

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

MICHEL FLIESS

JEAN LÉVINE

PHILIPPE MARTIN

PIERRE ROUCHON

## **Deux applications de la géométrie locale des diffiétés**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 66, n° 3 (1997), p. 275-292

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1997\\_\\_66\\_3\\_275\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1997__66_3_275_0)

© Gauthier-Villars, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Deux applications de la géométrie locale des diffiétés (\*)

par

**Michel FLIESS**

Laboratoire des Signaux et Systèmes, C.N.R.S.-Supélec,  
Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette, France,  
E-mail : fliess@lss.supelec.fr

**Jean LÉVINE, Philippe MARTIN**

Centre Automatique et Systèmes,  
École Nationale Supérieure des Mines de Paris,  
35, rue Saint-Honoré, 77305 Fontainebleau, France,  
E-mail : levine@cas.ensmp.fr, martin@cas.ensmp.fr

et

**Pierre ROUCHON**

Centre Automatique et Systèmes,  
École Nationale Supérieure des Mines de Paris,  
60, boulevard Saint-Michel, 75272 Paris Cedex 06, France,  
E-mail : rouchon@cas.ensmp.fr

---

**ABSTRACT. – Two Applications of the Local Geometry of Diffieties.**  
The calculus on infinite jet spaces may be given a nice formalization with *diffieties*, which are infinite-dimensional smooth Fréchet differentiable manifolds, equipped with *Cartan distributions*, i.e., finite-dimensional involutive distributions. *Lie-Bäcklund morphisms* between diffieties are compatible with the Cartan distributions. We show that a local Lie-Bäcklund fiber bundle may be endowed with a *differential dimension*, which parallels the differential transcendence degree of a differential field extension. The analogue of a differential transcendence basis is

---

(\*) Travail soutenu en partie par le G.D.R. « Medicis » du C.N.R.S.

also introduced. Our first application leads to the number of degrees of freedom of nonholonomic constraints without having recourse to the virtual displacements of nonholonomic mechanics, the meaning of which is still being debated. The second application shows that the state-variable representation of a nonlinear control system may exhibit derivatives of the input variables.

*Key words:* Diffieties, differential fields, differential dimension, nonholonomic constraints, nonlinear control.

RÉSUMÉ. – Les *diffiétés*, qui sont des variétés différentiables lisses de Fréchet, de dimension infinie, dotées d'une *distribution de Cartan*, involutive et de dimension finie, permettent un excellent formalisme pour le calcul sur les jets infinis. Les *morphismes de Lie-Bäcklund* entre diffiétés sont compatibles avec les distributions de Cartan. Nous montrons qu'une fibration de Lie-Bäcklund peut être munie d'une dimension différentielle, analogue au degré de transcendance différentielle d'une extension de corps différentiels; nous donnons, aussi, le pendant d'une base de transcendance différentielle. Notre première application fournit le nombre de degrés de liberté d'une liaison non holonome, sans avoir recours aux déplacements virtuels de la mécanique non holonome, au sens toujours controversé. La seconde démontre que la représentation d'état en automatique non linéaire peut dépendre des dérivées de l'entrée.

---

## INTRODUCTION

Les *diffiétés*, terme dû à Vinogradov [51, 53, 54], sont des variétés différentiables lisses, de dimension au plus dénombrable, munies d'une *distribution de Cartan*, c'est-à-dire involutive et de dimension finie. Les morphismes, compatibles avec les distributions de Cartan, sont dits, selon Ibragimov [2, 33] et d'autres (cf. [57]), de *Lie-Bäcklund*. On obtient, ainsi, la *catégorie des équations différentielles*, qui fournit, comme le soulignent Vinogradov et son école (cf. [1, 39, 51, 52, 53, 54]), un excellent formalisme pour les jets d'ordre infini, précieux en physique (voir, par exemple, les livres récents suivants [2, 33, 52, 13, 40, 14] et leur bibliographie). Renvoyons à Olver [46] et à Tsujishita [49] pour d'autres rappels.

Contrairement à la dimension finie, les théorèmes de Frobenius et des fonctions implicites ne restent pas valides pour ces variétés de Fréchet. La structure locale des diffiétés est, donc, bien plus complexe. Nous montrons que cette géométrie présente des rapports étroits avec les *corps différentiels*. Rappelons, à ce propos, que les liens de l'*algèbre différentielle*, c'est-à-dire la théorie de Ritt [47] et Kolchin [37], avec les jets infinis ont été pressentis, depuis Manin [41], par divers auteurs (*voir*, aussi, [49])<sup>(1)</sup>. Sont obtenus les pendants de deux notions essentielles, celles de *dimension différentielle* et de *base de transcendance différentielle*, qui expriment l'*indépendance fonctionnelle différentielle*, c'est-à-dire l'indépendance fonctionnelle de fonctions et de leurs dérivées d'ordre quelconque. On y parvient grâce aux germes de 1-formes en un point, *modulo* les 1-formes plates, c'est-à-dire de développements de Taylor nulles en ce point : elles forment un module à gauche sur un anneau non commutatif d'opérateurs différentiels linéaires. Cette structure, proche des  $\mathcal{D}$ -modules en analyse algébrique (*cf.* [5]), joue le même rôle que les *différentielles de Kähler*, classiques en algèbre commutative et en géométrie algébrique (*cf.* [31]), et généralisées aux corps différentiels par Johnson [35]. Nous avons préféré raisonner sur une fibration de Lie-Bäcklund plutôt que sur une diffiété unique, point de vue relatif justifié par la seconde application. La *détermination* et la *sous-détermination* d'une équation différentielle, qui font encore problème (*cf.* [46]), traduisent la nullité ou la positivité de la dimension différentielle. Une fibration de Lie-Bäcklund *ordinaire* est déterminée si toute fibre est de dimension finie : cela traduit la finitude du nombre de conditions initiales nécessaires pour intégrer un système différentiel ordinaire.

Les applications reposent sur des équations différentielles, ordinaires, sous-déterminées, thème peu développé dans la littérature, à l'exception notable de Gromov [27], et qui motive cette étude. Nous démontrons, dans la première, que le nombre de degrés de liberté d'une liaison non holonome n'est autre que la dimension différentielle de la *diffiété de configuration*, donnée par le prolongement infini des équations différentielles de la liaison. Sont ainsi évités les déplacements virtuels de la mécanique non holonome, au sens toujours controversé (*voir*, en [44], un résumé des discussions autour de ce thème). A la différence de la littérature existante (*cf.* [3, 4, 30, 44, 55]), notre approche unifie les cas holonome ou non. La deuxième illustration intéresse l'*automatique non linéaire*, domaine de physique appliquée à

---

<sup>(1)</sup> Un lien d'une autre nature, qui généralise l'algèbre différentielle, a été proposé par Johnson [36].

l'origine du présent travail<sup>(2)</sup>. La donnée d'une dynamique comme une fibration de Lie-Bäcklund, ordinaire et déterminée, conduit à un état qui est une fibre : une représentation d'état peut, alors, renfermer des dérivées de l'entrée et les formules de passage dépendre de l'entrée. Ces phénomènes, en général ignorées aujourd'hui (cf. [34, 45]), ont déjà été induits grâce aux corps différentiels (cf. [15, 16, 17, 21]) et confirmés par une modélisation de grue [25]<sup>(3)</sup>.

Voici un bref aperçu du contenu. Nous commençons par des rappels sur les corps différentiels et les diffiétés. Le second paragraphe est consacré à la dimension différentielle des fibrations de Lie-Bäcklund de type fini. Les liaisons non holonomes et l'automatique non linéaire sont examinées dans les deux dernières parties.

