ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

A. TORTRAT

Lois de probabilité sur un espace topologique complètement régulier et produits infinis à termes indépendants dans un groupe topologique

Annales de l'I. H. P., section B, tome 1, nº 3 (1964-1965), p. 217-237

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1965__1_3_217_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. I, n° 3, 1965, p. 217-237.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Lois de probabilité sur un espace topologique complètement régulier et produits infinis à termes indépendants dans un groupe topologique

par

A. TORTRAT
(Institut Henri Poincaré)

I. — INTRODUCTION

Le joli livre de Grenander [*5*] est à l'origine de ce travail. Celui-ci comporte d'abord une étude des mesures bornées sur un espace topologique $\mathcal{X}$ complètement régulier (C. R.), puis lorsque $\mathcal{X}$ est en outre un demi-groupe topologique. Il n'y a rien là d'essentiellement nouveau mais nous présentons en ce qui concerne la convergence (CV.) en loi des démonstrations directes élémentaires et des énoncés aussi généraux que possible.

Dans la partie III sont étudiées, avec la CV. en probabilité, des conditions assurant qu'une convolution dénombrable convergeant en loi converge également en probabilité. Cette question est liée étroitement à l'équation :

$$\nu * \nu' = \nu \tag{1}$$

dont la solution est connue (G. Choquet) pour $\mathcal{X} =$ groupe localement compact (cf. [*3*] pour le cas abélien); une démonstration très simple est donnée ici pour le cas général (groupe topologique). (1) comporte évidemment le cas particulier des lois idempotentes, bien connu, au moins dans le cas localement compact (L. K.); dans ce cas la démonstration de [*6*] est de même inspiration que celle de [*3*] et la nôtre [1] (n'utilisant pas les transformées de Fourier). On en déduit en particulier que la CV. de la suite

[1] Inspirations tout à fait indépendantes.

$\pi_n = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} \mu^k$ vers une loi limite (alors idempotente) tendue, ne peut avoir lieu que si le support de μ est contenu dans un sous-groupe compact de $\mathfrak{X}$ (*), et en particulier que les π_n, *a fortiori* les μ^n ne sont U. T. que dans les mêmes conditions.

Dans la partie IV on passe naturellement à l'étude des lois uniformément tendues (U. T.) après translation (²) ou de la CV. après translation (étude des facteurs) qui incite à définir la fonction de concentration liée à une mesure (fonction sous-additive d'ensembles, continue pour la limite $\nearrow$) et à étudier ses premières propriétés, principalement quand $\mathfrak{X}$ est un groupe. Une première application est l'extension des inégalités de Paul Lévy (dispersion d'un produit fini $Z_n = X_1 \dots X_n$ à termes indépendants) et l'extension (d'un espace de Banach à un groupe métrique quelconque) du théorème de Paul Lévy-Geffroy sur la CV. p. s. de Z_n lorsque Z_n CV. en probabilité.

La partie V donne des résultats partiels concernant le comportement général de ce produit à termes indépendants :

$$X_1 \dots X_n \dots,$$

du point de vue de la CV. en loi; en particulier, on a $\nu_n = \mu_1 * \dots * \mu_n$ étant la loi de Z_n (et les μ_n tendues) : ou bien pour tout système de translatées à droite ν'_n des ν_n, on a, uniformément par rapport à ces translations :

$$\nu'_n(K) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{pour tout compact } K,$$

ou bien les lois $\nu_{n,n'} = \mu_{n+1} * \dots * \mu_{n'}$ sont U. T. après translations à droite (translations dépendant de n et n').

De nombreux problèmes restent posés, en particulier l'application de ces propriétés à l'étude de la suite $\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} \mu^p$ lorsqu'elle ne CV. pas (cf. [*5*]), au plongement de μ (possédant des « racines $n^{\text{ième}}$ ») dans un demi-groupe μ_t (cf. [*1*] [*8*] [*8 bis*]), à la structure de ces demi-groupes. Si l'on ne peut espérer beaucoup de résultats généraux, il semble qu'on puisse éclairer la discussion approfondie de ces questions qui sont à l'heure actuelle l'objet de nombreuses recherches, sous des hypothèses beaucoup plus strictes.

Notations et rappels. — On considère des mesures bornées sur la tribu borélienne $\mathcal{B}$ (engendrée par les ouverts) d'un espace topologique $\mathfrak{X}$. $\mathcal{C} = C(\mathfrak{X})$ désigne l'espace des fonctions (réelles) continues bornées sur $\mathfrak{X}$,

(*) Cf. [*5*], p. 60, pour le cas localement compact, par une voie indirecte.
(²) Cf. [*6*] et [*1*].

espace de Banach muni de la norme $\|f\| = \sup_{\mathfrak{X}} |f|$. Il nous paraît utile de prendre comme hypothèse la plus générale (pour les raisons concordantes qui suivent), celle que $\mathfrak{X}$ est C. R., c'est-à-dire séparé et uniformisable.

Supposer $\mathfrak{X}$ séparé n'est pas une restriction et ne joue d'autre rôle que d'assurer que les $\{x\} \in \mathcal{B}$ (on peut toujours confondre des points non séparés par la tribu $\mathcal{B}$ (*)); supposer $\mathfrak{X}$ uniformisable est nécessité par la définition de la CV. en probabilité et c'est ce que fait Shafik Doss (dans [*4*]). Cette dernière hypothèse est automatiquement vérifiée lorsque $\mathfrak{X}$ est un groupe topologique (unité e), alors les voisinages ouverts U de e (ou une base de ces voisinages) définissent la structure uniforme à droite : les $\mathrm{U}x$ sont voisinages ouverts de x et les $\bigcup_{x \in \mathrm{A}} \mathrm{U}x = \mathrm{U}(\mathrm{A})$ sont les entourages (ou voisinages) d'ordre U de A. On peut se borner à des U symétriques ($\mathrm{U} = \mathrm{U}^{-1}$, par exemple $\mathrm{U}' = \mathrm{U} \cup \mathrm{U}^{-1}$ ou $\mathrm{U} \cap \mathrm{U}^{-1}$), alors la relation « x et y sont voisins d'ordre U », soit $y \in \mathrm{U}x$, est symétrique.

Rappelons (cf. [*2*]) que si e admet une base dénombrable de voisinages, $\mathfrak{X}$ est métrisable, devenant un groupe métrique à droite (ou à gauche), c'est-à-dire qu'il existe une distance invariante à droite (ou à gauche) définissant la topologie de $\mathfrak{X}$.

La propriété « $\mathfrak{X}$ est C. R. » est commune à $\mathfrak{X}$ L. K. et à $\mathfrak{X}$ normal (*a fortiori* à $\mathfrak{X}$ métrisable) et équivaut ($\mathfrak{X}$ étant séparé) à : tout point x est séparé de tout fermé F par $f \in \mathcal{C}$, donc par une telle f à valeurs sur $[0, 1]$: $f = 1$ sur F, $f(x) = 0$, $0 \leqslant f \leqslant 1$. Alors tout compact est séparé de tout fermé.

Sur $\mathfrak{X}$ C. R. (cf. [*10*]), dès que la fonctionnelle $\mu f = \int_{\mathfrak{X}} f d\mu$ (élément du dual de $\mathcal{C}$) est τ-continue, c'est-à-dire satisfait à :

$$\mu f_\alpha \to 0 \tag{2}$$

pour tout ensemble filtrant de $\mathcal{C}$ et décroissant vers 0 ([3]), cette fonctionnelle définit sur $\mathcal{B}$ une mesure régulière ($\in$ (3)) unique m telle que :

$$m\mathrm{F} = \inf_{f \geqslant 1_{\mathrm{F}}} \mu f,$$

$$m(\mathrm{A}) = \sup_{\mathrm{F}(\mathrm{A})} m(\mathrm{A}), \qquad \mu f = \int f dm. \tag{3}$$

(*) Alors vaut l'axiome de Fréchet : $x \neq y \Rightarrow \exists$ un ouvert contenant x et non y, ou : tout $\{x\}$ est fermé. Si de plus $\mathfrak{X}$ est uniformisable, les fermés $\{x\}$ et $\{y\}$ sont séparés par une $f \in \mathcal{C}$, *a fortiori* par des ouverts disjoints : $\mathfrak{X}$ est séparé (au sens de Hausdorff). Or l'axiome de Fréchet fait partie des axiomes des groupes topologiques : tout tel groupe est C. R.

