ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

MARCEL DOSSA

Espaces de Sobolev non isotropes, à poids et problèmes de Cauchy quasi-linéaires sur un conoïde caractéristique

Annales de l'I. H. P., section A, tome 66, n° 1 (1997), p. 37-107

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1997__66_1_37_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 66, n° 1, 1997, p. 37-107 *Physique théorique*

Espaces de Sobolev non isotropes, à poids et problèmes de Cauchy quasi-linéaires sur un conoïde caractéristique

par

Marcel DOSSA

Université de Yaoundé-I, Faculté des sciences,
B.P. 812 Yaoundé, Cameroun.

RÉSUMÉ. – On résout localement ou globalement dans un cadre d'espaces de Sobolev à poids, non isotropes, et sous des hypothèses de différentiabilité minimale sur les données, le problème de Cauchy pour une classe de systèmes d'équations quasi-linéaires hyperboliques du second ordre, les données initiales étant portées par un conoïde caractéristique. Ce faisant, amélioration et généralisation de la plupart des résultats précédents sur le sujet. Applications physiques signalées.

ABSTRACT. – Local and global solutions of the Cauchy problem with initial data on a characteristic conoid for a class of systems of quasi-linear partial differential equations of second order are obtained on weighted, non-isotropic Sobolev spaces with minimal differentiability conditions on the data.

We thereby improve and generalize preceding results on the subject. Physical applications are mentioned.

Le présent travail a pour objet la résolution d'une classe de problèmes de Cauchy caractéristiques non linéaires.

Résoudre un problème de Cauchy caractéristique consiste à résoudre un système d'équations hyperboliques dans un domaine Y délimité par une ou plusieurs hypersurfaces caractéristiques sécantes (comportant éventuellement des singularités) portant les données initiales.

Les motivations physiques proviennent essentiellement de la théorie de la Relativité Générale où les problèmes de Cauchy caractéristiques interviennent naturellement dans de nombreuses questions d'existence :

(i) existence des solutions des équations d'Einstein ayant un comportement prescrit sur certaines hypersurfaces caractéristiques telles que le cône isotrope passé ou futur d'un point de l'espace-temps, l'infini isotrope passé ou futur, les horizons, etc.

(ii) existence et caractérisation des espace-temps radiatifs ([27], [28]);

ces problèmes interviennent aussi :

(iii) en Relativité Générale Numérique ([23], [24), [25]),

(iv) en Cosmologie [26],

(v) dans l'étude des propriétés asymptotiques et des propriétés de scattering de solutions d'équations physiques ([29), [30], [31]).

Sur le plan strictement mathématique et selon A. D. Rendall [22], les difficultés rencontrées dans l'étude des problèmes de Cauchy caractéristiques dépendent essentiellement des trois facteurs suivants :

1) le degré de non linéarité du système considéré, le cas le plus ardu étant celui des systèmes quasi-linéaires (exemple : les équations d'Einstein du vide en coordonnées harmoniques),

2) l'ordre de différentiabilité minimum exigé des données (coefficients du système considéré et données initiales), les résultats les plus intéressants étant, à cause des applications physiques, ceux obtenus sous les hypothèses de différentiabilité les plus faibles,

3) la nature de l'hypersurface initiale; le cas le plus simple et pour lequel on dispose d'une étude assez complète est celui de deux hypersurfaces régulières, caractéristiques et sécantes (*cf.* [9], [10], [20], [21], [22], [39]); le cas du conoïde caractéristique, l'un des plus intéressants du point de vue des applications physiques, présente, par rapport au cas précédent, de nouvelles difficultés liées à la présence d'un point singulier : le sommet du conoïde caractéristique.

Le présent travail est consacré à ce dernier cas, plus précisément à l'étude du problème de Cauchy hyperbolique du second ordre avec donnée initiale sur un conoïde caractéristique.

Voici quelques références bibliographiques sur ce sujet. L'étude de ce problème a été d'abord entreprise pour les équations linéaires à coefficients constants par R. d'Adhémar [32] (1905) et M. Riesz [33] (1949). Elle a été étendue aux équations linéaires à coefficients variables par F. Cagnac

([4], [5]) (1973) sous des hypothèses de différentiabilité de classe C^m (m fini) sur les données et par F. G. Friedlander [18] (1975) sous des hypothèses de classe C^∞ ; leur méthode reposait essentiellement sur la construction d'une solution élémentaire. L'extension au cas quasi-linéaire a été inaugurée par F. Cagnac dans [3] (1980). Dans ce travail, F. Cagnac considère dans le domaine Y intérieur à un demi-conoïde $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, de sommet 0 et d'équation $x^0 = S(x^1, \ldots, x^n)$, le problème de Cauchy pour un système de N équations aux dérivées partielles (E_r) de N fonctions inconnues (w_r) de $n+1$ variables réelles x^α de la forme suivante :

$$(\star) \qquad \begin{cases} A^{\lambda\mu}(x^\alpha, w_s) D_{\lambda\mu} w_r + f_r(x^\alpha, w_s, D_\nu w_s) = 0 \\ r, s = 1, 2, \ldots, N; \quad \alpha, \lambda, \mu, \nu = 0, 1, \ldots, n; \\ D_\nu = \dfrac{\partial}{\partial x^\nu}; \quad D_{\lambda\mu} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \end{cases}$$

de type x^0-hyperbolique avec $A^{00} > 0$ et la forme quadratique $A^{ij} X_i X_j$ définie négative $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, avec des conditions initiales de la forme suivante :

$$(\star\star) \qquad \begin{cases} w_r = \bar{w}_r \text{ sur } \mathcal{C}, \ \mathcal{C} \text{ étant une hypersurface caractéristique} \\ \text{pour l'opérateur différentiel } A^{\lambda\mu}(x^\alpha, \bar{w}_s(x^\alpha)) D_{\lambda\mu}, \\ \bar{w}_r \text{ étant définie dans un voisinage de 0 dans } \mathbb{R}^{n+1}. \end{cases}$$

Pour $n = 3$ et sous des hypothèses de différentiabilité sur les données $(A^{\lambda\mu}, f_r, \bar{w}_r)$ de classe respective C^{3t+2}, C^{3t}, C^{3t+2} avec $t \geq 6$ et moyennant la condition supplémentaire suivante notée (0_t) : « les $\bar{w}_r$ vérifient au point 0 les équations (E_r) et toutes les équations dérivées jusqu'à l'ordre $t-2$ », il réussit à transformer le problème $(\star)$, $(\star\star)$ en un problème à données initiales nulles qu'on peut résoudre à l'aide de la théorie de Leray [40]; il obtient ainsi un résultat d'existence et d'unicité pour $(\star)$, $(\star\star)$ dans $H^{t+1}(\tilde{Y})(t \geq 6)$, $\tilde{Y}$ étant un voisinage de 0 dans Y. Dans [22] A. D. Rendall conjecture l'inutilité de la condition (0_t). Dans [12] (*cf.* aussi [35]), M. Dossa propose, pour n quelconque $\in N^*$, une nouvelle méthode de réduction du problème $(\star)$, $(\star\star)$ en un problème à données nulles qu'on peut résoudre à l'aide d'une variante de la théorie de Leray [40], ce qui permet, sous la seule hypothèse que les données $(A^{\lambda\mu}, f_r, \bar{w}_r)$ sont de classe respective C^{2t+2}, C^{2t}, C^{2t+2} avec $t > \frac{n}{2} + 1$, de résoudre le problème $(\star)$, $(\star\star)$ dans $H^{t+1}(\tilde{Y})$, $\tilde{Y}$ étant un voisinage de 0 dans Y ; on y montre notamment grâce à une judicieuse combinaison des résultats de [3] et [18], l'inutilité de la condition (0_t), démontrant ainsi la conjecture de A. D. Rendall; on y montre aussi un résultat de régularité

C^∞ pour le problème $(\star)$, $(\star\star)$, améliorant et généralisant ainsi des résultats précédents de A. D. Rendall [22] et F. G. Friedlander [18]. Dans [34], une preuve plus directe de la conjecture de A. D. Rendall est proposée.