Nous exploiterons ce qui précède pour les équations différentielles *implicites*, rencontrées avec des lagrangiens *dégénérés* (cf. [4, 32]), ou, dans un contexte différent, en analyse numérique (cf. [6, 29], voir [22] pour des résultats préliminaires). D'autres publications poursuivront le parallèle avec la *géométrie algébrique différentielle* (cf. [7, 8, 9, 38]), au rapport à l'algèbre différentielle semblable à celui de la géométrie algébrique et de l'algèbre commutative ; elles confirmeront la nécessité d'enrichir le calcul différentiel usuel, c'est-à-dire sur les variétés de dimension finie, grâce à un calcul différentiel *secondaire* selon Vinogradov et son école (voir, par exemple, [28, 54]).

## 1. PROLÉGOMÈNES

### 1.A Corps différentiels<sup>(4)</sup>

**1.A.1.** – Un  $\Delta$ -anneau  $R$  est un *anneau différentiel*, c'est-à-dire un anneau commutatif, muni d'un ensemble fini  $\Delta$  de dérivations de  $R$ , commutant

---

<sup>(2)</sup> Les jets et prolongements infinis permettent une approche élégante [19, 20, 24] de la *platitude*, définie précédemment grâce à l'algèbre différentielle [21] et fort utile en pratique, notamment en robotique mobile, où se rencontrent souvent des systèmes mécaniques non holonomes [21, 23].

<sup>(3)</sup> On trouvera, en [18], un autre exemple, issu de la platitude, des liens étroits entre géométrie différentielle de dimension infinie et algèbre différentielle.

<sup>(4)</sup> Voir Kolchin [37] et Johnson [35].

deux à deux. Il vient

$$\begin{aligned} \forall \delta \in \Delta, \forall a, b \in R, \quad & \delta(a + b) = \delta(a) + \delta(b), \\ & \delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b). \end{aligned}$$

**1.A.2.** – Un  $\Delta$ -corps est un *corps différentiel*, c'est-à-dire un  $\Delta$ -anneau qui est un corps. Tous les corps sont supposés, pour d'évidentes raisons de simplicité, de caractéristique nulle.

**1.A.3.** – Une  $\Delta$ -extension  $L/K$  consiste en la donnée de deux  $\Delta$ -corps  $L, K$  tels que  $K \subseteq L$ . L'action de  $\delta \in \Delta$  sur  $K$  est la restriction à  $K$  de celle sur  $L$ . Toute  $\Delta$ -extension sera, désormais, supposée de type fini, c'est-à-dire finiment engendrée.

**1.A.4.** – Un élément  $a \in L$  est dit  $\Delta$ -algébrique sur  $K$  si, et seulement si, il satisfait une équation différentielle algébrique, à coefficients dans  $K$ . Si  $\Theta$  désigne le monoïde commutatif engendré par  $\Delta$ , c'est dire que l'ensemble  $\{\theta a \mid \theta \in \Theta\}$  est algébriquement dépendant sur  $K$ .

**1.A.5.** – L'extension  $L/K$  est dite  $\Delta$ -algébrique si, et seulement si, tout élément de  $L$  est  $\Delta$ -algébrique sur  $K$ . Sinon, elle est dite  $\Delta$ -transcendante.

**1.A.6.** – Un ensemble  $\{\xi_i \mid i \in I\}$  d'éléments de  $L$  est dit  $\Delta$ -algébriquement indépendant sur  $K$  si, et seulement si, l'ensemble des dérivées  $\{\theta \xi_i \mid i \in I, \theta \in \Theta\}$  est algébriquement indépendant sur  $K$ . Un ensemble  $\Delta$ -algébriquement indépendant, qui est maximal par rapport à l'inclusion, est une  $\Delta$ -base, ou une *base de transcendance différentielle*, de  $L/K$ . Deux telles bases ont même cardinalité qui est le  $\Delta$ -degré de transcendance, ou le *degré de transcendance différentielle*, de  $L/K$ ; il est noté  $\Delta\text{-d}^0\text{tr } L/K$ . Il est clair que  $\Delta\text{-d}^0\text{tr } L/K = 0$  si, et seulement si,  $L/K$  est  $\Delta$ -algébrique.

**1.A.7.** – Soit  $K \subseteq L \subseteq M$  une tour de  $\Delta$ -extensions. Il vient

$$\Delta\text{-d}^0\text{tr } M/K = \Delta\text{-d}^0\text{tr } M/L + \Delta\text{-d}^0\text{tr } L/K$$

**1.A.8.** –  $k$  étant un  $\Delta$ -corps, notons  $k[\Delta]$  l'anneau, en général non commutatif, des opérateurs différentiels linéaires de la forme  $\sum_{\text{finie}} a_\alpha \theta_\alpha$ ,  $a_\alpha \in k$ ,  $\theta_\alpha \in \Theta$ . Tout  $k[\Delta]$ -module (à gauche)  $V$  est appelé  $\Delta$ - $k$ -espace vectoriel, ou *espace vectoriel différentiel*. Un ensemble  $\{v_i \mid i \in I\}$  est dit  $\Delta$ - $k$ -linéairement indépendant si, et seulement si, l'ensemble  $\{\theta v_i \mid i \in I, \theta \in \Theta\}$  est linéairement indépendant sur  $k$ . Un tel ensemble indépendant, qui est maximal pour la relation d'inclusion, est appelé  $\Delta$ -base, ou *base différentielle*, de  $V$ . Deux telles bases ont même cardinalité,

qui est la  $\Delta$ -dimension, ou la dimension différentielle de  $V$ ; elle est notée  $\Delta\text{-dim } V$ . Cette dimension n'est autre que le rang (cf. [10]) de  $V$ , considéré comme  $k[\Delta]$ -module à gauche.

**1.A.9.** – Associons à la  $\Delta$ -extension  $L/K$  le  $\Delta$ - $L$ -module  $\Omega_{L/K}$ , engendré par les différentielles (de Kähler)  $d_{L/K}a$ ,  $a \in L$ . L'application  $d_{L/K} : L \rightarrow \Omega_{L/K}$  vérifie les propriétés suivantes

$$\forall a, b \in L, d_{L/K}(a + b) = d_{L/K}(a) + d_{L/K}(b), d_{L/K}(ab) = d_{L/K}(a)b + ad_{L/K}(b),$$

$$\forall \theta \in \Theta, d_{L/K}(\theta a) = \theta d_{L/K}(a),$$

$$\forall c \in K, d_{L/K}(c) = 0.$$

**1.A.10.** – L'ensemble  $\{\xi_i \mid i \in I\}$  d'éléments de  $L$  est  $\Delta$ -algébriquement indépendant sur  $K$  si, et seulement si, l'ensemble  $\{d_{L/K}\xi_i \mid i \in I\}$  est  $\Delta$ - $L$ -linéairement indépendant. Il en découle les deux conséquences suivantes :

i) L'ensemble  $\{\xi_i\}$  est une  $\Delta$ -base de transcendance de  $L/K$  si, et seulement si, l'ensemble  $\{d_{L/K}\xi_i\}$  est une  $\Delta$ -base de  $\Omega_{L/K}$ .

ii)  $\Delta\text{-d}^0\text{tr } L/K = \Delta\text{-dim } \Omega_{L/K}$ .

