M \in (E) \text{ et } x_j = -a_j \\ f^*(0, M) = 0 & \text{si } M \neq O \\ & = 1 \quad \text{si } M = O. \end{cases}$$

Ce système est constitué d'une équation aux différences finies sur l'ensemble (E) complétée par des conditions « aux limites » linéaires et par des conditions initiales. Nous chercherons des solutions particulières de l'équation aux différences finies, que nous adapterons aux conditions aux limites puis nous superposerons les solutions élémentaires ainsi obtenues afin d'obtenir une solution satisfaisant aux conditions initiales. L'unicité de la solution de (II) (donc de (III)) nous permet d'affirmer que nous aurons atteint cette solution.

Envisageons d'abord des fonctions  $f^*(t, M)$  du type :

$$V.2.4 \quad f^*(t, M) = u^t g_1(x_1) g_2(x_2) \dots g_n(x_n).$$

La première égalité du système (III) devient :

$$\begin{aligned} & u g_1(x_1) \dots g_n(x_n) \\ &= \sum_{j=1}^n \sigma_j \{ g_1(x_1) \dots g_j(x_j - 1) \dots g_n(x_n) + g_1(x_1) \dots g_j(x_j + 1) \dots g_n(x_n) \}. \end{aligned}$$

Divisons les deux membres par le produit  $g_1(x_1) \dots g_n(x_n)$  :

$$u = \sum_{j=1}^n \sigma_j \frac{g_j(x_j - 1) + g_j(x_j + 1)}{g_j(x_j)}.$$

Les différentes fractions du second membre dépendant de variables indépendantes, une telle égalité n'a de sens que si chaque fraction est une constante (vis-à-vis des variables  $x_j$ ).

Ainsi cette égalité se décompose en :

$$\text{V.2.5} \quad u = \sum_{j=1}^n \sigma_j \xi_j$$

$$\text{V.2.6} \quad \xi_j = \frac{g_j(x_j - 1) + g_j(x_j + 1)}{g_j(x_j)}.$$

Avec la forme V.2.4 de  $f^*(t, M)$  les conditions aux limites deviennent :

$$\text{V.2.7} \quad \begin{cases} g_i(b_i + 1) = \gamma_i^1 \theta_i g_i(b_i) \\ g_i(-a_i - 1) = \frac{\gamma_i^0}{\theta_i} g_i(-a_i). \end{cases}$$

Pour déterminer la solution élémentaire  $f^*(t, M) = u^t \prod_{j=1}^n g_j(x_j)$  satisfaisant à l'équation aux différences finies et aux conditions aux limites on est conduit à résoudre  $n$  problèmes du même type :

Déterminer la fonction  $g_j(x_j)$  vérifiant :

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} g_j(x_j - 1) + g_j(x_j + 1) = \xi_j g_j(x_j) & -a_j \leq x_j \leq b_j \\ g_j(b_j + 1) = \gamma_j^1 \theta_j g_j(b_j) \\ g_j(-a_j - 1) = \frac{\gamma_j^0}{\theta_j} g_j(-a_j). \end{cases}$$

Il est intéressant de noter que chacun de ces problèmes se rencontre lorsqu'on étudie un cheminement aléatoire à une dimension.

Dans la résolution du système (IV) nous omettrons l'indice  $j$ . L'équation aux différences finies apparaissant dans ce système IV a des solutions de la forme  $g(x) = z^x$  où  $z$  désigne un nombre complexe.

En substituant cette expression dans l'équation on trouve facilement que  $z^x$  est solution pourvu que l'on ait la relation :

$$\text{V.2.8} \quad z + \frac{1}{z} = \xi.$$

La quantité  $\xi$  étant connue, il s'agit là d'une équation réciproque du second degré ayant deux racines inverses l'une de l'autre que nous noterons  $z$  et  $\frac{1}{z}$ .

La solution générale de l'équation aux différences finies de (IV) est :

$$g(x) = A_1 z^x + A_2 z^{-x}$$

pourvu que l'équation V.2.8 n'ait pas de racine double, c'est-à-dire pourvu que  $\xi \neq \pm 2$ .

Déterminons maintenant les coefficients  $A_1$  et  $A_2$  de façon que  $g(x)$  satisfasse aux conditions aux limites :

$$\begin{cases} A_1 z^{b+1} + A_2 z^{-b-1} = \gamma^1 \theta (A_1 z^b + A_2 z^{-b}) \\ A_1 z^{-a-1} + A_2 z^{a+1} = \frac{\gamma^0}{\theta} (A_1 z^{-a} + A_2 z^a). \end{cases}$$

Ce système de deux équations linéaires aux inconnues  $A_1$  et  $A_2$  s'écrit :

$$\begin{cases} (z^{b+1} - \gamma^1 \theta z^b) A_1 + (z^{-b-1} - \gamma^1 \theta z^{-b}) A_2 = 0 \\ \left( z^{-a-1} - \frac{\gamma^0}{\theta} z^{-a} \right) A_1 + \left( z^{a+1} - \frac{\gamma^0}{\theta} z^a \right) A_2 = 0. \end{cases}$$

Un tel système homogène n'a de solution non nulle que si son déterminant est nul, donc  $A_1$  et  $A_2$  n'existeront que si  $z$  est racine de l'équation :

$$(z^{b+1} - \gamma^1 \theta z^b) \left( z^{a+1} - \frac{\gamma^0}{\theta} z^a \right) - (z^{-b-1} - \gamma^1 \theta z^{-b}) \left( z^{-a-1} - \frac{\gamma^0}{\theta} z^{-a} \right) = 0$$

soit :

### V.2.9

$$z^{a+b+2} - z^{-a-b-2} - \left( \frac{\gamma^0}{\theta} + \gamma^1 \theta \right) (z^{a+b+1} - z^{-a-b-1}) + \gamma^0 \gamma^1 (z^{a+b} - z^{-a-b}) = 0.$$

Lorsque  $z$  est racine de cette équation, le système déterminant  $A_1$  et  $A_2$  est formé de deux équations compatibles et l'on a :

$$\frac{A_1}{z^{-b-1} - \gamma^1 \theta z^{-b}} = \frac{-A_2}{z^{b+1} - \gamma^1 \theta z^b} = A.$$

La fonction  $g(x)$  solution du système IV est ainsi, au coefficient  $A$  près :

$$g(x) = z^{x-b-1} - z^{-x+b+1} - \gamma^1 \theta (z^{x-b} - z^{-x+b}).$$

L'équation V.2.9 est une équation réciproque de degré  $2a + 2b + 4$ . Le premier membre a en facteur le polynôme  $z - \frac{1}{z}$  donc l'équation admet



par  $z_{j,k_j}$  les racines de l'équation V.2.9 correspondant à l'ensemble  $(E_j)$ , par  $\xi_{j,k_j}$  la valeur propre :

$$\xi_{j,k_j} = z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1} \quad \begin{matrix} j \in \{ 1, 2, \dots, n \} \\ k_j \in \{ 1, 2, \dots, a_j + b_j + 1 \} \end{matrix}$$

et par  $g_{j,k_j}$  la fonction propre associée. Nous avons ainsi établi le

LEMME V.2. — *Le système (IV) admet pour solution les  $a_j + b_j + 1$  fonctions :*

V.2.10

$$g_{j,k_j}(x_j) = z_{j,k_j}^{x_j - b_j - 1} - z_{j,k_j}^{-x_j + b_j + 1} - \gamma_j^1 \theta_j \left( z_{j,k_j}^{x_j - b_j} - z_{j,k_j}^{-x_j + b_j} \right) \quad k_j = 1, 2, \dots, a_j + b_j + 1$$

où  $z_{j,k_j}$  et  $z_{j,k_j}^{-1}$  forment un couple de racines inverses, distinctes de 1 et de  $-1$ , de l'équation :

$$\begin{aligned} \text{V.2.11} \quad z^{a_j + b_j + 2} - z^{-a_j - b_j - 2} - \left( \frac{\gamma_j^0}{\theta_j} + \gamma_j^1 \theta_j \right) (z^{a_j + b_j + 1} - z^{-a_j - b_j - 1}) \\ + \gamma_j^0 \gamma_j^1 (z^{a_j + b_j} - z^{-a_j - b_j}) = 0. \end{aligned}$$

Les fonctions  $g_{j,k_j}(x_j)$  sont linéairement indépendantes et sont deux à deux orthogonales au sens du produit scalaire :

$$\langle g_{j,k_j}, g_{j,k'_j} \rangle = \sum_{x_j = -a_j}^{x_j = b_j} g_{j,k_j}(x_j) g_{j,k'_j}(x_j).$$

Nous aurons besoin dans la suite de la norme du vecteur  $\mathcal{U}$  introduit ci-dessus, donc de :

$$\langle g_{j,k_j}, g_{j,k_j} \rangle = \sum_{x_j = -a_j}^{x_j = b_j} \{ g_{j,k_j}(x_j) \}^2$$

soit, en omettant les indices :

$$\begin{aligned} & \sum_{x = -a}^b \{ z^{x-b-1} - z^{-x+b+1} - \gamma^1 \theta (z^{x-b} - z^{-x+b}) \}^2 \\ &= \sum_{x = -a}^b \{ z^{2x-2b-2} + z^{-2x+2b+2} - 2 - 2\gamma^1 \theta (z^{2x-2b-1} + z^{-2x+2b+1} - z - z^{-1}) \\ & \quad + (\gamma^1 \theta)^2 (z^{2x-2b} + z^{-2x+2b} - 2) \} \\ &= \frac{1 - z^{-2a-2b-2}}{z^2 - 1} + \frac{1 - z^{2a+2b+2}}{z^{-2} - 1} - 2(a + b + 1) \\ & \quad - 2\gamma^1 \theta \left( \frac{z - z^{-2a-2b-1}}{z^2 - 1} + \frac{z^{-1} - z^{2a+2b+1}}{z^{-2} - 1} - (a + b + 1)(z + z^{-1}) \right) \\ & \quad + (\gamma^1 \theta)^2 \left( \frac{z^2 - z^{-2a-2b}}{z^2 - 1} + \frac{z^{-2} - z^{2a+2b}}{z^{-2} - 1} - 2(a + b + 1) \right) \end{aligned}$$



et, tous calculs faits :

$$\begin{aligned} \text{V.2.12} \quad \langle g_{j,k_j}, g_{j,k_j} \rangle &= \frac{z_{j,k_j}^{a_j+b_j+1} - z_{j,k_j}^{-a_j-b_j-1}}{z_{j,k_j} - z_{j,k_j}^{-1}} \cdot \left\{ z_{j,k_j}^{a_j+b_j+2} + z_{j,k_j}^{-a_j-b_j-2} \right. \\ &\quad \left. - 2\gamma_j^1 \theta_j \left( z_{j,k_j}^{a_j+b_j+1} + z_{j,k_j}^{-a_j-b_j-1} \right) + (\gamma_j^1 \theta_j)^2 \left( z_{j,k_j}^{a_j+b_j} + z_{j,k_j}^{-a_j-b_j} \right) \right\} \\ &\quad - 2(a_j + b_j + 1) \left\{ 1 - \gamma_j^1 \theta_j \left( z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1} \right) + (\gamma_j^1 \theta_j)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture nous désignerons par  $\|g_{j,k_j}\|^2$  cette quantité.