Le présent travail développe une nouvelle méthode de solution qui conduit à des résultats dont la nouveauté par rapport aux travaux antérieurs ([3], [12], [18], [22], [39]) dont ils intègrent d'ailleurs tous les acquis positifs, réside dans :

• l'optimalité de l'ordre de différentiabilité minimum exigé des données,

• la possibilité d'aborder des problèmes d'existence globale, c'est-à-dire l'existence de solution définie dans tout l'intérieur d'un demi-conoïde caractéristique *infini*,

• l'applicabilité de ces résultats aux théories de Jauge (équations de Yang-Mills-Higgs) et à la Relativité Générale (équations d'Einstein du vide), (*cf.* [37], [38] et [39]).

Il s'agit d'une méthode de point fixe, déployée dans un cadre d'espaces fonctionnels convenables, et reposant sur une combinaison du théorème d'existence C^∞ de [12] (*cf.* aussi [35]) et des inégalités énergétiques directes établies pour le problème linéaire à données initiales non nulles associé au problème $(\star)$, $(\star\star)$. Les espaces utilisés, généralisation naturelle inspirée de ([10], [13], [16]) des espaces $C^p(Y)$ sont, grosso modo, de la forme $P_m + E_m$ où :

• P_m est l'espace des polynomes de $d^\circ \leq 2(m-1)$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$;

• E_m est un espace de Sobolev avec poids formé de fonctions tendant vers 0 en un certain sens en 0 et défini par une norme $\| X \|$ où apparaissent :

1) les dérivées de X sur l'intérieur Y du demi-conoïde $\mathcal{C}$ jusqu'à l'ordre m et les dérivées de X sur $\mathcal{C}$ jusqu'à l'ordre $2m-1$ (condition nécessaire dans tout problème de Cauchy caractéristique du 2° ordre),

2) des poids placés pour contrôler deux phénomènes d'explosion liés à la géométrie du conoïde $\mathcal{C}$ (qu'on peut supposer) d'équation $x^0 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2}$:

• l'explosion quand $t \to 0$ des constantes de Sobolev associées aux domaines $G_t = Y \cap \{x^0 = t\}$, $\Sigma_t = \mathcal{C} \cap G_t$,

• l'apparition, dans les dérivations sur $\mathcal{C}$, de facteurs qui explosent au voisinage de 0.

Le travail est divisé en cinq chapitres. Le chapitre I est consacré à la formulation précise des principaux résultats obtenus. Dans le chapitre II, on décrit diverses propriétés des espaces fonctionnels utilisés : structure banachique ou hilbertienne de ces espaces, densité des fonctions C^∞ dans ces espaces, inégalités de Sobolev vérifiées par ces espaces, comportement des constantes de Sobolev en fonction de certains paramètres géométriques du problème, lemmes de substitution; ces propriétés constituent les principaux instruments des calculs ultérieurs des chapitre III, IV et V. Le chapitre III est consacré à la résolution du problème de Cauchy linéaire associé au problème $(\star)$, $(\star\star)$. Au chapitre IV, on résout localement le problème $(\star)$, $(\star\star)$. Le chapitre V est consacré à la résolution globale, dans l'intérieur Y du demi-conoïde infini $\mathcal{C}$ d'équation $x^0 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2}$ du problème de Cauchy caractéristique non linéaire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{(\partial x^0)^2} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{(\partial x^i)^2} + au + bu^p = 0 \quad \text{dans}\, Y \\ u/\mathcal{C} = 0 \end{cases}$$

où a et b sont deux fonctions positives, $n = 1$, 2 ou 3, p est un entier impair tel que $1 < p < +\infty$ si $n = 1$ ou 2, $p = 3$ si $n = 3$.

CHAPITRE I

FORMULATION PRÉCISE DES PRINCIPAUX RÉSULTATS OBTENUS

1.1. Notations et espaces fonctionnels utilisés

Soit n un entier ≥ 2.

$\mathcal{C}$ désigne le demi-conoïde de sommet 0 dans $\mathbb{R}^{n+1}$, d'équation :

$$x^0 = s \quad \text{avec} \quad s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2}.$$

Y est l'intérieur de $\mathcal{C}$. Si $t \in]0, +\infty[$, $Y_t = \{(x^0, \ldots, x^n) \in Y;\ s \leq x^0 \leq t\}$; $Y_\infty = Y$; $G_t = \{(x^0, \ldots, x^n) \in Y;\ x^0 = t\}$;

$$\Sigma_t = \mathcal{C} \cap G_t, \quad \mathcal{V}_t = \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n;\ (s, x^1, \ldots, x^n) \in \mathcal{C}_t\}.$$

$$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in N^n\,; \quad \partial^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{(\partial x^1)^{\beta_1} \ldots (\partial x^n)^{\beta_n}}\,;$$

$$k \in N, \qquad \partial_0^k = \frac{\partial^k}{(\partial x^0)^k}\,.$$

Pour $v = (v^I)$ définie sur $\mathcal{C}_t$, on pose :

$$\| v \|_{H^p(\Sigma_t, \mathcal{C})} = \left(\sum_{\substack{|\beta| \leq p \\ I}} \int_{\Sigma_t} | \partial^\beta v^I |^2 \, d\sigma(\Sigma_t) \right)^{1/2}$$

(si le second membre existe) où $d\sigma(\Sigma_t)$ est la mesure induite sur Σ_t par $dx^1 \ldots dx^n$.

On pose aussi :

$$\| v \|_{H^p(\mathcal{C}_t)} = \left[\sum_{\substack{|\beta| \leq p \\ I}} \int_{\mathcal{C}_t} | \partial^\beta v^I |^2 \, dx^1 \ldots dx^n \right]^{1/2}.$$

Pour $X = (X^I)$ définie sur Y, on pose :

$$| D^k X |^2 = \sum_I \sum_{|\alpha| = k} | D^\alpha X^I |^2,$$

$$\| X \|_{H^p(G_t, Y)} = \left(\sum_{k=0}^{p} \int_{G_t} | D^k X |^2 \, dx^1 \ldots dx^n \right)^{1/2},$$

$$\| D^{[k]} X \|_{H^1(\mathcal{C}_T)} = [\sum_I \sum_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha X^I \|^2_{H^1(\mathcal{C}_T)}]^{1/2},$$

$$\| D^{[k]} X \|_{\tilde{E}^1(\mathcal{C}_t)} = \operatorname*{Ess\,sup}_{\tau \in]0, t]} \{ \tau^{-\frac{n-1}{2}} [\sum_I \sum_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha X^I \|^2_{H^1(\Sigma_t, \mathcal{C})}]^{1/2} \}$$

(si les seconds membres des égalités existent).

$C^\infty(Y_t)$ est l'espace des restrictions à Y_t des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^{n+1}$;

$C^\infty_\infty(Y_t)$ est le sous-espace de $C^\infty(Y_t)$ formé des fonctions dont les dérivées de tous ordres sont nulles en 0;

$C^\infty_p(Y_t)$ est le sous-espace de $C^\infty(Y_t)$ formé des fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre p sont nulles en 0;

$F^p(Y_t)$ est défini par la norme :

$$\| X \|_{F^p(Y_t)} = \operatorname*{Ess\,sup}_{\tau \in]0, t]} \tau^{-n/2} \| X \|_{H^p(G_\tau, Y)}$$

$\tilde{F}^p(\mathcal{C}_t)$ est défini par la norme :

$$\| X \|_{\tilde{F}^p(\mathcal{C}_t)} = \sum_{r=0}^{2p-1} \operatorname*{Ess\,sup}_{\tau \in]0, t]} \tau^{-2p+r+(3-n)/2} \| X \|_{H^r(\Sigma_\tau, \mathcal{C})}$$

$\hat{F}^p(\mathcal{C}_t)$ est la fermeture dans $\tilde{F}^p(\mathcal{C}_t)$ de l'espace des restrictions à $\mathcal{C}_t$ des fonctions de $C^\infty_\infty(Y_t)$.