**1.A.11.** – Un  $\Delta$ -corps est dit ordinaire (resp. partiel) si, et seulement si,  $\text{card } \Delta = 1$  (resp.  $\text{card } \Delta \neq 1$ ). Pour une  $\Delta$ -extension ordinaire  $L/K$  de type fini, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

i)  $L/K$  est  $\Delta$ -algébrique ;

ii) le degré de transcendance (usuel) de  $L/K$  est fini.

## 1.B Diffiétés<sup>(5)</sup>

**1.B.1.** – Soit  $I$  un ensemble dénombrable, fini ou non, de cardinalité  $\ell$ . On note  $\mathbb{R}^\ell$  l'ensemble des applications  $I \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $\mathbb{R}$  est la droite réelle, muni de la topologie produit, qui est de Fréchet. Pour tout ouvert  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^\ell$ , on note  $C^\infty(\mathcal{O})$  l'ensemble des fonctions  $\mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ , qui dépendent d'un nombre fini de variables et sont  $C^\infty$ .

**1.B.2.** – Une  $\mathbb{R}^\ell$ -variété  $C^\infty$  se définit, comme en dimension finie, par un atlas  $C^\infty$  de cartes à valeurs dans  $\mathbb{R}^\ell$ . Les notions de fonctions, de champs de vecteurs, de formes différentielles  $C^\infty$ , sur un ouvert sont évidentes. Si  $\{x^i \mid i \in I\}$  désigne des coordonnées locales, rappelons, seulement, qu'un champ de vecteurs possède une expression en général infinie  $\sum_{i \in I} \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , alors qu'une forme différentielle est, toujours, finie

<sup>(5)</sup> Le cadre et la terminologie de cette géométrie différentielle de dimension infinie sont encore loin d'être fixés. Voir Zharinov [57] et, aussi, Tsujishita [50].

$\sum_{finie} \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$  (les  $\zeta^i$  et  $\omega_{i_1 \dots i_p}$  sont des fonctions  $C^\infty$  au sens précédent).

**1.B.3.** – La notion de morphisme (local)  $C^\infty$  entre deux  $\mathbb{R}^\ell$  et  $\mathbb{R}^{\ell'}$ -variétés  $C^\infty$ , où  $\ell$  et  $\ell'$  ne sont pas nécessairement égaux, est évidente. Celle d'isomorphisme (local)  $C^\infty$  entre deux  $\mathbb{R}^\ell$ -variétés l'est aussi. Il n'en va pas de même pour les notions de submersion et d'immersion (locales) : la non-validité du théorème des fonctions implicites ne fournit plus l'équivalence entre les caractérisations usuelles. Une *submersion* (resp. *immersion*) (locale)  $C^\infty$  est un morphisme  $C^\infty$  tel qu'il existe des coordonnées locales o il est une projection (resp. injection).

**1.B.4.** – Une *diffiété*  $\mathcal{V}$  est une  $\mathbb{R}^\ell$ -variété  $C^\infty$ , munie d'une *distribution de Cartan*  $CT\mathcal{V}$ , c'est-à-dire involutive et de dimension finie  $n$ , qui est la *dimension de Cartan* de  $\mathcal{V}$ . Toute section (locale) de  $CT\mathcal{V}$  est un *champ de Cartan* (local) de  $\mathcal{V}$ . La diffiété est dite *ordinaire* (resp. *partielle*) si, et seulement si,  $n = 1$  (resp.  $n > 1$ ). Une *équation différentielle* est une diffiété.

**1.B.5.** – Un morphisme (local)  $C^\infty$  entre diffiétés est dit de *Lie-Bäcklund* <sup>(6)</sup> si, et seulement si, il est compatible avec les distributions de Cartan : l'application linéaire tangente, associée en un point, envoie tout vecteur de la première distribution de Cartan dans la seconde.

**1.B.6.** – Des coordonnées locales  $\{t^1, \dots, t^n, w^j \mid j \in J\}$  de  $\mathcal{V}$  sont dites *adaptées* si, et seulement si, il existe un repère local  $\Delta$ , formé de  $n$  champs de Cartan locaux  $\partial_1, \dots, \partial_n$ , de  $CT\mathcal{V}$ , tel que

$$\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial t^\nu} + \sum_{j \in J} \eta_\nu^j \frac{\partial}{\partial w^j} \quad \nu = 1, \dots, n, \tag{1}$$

où les  $\eta_\nu^j$  sont des fonctions  $C^\infty$ . Alors, les crochets de Lie  $[\partial_\nu, \partial_{\nu'}]$ ,  $\nu, \nu' = 1, \dots, n$ , sont nuls. L'ensemble des fonctions  $C^\infty$  sur l'ouvert correspondant forme un  $\Delta$ -anneau, où  $\Delta = \{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ . L'existence de ces coordonnées se démontre aisément.

**1.B.7.** – *Exemple.* Un rôle fondamental est joué par la diffiété de coordonnées globales adaptées  $\{t^\alpha, w_{i_1 \dots i_n}^\beta \mid \alpha = 1, \dots, n; \beta = 1, \dots, m; i_1, \dots, i_n \geq 0\}$  et de champs de Cartan

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial t^\alpha} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{i_\alpha \geq 0} w_{i_1, \dots, i_\alpha+1, \dots, i_n}^\beta \frac{\partial}{\partial w_{i_1, \dots, i_\alpha, \dots, i_n}^\beta}$$

<sup>(6)</sup> Rappelons que cette terminologie, due à Ibragimov [2, 33] (voir, aussi, [57]), est très contestée par Olver [46]. Vinogradov et son école [1, 39, 51, 52, 53, 54] parlent de *C-morphismes*.

Elle est notée  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_m^\infty$  et appelée, par analogie avec la géométrie algébrique différentielle (cf. [37, 38]), *espace affine différentiel*, ou, encore, *diffiéété triviale*, car elle correspond à l'équation triviale  $0 = 0$ .

## 2. DIMENSION DIFFÉRENTIELLE D'UNE FIBRATION DE LIE-BÄCKLUND

**2.1.** – Une *fibration de Lie-Bäcklund* (locale) (comparer avec [56, 57]) est un triplet  $\sigma = (\mathcal{X}, \mathcal{B}, \pi)$ , où  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$  est une submersion de Lie-Bäcklund (locale) entre deux diffiéétés. On appelle  $\mathcal{X}$  l'*espace* et  $\mathcal{B}$  la *base* de  $\sigma$ . Pour tout  $b \in \mathcal{B}$ ,  $\pi^{-1}(b)$  est une *fibres*. La fibration  $\sigma$  est dite *absolue* si  $\mathcal{B}$  est réduite à un point. Elle est dite *ordinaire*, ou *partielle*, si, et seulement si,  $\mathcal{X}$  l'est.