*Remarque.* — Les vecteurs propres convenablement normés de la matrice  $\mathfrak{A}_j$  constituent les vecteurs colonnes d'une matrice orthogonale  $\Omega_j$  :

$$\Omega_j = \begin{pmatrix} \frac{g_{j,1}(-a_j)}{\|g_{j,1}\|} & \frac{g_{j,2}(-a_j)}{\|g_{j,2}\|} & \cdots & \frac{g_{j,a_j+b_j+1}(-a_j)}{\|g_{j,a_j+b_j+1}\|} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{g_{j,1}(b_j)}{\|g_{j,1}\|} & \frac{g_{j,2}(b_j)}{\|g_{j,2}\|} & \cdots & \frac{g_{j,a_j+b_j+1}(b_j)}{\|g_{j,a_j+b_j+1}\|} \end{pmatrix}$$

On sait que les vecteurs lignes d'une telle matrice sont également deux à deux orthogonaux et sont de norme égale à 1 : on a ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{k_j=1}^{a_j+b_j+1} \frac{g_{j,k_j}(x_j)g_{j,k_j}(x'_j)}{\|g_{j,k_j}\|^2} &= 0 \quad \text{si } x_j \neq x'_j \\ &= 1 \quad \text{si } x_j = x'_j. \end{aligned}$$

Les fonctions  $\frac{g_{j,k_j}(x_j)}{\|g_{j,k_j}\|}$  sont ainsi doublement orthogonales : au sens des  $x_j$  et au sens des  $k_j$  (On retrouve ici un résultat connu, voir par exemple M. Fréchet [I]).

Revenons à la recherche de la fonction  $f^*(t, \mathbf{M})$  : l'étude précédente nous montre qu'à chaque ensemble d'indices  $\{k_1, \dots, k_n\}$  où  $1 \leq k_j \leq a_j + b_j + 1$  correspond une solution élémentaire du système formé par les trois premières relations de (III) :

$$\text{V.2.13} \quad f_{k_1, \dots, k_n}^*(t, \mathbf{M}) = \left( \prod_{j=1}^n g_{j,k_j}(x_j) \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^n \sigma_j (z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1}) \right)^t.$$

Superposons ces solutions élémentaires de façon à obtenir une solution plus générale nous permettant d'introduire les conditions initiales, soit :

$$V.2.14 \quad f^*(t, M) = \sum_{\{k_1, \dots, k_n\}} A_{k_1, \dots, k_n} \cdot f_{k_1, \dots, k_n}^*(t, M).$$

Les  $\prod_{j=1}^n (a_j + b_j + 1)$  constantes  $A_{k_1, \dots, k_n}$  ainsi introduites sont déterminées par les conditions initiales :

$$f(0, M) = \sum_{\{k_1, \dots, k_n\}} A_{k_1, \dots, k_n} \prod_{j=1}^n g_{j, k_j}(x_j) = \delta_{0, M} \quad M \in (E).$$

Multiplicons les deux membres de cette relation par  $\prod_{j=1}^n g_{j, k_j^0}(x_j)$  où les  $k_j^0 (= 1, 2, \dots, n)$  désignent des indices fixés à l'avance et sommons sur  $x_1$  de  $-a_1$  à  $+b_1$ , sur  $x_2$  de  $-a_2$  à  $+b_2$ , etc. Les propriétés d'orthogonalité des fonctions  $g_{j, k_j}(x_j)$  permettent d'écrire :

$$\sum_{x_1} \sum_{x_2} \dots \sum_{x_n} f(0, M) \prod_{j=1}^n g_{j, k_j^0}(x_j) = A_{k_1^0, \dots, k_n^0} \prod_j \|g_{j, k_j^0}\|^2$$

et comme  $f(0, M) = 1$  si et seulement si  $M$  est en  $O$  :

$$V.2.15 \quad A_{k_1, \dots, k_n} = \prod_{j=1}^n \frac{g_{j, k_j}(0)}{\|g_{j, k_j}\|^2}.$$

En définitive en réunissant les formules V.2.3, V.2.13, V.2.14 et V.2.15 on peut énoncer le

**THÉORÈME V.1.** — *Dans la chaîne de Markov définie au début du paragraphe 1 ci-dessus les probabilités  $p_{0, M}^{(t)}$  sont :*

$$V.2.16 \quad p_{0, M}^{(t)} = \sum_{\{k_1, \dots, k_n\}} \left( \prod_{j=1}^{j=n} \frac{\theta_j^{x_j} g_{j, k_j}(0) g_{j, k_j}(x_j)}{\|g_{j, k_j}\|^2} \right) \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{j=n} \sigma_j (z_{j, k_j} + z_{j, k_j}^{-1}) \right\}^t.$$

Rappelons que  $\theta_j = \sqrt{\frac{p_j}{q_j}}$ ,  $\sigma_j = \sqrt{p_j q_j}$  et que  $z_{j, k_j}$  et  $g_{j, k_j}(x_j)$  ont été définis dans le lemme V.2. L'expression  $\|g_{j, k_j}\|^2$  est donnée par la formule V.2.12.

La sommation doit être faite sur l'ensemble des entiers  $k_1, \dots, k_n$  tels que  $1 \leq k_j \leq a_j + b_j + 1$  quel que soit  $j$ .

COROLLAIRE. — La fonction génératrice des probabilités  $p_{0,M}^{(i)}$  est, pour  $|s|$  assez petit :

$$\text{V.2.17 } P_{0,M}(s) = \sum_{\{k_1, \dots, k_n\}} \left( \prod_{j=1}^n \frac{\theta_j^{x_j} g_{j,k_j}(0) g_{j,k_j}(x_j)}{\|g_{j,k_j}\|^2} \right) \cdot \frac{1}{1 - s \sum_{j=1}^n \sigma_j(z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1})}.$$

L'équation V.2.11 n'ayant que des racines finies, non nulles, désignons par  $A$  le nombre :

$$\text{Sup } |z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1}| = A.$$

Donc :

$$\left| \sum_{j=1}^n \sigma_j(z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1}) \right| \leq A \sum_{j=1}^n \sigma_j.$$

Or, on a vu (formule V.2.2) :  $\sum_{j=1}^n \sigma_j(\theta_j + \theta_j^{-1}) = 1$ ; la fonction :

$$\varphi(\theta) = \theta + \theta^{-1}$$

possède pour  $\theta \in ]0, \infty[$  un minimum valant 2 pour  $\theta = 1$ , donc :

$$\forall j \quad \theta_j + \theta_j^{-1} \geq 2$$

et :

$$1 = \sum_{j=1}^n \sigma_j(\theta_j + \theta_j^{-1}) \geq 2 \sum_{j=1}^n \sigma_j.$$

On a ainsi majoré l'expression :

$$\sum_j \sigma_j(z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1}) : \\ \left| \sum_{j=1}^n \sigma_j(z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1}) \right| \leq \frac{A}{2}.$$

La formule V.2.17 est donc justifiée pourvu que  $|s| < \frac{2}{A}$ .

(On sait que la fonction génératrice des probabilités existe au moins dans le cercle  $|s| < 1$ ).