([3]) Les éléments du filtre sont les sous-ensembles $\{f : f \leqslant f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_n}\}$ de l'ensemble donné.

$\mathfrak{X}$ étant séparé, tous les ensembles $\{ x \}$, réduits à un seul point, $\in \mathcal{B}$. La CV. des lois étant définie par celle des μf sur $\mathcal{C}$ concerne en fait des classes de mesures équivalentes (identiques comme éléments du dual de $\mathcal{C}$) et à toute classe τ-continue, on pourra faire correspondre une mesure régulière sur $\mathcal{B}$, ou supposer que μ satisfaisant à (2) a été régularisée. La τ-continuité de μf est impliquée par la propriété plus forte que nous devrons le plus souvent supposée réalisée :

μ *est tendue* (suivant les K_ε, ou une suite de compacts K_ε) si à tout $\varepsilon > 0$ (ou une suite $\searrow 0$) correspond un compact K_ε tel que $\mu \complement K_\varepsilon < \varepsilon$. En effet, $\int_{K_\varepsilon} f_\alpha d\mu \to 0$, car la CV. (2) est uniforme sur tout compact (Th. de Dini) et $\int_{\complement K_\varepsilon} f_\alpha d\mu \leqslant \varepsilon M$, M majorant les $\| f_\alpha \|$ pour un élément du filtre.

μ régularisée satisfait alors (et nous la dirons K-régulière) à :

$$\mu(A) = \sup_{K \subset A} \mu(K) \qquad \text{tout } A \in \mathcal{B}. \tag{3'}$$

Remarque. — La CV. $\int_{K_\varepsilon} f_\alpha d\mu \to 0$ est uniforme p. r. aux μ, donc la fermeture (pour la CV. en loi) de toute famille de lois uniformément tendues est formé de lois (uniformément) τ-continues (d'ailleurs aussi U. T.).

II. — MESURES BORNÉES ET TENDUES SUR $\mathfrak{X}$ C. R., CAS OU $\mathfrak{X}$ EST UN GROUPE

Définition. — Les mesures μ_α d'une famille $\mathcal{M}$ sont dites uniformément tendues (U. T., suivant les K_ε), s'il existe un même système $\{ K_\varepsilon \}$ de compacts sous-tendant chaque μ_α et si les variations totales $[\mu_\alpha] = \mu_\alpha(\mathfrak{X})$ sont majorées.

Proposition 1. — Soit une famille de μ_α convergeant vers μ suivant un certain filtre :

$$\mu_\alpha f \to \mu f, \qquad \text{toute } f \in \mathcal{C}. \tag{4}$$

a) Si $\mathfrak{X}$ est normal [4] et μ régulière, ou si $\mathfrak{X}$ est parfaitement normal [5], (4) entraîne (5) équivalent à (5') :

$$(5) \qquad \liminf \mu_\alpha \mathcal{O} \geqslant \mu \mathcal{O} \ <\ >\ \limsup \mu_\alpha F \leqslant \mu F. \qquad (5')$$

---

[4] Deux fermés disjoints sont toujours séparés par une $f \in \mathcal{C}$.

[5] Tout F est l'ensemble nul d'une $f \in \mathcal{C}$ ou, c'est équivalent, deux fermés sont séparés strictement ($0 < f < 1$ hors de $F \cup F'$) ou encore $\mathfrak{X}$ est normal et tout F est un G_δ.

Sinon (5′) vaut pour ces F qui sont ensembles nuls d'une $f \in \mathcal{C}$, ou, c'est équivalent, de la forme $\{ x : f \leqslant a \}$.

b) Réciproquement (5) ou (5′) entraînent (4) sans aucune restriction.

a′) Si $\mathfrak{X}$ est C. R. et μ régulière, (4) entraîne (6) :

$$\limsup \mu_\alpha K \leqslant \mu K, \tag{6}$$

donc μ est tendue si les μ_α sont U. T. [6].

b′) Si les μ_α sont U. T., (6) entraîne (4) (vers μ tendue).

c) Si $\mathfrak{X}$ est polonais ou si $\mathfrak{X}$ est C. R. et μ tendue suivant une suite de $K_\varepsilon \subset \operatorname{int} K'_\varepsilon$ (compacts intérieurs à d'autres compacts), en particulier si $\mathfrak{X}$ est L. K. (et μ tendue) alors (4) nécessite que les μ_α d'un certain voisinage de μ soient U. T.

Remarque. — On trouvera des énoncés comparables dans [7] (ou [9]), avec des démonstrations moins directes. Celles-ci étant très simples nous les donnons, sauf pour le cas polonais (*c*), renvoyant à [*11*].

Démonstration. — Sans restriction on peut supposer que chaque $[\mu_\alpha] = 1$.

a) Les hypothèses impliquent que pour tout ouvert $\mathcal{O}$, $\exists\, F_\varepsilon$ avec :

$$\mu F_\varepsilon > \mu G - \varepsilon,$$

et f à valeurs dans [0, 1], valant 1 sur F_ε, 0 hors de $\mathcal{O}$; alors :

$$| \mu_\alpha f - \mu f | < \varepsilon \Longrightarrow \mu_\alpha \mathcal{O} \geqslant \mu_\alpha f \geqslant \mu f - \varepsilon \geqslant \mu G - 2\varepsilon.$$

Dans le cas *a′)* il suffit de raisonner (de façon complémentaire) en partant de $\mathcal{O}_\varepsilon$ (μ étant régulière, $\mu K = \inf_{K \subset \mathcal{O}} \mu \mathcal{O}$) tel que :

$$\mu \mathcal{O}_\varepsilon < \mu K + \varepsilon \text{ et en séparant K et } \complement \mathcal{O}_\varepsilon.$$

b) Soit f donnée et $|f| \leqslant M$ et :

$$l_i < l_{i+1}, \quad G_i = \{ f < l_i \}, \quad U_i = G_{i+1} - G_i, \quad \eta = \sup (l_{i+1} - l_i) ;$$

on a :

$$| \mu_\alpha f - \mu f | \leqslant 2\eta M + \sum_1^{\mathrm{I}} l_i \,| \mu_\alpha U_i - \mu U_i |.$$

---

(6) En ce cas l'hypothèse « μ est régulière » n'est pas nécessaire car, suivant la remarque finale de l'introduction, les μ_α étant U. T. sont uniformément τ-continues, (4) entraîne que μ l'est aussi, donc est régularisable. Le résultat (6) s'applique donc à μ régularisée.