$\tilde{F}^p(Y_t)$ est le sous-espace de $F^p(Y_t)$ défini par la norme :

$$\| X \|_{\tilde{F}^p(Y_t)} = \| X \|_{F^p(Y_t)} + \sum_{k=0}^{p-1} \| [\partial_0^k X] \|_{\tilde{F}^{p-k}(\mathcal{C}_t)}$$

où [ ] indique la restriction à $\mathcal{C}_t$.

$F'^p(Y_t)$ est le sous-espace de $F^p(Y_t)$ défini par la norme :

$$\| X \|_{F'^p(Y_t)} = \| X \|_{F^p(Y_t)} + \sum_{k=1}^{p-1} \| [\partial_0^k X] \|_{\tilde{F}^{p-k}(\mathcal{C}_t)}.$$

$\hat{F}^p(Y_t)$ est la fermeture de $C_\infty^\infty(Y_t)$ dans $\tilde{F}^p(Y_t)$.

$\hat{F}^p_{\text{loc}}(Y_\infty)$ est l'espace des fonctions X définies sur Y_∞, telles que

$$\forall t \in]0, \infty[, \quad \text{on a} : X/Y_t \in \hat{F}^p(Y_t).$$

$\hat{F}^p_{\text{loc}}(\mathcal{C})$ est l'espace des fonctions X définies sur $\mathcal{C}$, telles que :

$$\forall t \in]0, \infty[, \quad \text{on a} : X/\mathcal{C}_t \in \hat{F}^p(\mathcal{C}_t).$$

$P^k(Y_t)$ est l'espace des restrictions à Y_t des fonctions-polynômes sur $\mathbb{R}^{n+1}$ de $d^0 \leq k$.

$K^p(Y_t)$ est défini par la norme :

$$\| X \|_{K^p(Y_t)} = \left(\int_0^t \tau^{-n} \| X \|^2_{H^p(G_\tau, Y)} d\tau \right)^{1/2}$$

$\tilde{K}^p(\mathcal{C}_t)$ est défini par la norme :

$$\| X \|_{\tilde{K}^p(\mathcal{C}_t)} = \left(\sum_{r=0}^{2p-1} \int_0^t \tau^{-4p+2r+(3-n)} \| X \|^2_{H^r(\Sigma_\tau, \mathcal{C})} \right)^{1/2}$$

$\tilde{K}^p(Y_t)$ est le sous-espace de $K^p(Y_t)$ défini par la norme :

$$\| X \|_{\tilde{K}^p(Y_t)} = \left(\| X \|^2_{K^p(Y_t)} + \sum_{r=0}^{p-1} \| [\partial_0^k X] \|^2_{\tilde{K}^{p-k}(\mathcal{C}_t)} \right)^{1/2}$$

Dans la suite, on utilisera aussi les notations suivantes :

$$\| X \|^2_{\tilde{K}^p(\mathcal{C}_t, Y)} = \sum_{k=0}^{p-1} \| [\partial_0^k X] \|^2_{\tilde{K}^{p-k}(\mathcal{C}_t)}$$

$$\| X \|_{\tilde{F}^p(\mathcal{C}_t, Y)} = \sum_{k=0}^{p-1} \| [\partial_0^k X] \|_{\tilde{F}^{p-k}(\mathcal{C}_t)}$$

$$\| X \|_{F'^p(\mathcal{C}_t, Y)} = \sum_{k=1}^{p-1} \| [\partial_0^k X] \|_{\tilde{F}^{p-k}(\mathcal{C}_t)}.$$

1.2. Résultats d'existence

1.2.1. *Le cas linéaire*

On considère le problème de Cauchy linéaire du second ordre

$$\begin{cases} A^{\lambda\mu}\,\dfrac{\partial^2 u^I}{\partial x^\lambda\,\partial x^\mu} + B_L^{\lambda I}\,\dfrac{\partial u^L}{\partial x^\lambda} + C_L^I\,u^L = F^I \quad \text{dans } Y_T\,(\mathcal{E}^I) \\ u^I = \phi^I \quad \text{sur } \mathcal{C}_T; \quad \lambda,\ \mu = 0,\ 1,\ \ldots,\ n; \quad I,\ L = 1,\ \ldots,\ N \end{cases}$$

qu'on peut noter sommairement :

$$\text{(1.2.1)} \qquad \begin{cases} A^{\lambda\mu}\,D_{\lambda\mu}\,u + B\cdot Du + C\cdot u = F \quad \text{dans}\, Y_T\,(\mathcal{E}) \\ u = \phi \quad \text{sur}\, \mathcal{C}_T \end{cases}$$

avec :

$$u = (u^I), \quad Du = \left(\frac{\partial u^I}{\partial x^\lambda}\right), \quad D_{\lambda\mu}\,u = \left(\frac{\partial^2 u^I}{\partial x^\lambda\,\partial x^\mu}\right)$$

$$B = (B_L^{\lambda I}), \quad C = (C_L^I), \quad F = (F^I), \quad (\mathcal{E}) = (\mathcal{E}^I),$$

$$\phi = (\phi^I); \quad I,\ L = 1,\ \ldots,\ N; \quad \lambda,\ \mu = 0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

Hypothèse (L_m)

• $m_0,\ m_1,\ m_2,\ m$ sont des entiers naturels vérifiant les conditions

$$m_i > \frac{n}{2} + i - 1 \qquad \forall i \in \{0,\ 1,\ 2\}$$

et

$$2 \le m \le \min_{0\le i\le 2}\{m_i\} + 1;$$

• les données $(A^{\lambda\mu})$, B, C, F, ϕ vérifient les conditions de structure :

$$\text{(1.2.2)} \qquad \begin{cases} A^{\lambda\mu} = \bar{A}^{\lambda\mu} + A_1^{\lambda\mu} \ \text{avec}\, \bar{A}^{\lambda\mu} \in P^{2\,(m_2-1)}\,(Y_T), \\ \qquad\qquad A_1^{\lambda\mu} \in \tilde{K}^{m_2}\,(Y_T) \\ B = \bar{B} + B_1 \ \text{avec}\, \bar{B} \in P^{2\,(m_1-1)}\,(Y_T), \quad B_1 \in \tilde{K}^{m_1}\,(Y_T) \\ C = \bar{C} + C_1 \ \text{avec}\, \bar{C} \in P^{2\,(m_0-1)}\,(Y_T), \quad C_1 \in \tilde{K}^{m_0}\,(Y_T) \\ F = \bar{F} + F_1 \ \text{avec}\, \bar{F} \in P^{2\,(m-2)}\,(Y_T), \quad F_1 \in \tilde{K}^{m-1}\,(Y_T) \\ \phi = \bar{\phi}/\mathcal{C}_T + \phi_1 \ \text{avec}\, \bar{\phi} \in P^{2\,(m-1)}\,(Y_T), \quad \phi_1 \in \tilde{K}^{m}\,(\mathcal{C}_T) \end{cases}$$

$$(1.2.3)\quad \begin{cases} \text{sur } Y_T \text{ on a : } A^{00} > 0, \displaystyle\sum_{1 \le i,\, j \le n} A^{ij} X_i X_j < 0 \\ \forall (X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^n;\ A^{\lambda\mu}(0) = \eta^{\lambda\mu} \quad \forall \lambda,\ \mu = 0, \ldots, n \\ (\text{les } \eta^{\lambda\mu} \text{ désignant les composantes de la métrique} \\ \text{de Minkowski sur } \mathbb{R}^{n+1}). \end{cases}$$

$$(1.2.4)\quad \begin{cases} \mathcal{C}_T \text{ est un conoïde } \textit{isotrope} \text{ par rapport à } (A^{\lambda\mu}), \\ \text{ce qui signifie :} \\ A^{00}(s, x^1, \ldots, x^n) - 2 \displaystyle\sum_{i=1}^{n} A^{0i}(s, x^1, \ldots, x^n) \frac{x^i}{s} \\ + \displaystyle\sum_{1 \le i,\, j \le n} A^{ij}(s, x^1, \ldots, x^n) \frac{x^i x^j}{s^2} = 0 \\ \forall (x^1, \ldots, x^n) \in \mathcal{V}_T \quad \text{avec } s = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2}. \end{cases}$$