**2.2.** – Ce qui suit est l'analogie des différentielles de Kähler de 1.A.9.

DÉFINITION. – *Le fibré vectoriel quotient  $T^*\sigma = T^*\mathcal{X}/\pi^*(T^*\mathcal{B})$  est appelé fibré cotangent vertical de la fibration de Lie-Bäcklund  $\sigma$ . Une section (locale)  $C^\infty$  de  $T^*\sigma$  est une 1-forme verticale (locale) de  $\sigma$ .*

**2.3.** – D'après [57], il existe des coordonnées locales adaptées  $\{t^1, \dots, t^n, x^i, y^j \mid i \in I, j \in J\}$  dans un voisinage ouvert  $\mathcal{O}$  de  $x \in \mathcal{X}$ , telles que  $\{t^1, \dots, t^{n'}, y^j \mid j \in J\}$  soient des coordonnées locales adaptées de  $\mathcal{B}$  dans un voisinage ouvert  $\mathcal{O}'$  de  $\pi(x)$ , tel que  $\pi(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{O}'$  ( $n', n' \leq n$ , est la dimension de Cartan de  $\mathcal{B}$ ). Il existe un repère local  $\Delta'$ , formé de  $n'$  champs de Cartan locaux  $\partial'_1, \dots, \partial'_{n'}$ , de  $CT\mathcal{O}'$ , tel que

$$\partial'_{\nu'} = \frac{\partial}{\partial t^{\nu'}} + \sum_{j \in J} \eta_{\nu'}^j \frac{\partial}{\partial y^j} \quad \nu' = 1, \dots, n',$$

où les  $\eta_{\nu'}^i$  sont des fonctions  $C^\infty$  dépendant des coordonnées  $\{t^1, \dots, t^{n'}, y^j \mid j \in J\}$ , et un repère local  $\Delta$  de  $CT\mathcal{O}$ , formé de  $n$  champs de Cartan locaux  $\partial_1, \dots, \partial_n$ , tels que

$$\begin{aligned} \partial_{\nu'} &= \partial'_{\nu'} + \sum_{i \in I} \xi_{\nu'}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\ \partial_\mu &= \frac{\partial}{\partial t^\mu} + \sum_{i \in I} \xi_\mu^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \mu = n' + 1, \dots, n \end{aligned}$$

où les  $\xi_{\nu'}^i$ , et  $\xi_\mu^i$  sont des fonctions  $C^\infty$  de  $\{t^1, \dots, t^n, x^i, y^j \mid i \in I, j \in J\}$ . Pour tout  $\nu' = 1, \dots, n'$ ,  $\partial_{\nu'}$  et  $\partial'_{\nu'}$  sont conjugués par  $\pi$ . Soit  $\Theta$  le monoïde commutatif engendré par  $\Delta$ .

Les 1-formes verticales de  $T^*\sigma|_{\mathcal{O}}$ , où  $\sigma|_{\mathcal{O}}$  est la fibration de Lie-Bäcklund locale  $(\mathcal{O}, B, \pi|_{\mathcal{O}})$ , sont engendrées par  $dt^{n'+1}, \dots, dt^n$  et les  $dx^i$ .

**2.4.** – Un élément de l'ensemble  $C^\infty(\mathcal{X})[CT\mathcal{X}]$  est une somme finie  $\sum_{finie} a_{i_1 \dots i_\alpha} L_{X_{i_\alpha}} \dots L_{X_{i_1}}$ , où  $a_{i_1 \dots i_\alpha} \in C^\infty(\mathcal{X})$ ,  $X_{i_1}, \dots, X_{i_\alpha} \in CT\mathcal{X}$ . Avec les coordonnées locales adaptées de 2.3, l'expression précédente prend la forme  $\sum_{finie} b_{j_1 \dots j_n} \partial_1^{\epsilon_1} \dots \partial_n^{\epsilon_n}$ , où  $b_{j_1 \dots j_n} \in C^\infty(\mathcal{O})$ . Il vient :

**PROPRIÉTÉ.** – *Il existe une structure canonique de  $C^\infty(\mathcal{X})[CT\mathcal{X}]$ -module à gauche pour les sections de  $T^*\sigma$ ; les sections de  $T^*\sigma|_{\mathcal{O}}$  forment un  $C^\infty(\mathcal{O})[\Delta]$ -module à gauche.*

Nous écrirons, par léger abus de notations, que  $T^*\sigma$  et  $T^*\sigma|_{\mathcal{O}}$  sont des modules.

**2.5.** – On est conduit à la définition suivante (comparer avec [50]) :

**DÉFINITION.** – *La fibration de Lie-Bäcklund  $\sigma$  est dite localement de type fini en  $x \in X$  si, et seulement si, le module  $T^*\sigma|_{\mathcal{O}}$  est de type fini. La fibration  $\sigma$  est dite localement de type fini si, et seulement si, elle l'est en tout point. La diffiété  $\mathcal{X}$  est dite localement de type fini en un point (resp. localement de type fini) si, et seulement si, la fibration de Lie-Bäcklund absolue associée l'est.*

**Remarque.** – Les fibrations de Lie-Bäcklund et les diffiétés seront, désormais, supposées localement de type fini. La plupart des applications, dans cet article notamment, satisfont cette hypothèse simplificatrice.

**Remarque.** – Cette définition et les résultats qui suivent sont, clairement, indépendants du choix des coordonnées adaptées et, donc, de  $\Delta$ .

**2.6.** – Pour  $x \in \mathcal{X}$ , on note  $C_x^\infty$  (resp.  $CT_x, T_x^*\sigma, \Delta_x$ ) l'ensemble des germes en  $x$  de fonctions  $C^\infty$  (resp. de champs de Cartan, de 1-formes verticales, d'éléments de  $\Delta$ ). Il découle, de ce qui précède, que  $T_x^*\sigma$  ou, plus précisément, les germes de sections de  $T_x^*\sigma$  possèdent une structure canonique de module à gauche par rapport à l'anneau  $C_x^\infty[\Delta]$ .

**2.7.** – On note  $\hat{C}_x^\infty$  (resp.  $\widehat{CT}_x, \hat{\Delta}_x, \hat{T}_x^*\sigma$ ) le quotient de  $C_x^\infty$  (resp.  $CT_x(\mathcal{X}), \Delta_x, T_x^*\sigma$ ) par les éléments *plats* (cf. [48]), c'est-à-dire de développements de Taylor nuls. Alors,  $\hat{T}_x^*\sigma$  ou, plus précisément, les sections formelles de  $\hat{T}_x^*\sigma$  possèdent une structure canonique de module à gauche par rapport à l'anneau  $\hat{C}_x^\infty[\hat{\Delta}_x]$ .

**2.8.** – En vertu d'un théorème fameux dû à É. Borel (cf. [48]),  $\hat{C}_x^\infty$  est un anneau commutatif et intègre de séries formelles, dont chacune ne compte qu'un nombre fini d'indéterminées. Soit  $\hat{Q}_x^\infty$  le corps de fractions de cet

anneau : c'est un  $\hat{\Delta}_x$ -corps. Alors, le produit tensoriel  $\hat{Q}_x^\infty \otimes_{\hat{C}_x^\infty} \hat{T}_x^* \sigma$  possède une structure canonique de  $\hat{\Delta}_x$ - $\hat{Q}_x^\infty$ -espace vectoriel. On est conduit à la

**DÉFINITION.** – La dimension différentielle de la fibration de Lie-Bäcklund  $\sigma$  en  $x \in \mathcal{X}$  est la  $\hat{\Delta}_x$ -dimension de  $\hat{Q}_x^\infty \otimes_{\hat{C}_x^\infty} \hat{T}_x^* \sigma$ ; elle est notée  $\dim^{diff}_x(\sigma)$ . La dimension différentielle en  $x \in \mathcal{X}$  de la diffiété  $\mathcal{X}$  est la dimension en  $x$  de la fibration de Lie-Bäcklund absolue associée; elle est notée  $\dim^{diff}_x(\mathcal{X})$ . La dimension différentielle de  $\sigma$  (resp.  $\mathcal{X}$ ), notée  $\dim^{diff}(\sigma)$  (resp.  $\dim^{diff}(\mathcal{X})$ ), est la borne supérieure des  $\dim^{diff}_x(\sigma)$  (resp.  $\dim^{diff}_x(\mathcal{X})$ ), pour  $x \in \mathcal{X}$ . Une fibration de Lie-Bäcklund ou une diffiété sont dites, par abus de langage, de dimension différentielle  $m$  si, et seulement si, elles le sont en tout point.