On peut choisir les l_i de sorte que les G_i donc les U_i soient de frontières μ-nulles (prendre l_i valeur de continuité pour $\mu\{f < 1\}$), alors chaque terme de $\sum_1^I$ est $< \varepsilon$ pour toutes les μ_α d'un ensemble convenable du filtre, d'où (6).

b') Même conclusion avec l'hypothèse (6), si les μ_α sont U. T. car (6) entraîne alors (5') :

$$\begin{aligned}\limsup \mu_\alpha F &\leqslant \limsup \mu_\alpha(F.K_\varepsilon) + \varepsilon \\ &\leqslant \mu(F.K_\varepsilon) + \varepsilon \leqslant \mu F + \varepsilon.\end{aligned}$$

c) Soit $\mu \complement K < \varepsilon$ et séparons K et $\complement$ int K' par f (nulle hors de K'). On peut raisonner comme en *a'*), en prenant K_0 de frontière μ-nulle (compris entre K et K') défini par :

$$K_0 = \{f \geqslant a_0\}, \qquad a_0 \text{ valeur de continuité de } H(1) = \mu\{f < 1\}.$$

Si f' vaut 1 sur $K_a = \{f \geqslant a\}$ (avec $a_0 < a < 1$) et 0 hors de K_0, on a :

$$\mu K_a \underset{a \searrow a_0}{\nearrow} \mu K_0,$$

(4) entraîne donc pour toute μ_α d'un ensemble convenable du filtre (à savoir les μ_α du voisinage $|\mu_\alpha f' - \mu f'| < \varepsilon$) :

$$\mu_\alpha F_0 \geqslant \mu_\alpha f' \geqslant \mu f' - \varepsilon \geqslant \mu K_a - \varepsilon \geqslant \mu K_0 - 2\varepsilon. \quad \blacksquare$$

Proposition 2. — $\mathfrak{X}$ étant C. R., toute famille $\mathcal{M}$ de mesures U. T. (suivant des K_ε) est relativement compacte (pour la CV. faible ou CV. en loi).

En effet, les μf, comme points d'une boule $\|\mu\| \leqslant M$ du dual de $\mathcal{C}$, forment un ensemble (relativement) faiblement compact. Toute fonctionnelle Tf adhérente à cet ensemble est τ-continue, comme limite suivant un filtre $\mathcal{F}$ de $\mu_\alpha f$ uniformément τ-continues ($f_\beta \searrow 0 \Longrightarrow |f_\beta| < \varepsilon$ sur K_ε donc :

$$\mu_\alpha f \leqslant \varepsilon(M + M'),$$

pour un élément convenable du filtre des β, M' majorant les $\|f_\beta\|$ de cet élément et tout α); elle définit donc μ_0 régulière, suivant $\mu_0 F = \inf_{f \geqslant 1_F} Tf$, d'où $\mu_0 K_\varepsilon > 1 - \varepsilon$ et μ_0 est K-régulière.

COROLLAIRE. — Si toute μ_0 a, *dans* $\mathcal{M}$, une base dénombrable de voisinages (pour la CV. (4)), $\mathcal{M}$ est séquentiellement compacte. Pour cela, il faut, pratiquement, supposer les K_ε à base dénombrable de voisinages (ou métrisables, c'est équivalent) : l'algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par ces bases dénombrables d'ouverts, pour la suite $K_{1/2^i}$ définit une base dénombrable $\{ \varphi_i \}$ de fonctions simples (à valeurs rationnelles) et les ensembles :

$$\left\{ \mu \in \mathcal{M} : | \mu\varphi_i - \mu_0\varphi_i | < \frac{1}{2^k} \right\}$$

forment une base dénombrable de voisinages de μ_0.

Aussi bien on peut extraire de toute suite μ_n, par la méthode diagonale, une sous-suite μ_{n_i} CV. pour chaque $A \in \mathcal{A}$, d'où on déduit $\mu_{n_i}f \to \mu_0 f$ sur $\mathcal{C}$.

Proposition 3. — Pour toute mesure tendue (bornée) la relation :

$$g(x) = Tf(x) = \int_{\mathfrak{X}} f(yx)\mu(dy) \tag{7}$$

définit un opérateur linéaire, positif, de norme $[\mu]$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$, lorsque $\mathfrak{X}$ est un demi-groupe topologique (7).

REMARQUES. — 1° On a :

$$g(x) = \{ \mu * \delta(x) \} f, \tag{8}$$

$g(x)$ est la fonctionnelle attachée à la mesure $\nu(x) = \mu * \delta(x)$, ν est la translatée à droite (par x) de μ :

$$\nu(A) = \int_{yx \in A} \mu(dy) = \mu(Ax^{-1}) ; \tag{9}$$

la 2e égalité suppose que $\mathfrak{X}$ est un groupe (ou que Ax^{-1} désigne l'image inverse $\{ y : yx \in A \}$), l'énoncé équivaut à affirmer que $\nu(x)$ est fonction continue de x (pour la CV. des mesures). Le seul point non évident de la démonstration, la continuité de $g(x)$, est inclus dans celle de la proposition 4 ci-dessous.

2° Si $\mathcal{C}^K$ désigne l'espace des f à support compact et $\mathcal{C}_\omega$ celui des f nulles au « point à l'infini ω » (c'est-à-dire $< \varepsilon$ hors d'un compact convenable), $Tf \in \mathcal{C}_\omega$ lorsque $f \in \mathcal{C}^K$ ou $\mathcal{C}_\omega$; mais la restriction de μf à $\mathcal{C}_\omega$ peut ne pas suffire à définir μ sur $\mathcal{B}$, même si μ est tendue (et régulière) : $\mu K = \inf_{f \geqslant 1_K} \mu f$ ne peut valoir dans $\mathcal{C}_\omega$ (avec $\mathfrak{X}$ C. R.) que s'il existe *dans* $\mathcal{C}_\omega$ f dominant K. Sinon on atteint seulement $\mu \{ \text{int } K \} = \sup_{f \leqslant 1_K} \mu f$.

(7) $\mathfrak{X}$ est muni d'une opération bicontinue (et associative).

Proposition 4. — La convolution des lois, dans le demi-groupe topologique $\mathfrak{X}$:

(10) $$\mu * \nu(E) = \int_{xy \in E} \mu(dx)\nu(dy)$$

est bicontinue, pour des lois U. T., soit (sous cette hypothèse) :

$$\mu_\alpha \to \mu, \qquad \nu_\beta \to \nu \Longrightarrow \mu_\alpha * \nu_\beta \to \mu * \nu = \rho.$$

La démonstration est celle donnée dans [*3*] (p. 188) sous des hypothèses restrictives qui n'interviennent pas. Vu son importance nous préférons la détailler ici :

$\exists$ K tel que μK, νK et les μ_αK, ν_βK soient $> 1 - \varepsilon$ (tous α, β). Donnons-nous $f \in \mathcal{C}$, arbitraire, on a :

(12) $$\rho_{\alpha,\beta} f = \{ \mu_\alpha * \nu_\beta \} f = \int_{\mathfrak{X}^2} f(xy)\mu_\alpha(dx)\nu_\beta(dy) = \int_{\mathfrak{X}} g_\alpha(y)\nu_\beta(dy),$$

avec :

(13) $$g_\alpha(y) = \int_{\mathfrak{X}} f(xy)\mu_\alpha(dx).$$

Ainsi $\rho_{\alpha,\beta} f - \rho f = \nu_\beta g_\alpha - \nu g$ a même limite que $\nu_\beta(g_\alpha - g)$, admettant que g_α est continue (ce qui est vu indépendamment ci-après); puisque $\| g_\alpha \| \leqslant \| f \|$, il suffit de montrer que $\int_K (g_\alpha - g) d\nu_\beta \to 0$, donc que $g_\alpha \to g$ uniformément sur K.