THÉORÈME 1. – *Sous l'hypothèse* (L_m), $m \geq 2$, *on a :*

1) *la donnée initiale* $\phi = \bar{\phi}/\mathcal{C}_T + \phi_1$ *du problème de Cauchy* (1.2.1) *peut se redécomposer sous la forme :* $\phi = \bar{u}/\mathcal{C}_T + \tilde{\phi}_1$ *où :*

$\bar{u} = (\bar{u}^I)$ *appartient à* $P^{2(m-1)}(Y_T)$ *et vérifie au point* 0 *l'équation* $(\bar{\mathcal{E}})$ (*obtenue à partir de l'équation* $(\mathcal{E})$ *de* (1.2.1) *en remplaçant* $A^{\lambda\mu}$, B, C, F, u respectivement par $\bar{A}^{\lambda\mu}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{F}$, $\bar{u}$) *ainsi que les équations dérivées jusqu'à l'ordre* $2(m-2)$.

- $\tilde{\phi}_1 \in \tilde{K}^m(\mathcal{C}_T)$.

2) *Le problème de Cauchy linéaire* (1.2.1) *possède une solution unique* $u = (u^I) \in P^{2(m-1)}(Y_T) + F'^m(Y_T)$. *Cette solution se décompose en :*

$$u = \bar{u} + u_1, \quad \text{avec } u_1 \in F'^m(Y_T).$$

Cette solution u *vérifie pour tout* $t \in]0, T]$ *les inégalités énergétiques suivantes :*

$$(1.2.5)\quad \| u_1 \|_{F^m(Y_t)} \leq C_1 t^{1/2} [| a | + \| \tilde{\phi}_1 \|_{\tilde{K}^m(\mathcal{C}_t)} + \| F_1 \|_{\tilde{K}^{m-1}(Y_t)}]$$

$$(1.2.6)\quad \| u_1 \|_{F'^m(Y_t)} \leq C_2 [t^{1/2} | a | + \| \tilde{\phi}_1 \|_{\tilde{K}^m(\mathcal{C}_t)} + t^{1/2} \| F_1 \|_{\tilde{K}^{m-1}(Y_t)}].$$

C_1 et C_2 étant des constantes > 0, fonctions croissantes des constantes T, h_1^{-1}, h_2, K et dépendant éventuellement des coefficients des fonctions-polynômes $\bar{A}^{\lambda\mu}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{F}$, $\bar{\phi}$, $\bar{u}$ avec :

- $h_1 = \inf_{\substack{(x^\alpha)\in Y_T \\ (p_\lambda)\in S}} \gamma^{\lambda\mu}(x^\alpha)\, p_\lambda\, p_\mu; \quad h_2 = \sup_{\substack{(x^\alpha)\in Y_T \\ (p_\lambda)\in S}} \gamma^{\lambda\mu}(x^\alpha)\, p_\lambda\, p_\mu;$

où :

$$\gamma^{00} = A^{00},\ \gamma^{0i} = 0,\ \gamma^{ij} = -A^{ij}, \quad i,\, j = 1,\, \ldots,\, n.$$

S est la sphère-unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ de centre l'origine

- $K = \max\{\| A_1^{\lambda\mu} \|_{\tilde{K}^{m_2}(Y_T)},\ \| B_1 \|_{\tilde{K}^{m_1}(Y_T)},\ \| C_1 \|_{\tilde{K}^{m_0}(Y_T)}\}$
- $| a | = \max_{\substack{I \\ |\alpha| \le 2(m-1)}} | D^\alpha \bar{u}^I(0) |.$

3) *Si de plus $\phi_1 \in \tilde{F}^m(\mathcal{C}_T)$, alors $\tilde{\phi}_1 \in \tilde{F}^m(\mathcal{C}_T)$ et $u_1 \in \tilde{F}^m(Y_T)$ et vérifie pour tout $t \in]0,\, T]$ l'inégalité énergétique :*

$$(1.2.7) \quad \| u_1 \|_{\tilde{F}^m(Y_t)} \le C_3 \,[t^{1/2}\, | a | + \| \tilde{\phi}_1 \|_{\tilde{F}^m(\mathcal{C}_t)} + t^{1/2}\, \| F_1 \|_{\tilde{K}^{m-1}(Y_T)}],$$

C_3 étant de même nature que C_1 et C_2.

1.2.2 *Le cas quasi-linéaire*

On considère d'abord le problème de Cauchy quasi-linéaire du second ordre :

$$(1.2.8) \quad \begin{cases} A^{\lambda\mu}(x^\alpha,\, u)\, D_{\lambda\mu}\, u + f\,(x^\alpha,\, u,\, Du) = 0 \quad \text{dans}\, Y_T \quad (\mathcal{E}) \\ u = \phi \quad \text{sur}\ \mathcal{C}_T \end{cases}$$

avec :

$$u = (u^I),\ Du = \left(\frac{\partial u^I}{\partial x^\lambda}\right), \quad D_{\lambda\mu}\, u = \left(\frac{\partial^2 u^I}{\partial x^\lambda\, \partial x^\mu}\right)$$

$$\phi = (\phi^I), \quad f = (f^I); \quad \lambda,\, \mu = 0,\, 1,\, \ldots,\, n; \quad I = 1,\, \ldots,\, N.$$

Hypothèse $\mathcal{H}_m$

(1.2.9)