### 3<sup>o</sup> Étude de l'équation aux valeurs propres V.2.11.

L'équation V.2.11 jouant un rôle important dans les résultats du paragraphe précédent, nous allons étudier en détail ses racines. Pour plus de simplicité nous désignerons par  $l$  le nombre d'entiers relatifs compris entre  $-a$  et  $b$ , extrémités comprises :

$$\text{V.3.1} \quad l = a + b + 1$$

de sorte que l'équation s'écrit :

$$\text{V.3.2} \quad z^{l+1} - z^{-l-1} - \left(\frac{\gamma^0}{\theta} + \gamma^1\theta\right)(z^l - z^{-l}) + \gamma^0\gamma^1(z^{l-1} - z^{-l+1}) = 0.$$

Rendons entière cette équation :

$$\text{V.3.3} \quad z^{2l+2} - 1 - \left(\frac{\gamma^0}{\theta} + \gamma^1\theta\right)(z^{2l+1} - z) + \gamma^0\gamma^1(z^{2l} - z^2) = 0.$$

On peut l'écrire également :

$$\text{V.3.4} \quad z^{2l} = \frac{\gamma^0\gamma^1z^2 - \left(\frac{\gamma^0}{\theta} + \gamma^1\theta\right)z + 1}{z^2 - \left(\frac{\gamma^0}{\theta} + \gamma^1\theta\right)z + \gamma^0\gamma^1} = \frac{\left(\frac{\gamma^0}{\theta}z - 1\right)(\gamma^1\theta z - 1)}{\left(z - \frac{\gamma^0}{\theta}\right)(z - \gamma^1\theta)} = R(z).$$

Cette forme va nous permettre d'étudier les racines complexes de module un. Remarquons d'abord que l'équation V.2.11 étant réciproque, ses racines sont deux à deux inverses l'une de l'autre (les racines  $+1$  et  $-1$  exceptées) donc les racines complexes de module 1 (s'il en existe) sont deux à deux conjuguées. Pour les obtenir il suffit de considérer les valeurs possibles de  $\varphi$ ,  $0 < \varphi < \pi$ , pour lesquelles  $z = e^{i\varphi}$  est racine. A toute valeur  $\varphi$  de ce type correspondra deux racines  $e^{i\varphi}$  et  $e^{-i\varphi}$  de V.2.11. Vérifions d'abord que lorsque  $|z| = 1$ , le second membre de l'égalité V.3.4 a son module égal à 1 : on peut l'écrire :

$$R(z) = \frac{\gamma_0\gamma_1\left(z - \frac{\theta}{\gamma^0}\right)\left(z - \frac{1}{\gamma^1\theta}\right)}{\left(z - \frac{\gamma^0}{\theta}\right)(z - \gamma^1\theta)}.$$

Or, lorsque  $a$  est réel, positif et lorsque  $z = e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ , on a :

$$\begin{aligned} |z - a| &= |\cos \varphi - a + i \sin \varphi| = \sqrt{1 - 2a \cos \varphi + a^2} \\ \left|z - \frac{1}{a}\right| &= \sqrt{1 - \frac{2}{a} \cos \varphi + \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{a} \sqrt{1 - 2a \cos \varphi + a^2} \end{aligned}$$

donc :

$$\left| \frac{z - a}{z - \frac{1}{a}} \right| = a.$$

Le module du second membre est donc  $\gamma_0 \gamma_1 \cdot \frac{\theta}{\gamma^0} \cdot \frac{1}{\gamma^1 \theta} = 1$ . Étudions maintenant l'argument de chacun des deux membres. L'argument de  $z^2$  est  $2l\varphi$  (lorsque  $z = e^{i\varphi}$ ). Nous déterminerons l'argument de  $R(z)$  en calculant sa partie réelle et sa partie imaginaire :

$$R(e^{i\varphi}) = \frac{\gamma^0 \gamma^1 e^{2i\varphi} - \left( \frac{\gamma^0}{\theta} + \gamma^1 \theta \right) e^{i\varphi} + 1}{e^{2i\varphi} - \left( \frac{\gamma^0}{\theta} + \gamma^1 \theta \right) e^{i\varphi} + \gamma^0 \gamma^1} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Un calcul élémentaire donne :

$$V.3.5 \quad \cos \theta = \frac{a^2 - (b-1)^2 - 2a(b+1) \cos \varphi + 2(1+b^2) \cos^2 \varphi}{a^2 + (b-1)^2 - 2a(b+1) \cos \varphi + 4b \cos^2 \varphi}$$

$$V.3.6 \quad \sin \theta = 2(1-b) \sin \varphi \frac{a - (1+b) \cos \varphi}{a^2 + (b-1)^2 - 2a(b+1) \cos \varphi + 4b \cos^2 \varphi}$$

puis :

$$V.3.7 \quad \frac{d\theta}{d\varphi} = 2(1-b) \frac{a \cos \varphi - (b+1)}{a^2 + (b-1)^2 - 2a(b+1) \cos \varphi + 4b \cos^2 \varphi}.$$

Dans ces trois expressions on a posé pour simplifier :

$$a = \frac{\gamma^0}{\theta} + \gamma^1 \theta \quad b = \gamma^0 \gamma^1.$$

Le polynôme  $P(u) = a^2 + (b-1)^2 - 2a(b+1)u + 4bu^2$  admet pour racines :

$$u_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma^0}{\theta} + \frac{\theta}{\gamma^0} \right) \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{1}{2} \left( \gamma^1 \theta + \frac{1}{\gamma^1 \theta} \right),$$

toutes deux supérieures ou égales à 1.

Donc  $P(\cos \varphi) \geq 0$  : le signe de  $\frac{d\theta}{d\varphi}$  est le même que celui de  $a \cos \varphi - (b+1)$  (car  $b \leq 1$ ) d'où deux possibilités :

$$1^\circ \quad b+1 \geq a \iff (\gamma^0 - \gamma^1) \left( \frac{1}{\theta} - \gamma^1 \right) \leq 0.$$

Dans ce cas  $\frac{d\theta}{d\varphi}$  est négatif ou nul quel que soit  $\varphi$ . En désignant par  $\theta_0$

la détermination de l'argument de  $R(z)$  nulle pour  $\varphi = 0$ , on a :

$\varphi$	0	$\pi$
$\theta$	0	$\searrow -2\pi$

Le graphe de cette détermination est ainsi :

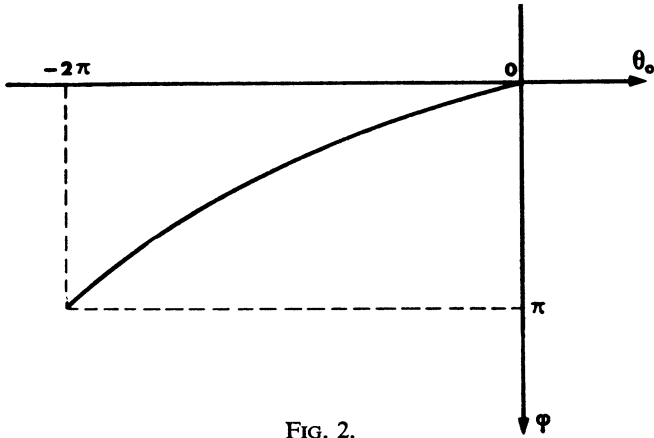


FIG. 2.

2°  $b + 1 < a \iff (\gamma^0 - \theta) \left( \frac{1}{\theta} - \gamma^1 \right) > 0$ .

$\frac{d\theta}{d\varphi}$  s'annule pour la valeur  $\varphi'$  telle que  $\cos \varphi' = \frac{b+1}{a}$ . La même détermination de  $\theta$  que précédemment passe par un maximum :

$\varphi$	0	$\varphi'$	$\pi$
$\theta$	0	$\nearrow$	$\searrow 0$

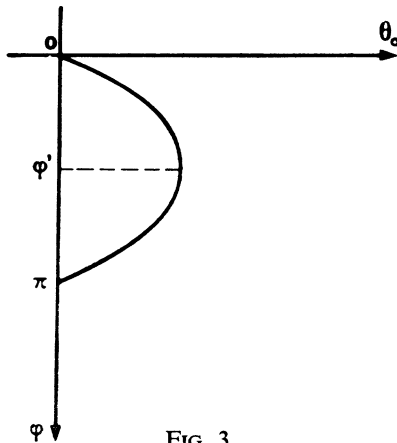


FIG. 3.

Notons que lorsque  $\varphi = 0$ , le graphe de  $\theta_0$  possède une tangente de coefficient angulaire :

$$2 \frac{1-b}{a-b-1} = -2 \frac{1-\gamma^0\gamma^1}{\left(\frac{\gamma^0}{\theta} - 1\right)(\gamma^1\theta - 1)}.$$

Représentons sur un même graphique les variations de  $\arg z^{2l}$  et de  $\arg R(z)$  en fonction de  $\varphi = \arg z$  :

1<sup>er</sup> cas :

$$(\gamma^0 - \theta) \left( \frac{1}{\theta} - \gamma^1 \right) \leq 0.$$

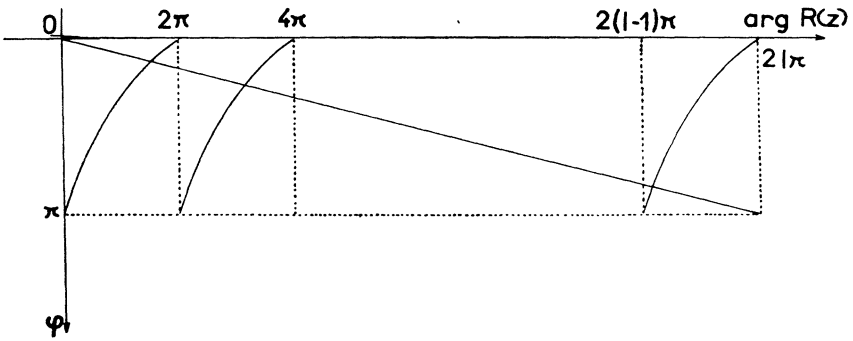


FIG. 4.

L'équation V.2.11 a, dans ce cas,  $2l$  racines complexes de module 1, deux à deux conjuguées et les racines  $+1$  et  $-1$  : les  $2l + 2$  racines sont ainsi connues.

2<sup>e</sup> cas :

$$(\gamma^0 - \theta) \left( \frac{1}{\theta} - \gamma^1 \right) > 0 \quad \text{et} \quad l > \frac{1 - \gamma^0\gamma^1}{\left| \left( \frac{\gamma^0}{\theta} \right) (\gamma^1\theta - 1) \right|}.$$

L'équation V.2.11 a, dans ce cas,  $2(l - 1)$  racines complexes de module 1, deux à deux conjuguées, les racines  $+1$  et  $-1$  et deux autres racines à déterminer.