**2.9.** – Exemple. L'espace affine différentiel  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_m^\infty$  est de dimension différentielle  $m$ .

**2.10.** – Ce qui précède conduit à la définition suivante qu'il convient de comparer avec [39, 46]:

**DÉFINITION.** – Une fibration de Lie-Bäcklund ou une diffiété sont dites déterminées si, et seulement si, leurs dimensions différentielles sont nulles. Sinon, elles sont dites sous-déterminées.

**2.11.** – Remarque. La sur-détermination d'un système d'équations aux dérivées partielles est de nature différente, car faisant appel à la notion de compatibilité, exprimée par la cohomologie de Spencer (cf. [1]).

**2.12.** – Deux fibrations de Lie-Bäcklund  $\sigma_{12} = (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \pi_{12})$  et  $\sigma_{23} = (\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \pi_{23})$  sont dites emboîtées si, et seulement si, le morphisme composé  $\sigma_{13} = \sigma_{23} \sigma_{12}$  est une submersion de Lie-Bäcklund. Ce qui suit est l'analogue de 1.A.7.

**PROPOSITION.** – Si les fibrations de Lie-Bäcklund  $\sigma_{12}$  et  $\sigma_{23}$  sont emboîtées, il vient, pour tout  $x \in \mathcal{X}_1$ ,

$$\dim^{diff}_x(\sigma_{13}) = \dim^{diff}_x(\sigma_{12}) + \dim^{diff}_{\pi_{12}(x)}(\sigma_{23})$$

Si  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{23}$ ,  $\sigma_{13}$  sont, respectivement, de dimension différentielle  $m_{12}, m_{23}, m_{13}$ , alors  $m_{13} = m_{12} + m_{23}$ .

**Démonstration.** –  $\sigma_{12}$  induit une injection  $\hat{\pi}_{12}^*$  de  $\hat{T}^* \sigma_{23}$ , telle que  $\hat{\pi}_{12}^* \hat{T}^* \sigma_{23}$  soit un sous-module de  $\hat{T}^* \sigma_{13}$ . Alors,  $\hat{T}_x^* \sigma_{12} = \hat{T}_x^* \sigma_{13} / \hat{T}_{\pi_{12}x}^* \sigma_{23}$ . D'où le résultat.

**2.13.** – Voici l'analogue de 1.A.11.

**THÉORÈME.** – Une fibration de Lie-Bäcklund ordinaire est déterminée si, et seulement si, la dimension de toute fibre est finie. Une diffiété ordinaire est déterminée si, et seulement si, elle est de dimension finie.

*Démonstration.* – La dimension de la fibre en  $x \in \mathcal{X}$  est égale à celle de  $\hat{Q}_x^\infty \otimes_{\hat{C}_x^\infty} \hat{T}_x^* \sigma$ , en tant qu'espace vectoriel sur  $\hat{Q}_x^\infty$ . C'est, aussi, un module à gauche sur l'anneau  $\hat{Q}_x^\infty \otimes_{\hat{C}_x^\infty} \hat{C}_x^\infty[\hat{\Delta}_x]$ , qui est *principal* (cf. [10]). La condition de type fini implique (cf. [10]) que l'espace vectoriel est de dimension finie si, et seulement si, le module est de *torsion*. Cette dernière condition équivaut à la nullité du rang (cf. [10]) et, donc, de la dimension différentielle de  $\hat{Q}_x^\infty \otimes_{\hat{C}_x^\infty} \hat{T}_x^* \sigma$ .

**2.14.** – Soit  $d_\sigma : C^\infty(\mathcal{X}) \rightarrow T^* \sigma$  la *différentielle verticale* qui, à toute fonction de  $C^\infty(\mathcal{X})$ , associe sa 1-forme verticale. Supposons que  $\sigma$  soit de dimension différentielle  $m$ . Il existe  $m$  fonctions  $w^1, \dots, w^m$ , de  $C^\infty(\mathcal{O})$ , telles que, pour tout  $x$  dans un sous-ensemble ouvert de  $\mathcal{O}$ , les résidus de  $d_\sigma w^1, \dots, d_\sigma w^m$  dans  $\hat{Q}_x^\infty \otimes_{\hat{C}_x^\infty} \hat{T}_x^* \sigma$  en forment une  $\hat{\Delta}_x$ -base. On en déduit, en vertu des propriétés de dépendance fonctionnelle (cf. [46]), des coordonnées locales  $\{t^1, \dots, t^n, \xi^k, \theta w^\alpha, y^j \mid \theta \in \Theta; \alpha = 1, \dots, m, j \in J, k \in K\}$  et, donc, une fibration de Lie-Bäcklund locale  $\tau = (\mathcal{X}, \mathcal{T}, \lambda)$ , où  $\lambda$  est la projection  $(t^1, \dots, t^n, \xi^k, \theta w^\alpha, y^j) \mapsto (t^1, \dots, t^n, \theta w^\alpha, y^j)$ . Il existe une fibration de Lie-Bäcklund locale  $v = (\mathcal{T}, \mathcal{B}, \mu)$ , emboîtée avec  $\tau$ , telle que  $\pi = \mu \lambda$ , où  $\mu$  est la projection  $(t^1, \dots, t^n, \theta w^\alpha, y^j) \mapsto (t^1, \dots, t^n, y^j)$ . Alors,  $\dim^{diff}(\tau) = 0$ ,  $\dim^{diff}(v) = m$ . Comme en 1.A.8, il vient :

**THÉORÈME ET DÉFINITION.** – Soit une fibration de Lie-Bäcklund (locale)  $\sigma = (\mathcal{X}, \mathcal{B}, \pi)$ , de dimension différentielle  $m$ . Il existe deux fibrations de Lie-Bäcklund (locales) emboîtées,  $\tau = (\mathcal{X}, \mathcal{T}, \lambda)$ ,  $v = (\mathcal{T}, \mathcal{B}, \mu)$ , vérifiant  $\pi = \mu \lambda$ ,  $\dim^{diff}(\tau) = 0$ ,  $\dim^{diff}(v) = m$ . La fibration  $v$  est appelée *base différentielle (locale) de  $\sigma$* . Soit  $\mathcal{X}$  une diffiété de dimension différentielle  $m$ . Il existe une fibration de Lie-Bäcklund (locale) déterminée  $\tau = (\mathcal{X}, \mathcal{T}, \lambda)$ , où  $\mathcal{T}$  est un ouvert d'un espace affine différentiel, de dimension différentielle  $m$ ;  $\mathcal{T}$  est une base différentielle (locale) de  $\mathcal{X}$ .

**2.15.** – De 2.13 et 2.14, il découle :

**PROPOSITION.** – Soit une fibration de Lie-Bäcklund ordinaire (locale)  $\sigma = (\mathcal{X}, \mathcal{B}, \pi)$ , de dimension différentielle  $m$ . Il existe deux fibrations de Lie-Bäcklund ordinaires (locales) emboîtées,  $\tau = (\mathcal{X}, \mathcal{T}, \lambda)$ ,  $v = (\mathcal{T}, \mathcal{B}, \mu)$ , telles que  $v$  soit une base différentielle (locale) de  $\sigma$  et  $\tau$  déterminée, c'est-à-dire à fibres de dimension finie. Soit  $\mathcal{X}$  une diffiété ordinaire, de dimension différentielle  $m$ . Il existe une fibration de Lie-Bäcklund ordinaire (locale) déterminée  $\tau = (\mathcal{X}, \mathcal{T}, \lambda)$ , où  $\mathcal{T}$ , qui est un ouvert d'un espace

affine différentiel ordinaire, de dimension différentielle  $m$ , est une base différentielle (locale).