Or :

$$\varphi(y', y) = \sup_{x \in K} | f(xy') - f(xy) | \underset{y' \to y}{\longrightarrow} 0,$$

car sinon il existerait $x_\alpha \to x_0$ et $y'_\alpha \to y$ avec $| f(x_\alpha y'_\alpha) - f(x_0 y) | > \varepsilon$, contredisant la continuité de $f(xy)$ en $x_0 y$. Il s'ensuit l'équicontinuité (en chaque y, donc uniformément sur K mais peu importe) des $g_\alpha(y)$ et $g(y)$ vu, par exemple, suivant (13) :

$$| g_\alpha(y') - g_\alpha(y) | \leqslant 2 \| f \| \varepsilon + \varphi(y', y).$$

Et si g_α ne CV. pas vers g uniformément sur K, l'existence de :

$$| g_\alpha(y_\alpha) - g(y_\alpha) | > \varepsilon,$$

avec $y_\alpha \in K$, $y_\alpha \to y$ et l'hypothèse $\mu_\alpha \to \mu$ qui entraîne $g_\alpha(y) \to g(y)$, contrediraient cette équicontinuité. ■

Remarque. — Au contraire la continuité simple de la convolution :

$$\nu_\beta \to \nu \Longrightarrow \mu\nu_\beta \to \mu\nu \qquad \text{et} \qquad \nu_\beta\mu \to \nu\beta$$

vaut dès que μ est tendue car, puisque $Tf \in \mathcal{C}$ d'après la proposition 3, on a :

$$\mu\nu_\beta f = \nu_\beta Tf \to \nu Tf = \mu\nu f;$$

de même pour $\nu_\beta\mu$ avec $T'f(x) = \int f(xy)\mu(dy)$. La restriction μ tendue est même inutile, vu le théorème de Lebesgue (CV. dominée).

III. — CV. EN PROBABILITÉ ET CV. EN LOI, CAS D'UNE CONVOLUTION DÉNOMBRABLE LORSQUE $\mathcal{X}$ EST UN GROUPE TOPOLOGIQUE

Proposition 5. — La CV. en probabilité vers X, des variables aléatoires (v. a.) X_α à valeurs dans $\mathcal{X}$ C. R., implique la CV. en loi :

a) si les lois sont U. T. ou :

b) si la structure uniforme de $\mathcal{X}$ est à base dénombrable.

a) En effet, l'hypothèse est [8] :

$$P\{(X_\alpha, X) \in V\} \to 1, \tag{14}$$

pour tout entourage V de la structure uniforme dans $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$.

Alors si μ_α, μ sont les lois de X_α, X, on a pour un ensemble convenable du filtre :

$$\begin{aligned} |\mu_\alpha f - \mu f| &\leqslant \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} |f(x_\alpha) - f(x)|\, P(dx_\alpha, dx) \\ &\leqslant \int_V |f(x_\alpha) - f(x)|\, dP + 2\varepsilon \|f\|. \end{aligned}$$

Or, la fonction $f(x_\alpha) - f(x)$ est uniformément continue sur le compact $K_\varepsilon \times K_\varepsilon$ et est donc $< \varepsilon$ sur $V \cap K_\varepsilon \times K_\varepsilon$ pour V convenable, d'où :

$$P\{X_\alpha \times X \notin K_\varepsilon \times K_\varepsilon\} < 2\varepsilon \Rightarrow |\mu_\alpha f - \mu f| < 6\varepsilon \|f\| + \varepsilon.$$

b) Dans le cas *b)* (cf. [*4*]), puisque $\overline{A}$, fermeture de A, est l'intersection d'un ensemble dénombrable d'entourages de A, (14) entraîne la CV.

---

[8] On suppose évidemment ici et plus loin que les v. a. telles que (X, X') ou $\prod_1^n X_i$ sont mesurables sur l'espace de probabilité définissant les X. Lorsque $\mathcal{X}$ est métrisable et séparable (séparable doit suffire, si $\mathcal{X}$ est un groupe, pour que (14) ait un sens ou que $\prod_1^n X_i$ soit mesurable), on montre facilement que cette hypothèse découle de la mesurabilité des X_i (est donc automatiquement vérifiée).

$\mu_\alpha \to \mu$ sur tout A de frontière μ-nulle, soit (5) et (5′) qui impliquent (4).

Nous ne savons pas si la restriction (« *a)* ou *b)* ») peut être levée. Dans [*4*], l'auteur définit la CV. des mesures par la CV. $\mu_\alpha \to \mu$ pour tout « A de continuité » pour μ :

$$\begin{cases} \mu A = \inf \mu V(A), \\ \mu \complement A = \inf \mu V(\complement A), \end{cases}$$

qui découle directement de (14) et est moins stricte que la CV. sur les A de frontière μ-nulle. Nous ne savons pas si la démonstration de la proposition 1-*b)* peut être étendue à ce cas.

Proposition 6. — Si $\mathfrak{X}$ est un groupe topologique et si la famille $\mathcal{M}$ de lois ν_α est U. T., suivant les K_ε, les lois $\nu_{\alpha,\alpha'}$ (s'il en existe) vérifiant $\nu_\alpha * \nu_{\alpha,\alpha'} = \nu_{\alpha'}$ sont U. T. suivant les $K_\varepsilon^{-1}.K_\varepsilon$.

Exemple. — Les $\nu_{n,n'} = \mu_{n+1} * \ldots * \mu_{n'}$ si la limite ν de la suite $\nu_{1,n}$ supposée convergente satisfait aux conditions de la proposition 1-*c)*.

On a, en effet (avec $K = K_\varepsilon$) :

$$1 - \varepsilon \leqslant \nu_{\alpha'}(K) = \int_{\mathfrak{X}} \nu_{\alpha,\alpha'}(x^{-1} K)\nu_\alpha(dx)$$
$$\leqslant \varepsilon + \int_K \nu_{\alpha,\alpha'}(x^{-1} K)\nu_\alpha(dx) \leqslant \nu_{\alpha,\alpha'}(K^{-1}.K) + \varepsilon.$$

Théorème 1. — Si la convolution des lois μ_n sur le groupe topologique $\mathfrak{X}$ (et ses boréliens) :

$$\mu_1 * \mu_2 * \ldots * \mu_n * \ldots$$

est convergente, vers la loi ν :

$$(15) \qquad \nu_n = \mu_1 * \mu_2 * \ldots * \mu_n \to \nu,$$

et si : $\mathfrak{X}$ est polonais, ou ν est tendue suivant une suite de K_ε intérieurs à d'autres compacts, en particulier ν est tendue et $\mathfrak{X}$ L. K., alors, ou le critère de Cauchy :

$$(16) \qquad \nu_{n,n'} = \mu_{n+1} * \cdots * \mu_{n'} \xrightarrow[n \to \infty]{n'} \delta(e),$$

est satisfait où il existe une loi $\nu' \neq \delta(e)$ satisfaisant à :

$$(1) \qquad \nu * \nu' = \nu.$$

En effet, suivant les propositions 1-*c*, 2 et 6, si (16) n'a pas lieu, on peut extraire de la famille U. T. des $\nu_{n,n'}$ une famille $\nu_{\alpha,\alpha'}$, convergeant suivant un certain filtre vers $\nu' \neq \delta(e)$; la bicontinuité (proposition 4) appliquée à $\nu_\alpha * \nu_{\alpha,\alpha'} = \nu_{\alpha'} \to \nu$ entraîne (1). ■

COROLLAIRE 1. — Si $\mathcal{X}$ (groupe topologique) est métrisable (soit : e admet une base dénombrable de voisinages) et complet, et si :

ou $\mathcal{X}$ est séparable (donc polonais, alors toute ν est tendue),

ou ν est tendue suivant des K_ε intérieurs à d'autres compacts (il suffit pour cela que $\mathcal{X}$ soit L. K.).

Alors la CV. en loi (15) entraîne la CV. en probabilité (soit (14) pour $Z_n = X_1 \ldots X_n$, avec X_n indépendantes de lois μ_n), à moins que (1) n'ait une solution ($\neq \delta(e)$).