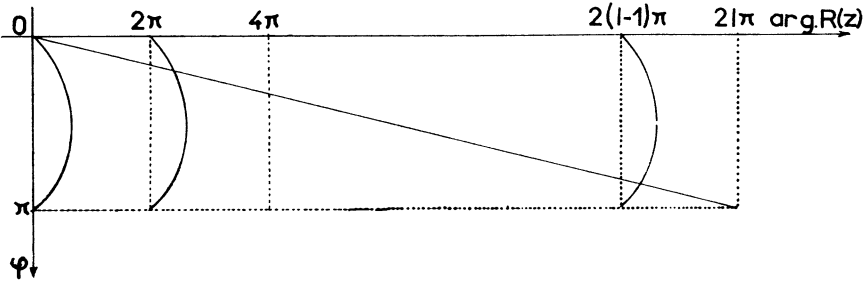


FIG. 5.

3<sup>e</sup> cas :

$$(\gamma^0 - \theta) \left( \frac{1}{\theta} - \gamma^1 \right) > 0 \quad \text{et} \quad l \leq \frac{1 - \gamma^0 \gamma^1}{\left| \left( \frac{\gamma^0}{\theta} - 1 \right) (\gamma^1 \theta - 1) \right|}$$

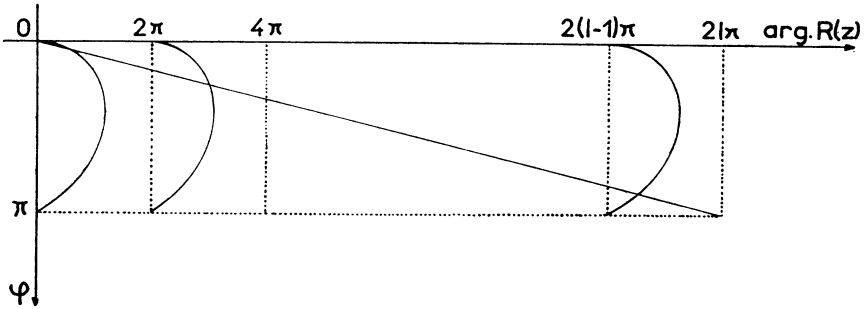


FIG. 6.

Nous retrouvons ici les mêmes conclusions que dans le 1<sup>er</sup> cas : l'équation V.2.11 a les racines + 1, - 1 et 2l racines complexes de module 1, deux à deux conjuguées. Dans le cas d'égalité dans la seconde relation ( $l = \dots$ ) l'équation possède une racine triple + 1, la racine - 1 et 2(l - 1) racines complexes de module 1, deux à deux conjuguées.

La nature des racines de l'équation V.2.11 est ainsi entièrement déterminée dans les cas n<sup>os</sup> 1 et 3. Dans le cas n<sup>o</sup> 2 il reste deux racines non localisées; nous allons montrer qu'il s'agit de deux racines réelles, positives, inverses l'une de l'autre.



Le premier membre de l'égalité V.3.3, soit :

$$Q(z) = z^{2l+2} - 1 - \left( \frac{\gamma^0}{\theta} + \gamma^1 \theta \right) (z^{2l+1} - z) + \gamma^0 \gamma^1 (z^{2l} - z^2)$$

est tel que :

$$\begin{cases} Q(1) = Q(-1) = 0 \\ Q(0) = -1 \\ Q'(1) = 2 \left( 1 - \frac{\gamma^0}{\theta} \right) (1 - \gamma^1 \theta) \left[ l + \frac{1 - \gamma^0 \gamma^1}{\left( 1 - \frac{\gamma^0}{\theta} \right) (1 - \gamma^1 \theta)} \right]. \end{cases}$$

Dans le second cas  $Q'(1)$  est négatif : le polynôme  $Q(z)$ , pour  $z$  réel, a nécessairement pour graphe :

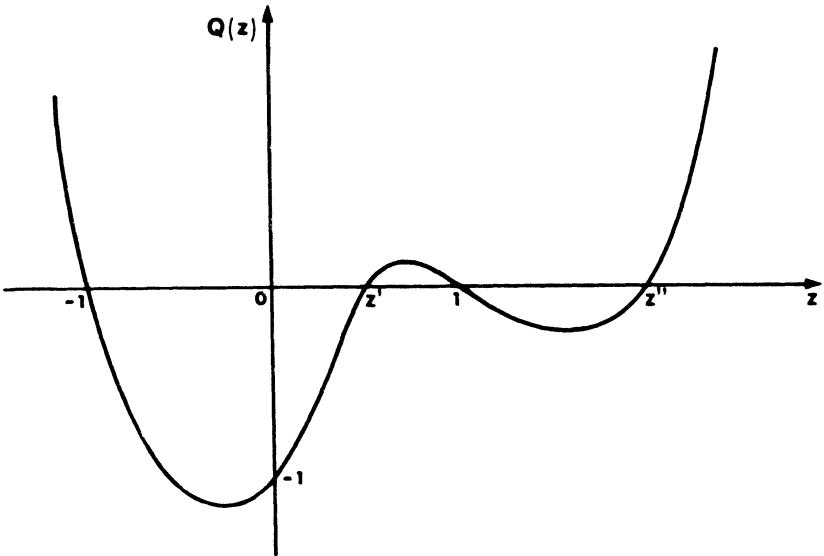


FIG. 7.

en effet, entre  $z = 0$  et  $z = 1$  il s'annule nécessairement au moins une fois :

$$(Q(0) < 0; Q(1) = 0 \quad \text{et} \quad Q'(1) < 0);$$

de même entre  $z = 1$  et  $z = +\infty$  il s'annule nécessairement au moins une fois ( $Q(1) = 0$ ,  $Q'(1) < 0$ ,  $Q(+\infty) = +\infty$ ).

Comme  $Q(z)$  a au maximum 4 racines réelles le graphe présenté convient.

Notons de plus que  $Q(\theta) = \theta^{2l}(1 - \gamma^l)(\theta^2 - \gamma^0) + (\gamma^l\theta^2 - 1)(1 - \gamma^0)$ .

Si nous supposons  $\theta < 1$ , la condition  $(\gamma^0 - \theta) \left(\frac{1}{\theta} - \gamma^l\right) > 0$  équivaut à  $\gamma^0 > \theta$  car  $\gamma^0$  et  $\gamma^l$  sont inférieurs à 1. Donc  $1 > \gamma^0 > \theta > \theta^2$  et  $Q(\theta)$  est négatif ou nul :  $\theta$ , en général, est compris entre 0 et  $z'$ . Ce n'est du reste que lorsque  $\gamma^0 = \gamma^l = 1$  que  $Q(\theta) = 0$ , donc que  $\theta = z'$ .

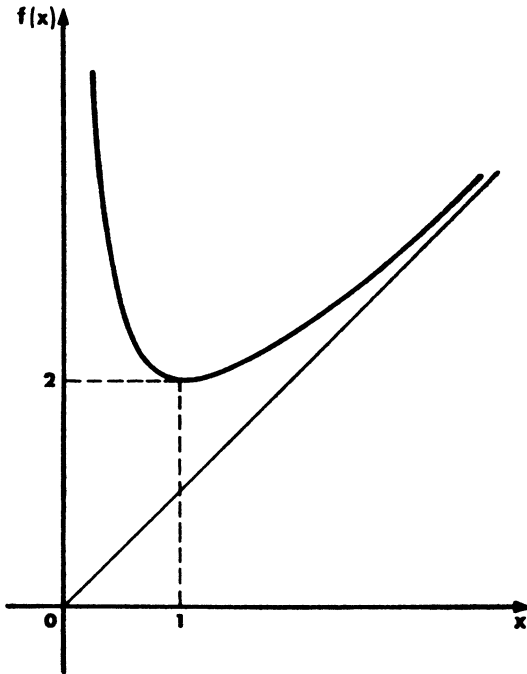


FIG. 8.

L'application  $x \rightarrow f(x) = x + \frac{1}{x}$  ayant pour graphe pour  $x > 0$  :

comme  $\theta \leq z'$  il en résulte :

$$\theta + \frac{1}{\theta} \geq z' + \frac{1}{z'} \geq 2.$$

Un raisonnement analogue montre que cette inégalité est encore réalisée lorsque  $\theta > 1$ .

LEMME V.3. — *L'équation :*

$$z^{l+1} - z^{-l-1} - \left(\frac{\gamma^0}{\theta} + \gamma^1\theta\right)(z^l - z^{-l}) + \gamma^0\gamma^1(z^{l-1} - z^{-l+1}) = 0$$

possède :

- a) la racine  $+1$ , la racine  $-1$ ;
- b)  $2l - 2$  racines complexes conjuguées de module 1;
- c) deux racines distinctes des précédentes pouvant être :

$\alpha$ ) complexes conjuguées de module 1 dans les cas :

$$(\gamma^0 - \theta)\left(\frac{1}{\theta} - \gamma^1\right) \leq 0$$

quel que soit  $l$ , ou :

$$(\gamma^0 - \theta)\left(\frac{1}{\theta} - \gamma^1\right) > 0 \quad \text{et} \quad l \leq \frac{1 - \gamma^0\gamma^1}{\left|\left(1 - \frac{\gamma^0}{\theta}\right)(1 - \gamma^1\theta)\right|},$$

$\beta$ ) réelles, inverses l'une de l'autre dans le cas :

$$(\gamma^0 - \theta)\left(\frac{1}{\theta} - \gamma^1\right) > 0 \quad \text{et} \quad l > \frac{1 - \gamma^0\gamma^1}{\left|\left(1 - \frac{\gamma^0}{\theta}\right)(1 - \gamma^1\theta)\right|}.$$

Pour les racines complexes de module 1, on pourra poser  $z' = e^{i\varphi}$ ,  $z'' = e^{-i\varphi}$ ,  $\varphi$  étant une des racines réelles de l'équation :

$$\text{V.3.8} \quad \sin(l+1)\varphi - \left(\frac{\gamma^0}{\theta} + \gamma^1\theta\right) \sin l\varphi + \gamma^0\gamma^1 \sin(l-1)\varphi = 0.$$

Pour les racines réelles on pourra poser  $z' = e^\psi$ ,  $z'' = e^{-\psi}$ ,  $\psi$  étant la racine réelle de l'équation :

$$\text{Sh}(l+1)\psi - \left(\frac{\gamma^0}{\theta} + \gamma^1\theta\right) \text{Sh} l\psi + \gamma^0\gamma^1 \text{Sh}(l-1)\psi = 0.$$

Notons que si  $z'$  et  $z''$  sont deux racines complexes de module 1, on a  $z' = z'' = 2 \cos \varphi$ , avec  $\varphi \neq 0$  : donc  $|z' + z''| < 2 \leq \theta + \frac{1}{\theta}$ . En rapprochant ce résultat de ce que nous avons établi ci-dessus pour les racines réelles, nous pouvons énoncer le

LEMME V.4. — *Tout couple ( $z'$ ,  $z''$ ) de racines inverses l'une de l'autre de l'équation V.2.11 vérifie :*

$$|z' + z''| \leq \theta + \frac{1}{\theta}$$

*l'égalité n'ayant lieu que si  $\gamma^0 = \gamma^1 = 1$ .*

*Cas particuliers.* — a) Supposons que l'on ait  $\gamma^0 = \gamma^1 = 0$  (les barrières envisagées au paragraphe précédent sont absorbantes pures).