### 3. DEGRÉS DE LIBERTÉ D'UNE LIAISON NON HOLONOME

**3.1.** – Une *liaison non holonome* (cf. [3, 4, 30, 44, 55]) est définie par un ensemble de  $n$  inconnues  $x = (x^1, \dots, x^n)$ , reliées par  $n - m$  équations différentielles ordinaires,  $m \leq n$ , de la forme

$$A^j = \sum_{i=1}^n a_i^j(t, x) \frac{dx^i}{dt} + b^j(t, x) = 0, \quad j = 1, \dots, n - m \quad (2)$$

où  $t$  désigne le temps, et où les fonctions  $a_i^j$  et  $b^j$  sont  $C^\infty$  en leurs arguments. On suppose la matrice  $(a_i^j)_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n-m}$  de rang  $n - m$ . La considération de *déplacements virtuels*  $\underline{\delta}x^i$  satisfaisant

$$\sum_{i=1}^n a_i^j(t, x) \underline{\delta}x^i = 0, \quad j = 1, \dots, n - m,$$

permet de définir le *nombre de degrés de liberté* comme égal à  $m$ . Ces déplacements ont suscité, comme déjà écrit dans l'introduction, bien des discussions, résumées et analysées en [44].

**3.2.** – *Remarque.* Des liaisons non holonomes avec des  $\frac{dx^i}{dt}$  apparaissant non linéairement ou/et avec des dérivées d'ordre supérieur des  $x^i$  ne semblent pas devoir se rencontrer en pratique (cf. [44]).

**3.3.** – Introduisons l'espace affine différentiel ordinaire  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_n^\infty$  de coordonnées globales  $\{t, x_{\nu_i}^i \mid i = 1, \dots, n; \nu_i \geq 0\}$ , à la distribution de Cartan engendrée par le champ de Cartan

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \sum_{\nu_i \geq 0} x_{\nu_i+1}^i \frac{\partial}{\partial x_{\nu_i}^i}$$

Soit  $\mathcal{I}$  l'*idéal différentiel* de  $C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_n^\infty)$  engendré par  $A_1, \dots, A_{n-m}$ , c'est-à-dire l'idéal engendré par  $A_1, \dots, A_{n-m}$ , clos pour la dérivation  $\frac{d}{dt}$ . Faisons l'hypothèse que l'ensemble des zéros de  $\mathcal{I}$  soit une sous-diffiété de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_m^\infty$  : c'est dire qu'il existe une diffiété ordinaire  $\mathcal{N}$  et une immersion

de Lie-Bäcklund  $\mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_n^\infty$  <sup>(7)</sup>. On appelle  $\mathcal{N}$  la *diffiété de configuration* associée à la liaison non holonome (2).

**3.4 THÉORÈME.** – *La dimension différentielle de la diffiété de configuration est égale au nombre de degrés de liberté de la liaison non holonome.*

*Démonstration.* – Il est loisible de supposer, après une éventuelle renumérotation de  $x^1, \dots, x^n$ , que la matrice carrée  $(a_i^j)_{i,j=1,\dots,n-m}$  est inversible. Il vient

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{n-m} \end{pmatrix} = \Phi(t, x) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x^{n-m+1} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} + \Psi(t, x)$$

où  $\Phi$  et  $\Psi$  sont des matrices de tailles appropriées, à coefficients  $C^\infty$ . On en déduit une fibration de Lie-Bäcklund  $\zeta = (\mathcal{N}, \mathbb{R} \times \mathbb{R}_m^\infty, \epsilon)$ , où

•  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_m^\infty$  est l'espace affine différentiel de coordonnées globales  $\{t, x_{\nu_i}^{n-m+i} \mid i = 1, \dots, m; \nu_i \geq 0\}$  et de champ de Cartan

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^m \sum_{\nu_i \geq 0} x_{\nu_i+1}^{n-m+i} \frac{\partial}{\partial x_{\nu_i}^{n-m+i}}$$

•  $\mathcal{N}$  a pour coordonnées globales  $\{t, x^1, \dots, x^{n-m}, x_{\nu_i}^{n-m+i}\}$ , où  $x_0^{n-m+i} = x^{n-m+i}$ .

•  $\epsilon$  est la projection  $(t, x^1, \dots, x^n, x_{\nu_i}^{n-m+i}) \mapsto (t, x_{\nu_i}^{n-m+i})$ , où  $\nu_i \geq 1$ .

La conclusion découle de 2.9 et 2.15.

**3.5.** – Il convient, pour terminer, de vérifier que l'on retrouve ainsi le nombre de degrés de liberté d'une liaison holonome. Représentons cette dernière, comme il est classique (cf. [4]), par une variété différentiable de configuration  $M$ , de classe  $C^\infty$  et de dimension  $m$ . Considérons la projection canonique  $\text{pr} : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $t$  et  $x^1, \dots, x^m$  sont des coordonnées locales de  $\mathbb{R}$  et de  $M$ , le prolongement infini  $J^\infty \text{pr}$ , qui est la diffiété de configuration de la liaison holonome, a pour coordonnées locales  $\{t, x_{\nu_i}^i \mid i = 1, \dots, m; \nu_i \geq 0\}$  et distribution de Cartan engendrée par le champ de Cartan  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^m \sum_{\nu_i \geq 0} x_{\nu_i+1}^i \frac{\partial}{\partial x_{\nu_i}^i}$ . La dimension différentielle de  $J^\infty \text{pr}$  est bien, d'après 2.9,  $m$ .

**3.6.** – *Remarque.* Renvoyons à [11, 26, 42, 43] pour d'autres approches récentes de la mécanique non holonome par la géométrie différentielle.

<sup>(7)</sup> Renvoyons à [46] et [57] pour des compléments.

#### 4. REPRÉSENTATIONS D'ÉTAT EN AUTOMATIQUE NON LINÉAIRE

**4.1.** – Un système est une fibration de Lie-Bäcklund ordinaire (locale)  $\sigma = (S, \mathbb{R}, \tau)$ , où

- $S$  est une diffiété ordinaire, de dimension différentielle  $m$ , où l'on a distingué le champ de Cartan  $\partial_S$  ;
- la droite réelle  $\mathbb{R}$  est munie d'une structure de diffiété ordinaire, de coordonnée globale  $t$ , où l'on a distingué le champ de Cartan  $\frac{\partial}{\partial t}$  ;
- les champs de Cartan  $\partial_S$  et  $\frac{\partial}{\partial t}$  sont conjugués par  $\tau$ .

Un morphisme (resp. une immersion, une submersion, un isomorphisme) de Lie-Bäcklund (local)  $\varphi : (S, \mathbb{R}, \tau) \rightarrow (S', \mathbb{R}, \tau')$  entre deux systèmes est un morphisme (resp. une immersion, une submersion, un isomorphisme) de Lie-Bäcklund entre  $S$  et  $S'$  tel que

- $\tau = \tau' \varphi$ ,
- $\partial_S$  et  $\partial_{S'}$  sont conjugués par  $\varphi$ <sup>(8)</sup>.