$$\left\{\begin{array}{l}
\bullet\ m \text{ est un entier } > n/2+1 \\[2ex]
\bullet\ A^{\lambda\mu}(x^\alpha,\, u^I) \text{ est de classe } C^{2m-1} \text{ sur } U \times W, \text{ où } U \\
\text{est un ouvert de } \mathbb{R}^{n+1} \text{ contenant } 0,\ W \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^N. \\
\text{Pour tout } (x^\alpha,\, u^I) \in U \times W,\ A^{\lambda\mu}(x^\alpha,\, u^I) \text{ définit une forme} \\
\text{quadratique définie de signature } + - \cdots - \text{ avec} \\[2ex]
A^{00} > 0, \quad \sum\limits_{1 \le i,\, j \le n} A^{ij}\, X_i\, X_j \text{ définie négative.} \\[1ex]
\text{Il existe } (a^I) \in W \text{ tel que } A^{\lambda\mu}(0,\, a^I) = \eta^{\lambda\mu} \\
\text{(métrique de Minkowski)} \\[2ex]
\bullet\ f(x^\alpha,\, u^I,\, D_l\, u^I) \text{ est de classe } C^{2m-3} \text{ dans } U \times W \times W' \\
\text{avec } W' \text{ ouvert de } \mathbb{R}^{(n+1)\,N}. \\
\text{Si } n/2+1 < m \le n/2+2, \text{ alors } W' = \mathbb{R}^{(n+1)\,N} \text{ et les } D_{u^I}\, f \\
\text{et } D_{D_\lambda u^I}\, f \text{ sont de classe } C^{2m-3}. \\[2ex]
\bullet\ \phi = (\phi^I) \text{ est continue sur } \mathcal{C}_T;\ \phi^I(0) = a^I \text{ et } \mathcal{C}_T \text{ est caractéristique :} \\[2ex]
A^{00}(s,\, x^i;\, \Phi^I(x^i)) - 2 \sum\limits_{k=1}^{n} A^{0k}(s,\, x^i;\, \Phi^I(x^i))\, \frac{x^k}{s} \\
\quad + \sum\limits_{k,\, l=1}^{n} A^{kl}(s,\, x^i;\, \Phi^I(x^i))\, \frac{x^k\, x^l}{s^2} = 0 \quad \forall\, (x^1, \ldots, x^n) \in \mathcal{V}_T \\[1ex]
\phi \text{ peut s'écrire : } \phi = \bar{\phi}/\mathcal{C}_T + \phi_1, \text{ où } \phi_1 \in \tilde{F}^m(\mathcal{C}_T) \\
\text{et } \bar{\phi} = (\bar{\phi}^I) \in P^{2\,(m-1)}(Y_T) \text{ et est telle que } \bar{\phi}^I(0) = a^I \\
\text{et } D\bar{\phi}(0) = \left(\frac{\partial \bar{\phi}^I}{\partial x^\lambda}(0)\right) \in W'.
\end{array}\right.$$

THÉORÈME 2. – *Sous l'hypothèse* $\mathcal{H}_m$, $m > n/2+1$, *on a :*

1) *la donnée initiale* ϕ *du problème de Cauchy (1.2.8) peut se redécomposer en :*

$$\phi = \bar{u}/\mathcal{C}_T + \tilde{\phi}_1$$

avec :

• $\bar{u} = (\bar{u}^I)$ *appartenant à* $P^{2\,(m-1)}(Y_T)$ *et vérifiant au point 0 l'équation* $(\mathcal{E})$ *et les équations dérivées jusqu'à l'ordre* $2\,(m-2)$*,*

• $\tilde{\phi}_1 \in \tilde{F}^m(\mathcal{C}_T)$.

2) *Il existe* $T_0 \in]0, T]$ *tel que le problème de Cauchy (1.2.8) admet dans le domaine* Y_{T_0} *une solution unique*

$$u = (u^I) \in P^{2(m-1)}(Y_{T_0}) + \tilde{F}^m(Y_{T_0}).$$

Cette solution se décompose en :

$$u = \bar{u} + u_1 \quad \text{avec}\, u_1 \in \tilde{F}^m(Y_{T_0}), \quad u_1(0) = 0, \quad Du_1(0) = 0.$$

3) *Si les* $A^{\lambda\mu}$ *sont* C^∞ *et indépendants de* u *et si* $\phi_1 \in \hat{F}^m(\mathcal{C}_T)$ *alors :*

$$u_1 \in \hat{F}^m(Y_{T_0}).$$

4) *Si* $f(x^\alpha, u, Du)$ *est linéaire en DU, on peut remplacer la condition :*

$$m > n/2 + 1 \quad \text{par } m > n/2.$$

THÉORÈME 3. – *Existence globale dans* Y_T.

Sous les mêmes hypothèses et notations que le théorème 2, on pose :

$$\|\phi\|_{m,T} = |\bar{u}|_m + \|\tilde{\phi}_1\|_{\tilde{F}^m(\mathcal{C}_T)} \quad \text{avec}\, |\bar{u}|_m = \max_{\substack{|\alpha| \leq 2(m-1) \\ I}} |D^\alpha \bar{u}^I(0)|.$$

On suppose en plus :

$f(x^\alpha; 0; 0) = 0$ et les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport aux variables u et Du sont C^{2m-3}.

Alors il existe un réel $d > 0$ tel que si $\|\phi\|_{m,T} \leq d$, la solution $u = \bar{u} + u_1$ est globale, c'est-à-dire $T_0 = T$.

1.2.3. – *Un résultat d'existence globale dans le domaine non borné* Y_∞.

On considère maintenant le problème de Cauchy non linéaire :

$$(1.2.10) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{(\partial x^0)^2} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{(\partial x^i)^2} + au + bu^p = 0 \quad \text{dans } Y_\infty \\ u = \phi \quad \text{sur } \mathcal{C} \end{cases}$$

Hypothèse. – (A_m)

(1.2.11)

$$\begin{cases} \bullet\, n \in \{1,\, 2,\, 3\},\ m \text{ est un entier } \geq 2,\ p \text{ un entier impair} \\ \text{tel que } 1 < p < +\infty \text{ si } n = 1 \text{ ou } 2,\ p = 3 \text{ si } n = 3. \\ \bullet\, a = \bar{a} + a_1,\ b = \bar{b} + b_1,\ \text{avec } \bar{a},\ \bar{b} \text{ fonctions-polynômes sur} \\ \mathbb{R}^{n+1} \text{ et } a_1,\ b_1 \in \hat{F}^{m_1}_{\text{loc}}(Y_\infty) \text{ avec } \mathrm{m}_1 = \max\{\mathrm{m}-1,\ 2\} \\ a > 0 \text{ sur } Y_\infty \text{ et } \left(\frac{\partial a}{\partial x^0}\right)(x^0,\, \cdot) \leq k_1(x^0)\, a \text{ sur } Y_\infty \\ \text{avec } k_1(x^0) \text{ fonction croissante positive de } x^0 \\ b > 0 \text{ sur } Y_\infty \text{ et } \left(\frac{\partial b}{\partial x^0}\right)(x^0,\, \cdot) \leq k_2(x^0)\, b \\ \text{avec } k_2(x^0) \text{ fonction croissante positive de } x^0, \\ \phi = \bar{\phi}/\mathcal{C} + \phi_1 \text{ avec } \bar{\phi} \text{ fonction-polynôme sur } \mathbb{R}^{n+1} \\ \text{et } \phi_1 \in \hat{F}^m_{\text{loc}}(\mathcal{C}). \end{cases}$$

THÉORÈME 4. – *Existence globale dans* Y_∞.

Sous l'hypothèse (A_m), $m \geq 2$, on a :

1) la donnée initiale ϕ du problème de Cauchy (1.2.10) peut se redécomposer en $\phi = \bar{u}/\mathcal{C} + \tilde{\phi}_1$ où :

• $\bar{u}$ est un polynôme sur $\mathbb{R}^{n+1}$ de $d^0 \leq 2\,(m-1)$ vérifiant au point 0 l'équation non linéaire :

$$\frac{\partial^2 w}{(\partial x^0)^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 w}{(\partial x^i)^2} + \bar{a}w + \bar{b}w^p = 0$$

d'inconnu w et les équations dérivées jusqu'à l'ordre $2\,(m-2)$,

• $\tilde{\phi}_1 \in \hat{F}^m_{\text{loc}}(\mathcal{C})$.

2) Le problème de Cauchy non linéaire (1.2.10) admet une solution globale unique u (définie sur Y_∞ tout entier) appartenant à $P^{2\,(m-1)}\,(Y_\infty) + \hat{F}^m_{\text{loc}}\,(Y_\infty)$.

Cette solution se décompose en $u = \bar{u} + u_1$ avec $u_1 \in \hat{F}^m_{\text{loc}}\,(Y_\infty)$.

3) Si de plus on a :

$$a \in C^\infty\,(Y_\infty), \quad b \in C^\infty\,(Y_\infty), \quad \phi \in C^\infty\,(Y_\infty)$$

alors la solution globale $u \in C^\infty\,(Y_\infty)$.