L'égalité V.3.3 devient alors :

$$z^{2l+2} - 1 = 0$$

et les racines de cette équation sont des racines complexes de l'unité :

$$V.3.10 \quad \begin{cases} z'_k = e^{\frac{i\pi k}{l+1}} \\ z''_k = e^{-\frac{i\pi k}{l+1}} \end{cases} \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, l+1\}.$$

b) Supposons que l'on ait  $\gamma^0 = \gamma^1 = 1$  (il s'agit alors de barrières réfléchissantes pures).

L'égalité V.3.3 devient :

$$z^{2l+2} - 1 - \left(\theta + \frac{1}{\theta}\right)(z^{2l+1} - z) + z^{2l} - z^2 = 0$$

soit :

$$z^{2l} \left\{ z^2 - \left(\theta + \frac{1}{\theta}\right)z + 1 \right\} - \left\{ z^2 - \left(\theta + \frac{1}{\theta}\right)z + 1 \right\} = 0.$$

Cette équation se décompose en  $z^{2l} = 1$  qui a pour racines :

$$\begin{cases} z'_k = e^{\frac{i\pi k}{l}} \\ z''_k = e^{-\frac{i\pi k}{l}} \end{cases} \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, l\}$$

et  $z^2 - \left(\theta + \frac{1}{\theta}\right)z + 1 = 0$  qui a pour racines :

$$\begin{cases} z' = \theta \\ z'' = \frac{1}{\theta} \end{cases}$$

#### 4. Étude du processus aléatoire. Cas général.

Dans ce paragraphe nous supposerons que les  $\gamma_i^0$  et  $\gamma_i^1$  ne sont pas tous égaux à l'unité : il existe au moins une barrière semi-absorbante.

a) Étude des probabilités  $p_{0,m}^{(i)}$ .

LEMME V.5. — *Le rayon de convergence de la série  $\sum_{t=0}^{\infty} s^t p_{0,m}^{(i)}$  est supérieur à un lorsqu'il existe au moins un  $\gamma_i$  différent de 1.*

L'expression V.2.16 de  $p_{0,M}^{(t)}$  montre que la série de terme général  $s'p_{0,M}^{(t)}$  est de même nature que la série de terme général :

$$\left\{ s \left( \sum_{j=1}^n \sigma_j (z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1}) \right) \right\}^t.$$

Or, lorsqu'il existe au moins un  $\gamma_i$  différent de 1, il n'existe pas d'ensemble  $\{k_1, \dots, k_n\}$  où tous les  $z_{j,k_j}$  soient égaux à  $\theta_j$ ; donc d'après le lemme V.4 on a :

$$\left| \sum_{j=1}^n \sigma_j (z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1}) \right| \leq \sum_{j=1}^n \sigma_j |z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1}| < \sum_{j=1}^n \sigma_j \left( \theta_j + \frac{1}{\theta_j} \right) = 1.$$

Il existe un nombre  $\alpha$ , indépendant de l'ensemble  $\{k_1, \dots, k_n\}$ , tel que :

$$\left| \sum_{j=1}^n \sigma_j (z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1}) \right| \leq \alpha < 1.$$

Le rayon de convergence de la série de terme général :

$$\left\{ s \left( \sum_{j=1}^n \sigma_j (z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1}) \right) \right\}^t$$

est ainsi au moins égal à  $\frac{1}{\alpha}$ , donc supérieur à 1 et le lemme est établi.

Conséquences :

α) La série  $\sum_{t=0}^{\infty} p_{0,M}^{(t)}$  est convergente, donc  $p_{0,M}^{(t)}$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers l'infini.

Ainsi, dès qu'une des barrières au moins est semi-absorbante la répartition limite est nulle; toute la masse de probabilité est peu à peu absorbée.

β) La fonction génératrice des probabilités  $p_{0,M}^{(t)}$  est, pour  $|s| < \frac{1}{\alpha}$ , donnée par l'expression V.2.17 :

$$P_{0,M}(s) = \sum_{t=0}^{\infty} p_{0,M}^{(t)} s^t = \sum_{\{k_1, \dots, k_n\}} \left( \prod_{j=1}^n \frac{\theta_j^{x_j} g_{j,k_j}(0) g_{j,k_j}(x_j)}{\|g_{j,k_j}\|^2} \right) \cdot \frac{1}{1 - s \sum_{j=1}^n \sigma_j (z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1})}.$$

On peut dans cette égalité remplacer  $s$  par 1 et obtenir :

V.4.1

$$P_{0,m}(1) = \sum_{t=0}^{\infty} p_{0,m}^{(t)} = \sum_{\{k_1, \dots, k_n\}} \left( \prod_{j=1}^n \frac{\theta_j^{x_j} g_{j,k_j}(0) g_{j,k_j}(x_j)}{\|g_{j,k_j}\|^2} \right) \cdot \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^n \sigma_j (z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1})}.$$

En particulier  $\sum_{t=0}^{\infty} p_{0,0}^{(t)}$  est fini : on retrouve ainsi le fait que l'origine, donc tout élément de l'ensemble (E), est un point non récurrent, au sens de Kai Lai Chung (voir le théorème 4, de [1]).

b) Étude de l'absorption.

Nous désignerons par  $M_{-a_i}$  un point de (E) tel que  $x_i = -a_i$  et par  $w_{-a_i-1}^{(t+1)}$  la probabilité absorbée par la barrière  $x_i = -a_i - 1$  entre les instants  $t$  et  $t + 1$ . On a immédiatement :

$$\begin{aligned} \text{V.4.2} \quad w_{-a_i-1}^{(t+1)} &= \sum_{\{M_{-a_i}\}} (1 - \gamma_i^0) q_i p_{0, M_{-a_i}}^{(t)} \\ &= \sum_{\{M_{-a_i}\}} (1 - \gamma_i^0) q_i \sum_{\{k_1, \dots, k_n\}} \frac{\theta_i^{-a_i} g_{i,k_i}(0) g_{i,k_i}(-a_i)}{\|g_{i,k_i}\|^2} \cdot \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\theta_j^{x_j} g_{j,k_j}(0) g_{j,k_j}(x_j)}{\|g_{j,k_j}\|^2} \right) \\ &\quad \times \left\{ \sum_{j=1}^n \sigma_j (z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1}) \right\}^t \end{aligned}$$

où la sommation est faite sur l'ensemble des points  $M_{-a_i}$ , donc sur  $x_1$  de  $-a_1$  à  $+b_1$ , etc. sur  $x_n$  de  $-a_n$  à  $+b_n$ , exception faite de  $x_i$ . Échangeons l'ordre des sommations, il apparaît alors :

$$\sum_{\substack{x_1 = -a_1, \dots, x_n = -a_n \\ \text{sauf } x_i}}^{b_1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{b_n} \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\theta_j^{x_j} g_{j,k_j}(0) g_{j,k_j}(x_j)}{\|g_{j,k_j}\|^2} \right) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left( \sum_{x_j = -a_j}^{b_j} \frac{\theta_j^{x_j} g_{j,k_j}(0) g_{j,k_j}(x_j)}{\|g_{j,k_j}\|^2} \right).$$

Or, nous avons vu que chaque fonction  $g_{j,k_j}(x_j)$  est solution du système :

$$\begin{cases} g(x_j - 1) + g(x_j + 1) = \xi_j g(x_j) \\ g(b_j + 1) = \gamma_j^1 \theta_j g(b_j) \\ g(-a_j - 1) = \frac{\gamma_i^0}{\theta_j} g(-a_j). \end{cases}$$

Il en résulte que la fonction  $\theta_j^{x_j} g_{j,k_j}(x_j)$  est solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_j \varphi(x_j - 1) + \theta_j^{-1} \varphi(x_j + 1) = \xi_j \varphi(x_j) \\ \varphi(b_j + 1) = \gamma_j^1 \theta_j^2 \varphi(b_j) \\ \varphi(-a_j - 1) = \frac{\gamma_j^0}{\theta_j^2} \varphi(-a_j). \end{array} \right.$$

Écrivons la première égalité pour  $x_j = -a_j, \dots, b_j$  et sommons :

$$\begin{array}{l} \xi_j \varphi(-a_j) = \theta_j \varphi(-a_j - 1) + \theta_j^{-1} \varphi(-a_j + 1) \\ \xi_j \varphi(-a_j + 1) = \theta_j \varphi(-a_j) + \theta_j^{-1} \varphi(-a_j + 2) \\ \dots\dots\dots \\ \xi_j \varphi(b_j - 1) = \theta_j \varphi(b_j - 2) + \theta_j^{-1} \varphi(b_j) \\ \xi_j \varphi(b_j) = \theta_j \varphi(b_j - 1) + \theta_j^{-1} \varphi(b_j + 1) \end{array}$$