En effet (16) est alors condition nécessaire et suffisante de (14) (nécessaire dès que $\mathcal{X}$ est un groupe) : démonstration habituelle $\mathcal{X}$ étant métrisable et complet (voir dans [5], p. 110 une démonstration adaptée au cas où $\mathcal{X}$, est un groupe et n'utilisant pas de distance dans $\mathcal{X}$).

COROLLAIRE 2. — Si $\mathcal{X}$ est un espace de Banach séparable, la CV. en loi d'une série à termes indépendants entraîne sa CV. en mesure; plus généralement, il suffit (*) sous les hypothèses du corollaire précédent que $\mathcal{X}$ n'admette pas de sous-groupe compact (autre que $\{ e \}$), ou que la loi limite ne soit G invariante pour aucun G.

Théorème 2. — $\mathcal{X}$ étant un groupe topologique et ν tendue et régulière, (1) admet une solution $\nu' \neq \delta(e)$, si et seulement si ν est invariante, à droite, par toute translation $x \in G$, G étant le groupe fermé engendré par le support Σ de ν'. G doit être compact :

$$\nu * \delta(x) = \nu, \qquad \text{tout } x \in G, \qquad \Sigma \subset G \text{ compact.}$$

Nous dirons que ν est G invariante, toute ν' à support dans G satisfait alors à (1).

Démonstration. — ν étant K-régulière, il suffit de montrer que $\nu(K)$ est invariante, pour tout K, soit $\nu(Kx^{-1}) = \nu(K)$ (aussi bien $\nu(Kx) = \nu(K)$) pour tout $x \in G$.

a) La fonction $\nu(Kx^{-1}) = h(x)$ possède un maximum sur G (soit en x_0). En effet, si les K_ε sous-tendent ν :

$$x \notin K_\varepsilon^{-1}.K \implies Kx^{-1} \cap K_\varepsilon = 0 \implies \nu(Kx^{-1}) < \varepsilon\,;$$

la borne $M = \sup\limits_{x \in G} \nu(Kx^{-1})$ est donc approchée par une suite x_n, dans un compact et $\nu * \delta(x)$ étant (proposition 3), comme mesure, fonction continue de x, on a, suivant (6) (et pour un filtre extrait de $\{ x_n \}$ convergeant vers x_0) :

$$\nu(Kx_0^{-1}) \geqslant \limsup \nu(Kx_\alpha^{-1}) \geqslant M.$$

(*) D'après le théorème 2 ci-dessous.

Puisque $x_0 \in \mathrm{G}$, on a $\nu(\mathrm{K}x_0^{-1}) = \mathrm{M}$. On peut énoncer (comme dans [*6*]) ceci en disant que la fonction $\nu(\mathrm{K}x)$ est semi-continue supérieurement.

b) (1) et (10) entraînent :

$$\nu(\mathrm{K}x_0^{-1}) = \int_\Sigma \nu(\mathrm{K}x_0^{-1}x^{-1})\nu'(dx),$$

donc :

$$h(xx_0) = h(x_0) = \mathrm{M}, \qquad \text{pour tout } x \in \Sigma. \tag{I}$$

Mais (I) vaut alors pour tout x du demi-groupe engendré par Σ (c'est-à-dire tout x de la forme $x_\mathrm{K} \dots x_1$, avec $x_k \in \Sigma$), donc aussi pour sa fermeture G′, vu la semi-continuité de $h(x)$. Or, $\mathrm{G}' \subset \mathrm{K}_\varepsilon^{-1}.\mathrm{K}$, si $\varepsilon < \mathrm{M}$. Il s'ensuit que G′ étant compact (et dans le groupe $\mathfrak{X}$) est un groupe (9) (cf. [*5*], p. 60).

Si ν n'est pas K-régulière, on conclut seulement à l'invariance (à droite) des $\nu(\mathrm{K})$.

Corollaire. — Sur $\mathfrak{X}$ groupe topologique, les lois idempotentes tendues (définies sur la tribu borélienne $\mathcal{B}$ et régularisées) sont les mesures de Haar (normées) sur un sous-groupe compact (cf. [*5*], p. 106 pour $\mathfrak{X}$ L. K. à base dénombrable de voisinages).

Remarques. — Supposons que ν' soit une loi $\neq \delta(e)$ telle que (1) ait une solution ν tendue. Posons :

$$\pi_\mathrm{N} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_1^\mathrm{N} \nu'^n \; ; \tag{17}$$

sans supposer démontré le théorème 2, on sait d'après la proposition 6 que les π_n sont U. T. et déduit des propositions 2 et 4, suivant une méthode classique, que tout filtre convergeant extrait de la suite π_n CV. vers une loi limite π unique, satisfaisant à :

$$\nu' * \pi = \pi * \nu' = \pi, \qquad \pi^2 = \pi \qquad (\text{et } \nu * \pi = \nu) \tag{18}$$

donc que $\pi_n \to \pi$.

On notera que $\nu \in (1)$ est une loi initiale rendant stationnaire la chaîne de Markoff (homogène dans l'espace) de transitions :

$$p(x, \mathrm{A}) = \nu'(x^{-1}\mathrm{A}),$$

car :

$$\nu(\mathrm{A}) = \int_\Sigma \nu'(x^{-1}\mathrm{A})\nu(dx) \; ;$$

---

(9) Soit $a \in \mathrm{G}'$. Si la suite a^n est infinie, soit b un point qui lui soit adhérent, $\exists$ des $a^{n'-n}$ appartenant à n'importe quel voisinage de e donné, U. Si on extrait $a^{n_\alpha} \to e$, on a $a^{n_\alpha - 1} \to a^{-1} \in \mathrm{G}'$. D'ailleurs on sait que tout demi-groupe compact et simplifiable est un groupe. ∎

alors le résultat $\pi_n \to \pi$ précise la propriété ergodique générale des transitions itérées des chaînes de Markoff stationnaires qui s'écrit ici :

$$\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} \nu'^n(x^{-1}A) \to \pi(x^{-1}A) \text{ p. p. modulo } \nu.$$

La conclusion $\pi_n \to \pi \in (18)$ vaut dès que l'on sait les π_n U. T., sans savoir que (1) a une solution et alors π est une telle solution. Inversement la CV. de la suite π_n entraîne, pour la limite π, sans autre hypothèse, vu la continuité simple de la convolution (cf. la remarque qui suit la proposition 4) dans tout demi-groupe topologique :

$$\pi^2 = \pi \qquad \text{et} \qquad \pi\nu' = \pi = \nu'\pi\,;$$

si π est tendue (et si $\mathfrak{X}$ est un groupe), ν' a donc comme π son support dans un groupe compact. Ainsi on a :

Proposition 7. — ν' étant une loi sur $\mathfrak{X}$ groupe topologique, π_n désignant les moyennes (17), il y a équivalence entre les propriétés suivantes (et alors $\pi_n \to \pi \in (18)$, et π est la loi invariante sur G engendré par Σ) :

a) les π_n sont U. T.,

b) il existe une solution ν tendue à l'équation $\nu * \nu' = \nu$ (alors π est une de ces solutions);

c) le support Σ de ν' est contenu dans un groupe compact G;

d) la suite π_n CV. vers π tendue.

IV. — FONCTION DE CONCENTRATION D'UNE MESURE

Définition. — Appelons essentiellement uniformément tendue à droite (E. U. T. d.) une famille de lois (ou les lois de cette famille) qui, après une translation convenable, à droite, de chacune d'entre elles, devient U. T.

Proposition 8. — $\mathfrak{X}$ étant un groupe topologique, tout facteur à gauche ν d'une loi μ tendue suivant les (K_i, ε_i) est, après translation convenable (à droite) tendu suivant les (K_i, ε'_i), si $\sum \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon'_i} < 1$.