$\varphi$  est une submersion (locale), déterminée, si, et seulement si,  $(S, S', \varphi)$  est une fibration de Lie-Bäcklund (locale), déterminée. Une dynamique est une submersion de Lie-Bäcklund (locale) déterminée  $\delta : (S, \mathbb{R}, \tau) \rightarrow (U, \mathbb{R}, \mu)$  entre deux systèmes, telle que les champs de Cartan  $\partial_S$  et  $\partial_U$  soient conjugués par  $\delta$ . Par léger abus de notations, nous remplacerons  $\partial_S$  et  $\partial_U$ , qui jouent le rôle de dérivation totale par rapport au temps  $t$ , par  $\frac{d}{dt}$ . La diffiété  $U$  joue le rôle d'entrée.

**4.2.** – Supposons, d'après 2.15, que  $U$  soit une base différentielle, c'est-à-dire un ouvert de l'espace affine différentiel  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_m^\infty$ , de coordonnées globales  $\{t, u_{\nu_j}^j \mid j = 1, \dots, m; \nu_j \geq 0\}$  et de distribution de Cartan engendrée par le champ de Cartan  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \sum_{\nu_j \geq 0} u_{\nu_j+1}^j \frac{\partial}{\partial u_{\nu_j}^j}$ . L'entrée est, alors, dite *indépendante*; ( $u^1 = u_0^1, \dots, u^m = u_0^m$ ) en sont les composantes. Soient  $x^1, \dots, x^n$  des coordonnées locales d'une fibre de  $\delta$  qui, d'après 2.13, est de dimension finie. Alors, pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $\frac{dx^i}{dt}$  est une fonction  $C^\infty$  locale d'un nombre fini des

<sup>(8)</sup> Revenons à la platitude évoquée dans l'introduction. Associons à l'espace affine différentiel de 3.3. le système trivial donné par la projection  $\{t, x_{\nu_i}^i\} \mapsto t$ . Le système  $\sigma$  est dit localement (différentiellement) *plat* si, et seulement si, il est localement Lie-Bäcklund isomorphe à un système trivial;  $\sigma$  est dit localement (orbitalement) *plat* si, et seulement si,  $S$  est localement Lie-Bäcklund isomorphe à un espace affine différentiel.

coordonnées  $\{x^1, \dots, x^n, u_{\nu_j}^j\}$ . Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= F^1(t, x^1, \dots, x^n, u_0^1, \dots, u_{\alpha_{1,1}}^1, \dots, u_0^m, \dots, u_{\alpha_{1,m}}^m) \\ \frac{dx^n}{dt} &= F^n(t, x^1, \dots, x^n, u_0^1, \dots, u_{\alpha_{n,1}}^1, \dots, u_0^m, \dots, u_{\alpha_{n,m}}^m) \end{aligned} \quad (3)$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= F^1\left(t, x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, \frac{d^{\alpha_{1,1}} u^1}{dt^{\alpha_{1,1}}}, \dots, u^m, \dots, \frac{d^{\alpha_{1,m}} u^m}{dt^{\alpha_{1,m}}}\right) \\ \frac{dx^n}{dt} &= F^n\left(t, x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, \frac{d^{\alpha_{n,1}} u^1}{dt^{\alpha_{n,1}}}, \dots, u^m, \dots, \frac{d^{\alpha_{n,m}} u^m}{dt^{\alpha_{n,m}}}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

(3) et/ou (4) sont appelées *représentation d'état (locale)* de la dynamique  $\delta$ , dont toute fibre est un *espace d'état (local)*.

Il vient :

PROPOSITION. – *Toute dynamique d'entrée indépendante admet une représentation d'état (locale) avec un nombre fini de dérivées des composantes de l'entrée par rapport au temps.*

4.3. – Deux dynamiques, de même entrée,  $\delta : (S, \mathbb{R}, \tau) \rightarrow (U, \mathbb{R}, \mu)$  et  $\tilde{\delta} : (\tilde{S}, \mathbb{R}, \tilde{\tau}) \rightarrow (U, \mathbb{R}, \mu)$  sont dites *(localement) isomorphes* si, et seulement si, il existe un isomorphisme de Lie-Bäcklund (local)  $\iota : (S, \mathbb{R}, \tau) \rightarrow (\tilde{S}, \mathbb{R}, \tilde{\tau})$  tel que  $\delta = \tilde{\delta}\iota$ . Les fibres, c'est-à-dire les espaces d'état, de  $\delta$  et  $\tilde{\delta}$  sont, évidemment, isomorphes. Soient  $x^1, \dots, x^n$  et  $\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n$  des coordonnées locales autour de points des fibres de  $\delta$  et  $\tilde{\delta}$  en correspondance par  $\iota$ . On obtient les *formules de passage (locales)*

$$\begin{aligned} \tilde{x}^i &= \tilde{f}^i\left(t, x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, \frac{d^{\beta_{i,1}} u^1}{dt^{\beta_{i,1}}}, \dots, u^m, \dots, \frac{d^{\beta_{i,m}} u^m}{dt^{\beta_{i,m}}}\right) \\ x^i &= f^i\left(t, \tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, u^1, \dots, \frac{d^{\tilde{\beta}_{i,1}} u^1}{dt^{\tilde{\beta}_{i,1}}}, \dots, u^m, \dots, \frac{d^{\tilde{\beta}_{i,m}} u^m}{dt^{\tilde{\beta}_{i,m}}}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

où  $i = 1, \dots, n$ , et où les fonctions  $f^i$  et  $\tilde{f}^i$  sont  $C^\infty$ . Il vient :

PROPOSITION. – *Les formules de passage entre les représentations d'état de deux dynamiques localement isomorphes dépendent, en général, de l'entrée et de ses dérivées par rapport au temps.*

4.4. – *Remarque.* Renvoyons à [12] pour abaisser en (3)-(4) l'ordre de dérivation des composantes de l'entrée par (5).