---


$$\xi_j \cdot S = \theta_j \varphi(-a_j - 1) + \theta_j (S - \varphi(b_j)) + \theta_j^{-1} \varphi(b_j + 1) + \theta_j^{-1} (S - \varphi(-a_j))$$

d'où l'on tire facilement :

$$V.4.3 \quad \sum_{x_j = -a_j}^{b_j} \theta_j^{x_j} g_{j,k_j}(x_j) = \frac{(1 - \gamma_j^1) \theta_j^{b_j+1} g_{j,k_j}(b_j) + (1 - \gamma_j^0) \theta_j^{-a_j-1} g_{j,k_j}(-a_j)}{\theta_j + \theta_j^{-1} - \xi_{j,k_j}}$$

pourvu que  $\theta_j + \theta_j^{-1} \neq \xi_{j,k_j}$ , c'est-à-dire pourvu que l'on n'ait pas simultanément  $\gamma_j^1 = 1, \gamma_j^0 = 1$  et  $k_j$  correspondant au couple  $z' = \theta_j, z'' = \theta_j^{-1}$ . Lorsque ces trois conditions sont réalisées on a du reste :

$$g_{j,k_j}(x_j) = \theta_j^{x_j - b_j} (\theta_j^{-1} - \theta_j)$$

et la somme S s'obtient par un calcul élémentaire :

$$V.4.4 \quad \sum_{x_j = -a_j}^{b_j} \theta_j^{x_j} g_{j,k_j}(x_j) = \theta_j^{-2a_j - b_j - 1} - \theta_j^{b_j + 1}.$$

Pour éviter l'introduction d'un trop grand nombre de cas particuliers nous conviendrons que le second membre de la formule V.4.3 se réduit à celui de V.4.4 lorsque ce second membre se présente sous la forme  $\frac{0}{0}$ .

On a ainsi le

LEMME V.6. — *Entre les instants  $t$  et  $t + 1$  la probabilité absorbée par la barrière  $-a_i - 1$  est :*

$$V.4.5 \quad w_{-a_i-1}^{(t+1)} = \sum_{\{k_1, \dots, k_n\}} (1 - \gamma_i^0) \sigma_i \frac{\theta_i^{-a_i-1} g_{i,k_i}(0) g_{i,k_i}(-a_i)}{\|g_{i,k_i}\|^2} \times \left\{ \sum_{j=1}^n \sigma_j (z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1}) \right\}^t \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n S_j(k_j)$$

et par la barrière  $b_i + 1$  :

$$V.4.6 \quad w_{b_i+1}^{(t+1)} = \sum_{\{k_1, \dots, k_n\}} (1 - \gamma_i^1) \sigma_i \frac{\theta_i^{b_i+1} g_{i,k_i}(0) g_{i,k_i}(b_i)}{\|g_{i,k_i}\|^2} \times \left\{ \sum_{j=1}^n \sigma_j (z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1}) \right\}^t \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n S_j(k_j).$$

Dans ces deux expressions on a posé :

$$S_j(k_j) = \frac{g_{j,k_j}(0)}{\|g_{j,k_j}\|^2} \cdot \frac{(1 - \gamma_j^1) \theta_j^{b_j+1} g_{j,k_j}(b_j) + (1 - \gamma_j^0) \theta_j^{-a_j-1} g_{j,k_j}(-a_j)}{\theta_j + \theta_j^{-1} - (z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1})}.$$

Conséquences :

α) La fonction génératrice de l'absorption par la barrière  $-a_i - 1$  est :

$$V.4.7 \quad W_{-a_i-1}(s) = \sum_{\{k_1, \dots, k_n\}} (1 - \gamma_i^0) \sigma_i \theta_i^{-a_i-1} \frac{g_{i,k_i}(0) g_{i,k_i}(-a_i)}{\|g_{i,k_i}\|^2} \cdot \frac{1}{1 - s \sum_{j=1}^n \sigma_j (z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1})} \prod_{j=1}^n S_j(k_j).$$

Cette expression a un sens pour  $|s| < \frac{1}{\alpha}$  ( $\alpha < 1$ ) d'après le lemme V.5 : il en résulte que l'absorption totale par la barrière  $-a_i - 1$  au cours du temps est  $W_{-a_i-1}(1)$ .



β) La probabilité absorbée par l'ensemble des barrières entre les instants  $t$  et  $t + 1$  est :

$$\begin{aligned}
 w^{(t+1)} &= \sum_{i=1}^n w_{-a_i-1}^{(t+1)} + w_{b_i+1}^{(t+1)} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{\{k_1, \dots, k_n\}} \sigma_i \frac{g_{i,k_i}(0)}{\|g_{i,k_i}\|^2} \left\{ (1 - \gamma_i^0) \theta_i^{-a_i-1} g_{i,k_i}(-a_i) + (1 - \gamma_i^1) \theta_i^{b_i+1} g_{i,k_i}(b_i) \right\} \\
 &\qquad \qquad \qquad \left\{ \sum_{j=1}^n \sigma_j(z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1}) \right\}^t \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n S_j(k_j) \\
 &= \sum_{\{k_1, \dots, k_n\}} \left\{ \sum_{i=1}^n \sigma_i(\theta_i + \theta_i^{-1} - z_{i,k_i} - z_{i,k_i}^{-1}) \right\} \left\{ \sum_{j=1}^n \sigma_j(z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1}) \right\}^t \prod_{j=1}^n S_j(k_j)
 \end{aligned}$$

Soit :

V.4.8

$$w^{(t+1)} = \sum_{\{k_1, \dots, k_n\}} \left\{ 1 - \sum_{j=1}^n \sigma_j(z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1}) \right\} \left\{ \sum_{j=1}^n \sigma_j(z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1}) \right\}^t \prod_{j=1}^n S_j(k_j).$$

La fonction génératrice de cette absorption est, pour  $|s| < \frac{1}{\alpha}$  :

$$\text{V.4.9} \quad W(s) = \sum_{\{k_1, \dots, k_n\}} \frac{1 - \sum_{j=1}^n \sigma_j(z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1})}{1 - s \sum_{j=1}^n \sigma_j(z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1})} \cdot \prod_{j=1}^n S_j(k_j).$$

L'absorption totale est  $W(1)$  qui est nécessairement égale à 1. On peut le vérifier facilement :

$$\begin{aligned}
 W(1) &= \sum_{\{k_1, \dots, k_n\}} \prod_{j=1}^n S_j(k_j) = \prod_{j=1}^n \sum_{k_j=1}^{a_j+b_j+1} S_j(k_j) \\
 &= \prod_{j=1}^n \sum_{k_j=1}^{a_j+b_j+1} \frac{g_{j,k_j}(0)}{\|g_{j,k_j}\|^2} \sum_{x_j=-a_j}^{b_j} \theta_j^{x_j} g_{j,k_j}(x_j).
 \end{aligned}$$

Intervertissons l'ordre des sommations :

$$W(1) = \prod_{j=1}^n \sum_{x_j=-a_j}^{b_j} \theta_j^{x_j} \sum_{k_j=1}^{a_j+b_j+1} \frac{g_{j,k_j}(0) g_{j,k_j}(x_j)}{\|g_{j,k_j}\|^2}.$$

Or, nous avons vu plus haut que les fonctions  $\frac{g_{j,k_j}(x_j)}{\|g_{j,k_j}\|}$  sont deux à deux orthogonales au sens des  $k_j$  et normées, donc :

$$W(1) = \prod_{j=1}^n \sum_{k_j=1}^{a_j+b_j+1} \frac{g_{j,k_j}^2(0)}{\|g_{j,k_j}\|^2} = 1.$$

$\gamma$ ) On sait que  $W(s)$  est également la fonction génératrice des probabilités de la variable aléatoire  $\tau$  qui représente le nombre de pas effectués par le processus avant absorption. La moyenne de cette variable aléatoire est donc :

$$E(\tau) = W'(1)$$

$$V.4.10 \quad E(\tau) = \sum_{\{k_1, \dots, k_n\}} \frac{\sum_{j=1}^n \sigma_j(z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1})}{1 - \sum_{j=1}^n \sigma_j(z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1})} \prod_{j=1}^n S_j(k_j).$$

Il s'agit là d'une valeur finie.

c) *Retours à l'origine.*

Soit  $Y_t$  la variable aléatoire valant 1 si le processus est à l'état 0 à l'instant  $t$  (probabilité  $p_{0,0}^{(t)}$ ) et 0 sinon. La somme  $T = Y_0 + Y_1 + \dots$  représente le nombre de fois que le processus est en l'état 0 avant d'être absorbé. La moyenne de ce nombre :

$$E(T) = p_{0,0}^{(0)} + p_{0,0}^{(1)} + \dots$$

est tout simplement  $P_{0,0}(1)$ , soit :

$$E(T) = \sum_{\{k_1, \dots, k_n\}} \left( \prod_{j=1}^n \frac{g_{i,k_j}^2(0)}{\|g_{j,k_j}\|^2} \right) \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^n \sigma_j(z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1})}$$

qui est un nombre fini.

D'après ce que l'on a vu au chapitre précédent, la fonction génératrice des probabilités de premier retour à l'origine est :

$${}_0P_{0,0}(s) = 1 - \frac{1}{P_{0,0}(s)}$$

soit ici :

$${}_0P_{0,0}(s) = 1 - \frac{1}{\sum_{\{k_1, \dots, k_n\}} \left( \prod_{j=1}^n \frac{g_{j,k_j}^2(0)}{\|g_{j,k_j}\|^2} \right) \frac{1}{1 - s \sum_{j=1}^n \sigma_j (z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1})}}$$

### 5. Cas où toutes les barrières sont absorbantes pures.

Dans ce cas tous les paramètres  $\gamma_j^0$  et  $\gamma_j^1$  sont nuls. Nous ne donnerons la formule explicite de  $p_{0,M}^{(t)}$  que parce qu'elle est relativement simple et afin de retrouver la formule établie par différents auteurs (par exemple MacCrea et Whipple [1], C. Jordan [1], A. Tortrat [1]).