1.3. Remarques

a) A condition de ne pas utiliser les espaces de Sobolev de puissance strictement fractionnaire, les théorèmes 1, 2, 3 et 4 fournissent les meilleurs résultats possibles en ce qui concerne l'ordre de différentiabilité minimum exigé des données et en ce qui concerne l'écart minimum entre l'ordre de différentiabilité des données et celui de la solution; l'extension du théorème 4 au cas $m = 1$ est facile compte tenu des inégalités de Sobolev du chapitre II. Il est évident que, moyennant un affaiblissement convenable des non-linéarités de $A^{\lambda\mu}$ et f par rapport à l'inconnu u, on peut abaisser l'ordre de différentiabilité exigé des données jusqu'à la valeur minimale $m = 1$ (*cf.* partie B de [38] pour des détails sur cet aspect du problème).

b) On peut montrer, comme dans [13], que l'épaisseur T_0 du domaine d'existence Y_{T_0} du problème quasi-linéaire (1.2.8) ne dépend que de la norme :

$$\|\,\phi\,\|_{m_1,T} = |\,a\,|_{m_1} + \|\,\tilde{\phi}_1\,\|_{\tilde{F}^{m_1}\,(Y_T)}$$

avec :

$$|\,a\,|_{m_1} = \max_{|\alpha| \leq 2\,(m_1-1)} |\,D^{\alpha-1}\,u\,(0)\,|,$$

l'entier m_1 étant défini par :

$$m_1 = \begin{cases} \bullet \text{ plus petit entier } > \frac{n}{2} + 1 \text{ dans les cas 2) et 3)} \\ \text{du théorème 2 si } W' = \mathbb{R}^{(n+1)\,N} \\ \bullet \text{ plus petit entier } > \frac{n}{2} + 2 \text{ dans les cas 2) et 3)} \\ \text{du théorème 2 si } W' \subsetneq \mathbb{R}^{(n+1)\,N} \\ \bullet \text{ plus petit entier } > \frac{n}{2} \text{ dans le cas 4)} \\ \text{du théorème 2.} \end{cases}$$

Cette remarque permet de retrouver, par un raisonnement classique, les résultats de régularité C^∞ obtenus dans [12] et [13].

c) Les théorèmes 1, 2 et 3 peuvent s'appliquer aux équations de Yang-Mills-Higgs en jauge de Lorentz, aux équations d'Einstein du vide en coordonnées harmoniques, au système conforme régulier des équations d'Einstein (*cf.* [37] et [38]).

CHAPITRE II

PROPRIÉTÉS DES ESPACES FONCTIONNELS UTILISÉS ET AUTRES PRÉLIMINAIRES TECHNIQUES

2.1. Propriétés

2.1.1 PROPOSITION. – *Les espaces $K^p(Y_t)$, $\tilde{K}^p(\mathcal{C}_t)$, $\tilde{K}^p(Y_t)$, $F^p(Y_t)$, $\tilde{F}^p(Y_t)$, $F'^p(Y_t)$, $\tilde{F}^p(\mathcal{C}_t)$, munis de leur norme respective sont des espaces de Banach.*

Preuves. – *cf.* preuve 1 de l'appendice 2 de [38].

2.1.2. PROPOSITION (*cf.* [20], p. 205). – *Soit (u_k) une suite convergeant faiblement dans l'espace de Hilbert $\tilde{K}^p(Y_t)$ vers une fonction u.*

Soit

$$\langle u_k \rangle = \left\{ v \in \tilde{K}^p(Y_t) \,|\, v = \sum_{\ell=1}^{m} c_\ell\, u_{k_\ell},\ c_\ell \geq 0\ \forall \ell \text{ et } \sum_{\ell=1}^{m} c_\ell = 1,\ m \in N \right\}$$

l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{u_k \,|\, k \in N\}$.

Alors il existe une suite $(\bar{u}_k)_{k \in N}$ d'éléments de $\langle u_k \rangle$ telle que $(\bar{u}_k)$ converge fortement dans $\tilde{K}^p(Y_t)$ vers u.

Preuve. – *cf.* preuve 2 de l'appendice 2 de [38].

2.1.3. THÉORÈME. – (i) *$C_\infty^\infty(\mathcal{V}_t)$ est dense dans $\tilde{K}^p(\mathcal{C}_t)$.*
(ii) *$C_\infty^\infty(Y_t)$ est dense dans $\tilde{K}^p(Y_t)$.*

Preuve. – *cf.* preuve 3 de l'appendice 2 de [38].

2.1.4. THÉORÈME. – *Inégalités de Sobolev.*

Les notations et définitions étant celles introduites ci-dessus dans 1.1, il existe des constantes c strictement positives et indépendantes de (u, v, w, f, t) telles que :

(2.1.1) $$\| v \|_{L^r(G_t)} \leq ct^{n(1/r-1/2)} \| v \|_{H^p(G_t, Y)} \quad \text{si } r \geq 2$$

et $p \geq n(1/2 - 1/r)$

(2.1.2) $$\| v \|_{c^0(G_t)} \leq ct^{-n/2} \| v \|_{H^p(G_t, Y)} \quad \text{si } p > n/2$$

(2.1.3) $$\| u.v \|_{H^p(G_t, Y)} \leq ct^{-n/2} \| u \|_{H^k(G_t, Y)} \cdot \| v \|_{H^l(G_t, Y)}$$

Si $p \leq \min\{k, \ell\}$ et $p < k + \ell - n/2$

(2.1.4) $$\| v \|_{L^r(\Sigma_t)} \leq ct^{(n-1)(1/r-1/2)} \| v \|_{H^p(\Sigma_t, \mathcal{C})}$$

Si $r \geq 2$ et $p \geq (n-1)(1/2 - 1/r)$

(2.1.5) $$\| v \|_{c^0(\Sigma_t)} \leq ct^{-\frac{n-1}{2}} \| v \|_{H^p(\Sigma_t, \mathcal{C})} \quad \text{si } p > \frac{n-1}{2}$$

(2.1.6) $$\| u \cdot v \|_{H^p(\Sigma_t, \mathcal{C})} \leq ct^{-\frac{n-1}{2}} \| u \|_{H^k(\Sigma_t, \mathcal{C})} \cdot \| v \|_{H^\ell,(\Sigma_t, \mathcal{C})}$$

Si $p \leq \min\{k, \ell\}$ et $p < k + \ell - \frac{n-1}{2}$

(2.1.7) $$\| v \|_{c^0(Y_t)} \leq c \| v \|_{F^p(Y_t)} \quad \text{si } p > \frac{n}{2}$$

(2.1.8) $$\| u \cdot v \|_{F^p(Y_t)} \leq c \| u \|_{F^k(Y_t)} \| v \|_{F^\ell(Y_t)}.$$

Si $p \leq \min\{k, \ell\}$ et $p < k + \ell - \frac{n}{2}$

(2.1.9) $$\| u.v \|_{K^p(Y_t)} \leq c \| u \|_{F^k(Y_t)} \| v \|_{K^\ell(Y_t)}.$$

Si $p \leq \min\{k, \ell\}$ et $p < k + \ell - \frac{n}{2}$

$$\| u \cdot v \|_{\tilde{F}^p (Y_t)} \leq c \| u \|_{\tilde{F}^k (Y_t)} \| \; \| v \|_{\tilde{F}^\ell (Y_t)}. \tag{2.1.10}$$

Si $p \leq \min \{k, \ell\}$ et $p < k + \ell - \frac{n}{2}$

$$\| u \cdot v \|_{\tilde{K}^p (Y_t)} \leq c \| u \|_{\tilde{F}^k (Y_t)} \| v \|_{\tilde{K}^\ell (Y_t)}. \tag{2.1.11}$$

Si $p \leq \min\{k, \ell\}$ et $p < k + \ell - \frac{n}{2}$.