COROLLAIRE. — Tous les facteurs à gauche possibles (resp. à droite) d'une famille E. U. T. d., suivant les (K_i, ε_i) forment une telle famille (resp. E. U. T. g.), suivant les (K_i, ε'_i) après translation, si $\sum \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon'_i} < 1$. Aussi bien il suffit que $\sum \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon'_i}$ converge (supprimant un nombre fini d'indices).

Démonstration. — Nous empruntons l'argument à [*6*] (Th. 3-1). Soit $\mu = \nu * \rho$ et :

$$A_k = \{ x : \nu(K_i x^{-1}) > 1 - \varepsilon'_i \}.$$

On a :

$$1 - \varepsilon_i < \mu(K_i) = \int \nu(K_i x^{-1}) \rho(dx) \leqslant \rho(A_i) + (1 - \varepsilon'_i)\rho \complement A_i,$$

d'où :

$$\rho \complement A_i < \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon'_i}.$$

La condition sur les ε'_1 entraîne $\bigcap_1^\infty A_i \neq 0$, d'où un x tel que $\nu * \delta(x) = \nu_x$ vérifie :

$$\nu_x(K_i) > 1 - \varepsilon'_i.$$

Le corollaire s'ensuit ; noter que $\mu = \nu * \rho \Longrightarrow \mu_x = \nu * \rho_x$ donc que les facteurs à gauche d'une famille E. U. T. d. sont ceux d'une famille U. T. (ce sont les mêmes).

REMARQUE. — La compacité des K_i ne joue aucun rôle, donc ceci s'applique aux facteurs de lois voisines de $\delta(e)$:

Proposition 9. — $\mathfrak{X}$ étant un groupe topologique, si e a une base dénombrable de voisinages (ouverts) U_i et si la famille μ_α de lois converge vers $\delta(e)$ (suivant un certain filtre), alors toute famille ν_α de facteurs à gauche CV. vers $\delta(e)$ après translation convenable, à droite, de chaque ν_α et cette CV. est uniforme par rapport au choix des facteurs (et aux familles μ_α uniformément CV.).

Démonstration. — La CV. $\mu_\alpha \to \delta(e)$ équivaut en effet à $\mu_\alpha U \to 1$, dès que $\mathfrak{X}$ est C. R., car si $f \in \mathcal{C}$, nulle hors de U, sépare e de $\complement U$, on a $\mu_\alpha U \geqslant \mu_\alpha f$, donc la CV. entraîne $\mu_\alpha U \to 1$, tandis que la réciproque est un cas particulier de la proposition 1-*b*). Il suffit donc de remplacer les K_i ci-dessus par des U_i. ■

Définition. — $\mathfrak{X}$ étant un demi-groupe topologique, appelons fonction de concentration à droite Q^d, de la mesure μ, la fonction ($\geqslant 0$) définie sur $\mathcal{B}$ par :

$$Q^d(A) = \sup_x \mu(Ax). \tag{19}$$

Inégalités de Paul Lévy : $X_1, \ldots, X_I$ étant I v. a. indépendantes à valeurs dans le groupe topologique $\mathfrak{X}$ et Q(A) la fonction de concentration *à gauche* relative à Z_I (avec $Z_i = X_1 \dots X_i$), il existe des a_i convenables tels que pour tous A, A', A_0 de $\mathcal{B}$ tels que $A' \times A^{-1} \supset A_0$ et $A \ni e$, on ait :

$$(20) \qquad P\{\text{un } Z_i a_i \notin A_0\} \leqslant \frac{1+\varepsilon}{Q(A)} P\{Z_I \notin A'\}, \qquad \varepsilon > 0 \text{ arbitraire.}$$

Démonstration. — Soit, dans l'espace de probabilité $\mathfrak{X}^I$ de représentation de ces I v. a., les ensembles :

$$E_j = \{j \text{ est le plus petit } i \text{ pour lequel } Z_i a_i \notin A_0\},$$

les a_i étant donnés quelconques, sauf $a_I = 0$($A_0 \supset A'$ donc $Z_I \notin A_0$ implique $Z_I \notin A'$).

Considérons également les :

$$E'_j = \{a_j^{-1} X_{j+1} \dots X_I \in A\}\ ;$$

on a :

$$\sum_1^I E_j . E'_j \subset \{Z_I \notin A'\},$$

car :

$$Z_I \in A' \text{ et } E'_j \text{ impliquent } Z_j a'_j = Z_I . (a_j^{-1} X_{j+1} \dots X_I)^{-1} \in A' \times A^{-1} \subset A_0.$$

Or, d'après (10), la loi ν_j de $a_j^{-1} X_{j+1} \dots X_I$ étant un facteur à droite de la loi de Z_I et de toutes ses translatées à gauche, pour a_j convenable :

$$P(E'_j) \geqslant \frac{Q(A)}{1+\varepsilon} \qquad (\varepsilon \text{ arbitraire}),$$

donc également $\inf_j P(E'_j)$, donc :

$$P\left\{\sum_1^I E_j\right\} Q(A) \leqslant (1+\varepsilon) P\{Z_I \notin A'\}. \quad \blacksquare$$

On notera que les a_j sont, par exemple, des points tels que :

$$P\{X_{j+1} \dots X_I \in a_j A\}$$

approche sa borne supérieure; aussi bien on pourra faire $\varepsilon = 1$ et cette probabilité $\geqslant Q(A)/2$. On en déduit l'extension du théorème de Paul Lévy-Geffroy (cf. [*4 bis*]) :

Théorème 3. — Pour un produit dénombrable de v. a. X_i indépendantes prenant leurs valeurs dans un groupe topologique métrisable (: e a une base dénombrable de voisinages), la CV. en probabilité vers Z (de $Z_n = X_1 \dots X_n$) entraîne la CV. presque sûre.

Démonstration. — $\exists$ des entiers n_i tels que ((x, y) désignant une distance invariante à gauche) :

$$P\left\{(Z_n, Z) > \frac{1}{2^i}\right\} < \frac{1}{2^{i+1}}, \quad \text{pour tout } n \geqslant n_i.$$

En particulier on a, avec $Z'_i = Z_{n_i}$:

$$P\left\{(Z'_i, Z) \leqslant \frac{1}{2^i}, \quad \text{tout } i \geqslant j\right\} > 1 - \frac{1}{2^j} \Longrightarrow Z'_i \overset{\text{p.s.}}{\to} Z.$$

Mais les variables $\prod_{n_i+j+1}^{n_{i+1}} X_n$ sont uniformément (p. r. à i et j) voisines (en loi) de e dès que i est assez grand $\left(\text{distance} \leqslant \frac{1}{2^{i-1}} \text{ sauf probabilité} < \frac{1}{2^i}\right)$; on peut donc faire $a_j = 0$ en appliquant (20) à ces variables ($j = 1, 2, \ldots, n_{i+1} - n^i$) et en déduire que (en multipliant à gauche par Z_{n_i}) :

$$\sup_{n_i \leqslant n < n_{i+1}} (Z_{n_i}, Z_n) \overset{\text{p.s.}}{\to} 0,$$

donc également (Z_n, Z). ■

Propriétés de la fonction de concentration (à droite).

Proposition 10. — Sur tout espace mesuré $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)Q^d$ est comme μ une application de $\mathfrak{B}$ sur $[0, \infty]$ (si μ n'est pas bornée) qui

a) est invariante par toute translation à droite et sous-additive,

b) est croissante et continue pour les limites $\nearrow$:

$$A \subset A' \Longrightarrow Q(A) \leqslant Q(A') \qquad \text{et} \qquad A_n \nearrow A \Longrightarrow Q(A_n) \nearrow Q(A);$$

c) si μ est K-régulière, Q l'est également (cf. (3')). En effet, d'une part :

$$A' \cup A'' = A \Longrightarrow A'x \cup A''x = Ax \Longrightarrow \mu(Ax) \leqslant Q(A') + Q(A''), \quad \text{tout } x,$$

et :

$$A \subset A' \Longrightarrow Ax \subset A'x \Longrightarrow \mu(Ax) \leqslant Q(A');$$

d'autre part, on a donc $Q(A_n) \subset Q(A)$, mais $\exists$ x et n_0 tels que $\mu(Ax) \geqslant Q(A) - \varepsilon$ et $\mu(A_n x) \geqslant \mu(Ax) - \varepsilon$, pour tout $n \geqslant n_0$, d'où la conclusion *b)*.