Nous avons vu au paragraphe 3 de ce chapitre que lorsque tous les  $\gamma_j$  sont nuls l'équation en  $z$  a pour racines, outre  $+1$  et  $-1$  :

$$\begin{cases} z'_{j,k_j} = e^{i\pi \frac{k_j}{l_j+1}} \\ z''_{j,k_j} = e^{-i\pi \frac{k_j}{l_j+1}} \end{cases} \text{ avec } l_j = a_j + b_j + 1 \text{ et } k_j \in \{1, 2, \dots, l_j\}.$$

Un calcul élémentaire donne alors :

$$\text{V. 5.1 } p_{0,M}^{(t)} = \sum_{\{k_1, \dots, k_n\}} \left( \sum_{j=1}^n 2\sigma_j \cos \pi \frac{k_j}{l_j+1} \right)^t \prod_{j=1}^n \left( \frac{2\theta_j^{x_j}}{l_j+1} \sin \pi k_j \frac{(b_j+1-x_j)}{l_j+1} \sin \pi k_j \frac{b_j+1}{l_j+1} \right).$$

Il en résulte que la fonction génératrice de ces probabilités est :

$$\text{V. 5.2 } P_{0,M}(s) = \sum_{\{k_1, \dots, k_n\}} \frac{1}{1 - s \sum_{j=1}^n 2\sigma_j \cos \pi \frac{k_j}{l_j+1}} \prod_{j=1}^n \left( \frac{2\theta_j^{x_j}}{l_j+1} \sin \pi k_j \frac{b_j+1-x_j}{l_j+1} \sin \pi k_j \frac{b_j+1}{l_j+1} \right).$$

La solution donnée par MacCrea et Whipple à ce problème coïncide avec  $P_{0,M}(1)$  (sous réserve d'exprimer  $\text{Sh } \lambda x$  en fonction de  $\text{Ch } x$ ). Dans le cas de  $n = 3$ , C. Jordan a donné explicitement la forme V. 5. 1 pour :

$$p_i = q_i = \frac{1}{6} \nabla.$$

**6. Cas où toutes les barrières sont réfléchissantes pures.**

Dans ce cas tous les paramètres  $\gamma_j^0$  et  $\gamma_j^1$  sont égaux à l'unité. Nous avons vu au paragraphe 3 que les racines distinctes de  $+ 1$  et de  $- 1$  de l'équation en  $z$  sont quel que soit  $j$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} z'_{j,k_j} = e^{i\pi \frac{k_j}{l_j}} \\ z''_{j,k_j} = e^{-i\pi \frac{k_j}{l_j}} \end{array} \right. \text{ avec } l_j = a + b_j + 1 \text{ et } k_j \in \{ 1, 2, \dots, l_j - 1 \}$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{l} z'_{j,l_j} = \theta_j \\ z''_{j,l_j} = \theta_j^{-1}. \end{array} \right.$$

a) *Étude asymptotique des probabilités de passage.*

Dans l'expression de  $p_{0,M}^{(t)}$  il existe un terme et un seul où tous les  $k_j$  sont égaux à  $l_j + 1$ . Mettons ce terme en évidence en écrivant :

$$\begin{aligned} \text{V. 6. 1 } p_{0,M}^{(t)} &= \left( \prod_{j=1}^n \frac{\theta_j^{x_j} g_{j,l_j}(0) g_{j,l_j}(x_j)}{\|g_{j,l_j}\|^2} \right) \left\{ \sum_{j=1}^n \sigma_j (z_{j,l_j} + z_{j,l_j}^{-1}) \right\}^t \\ &+ \sum_{k_1=1}^{l_1-1} \dots \sum_{k_n=1}^{l_n-1} \left( \prod_{j=1}^n \theta_j^{x_j} \frac{g_{j,k_j}(0) g_{j,k_j}(x_j)}{\|g_{j,k_j}\|^2} \right) \left\{ \sum_{j=1}^n \sigma_j (z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1}) \right\}^t \end{aligned}$$

On obtient aisément :

$$g_{j,l_j}(x_j) = \theta_j^{x_j - b_j} (\theta_j^{-1} - \theta_j)$$

d'où :

$$\theta_j^{x_j} \frac{g_{j,l_j}(0) g_{j,l_j}(x_j)}{\|g_{j,l_j}\|^2} = \theta_j^{2x_j + a_j - b_j} \frac{\theta_j - \theta_j^{-1}}{\theta_j^{l_j} - \theta_j^{-l_j}}.$$

D'autre part, l'expression  $\sum_{j=1}^n \sigma_j(\theta_j + \theta_j^{-1})$  valant 1, le premier terme de  $p_{0,M}^{(t)}$  est indépendant de  $t$ . Le second terme de  $p_{0,M}^{(t)}$  tend vers zéro lorsque  $t$  tend vers l'infini car chacun de ses termes comporte au moins un  $z_j$  distinct de  $\theta_j$ . En définitive on a obtenu le résultat suivant :

*Lorsque  $t$  tend vers l'infini, la probabilité  $p_{0,M}^{(t)}$  tend vers une limite :*

$$V.6.2 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_{0,M}^{(t)} = \prod_{j=1}^n \theta_j^{2x_j + a_j - b_j} \cdot \frac{\theta_j - \theta_j^{-1}}{\theta_j^l - \theta_j^{-l}}$$

*indépendante de l'origine.*

Ce dernier point se voit aisément :  $2x + a - b$  reste invariant dans tout changement d'origine.

Notons que les calculs ont été faits dans l'hypothèse où  $\theta_j \neq 1$  quel que soit  $j$ . Comme  $\lim_{\theta \rightarrow 1} \frac{\theta - \theta^{-1}}{\theta^l - \theta^{-l}} = \frac{1}{l}$  l'expression V.6.2 donne encore la limite de  $p_{0,M}^{(t)}$  lorsqu'un ou plusieurs  $\theta_j$  valent 1. Il suffit d'y remplacer le rapport  $\frac{\theta_j^l - \theta_j^{-l}}{\theta_j - \theta_j^{-1}}$  par  $\frac{1}{l_j}$  chaque fois que  $\theta_j = 1$ . Dans le cas symétrique, c'est-à-dire lorsque  $p_j = q_j = \frac{1}{2n}$  quel que soit  $j$ , tous les  $\theta_j$  valent 1 et la distribution limite est :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{0,M}^{(t)} = \prod_{j=1}^n \frac{1}{l_j}$$

Il s'agit de la distribution uniforme de la masse de probabilité 1 sur les  $l_1, l_2, \dots, l_n$  points de (E).

L'expression de  $p_{0,M}^{(t)}$  comportant un terme indépendant du temps, la série  $\sum_{t=0}^{\infty} p_{0,M}^{(t)}$  diverge : tous les états de (E) sont des états récurrents.

b) *Étude des temps de premier passage.*

La fonction génératrice des probabilités de premier retour à l'origine est :

$$V.6.3 \quad {}_0P_{0,0}(s) = 1 - \frac{1}{P_{0,0}(s)} = 1 - \frac{1}{\prod_{j=1}^n \theta_j^{a_j - b_j} \frac{\theta_j - \theta_j^{-1}}{\theta_j^l - \theta_j^{-l}} \frac{1}{1-s} + \sum_{0,0}'(s)}$$

où  $\Sigma'_{0,0}(s)$  désigne l'expression :

$$V.6.4 \quad \sum_{k_1=1}^{l_1-1} \dots \sum_{k_n=1}^{l_n-1} \prod_{j=1}^n \frac{g_{j,k_j}^2(0)}{\|g_{j,k_j}\|^2} \cdot \frac{1}{1 - s \sum_{j=1}^n \sigma_j(z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1})}.$$

Notons que  $\Sigma'_{0,0}(1)$  est fini.

Cette fonction génératrice définit une variable aléatoire : temps de premier retour à l'origine, dont la moyenne est la limite, quand  $s$  tend vers 1,

de  $\frac{d}{ds} {}_0P_{0,0}(s)$ .

On obtient facilement :

$$V.6.5 \quad \lim_{s \rightarrow 1} \frac{d}{ds} {}_0P_{0,0}(s) = \frac{1}{\prod_{j=1}^n \theta_j^{a_j - b_j} \frac{\theta_j - \theta_j^{-1}}{\theta_j^{l_j} - \theta_j^{-l_j}}} = \prod_{j=1}^n \theta_j^{b_j - a_j} \frac{\theta_j^{l_j} - \theta_j^{-l_j}}{\theta_j - \theta_j^{-1}}$$

retrouvant, sur ce cas particulier, le résultat du théorème 6.1 de Kai Lai Chung [1] : si  $m_{0,0}$  désigne cette moyenne, on a :

$$m_{0,0} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{P_{0,0}^{(t)}}.$$

Notons que cette moyenne dépend en général de la position de l'origine par rapport aux barrières. Dans le cas symétrique par contre elle vaut  $\prod_j l_j$

et est indépendante de l'origine du processus.

La fonction génératrice des probabilités de premier passage en un point  $M$  de  $(E)$  distinct de 0 est :

$${}_M P_{0,M}(s) = \frac{P_{0,M}(s)}{P_{M,M}(s)}.$$

La fonction  $P_{M,M}(s)$  s'obtient facilement à partir de  $P_{0,0}(s)$  en y substituant à  $a$  la quantité  $a + x$  et à  $b$  la quantité  $b - x$ , de sorte que l'on peut écrire :

$$P_{M,M}(s) = \prod_{j=1}^n \theta_j^{2x_j + a_j - b_j} \frac{\theta_j - \theta_j^{-1}}{\theta_j^{l_j} - \theta_j^{-l_j}} \cdot \frac{1}{1 - s} + \Sigma'_{M,M}(s)$$

où  $\Sigma'_{M,M}(s)$  est une expression analogue à  $\Sigma'_{0,0}(s)$  définie par la relation V.6.4, mais où l'on a substitué à  $a$  et  $b$  les quantités  $a + x$  et  $b - x$ .  $\Sigma'_{M,M}(s)$  est toujours finie.