Si P est un polynôme sur $\mathbb{R}^{n+1}$, on a aussi

$$\| P \cdot u \|_{\tilde{K}^\ell (Y_t)} \leq c | P |_{2\ell-1} \| u \|_{\tilde{K}^\ell (Y_t)} \quad \text{si } \ell \geq 1 \tag{2.1.12}$$

$$\| P \cdot u \|_{\tilde{F}^\ell (Y_t)} \leq c | P |_{2\ell-1} \| u \|_{\tilde{F}^\ell (Y_t)} \quad \text{si } \ell \geq 1 \tag{2.1.13}$$

avec $| P |_{2\ell-1} = \max\limits_{|\alpha| \leq 2\ell-1} | D^\alpha P (0) |$.

Idée de la preuve du théorème 2.1.4. – Le point essentiel de la démonstration des inégalités du théorème 2.1.4 consiste à préciser la dépendance en t des constantes de Sobolev sur les boules G_t et les $(n-1)$-sphère Σ_t. On y arrive, en se ramenant, par l'intermédiaire d'homothéties convenables de rapport t, à des inégalités de Sobolev sur G_1 et Σ_1 (à constantes de Sobolev indépendantes de t).

Preuve du théorème 2.1.4. – *cf.* preuve 4 de l'appendice 2 de [38].

Quelques théorèmes de substitution

On notera $C_b^k (Y_t \times W)$ l'espace des fonctions numériques f définies sur $Y_t \times W$ et admettant des dérivées jusqu'à l'ordre k continues et bornées sur $Y_t \times W$. $C_b^k (Y_t \times W)$ sera muni de la norme : $\| f \|_{C_b^k (Y_t \times W)} = \sup\limits_{\substack{(x, w) \in Y_t \times W \\ |\alpha| + |\beta| \leq k}} |D_x^\alpha D_w^\beta f (x, w)|$.

2.1.5. THÉORÈME. – *Soient des fonctions* $u_m \in \tilde{F}^p (Y_t)$, $m = 1, \ldots, \ell$.

Soit W un ouvert de R^ℓ. Soit f une fonction numérique définie sur $Y_t \times W$ telle que $f \in C^{2r-1} (Y_t \times W)$ et $f (x, 0) = 0$ $\forall x \in Y_t$. Soit P le polynôme de Taylor d'ordre $2r-1$ au point $(0, 0)$ *de la fonction f et $f_1 = f - P$. Supposons : $f_1 \in C_b^{2r-1} (Y_t \times W)$.*

Supposons :

$$1 \leq r \leq p, \; \frac{n}{2} < p, \quad u (x) = [u_1 (x), \ldots, u_\ell (x)]$$

application de Y_t dans W.

Alors la fonction $f\,[x,\ u\,(x)]$ *de la variable* x*, vérifie l'inégalité :*

$$\| f\,[x,\ u\,(x)]\,\|_{\tilde{F}^r\,(Y_t)} \leq C_t\,(r,\ p)\,\|\, f\,\|_{2r-1,\,t}\,[1 + \|\, u\,\|_{\tilde{F}^p\,(Y_t)}]^{2r-1} \tag{2.1.14}$$

avec :

$$\|\, f\,\|_{2r-1,\,t} = \max\,\{|\, P\,|_{2r-1},\ \|\, f_1\,\|_{c_b^{2r-1}\,(Y_t\times W)}\}$$

et

$$|\, P\,|_{2r-1} = \max_{|\alpha|+|\gamma|\leq 2r-1}\,|\, D_x^\alpha\, D_u^\gamma\, P\,(0,\ 0)\,|.$$

Comme $\tilde{F}^r\,(Y_t)$ s'injecte continûment dans $\tilde{K}^r\,(Y_t)$ on a aussi, vu (2.1.14), l'inégalité :

$$\|\, f\,[x,\ u\,(x)]\,\|_{\tilde{K}^r\,(Y_t)} \leq k_t\,(r,\ p)\,\|\, f\,\|_{2r-1,\,t}\,[1 + \|\, u\,\|_{\tilde{F}^p\,(Y_t)}]^{2r-1}. \tag{2.1.15}$$

Preuve. – *cf.* preuve 8 de l'appendice 2 de [38].

2.1.6. THÉORÈME. – *a) Soit* $f\,\in\,c^{2r-3}\,(Y_t\,\times\,W)$ *(où* W *contient les valeurs* $u\,(x)\,+\,\tau\, v\,(x)\,\forall\,\tau\,\in\,[0,\ 1]$ *avec*

$$u\,(x) = [u_1\,(x),\ \ldots,\ u_\ell\,(x)],\quad v\,(x) = [v_1\,(x),\ \ldots,\ v_\ell(x)]$$

et telle que :

$$f\,(x,\ 0) = 0\ \ \forall x \in Y_t,\quad D_{u_i}\, f \in c^{2r-3}\,(Y_t \times W)\quad \forall i = 1,\ \ldots,\ \ell.$$

$\forall\, i = 1,\ \ldots,\ \ell$, *soit* P_i *le polynôme de Taylor d'ordre* $2\,r - 3$ *au point* $(0,\ 0)$ *de* $D_{u_i}\, f$ *et* $f_i\, =\, D_i\, f\, -\, P_i$.

Supposons :

$$f_i \in c_b^{2r-3}\,(Y_t \times W)\quad \forall i = 1,\ \ldots,\ \ell.$$

$$u_i,\ v_i \in \tilde{F}^p\,(Y_t)\quad \forall i = 1,\ \ldots,\ \ell.$$

Si :

$$2 \leq r \leq p\qquad \text{et}\qquad \frac{n}{2} + 1 < p$$

alors on a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} &\|\, f\,[x,\ u\,(x)] - f\,[x,\ u\,(x) + v\,(x)]\,\|_{\tilde{K}^{r-1}\,(Y_t)} \\ &\quad\leq c_t\,(r,\ p)\ \max_{1\leq i\leq l}\ \|\, D_{u_i}\, f\,\|_{2r-3,\,t}\,[1 + \|\, u\,\|_{\tilde{F}^p(Y_t)} \\ &\qquad + \|\, v\,\|_{\tilde{F}^p\,(Y_t)}]^{2r-3}\|\, v\,\|_{\tilde{K}^{p-1}\,(Y_t)} \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

avec :

$$\| D_{u_i} f \|_{2r-3,\,t} = \max \{ | P_i |_{2r-3},\ \| f_i \|_{C_b^{2r-3}(Y_t \times W)} \};$$

$$| P_i |_{2r-3} = \max_{|\alpha|+|\gamma| \leq 2r-3} | D_x^{\alpha} D_u^{\gamma} P_i (0,\ 0) |.$$

b) Si de plus $z \in \tilde{F}^{p-1}(Y_t)$, *on a l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned} (2.1.17) \qquad & \| \{ f[x,\ u(x)] - f[x,\ u(x) + v(x)] \} z \|_{\tilde{K}^{r-1}(Y_t)} \\ & \leq c_t(r,\ p) \max_{1 \leq i \leq l} \| D_{u_i} f \|_{2r-3,\,t} [1 + \| u \|_{\tilde{F}^p(Y_t)} \\ & \quad + \| v \|_{\tilde{F}^p(Y_t)}]^{2r-3} \| v \|_{\tilde{K}^{p-1}(Y_t)} \| z \|_{\tilde{F}^{p-1}(Y_t)}. \end{aligned}$$

c) Si en plus des hypothèses de a), on suppose que :