## RÉFÉRENCES

- [1] D. V. ALEKSEEVSKIĬ, A. M. VINOGRADOV et V. V. LYCHAGIN, *Geometry I, Basic Ideas and Concepts of Differential Geometry*, Encycl. Math. Sci., Vol. 28, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [2] R. L. ANDERSON et N. H. IBRAGIMOV, *Lie-Bäcklund Transformations in Applications*, S.I.A.M., Philadelphie, 1979.
- [3] P. APPELL, *Traité de Mécanique Rationnelle*, t. 2, 6<sup>e</sup> éd., Gauthier-Villars, Paris, 1953.
- [4] V. I. ARNOLD, V. V. KOZLOV et A. I. NEISHTADT, Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics, in *Dynamical Systems III*, Encycl. Math. Sci., Vol. 3, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [5] J. E. BJÖRK, *Rings of Differential Operators*, North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [6] K. E. BRENNAN, S. L. CAMPBELL et L. R. PETZOLD, *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*, Elsevier, Amsterdam, 1989.
- [7] A. BUIUM, *Differential Algebraic Groups of Finite Dimension*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [8] A. BUIUM, *Differential Algebra and Diophantine Geometry*, Hermann, Paris, 1994.
- [9] P. J. CASSIDY, The classification of the semisimple differential algebraic groups and the linear semisimple differential algebraic Lie algebras, *J. Algebra*, Vol. 121, 1989, p. 169-238.
- [10] P. M. COHN, *Free Rings and their Relations*, 2<sup>nd</sup> ed., Academic Press, Londres, 1985.
- [11] P. DAZORD, Mécanique hamiltonienne en présence de contraintes, *Illinois J. Math.*, Vol. 38, 1994, p. 148-175.
- [12] E. DELALEAU et W. RESPONDEK, Lowering the orders of derivatives of controls in generalized state space systems, *J. Math. Systems Estim. Control*, Vol. 5, 1995, p. 375-378.
- [13] L. A. DICKEY, *Soliton Equations and Hamiltonian Systems*, World Scientific, Singapour, 1991.
- [14] I. DORFMAN, *Dirac Structures and Integrability of Nonlinear Evolution Equations*, Wiley, Chichester, 1993.
- [15] M. FLIESS, Automatique et corps différentiels, *Forum Math.*, Vol. 1, 1989, p. 227-238.
- [16] M. FLIESS, Generalized controller canonical forms for linear and nonlinear dynamics, *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 35, 1990, p. 994-1001.
- [17] FLIESS and S. T. GLAD, An algebraic approach to linear and nonlinear control, in *Essays on Control: Perspectives in the Theory and its Applications* (H. Trentelman and J. C. Willems Eds), Birkhäuser, Boston, 1993, p. 223-267.
- [18] M. FLIESS, J. LÉVINE, P. MARTIN, F. OLLIVIER et P. ROUCHON, Flatness and dynamic feedback linearizability: two approaches, *Proc. 3<sup>rd</sup> European Control Conf.*, Rome, 1995, p. 649-654.
- [19] M. FLIESS, J. LÉVINE, P. MARTIN et P. ROUCHON, Linéarisation par bouclage dynamique et transformations de Lie-Bäcklund, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Vol. I-317, 1993, p. 981-986.
- [20] M. FLIESS, J. LÉVINE, P. MARTIN et P. ROUCHON, Nonlinear control and Lie-Bäcklund transformations: Towards a new differential geometric standpoint, *Proc. IEEE Control Decision Conf.*, Lake Buena Vista, FL, 1994, p. 339-344.
- [21] M. FLIESS, J. LÉVINE, P. MARTIN et P. ROUCHON, Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples, *Internat. J. Control*, Vol. 61, 1995, p. 1327-1361.
- [22] M. FLIESS, J. LÉVINE, P. MARTIN et P. ROUCHON, Index and decomposition of nonlinear implicit differential equations, *Proc. IFAC Conf. System Structure Control*, Nantes, 1995, p. 43-48.
- [23] M. FLIESS, J. LÉVINE, P. MARTIN et P. ROUCHON, Design of trajectory stabilizing feedback for driftless flat systems, *Proc. 3<sup>rd</sup> European Control Conf.*, Rome, 1995, p. 1882-1887.
- [24] M. FLIESS, J. LÉVINE, P. MARTIN et P. ROUCHON, *A Lie-Bäcklund transformation approach to equivalence and flatness of nonlinear systems*, à paraître.

- [25] M. FLIESS, J. LÉVINE et P. ROUCHON, A generalised state variable representation for a simplified crane description, *Internat. J. Control*, Vol. **58**, 1993, p. 277-283.
- [26] G. GIACHETTA, Jet methods in nonholonomic mechanics, *J. Math. Physics*, Vol. **33**, 1992, p. 1652-1665.
- [27] M. GROMOV, *Partial Differential Relations*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [28] V. N. GUSYATNIKOVA, A. M. VINOGRADOV et V. A. YUMAGUZHIN, Secondary differential operators, *J. Geometry Physics*, Vol. **2**, 1985, p. 23-65.
- [29] E. HAIRER, C. LUBICH et M. ROCHE, *The Numerical Solution of Differential-Algebraic Systems by Runge-Kutta Methods*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [30] G. HAMEL, *Theoretische Mechanik*, Springer-Verlag, Berlin, 1949.
- [31] R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [32] M. HENNEAUX et C. TEITELBOIM, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, Princeton, 1992.
- [33] N. H. IBRAGIMOV, *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics*, Reidel, Boston, 1985.
- [34] A. ISIDORI, *Nonlinear Control Systems*, 3<sup>rd</sup> ed., Springer-Verlag, New York, 1995.
- [35] J. JOHNSON, Kähler differentials and differential algebra, *Ann. of Math.*, Vol. **89**, 1969, p. 92-98.
- [36] J. JOHNSON, Prolongations of integral domains, *J. Algebra*, Vol. **94**, 1985, p. 173-211.
- [37] E. R. KOLCHIN, *Differential Algebra and Algebraic Groups*, Academic Press, New York, 1973.
- [38] E. R. KOLCHIN, *Differential Algebraic Groups*, Academic Press, Orlando, 1985.
- [39] I. S. KRASIL'SHCHIK, V. V. LYCHAGIN et A. M. VINOGRADOV, *Geometry of Jet Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations*, Gordon and Breach, New York, 1986.
- [40] B. A. KUPERSHMDT, *The Variational Principles of Dynamics*, World Scientific, Singapour, 1992.
- [41] Yu. I. MANIN, Algebraic aspects of nonlinear differential equations, *J. Soviet Math.*, Vol. **11**, 1979, p. 1-122.
- [42] E. MASSA et E. PAGANI, Classical dynamics of non-holonomic systems, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, Vol. **55**, 1991, p. 511-544.
- [43] E. MASSA et E. PAGANI, Jet bundle geometry, dynamical connections, and the inverse problem of Lagrangian mechanics, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, Vol. **61**, 1994, p. 17-62.
- [44] Ju. I. NEĬMARK et N. A. FUFÁEV, *Dynamics of Nonholonomic Systems*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1972.
- [45] H. NIJMEIJER et van der SCHAFT, *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [46] P. J. OLVER, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, 2<sup>nd</sup> ed., Springer-Verlag, New York, 1993.
- [47] J. F. RITT, *Differential Algebra*, Amer. Math. Soc., New York, 1950.
- [48] J. C. TOUGERON, *Idéaux de Fonctions Différentiables*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [49] T. TSUJISHITA, Formal geometry of systems of differential equations, *Sugaku Expos.*, Vol. **3**, 1990, p. 25-73.
- [50] T. TSUJISHITA, Homological method of computing invariants of systems of differential equations, *Diff. Geometry Appl.*, Vol. **1**, 1991, p. 3-34.
- [51] A. M. VINOGRADOV, Local symmetries and conservation laws, *Acta Appl. Math.*, Vol. **2**, 1984, p. 21-78.
- [52] A. M. VINOGRADOV, Ed., *Symmetries of Partial Differential Equations*, Kluwer, Dordrecht, 1989 (reprinted from *Acta Appl. Math.*, Vol. **15**, 1989, n° 1-2, and Vol. **16**, 1989, n° 1-2).
- [53] A. M. VINOGRADOV, Scalar differential invariants, diffieties and characteristic classes, in *Mechanics, Analysis and Geometry: 200 Years after Lagrange* (M. Francaviglia Ed.), North-Holland, Amsterdam, 1991, p. 379-416.
- [54] A. M. VINOGRADOV, From symmetries of partial differential equations towards secondary ("quantized") calculus, *J. Geometry Physics*, Vol. **14**, 1994, p. 146-194.

- [55] E. T. WHITTAKER, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, 4<sup>th</sup> ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1947.
- [56] V. V. ZHARINOV, On Bäcklund correspondences, *Math. USSR Sb.*, Vol. **64**, 1989, p. 277-293.
- [57] V. V. ZHARINOV, *Geometrical Aspects of Partial Differential Equations*, World Scientific, Singapour, 1992.

*(Manuscrit reçu le 1<sup>er</sup> février 1995;  
version révisée reçue le 17 janvier 1996.)*