On a ainsi :

$${}_M P_{0,M}(s) = \frac{\prod_{j=1}^n \theta_j^{2x_j+a_j-b_j} \cdot \frac{\theta_j - \theta_j^{-1}}{\theta_j^{l_j} - \theta_j^{-l_j}} \cdot \frac{1}{1-s} + \Sigma'_{0,M}(s)}{\prod_{j=1}^n \theta_j^{2x_j+a_j-b_j} \cdot \frac{\theta_j - \theta_j^{-1}}{\theta_j^{l_j} - \theta_j^{-l_j}} \cdot \frac{1}{1-s} + \Sigma'_{M,M}(s)}$$

La dérivée de cette expression pour  $s = 1$  donne facilement la moyenne du temps de premier passage de 0 en M, soit :

$$\prod_{j=1}^n \theta_j^{-2x_j-a_j+b_j} \frac{\theta_j^{l_j} - \theta_j^{-l_j}}{\theta_j - \theta_j^{-1}} \cdot \left. \sum_{k_1=1}^{l_1-1} \dots \sum_{k_n=1}^{l_n-1} \left\{ \prod_{j=1}^n \left( \frac{g'_{j,k_j}(0)}{\|g'_{j,k_j}\|^2} - \frac{g_{j,k_j}^2(0)}{\|g_{j,k_j}\|^2} \right) \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^n \sigma_j(z_{j,k_j} + z_{j,k_j}^{-1})} \right\} \right\}$$

Dans cette expression  $g'_{j,k_j}(x_j)$  désigne le résultat de la substitution de  $a + x$  et de  $b - x$  à  $a$  et  $b$  dans  $g_{j,k_j}(x_j)$ .

*Nota.* — Dans l'ensemble de cette thèse on a adopté les conventions suivantes :

$$\text{Si } a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \left[ \frac{a}{n} \right] = q \in \mathbb{Z} \quad \text{tel que} \quad nq \leq a < n(q + 1);$$

$$\left] \frac{a}{n} \right[ = q' \in \mathbb{Z} \quad \text{tel que} \quad n(q' - 1) < a \leq nq'.$$

La référence [1] après un nom propre renvoie à la bibliographie.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHANG LI CHIEN, On the exact distribution of the statistics of A. N. Kolmogorov and their asymptotic expansion. *Acta Math. Sinica*, t. 6, n° 1, 1955, p. 55-81.
- [2] CHANG LI CHIEN, On the exact distribution of the statistics of N. V. Smirnov and their asymptotic expansion. *Shusina Tsingchang*, t. 1, n° 4, 1955, p. 775-790.
- [1] DEPAIX M., Distributions de déviations maximales bilatérales entre deux échantillons indépendants de même loi continue. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 255, p. 2900-2902.

- [2] DEPAIX M., Distributions temporelles dans une chaîne de Markov discrète, homogène. Cas de barrières semi-absorbantes. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 257, p. 360-362.
- FELLER W., *An introduction to probability theory and its applications*, John Wiley and Sons, New York, 1957.
- FRÉCHET M., *Méthode des fonctions arbitraires. Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles*, Gauthier-Villars, Paris, 1952.
- GNEDENKO B. V., Contrôle de l'invariance de la répartition dans deux choix indépendants (en russe). *Mathematische Nachrichten*, V. 12, t. 1, 2, 1954, p. 29-63.
- GOOD, Cheminement aléatoire sur un groupe abélien fini (en anglais). *Proc. Cambridge Philosophical Society*, t. 47, 1951, p. 756-762.
- HENZE E., Beiträge zum Irrfahrt problem. Thèse de Doctorat, Stuttgart, 1958.
- JORDAN C., *Calculus of finite differences*, Chelsea Publishing Company, New York, 1950.
- CHUNG Kai Lai, *Markov chains with stationary transition probabilities*, Springer-Verlag, Berlin, 1960.
- KEMENY J. G. and SNELL J. L., *Finite Markov Chains*, Van Nostrand Company, Princeton, 1960.
- KEMPERMAN J. H. B., *The passage problem for a stationary Markov Chain*, The University of Chicago Press, 1961.
- [1] KOROLYUK V. S., On the divergence of empirical distributions for the case of two independent samples. *Izv. Akad. Nauk SSSR Seri Matem.*, t. 19, n° 1, 1955, p. 81-96.
- [2] KOROLYUK V. S., Asymptotic analysis of the distribution of the maximum deviation in the Bernoulli Scheme. *Teoriya Veroyat nostei i ee Primeneniya*, vol. IV, n° 4, 1959.
- MACCREA W. H. and WHIPPLE F. J. W., Random paths in two and three dimensions. *Proc. of the Royal Society of Edinburgh*, vol. LX, p. 281-298.
- POLYA G., Ueber eine Aufgabe der Wahrscheinlich keitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Strassennetz. *Math. Ann.*, t. 84, 1921, p. 149-160.
- [1] TORTRAT A., Étude d'une méthode d'itération propre à certaines matrices. Application aux processus de Markov correspondants, cas des processus continus homogènes par rapport à l'espace, cas non homogène. Publications scientifiques de l'Université d'Alger, t. 2, 1957, p. 145-189.
- [2] TORTRAT A., *Calcul des Probabilités*, Masson et Cie, Paris, 1963.

(Manuscrit reçu le 23 octobre 1964).



## TABLE DES MATIÈRES

	Pages
CHAPITRE PREMIER. — Généralités sur les chaînes de Markov sur un ensemble fini . . . . .	312
1. Définitions et notations . . . . .	312
2. Quelques méthodes générales . . . . .	314
3. Types de chaînes de Markov étudiées dans cette thèse . . . . .	316
CHAPITRE II. — Étude d'un cheminement aléatoire à une dimension. . . . .	317
1. Explicitation des équations à l'aide d'une fonction génératrice. . . . .	319
2. Résolution d'une équation aux différences finies . . . . .	324
A) Recherche de la solution générale de l'équation homogène . . . . .	326
B) Recherche d'une solution particulière de l'équation complète. . . . .	328
C) Résolution du système II.2.4 et II.2.5. . . . .	331
CHAPITRE III. — Formules explicites des probabilités de passage. . . . .	334
1. Étude de la structure de la solution II.2.36 . . . . .	334
a) Étude sommaire des racines de l'équation III.1.2 . . . . .	335
b) Structure de la solution II.2.36 . . . . .	336
2. Recherches sur l'explicitation en $s$ des éléments de $F(x, s)$ . . . . .	341
A) Recherches de fonctions génératrices. . . . .	341
a) Étude des $S_\alpha$ . . . . .	341
b) Étude des rapports $E[\delta_p]$ . . . . .	344
B) Explicitation en $s$ . . . . .	348
a) Développement d'une fraction rationnelle . . . . .	348
b) Explicitation des expressions $S_\alpha$ en fonction de $s$ . . . . .	349
c) Explicitation des expressions $E[\delta_{m+n}]$ en fonction de $s$ . . . . .	353
3. Explicitation des probabilités $p_{0,x}^{(l)}$ . . . . .	357
A) Expression de $F(x, s)$ indépendamment des $r_i$ . . . . .	357
B) Expression de $p_{0,x}^{(l)}$ indépendamment des $r_i$ . . . . .	366
4. Quelques résultats concernant les temps de premier passage. . . . .	370
A) Rappels . . . . .	370
B) Premier retour à l'origine . . . . .	371
C) Premier passage en un point donné, autre que l'origine . . . . .	374
5. Étude sommaire de l'absorption . . . . .	376
CHAPITRE IV. — Étude de quelques cas particuliers . . . . .	379
1. Cheminement symétrique $\Phi(r) = pr + qr^{-1}$ . . . . .	379
2. Cas $\Phi(r) = pr^m + qr^{-n}$ . . . . .	382
a) Étude des coefficients $C(\beta, \mu)$ . . . . .	382
b) Étude des coefficients $B(\beta, \mu)$ . . . . .	385
c) Détermination des expressions $S_\alpha$ . . . . .	385
d) Détermination des expressions $E[\delta_{m+n}(x, k)]$ . . . . .	386

	Pages
3. Cas $\Phi(r) = pr^m + qr^{-1}$ . . . . .	394
4. Cas $\Phi(r) = p(r^m + r^{m-1} + \dots + r^{-n})$ . . . . .	397
5. Application aux tests non paramétriques de Kolmogorov et Smirnov.	400
A) Construction d'un processus aléatoire permettant de déterminer $P_{n,m}(\alpha, \beta)$ . . . . .	401
B) Expression exacte de $P_{n,m}(\alpha, \beta)$ . . . . .	402
C) Cas particulier $m = \mu n$ . . . . .	405
CHAPITRE V. — Étude d'une chaîne de Markov homogène dans le temps, à $n$ dimensions, l'espace des états comportant $2n$ barrières semi-absorbantes . . . . .	406
1. Définition d'une chaîne de Markov sur l'espace (E) + (F) . . . . .	406
2. Recherche des probabilités $p_{0,M}^{(t)}$ . . . . .	407
3. Étude de l'équation aux valeurs propres . . . . .	417
4. Étude du processus aléatoire. Cas général . . . . .	425
a) Étude des probabilités $p_{0,M}^{(t)}$ . . . . .	425
b) Étude de l'absorption . . . . .	427
c) Retours à l'origine . . . . .	431
5. Cas où toutes les barrières sont absorbantes pures . . . . .	432
6. Cas où toutes les barrières sont réfléchissantes pures . . . . .	433
a) Étude asymptotique des probabilités de passage . . . . .	433
b) Étude des temps de premier passage . . . . .	434
BIBLIOGRAPHIE . . . . .	436