De même, $\exists$ $K \subset Ax$ tel que $\mu(K) \geqslant \mu(Ax) - \varepsilon$ d'où $Q(A) = \sup_{K \subset A} Q(K)$.

Remarque. — La question se pose si dans certains cas on peut avoir :

$$K_i \searrow 0 \Longrightarrow Q(K_i) \searrow 0 \text{ (propriété des capacités).}$$

Proposition 11. — Si $\mathfrak{X}$ est un groupe topologique :

a) la convolution à droite ne peut que diminuer Q^d, sur tout $A \in \mathfrak{B}$;

b) si μ est régulière et tendue, les valeurs $Q(K)$ sont atteintes : pour chaque K, $\exists\, x$ avec $\mu(Kx) = Q(K)$;

c) si $\mu_\alpha \to \mu$, on a pour tout ouvert $\mathcal{O}$ si $\mathfrak{X}$ est parfaitement normal (ou normal et μ régulière), ou sinon pour tout $\mathcal{O}$ de la forme $\mathcal{O}(f, a) = \{ x : f < a \}$:

$$\text{(21)} \qquad \liminf Q_{\mu_\alpha}(\mathcal{O}) \geqslant Q_\mu(\mathcal{O});$$

d) si $\mathfrak{X}$ est polonais, la CV. $\mu_\alpha \to \mu$ entraîne celle des Q_α en ce sens que $Q_\alpha \to Q$ pour tout A tel que :

$$\text{(22)} \qquad Q(\operatorname{int} A) = Q(\overline{A}).$$

Démonstration :

a) On a :

$$\mu * \nu(Ax) = \int \mu(Axy^{-1})\nu(dy) \leqslant Q_\mu(A),$$

b) résulte de la démonstration du théorème 2.

c) On a, d'après (5), $\mu(\mathcal{O}x) \leqslant \liminf \mu_\alpha(\mathcal{O}x) \leqslant \liminf Q_\alpha(\mathcal{O})$.

d) Plus généralement, démontrons que la CV. de Q_α vers Q a lieu sur tout A tel que :

$$\text{(23)} \quad Q(A) = \inf Q(V(A)) = \sup Q(V^-(A)), \qquad \text{avec} \qquad \complement V^-(A) = V(\complement A),$$

lorsque la CV. au sens de Doss a lieu uniformément au sens suivant : à tous ε et entourage ouvert V donnés, correspond un ensemble du filtre pour lequel on a :

$$\text{(24')} \qquad \mu_\alpha F < \mu V(F) + \varepsilon$$

tout fermé F.

$$\text{(24'')} \qquad \mu F < \mu_\alpha V(F) + \varepsilon$$

Prenons V symétrique, $V^-(A)$ est l'ensemble des x tels que $Ux \subset A$, si V est défini par le voisinage de e, symétrique, U. Puisque $V(Fx) = \{ V(F) \} x$, (24′) et (24″) entraînent :

$$Q_\alpha(F) \leqslant Q(V(F)) + \varepsilon$$
$$Q(F) \leqslant Q_\alpha(V(F)) + \varepsilon,$$

et appliquant (24″) à $F' = V^-(F)$, $F = \overline{A}$, on obtient, vu $V(V^-F) \subset \operatorname{int} F$:

$$Q_\alpha \operatorname{int} F \geqslant Q_\alpha(V(F')) \geqslant Q(F') - \varepsilon \Longrightarrow Q_\alpha(A) \geqslant Q(V^-(A)) - \varepsilon;$$

mais $V(\bar{A}) = V(A)$ donc :

$$Q_\alpha(A) \leqslant Q_\alpha(F) \leqslant Q(V(A)) + \varepsilon \quad \blacksquare$$

Lorsque l'espace est normal et μ régulière, il suffit de (24') vu *c)*; enfin, lorsque $\mathfrak{X}$ est polonais la CV. en loi implique la CV. suivant la distance de Prohorov, donc (24') et (24'') ([10]) et la condition (23) équivaut à (22).

Proposition 12. — Si $\mathfrak{X}$ est un groupe topologique et si les Q_α^d d'une famille de lois μ_α sont U. T. ([11]), suivant les K_ε, alors les μ_α sont E. U. T. d. (la réciproque étant évidente). L'hypothèse signifie que pour tout α et pour un compact convenable $K_\varepsilon(\varepsilon > 0$ arbitraire), on a $Q_\alpha(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$.

Prenons K_0 tel que $Q(K_0) > \eta > 0$ et x_α^0 tel que $\mu_\alpha(K_0 x_\alpha^0) > \eta$; si $Q_\alpha(K_\varepsilon)$ est atteint par μ_α pour $K_\varepsilon x_\alpha$, lorsque $\varepsilon < \eta$, on a :

$$K_\varepsilon x_\alpha \cap K_0 x_\alpha^0 \neq 0,$$

d'où :

$$x_\alpha \in K_\varepsilon^{-1} K_0 x_\alpha^0 \implies K_\varepsilon x_\alpha \subset \{ K_\varepsilon K_\varepsilon^{-1} K_0 \} x_\alpha^0.$$

Les μ_α sont bien E. U. T. d. suivant les $K_\varepsilon K_\varepsilon^{-1} K_0$. $\blacksquare$

V. — CONVOLUTIONS DÉNOMBRABLES SUR $\mathfrak{X}$ GROUPE TOPOLOGIQUE

On peut étendre partiellement les résultats de Paul Lévy, concernant la fonction de concentration $Q_{n,n'}$ des lois :

(16) $\quad \nu_{n,n'} = \mu_{n+1} * \dots * \mu_{n'}, \qquad \mu_n$ donc $\nu_{n,n'}$ supposées tendues.

Puisque Q ne peut que diminuer par convolution à droite, posons (les Q désignant des concentrations à droite) :

$$Q_n(A) = \lim_{n' \nearrow \infty} \searrow Q_{n,n'}(A), \quad Q(A) = \sup_n Q_n(A), \quad \alpha = \sup_K Q(K).$$

Théorème 4. — Les lois μ_n étant supposées tendues, on a $\alpha = 0$ ou 1. Si $\alpha = 0$, $\nu_{n,n'}(K) \xrightarrow[n' \to \infty]{} 0$, pour tout K et tout n donnés, sans que cette

---

([10]) Car il y a une base dénombrable d'entourages, définis par une distance invariante.

([11]) C'est-à-dire uniformément voisines de 1, ici $Q_\alpha^d(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$.

divergence puisse être corrigée par une translation à droite de chaque mesure, et uniformément par rapport à ces translations.

Si $\alpha = 1$, les $Q_{n,n'}$ sont U. T. (les $Q_{n,n'}(K)$ sont uniformément voisines de 1, pour K convenable, en particulier il existe des x_n tels que les :

$$\mu_1 * \ldots * \mu_n * \delta(x_n) \text{ soient U. T. } (^{12})$$

(inversement, que les $Q_{n,n'}$ soient U. T. entraînent donc équivaut à $\alpha = 1$).

Démonstration :

A) Soit $\alpha < 1$, on peut choisir K, n et n' tels que (ε étant donné) :

$$Q^d_n(K) > \alpha - \varepsilon, \quad \alpha - \varepsilon < Q^d_{n,n''}(K) < \alpha + \varepsilon, \quad \text{pour tout } n'' \geqslant n' ;$$

puis choisir K′ et n'' tels que :

$$\mu_{n,n'}(K') > 1 - \varepsilon, \qquad Q^d_{n',n''}(K'^{-1}K) < \alpha + \varepsilon.$$

Avec les mêmes notations que plus haut, $Z_{n,n'}$ étant la v. a. associée à $\nu_{n,n'}$, posons :

$$E = \{Z_{n,n''} \in K,\ Z_{n,n'} \in K'\}, \qquad E \text{ implique } Z_{n',n''} \in K'^{-1}K;$$

d'où :

$$\begin{aligned} P(E) &= \int_E \nu_{n,n'}(dx)\nu_{n',n''}(dx') \\ &= \int_{K'^{-1}K} \nu_{n,n'}(Kx'^{-1})\nu_{n',n''}(dx') \leqslant Q^d_{n,n'}(K)\nu_{n',n''}(K'^{-1}K) < (\alpha + \varepsilon)^2. \end{aligned}$$

On en déduit, remplaçant K par Kx^{-1}, $\nu_{n,n'}(Kx^{-1}) < \varepsilon + (\alpha + \varepsilon)^2$, pour tout x, soit :

$$\alpha - \varepsilon < Q^d_{n,n''} < \varepsilon + (\alpha + \varepsilon)^2 \implies \alpha = 0 \text{ (ou 1)}. \quad \blacksquare$$

B) Les conclusions de l'énoncé sont évidentes si $\alpha = 0$. Si $\alpha = 1$, il existe K et n_0 tels que :

$$Q^d_{n_0}(K) > 1 - \varepsilon, \quad \textit{a fortiori} \quad Q^d_{n_0,n}(K) > 1 - \varepsilon ;$$

mais il existe K′ tel que : $\nu_{i,i'}(K') > 1 - \varepsilon$, tous $i, i' \leqslant n_0$, d'où :

$$Q_{n,n'}(K'K) > 1 - 2\varepsilon, \qquad \text{tous } n, n'.$$

(12) La démonstration de Kloss ([*8*], th. 12) concernant le cas où $\mathfrak{X}$ est compact, s'étend à ce cas, c'est-à-dire qu'un choix convenable des x_n rend la suite CV, au moins dans le cas métrisable.

La proposition 12 entraîne que les $\nu_{n,n'}$ (en particulier les $\nu_{1,n} = \nu_n$ de (15)) sont E. U. T. d.

REMARQUES. — 1° Le résultat $\alpha = 0$ ou 1 vaut aussi si on pose :

$$Q(A) = \limsup_{n\to\infty} Q_n(A).$$

Pour $\alpha = 1$ la conclusion que nous avons notée subsiste, mais non celle relative à $\alpha = 0$.

2° Dans le cas de la droite réelle, la conclusion, plus forte, de M. Paul Lévy : $\alpha = 1 \Longrightarrow Q(K) = 1$ pour tout K de diamètre > 0, revenait à démontrer la CV. en probabilité de $\nu_n * \delta(x_n)$. Cette conclusion se décompose en deux, la première toujours vraie, suivant la note relative au théorème 4 : la CV. en loi pour des x_n convenables, pour la deuxième, le raisonnement même du théorème 1 (les μ_n et $\nu_{nn'}$ étant remplacées par les $x_n^{-1}\mu_n x_n$ et $x_n^{-1}\nu_{nn'}x_{n'}$ (13)) U. T.) montre que, *lorsque $\mathfrak{X}$ n'admet pas de sous-groupe compact autre que* $\delta(e)$, le critère de Cauchy :

$$x_n^{-1}\nu_{nn'}x_{n'} \xrightarrow[n'\to\infty]{n} e$$

est vérifié.

En particulier, on a $Q_{n,n'}(U) \to 1$ pour tout voisinage U de e, $Q_{nn'}$ désignant maintenant la fonction de concentration bilatère $Q(U) = \sup_{x,x'} \mu(xUx')$; on retrouve la conclusion dite ci-dessus.

Lorsque $\mathfrak{X}$ est compact, ne subsiste évidemment que la seule possibilité $\alpha = 1$, avec le résultat de Kloss.

3° Un cas particulier est celui où $\nu_n = \mu^n$. Lorsque $\mathfrak{X}$ est L. K. (et μ tendue) on sait (cf. [5], p. 59 (14)) que les moyennes π_n (cf. (17)) CV. vaguement vers 0 ($\pi_n(K) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, tout K) ou que $\pi_n \to \pi$ idempotente (et tendue).

La première conclusion est plus faible que $\alpha = 0$, la deuxième, équivalente à « les π_n sont U. T. «, implique donc $\alpha = 1$ (qui équivaut à « les μ^n sont E. U. T. d. »). Cela résulte aussi de la proposition 7. Il y a lieu d'étudier ce qui peut se passer lorsque les μ^n sont E. U. T. d., mais que les μ^n ne sont pas U. T. L'extension de l'alternative ci-dessus, de Grenander, au cas où $\mathfrak{X}$ n'est pas L. K., paraît plausible.

---

(13) Écrivant μx la mesure $\mu * \delta(x)$.

(14) L'hypothèse que $\mathfrak{X}$ soit à base dénombrable de voisinages ne paraît pas nécessaire.

ABRÉVIATIONS

C. R. complètement régulier.
CV. converge, convergeant...
U. T. uniformément tendues.
E. U. T. d. essentiellement uniformément tendues à droite.
L. K. localement compact.
v. a. variables aléatoires.

NOTATIONS

F un fermé.
K un compact.
$\mathcal{O}$ ou G ou U un ouvert.
$\bar{A}$ fermeture de A.
int A intérieur de A.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. Böge, Zur Charakterisierung sukzessiv unendlich teibarer, Wahrscheinlichkeitsverteilungen.
[2] Bourbaki, *Topologie générale*, chapitre IX.
[3] G. Choquet et Deny, Sur l'équation de convolution $\rho = \mu * \sigma$. *C. R.*, t. 250, 1960, p. 799.
[4] Shafik Doss, Sur la convergence stochastique dans les espaces uniformes. *Annales E. N. S.*, t. LXXI, 1954, p. 87-110.
[4 bis] J. Geffroy, Quelques extensions du théorème de M. Paul Levy. *C. R.*, t. 249, 1959, p. 1180-1182.
[5] Ulf Grenander, *Probabilities on algebraic structures*, Stockholm, 1963.
[6] H. Heyer, Untersuchung zur Theorie der Warscheinlichkeitsverteilungen auf lokal compakten Gruppen, Dissertation, Hamburg, 1963.
[7] Kalliampur, The topology of weak convergence of probability measures. *J. Math. and Mechanics*, t. 10, 1961.
[8] B. M. Kloss, Probability distributions on compact topological groups. *Theory of Probability and its applications* (trad. du russe), t. IV, 1959, p. 237-270.
[8 bis] B. M. Kloss, Limiting distributions on a class of locally compact groups. *Id.*, t. VI, 1961, p. 361-389.
[9] L. Le Cam, *Convergence in distribution of stochastic processes*, Univ. of California Press, public., 1957.
[10] J. Neveu, *Bases mathématiques du Calcul des Probabilités*. Masson, 1964.
[11] Yu. V. Prohorov, Convergence of random processes and limit theorems in the probability theory. *Theory of probability and its applications*, t. 1, 1956, p. 157-222.
[12] A. Tortrat, Lois tendues, convergence en probabilité et équation $P * P' = P$. *C. R.*, 1964.

(Manuscrit reçu le 3 septembre 1964).