$r \leq p-1,\quad z \in \tilde{F}^{p-2}(Y_t),\quad f \in C^{2r-1}(Y_t \times W),\quad D_{u_i} f \in C^{2r-1}(Y_t \times W)$
$\forall\, i = 1,\ \ldots,\ \ell$ et $g_i \in C_b^{2r-1}(Y_t \times W)\,\forall\, i = 1,\ \ldots,\ \ell$

avec $g_i = D_{u_i} f - Q_i$, Q_i *étant le polynôme de Taylor d'ordre* $2r - 1$ *au point* $(0,\ 0)$ *de* $D_{u_i} f$, *on a l'inégalité :*

$$\begin{aligned} (2.1.18) \qquad & \| \{ f[x,\ u(x)] - f[x,\ u(x) + v(x)] \} z \|_{\tilde{K}^{r-1}(Y_t)} \\ & \leq c_t(r,\ p) \max_{1 \leq i \leq \ell} \| D_{u_i} f \|_{2r-1,\,t} [1 + \| u \|_{\tilde{F}^p(Y_t)} \\ & \quad + \| v \|_{\tilde{F}^p(Y_t)}]^{2r-1} \| v \|_{\tilde{K}^{p-1}(Y_t)} \| z \|_{\tilde{F}^{p-2}(Y_t)} \end{aligned}$$

avec :

$$\| D_{u_i} f \|_{2r-1,\,t} = \max \{ | Q_i |_{2r-1},\ \| g_i \|_{C_b^{2r-1}(Y_t \times W)} \}$$

$$| Q_i |_{2r-1} = \max_{|\alpha|+|\gamma| \leq 2r-1} | D_x^{\alpha} D_u^{\gamma} Q_i (0,\ 0)).$$

d) Les inégalités (2.1.16), (2.1.17) et (2.1.18) précédentes demeurent vraies si on y remplace $\|\ \ \|_{\tilde{K}^{r-1}}$, $\|\ \ \|_{\tilde{K}^{p-1}(Y_t)}$ *respectivement par* $\|\ \ \|_{\tilde{F}^{r-1}(Y_t)}$, $\|\ \ \|_{\tilde{F}^{p-1}(Y_t)}$.

Preuve. – *cf.* preuve 9 de l'appendice 2 de [38].

Les inégalités (2.1.16) et (2.1.17) du théorème 2.1.6 peuvent être généralisées au cas où $\frac{n}{2} < p \leq \frac{n}{2} + 1$ sous la forme suivante :

2.1.7. THÉORÈME. – *a) Les notations étant celles du théorème 2.1.6, supposons :*

$$u_i,\ v_i \in \tilde{F}^p(Y_t) \quad i = 1,\ \ldots,\ \ell.$$

$f \in C^{2r-3}(Y_t \times W)$ *où* W *contient les valeurs* $u(x) + \tau\, v(x)\ \forall\, \tau \in [0,\ 1]$ $(u(x) = [u_1(x),\ \ldots,\ u_\ell(x)],\ v(x) = [v_1(x),\ \ldots,\ v_\ell(x)])$; $f(x,\ 0) = 0$ $\forall\, x \in Y_t$, $D_{u_i} f \in C^{2r-3}(Y_t \times W)$, $f_i \in C_b^{2r-3}(Y_t \times W)\quad i = 1,\ \ldots,\ \ell$.

Si :

$$2 \leq r \leq p \quad et \quad \frac{n}{2} < p \leq \frac{n}{2} + 1,$$

alors on a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}(2.1.19) \quad & \| f[x, u(x)] - f[x, u(x) + v(x)] \|_{\tilde{K}^{r-1}(Y_t)} \\ & \leq C_t(r, p) \max_{1 \leq i \leq \ell} \| D_{u_i} f \|_{2r-3, t} [1 + \| u \|_{\tilde{F}^p(Y_t)} \\ & + \| v \|_{\tilde{F}^{p-1}(Y_t)}]^{2r-3} \| v \|_{\tilde{K}^p(Y_t)}.\end{aligned}$$

b) Si de plus $f \in C^{2r-1}(Y_t \times W)$, $D_{u_i} f \in C^{2r-1}(Y_t \times W)$, $g_i \in C_b^{2r-1}(Y_t \times W)$ $i = 1, \ldots, \ell$, *alors on a l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned}(2.1.20) \quad & \| f[x, u(x)] - f[x, u(x) + v(x)] \|_{\tilde{K}^{r-1}(Y_t)} \\ & \leq C_t(r, p) \max_{1 \leq i \leq \ell} \| D_{u_i} f \|_{2r-1, t} [1 + \| u \|_{\tilde{F}^p(Y_t)} \\ & + \| v \|_{\tilde{F}^p(Y_t)}]^{2r-1} \| v \|_{\tilde{K}^{p-1}(Y_t)}.\end{aligned}$$

c) Les inégalités (2.1.19) et (2.1.20) demeurent vraies si on remplace $\| \ \|_{\tilde{K}^{r-1}(Y_t)}$, $\| \ \|_{\tilde{K}(Y_t)}$, $\| \ \|_{\tilde{K}^{p-1}(Y_t)}$ *respectivement par* $\| \ \|_{\tilde{F}^{r-1}(Y_t)}$, $\| \ \|_{\tilde{F}^p(Y_t)}$, $\| \ \|_{\tilde{F}^{p-1}(Y_t)}$.

Preuve. – *cf.* preuve 10 de l'appendice 2 de [38].

2.1.8. THÉORÈME. – *Soit m un entier ≥ 1. Soit C_T le demi-conoïde de $\mathbb{R}^{n+1}$ d'équation :*

$$x^0 = s, \ 0 \leq x^0 \leq T \quad avec\ s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2}.$$

Soit G une fonction définie sur C_T de la forme suivante :

$$G(s, x^1, \ldots, x^n) = \sum_{k=0}^{2(m-1)} G_k(s, x^1, \ldots, x^n)$$

avec G_k fraction rationnelle homogène de $x^1, \ldots, x^n, s$, de degré k, de dénominateur s^ℓ.

Alors, si de plus $G \in \tilde{K}^m(C_T)$, G est identiquement nulle.

Preuve. – *cf.* preuve 11 de l'appendice 2 de [38].

2.2. Sur les conditions (1.2.4) et (1.2.9) des problèmes de Cauchy caractéristiques (1.2.1) et (1.2.8)

(i) Considérons d'abord le problème de Cauchy linéaire (1.2.1) sous les hypothèses (1.2.2). Il découle de (1.2.2) et (1.2.4) que :

$\mathcal{C}$ est un conoïde *isotrope* par rapport à $(\bar{A}^{\alpha\beta})$, ce qui signifie :

$$\left\{\begin{array}{l} G(s, x^1, \ldots, x^n) \equiv \bar{A}^{00}(s, x^1, \ldots, x^n) \\ \quad -2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \bar{A}^{0i}(s, x^1, \ldots, x^n)\,\frac{x^i}{s} \\ \quad +\displaystyle\sum_{1\le i,\, j\le n}^{n} \bar{A}^{ij}(s, x^1, \ldots, x^n)\,\frac{x^i\,x^j}{s^2} = 0 \\ \forall (s, x^1, \ldots, x^n) \in \mathcal{C}_T. \end{array}\right. \tag{2.2.1}$$

En effet, G est une fonction définie sur $\mathcal{C}_T$, qui peut se mettre sous la forme $G = \sum_{k=0}^{2(m_2-1)} G_k$, G_k étant une fraction rationnelle homogène de $x^1, \ldots, x^n, s$, de degré k, de dénominateur s^ℓ. De plus d'après (1.2.2) et (1.2.4), on a $G \in \tilde{K}^{m_2}(\mathcal{C}_T)$. on en déduit, d'après le théorème 2.1.8, que G est identiquement nulle.

(ii) Considérons maintenant le problème de Cauchy quasi-linéaire (1.2.8) sous l'hypothèse (1.2.9).

Soit $\bar{A}^{\lambda\mu}(x^\alpha)$ le polynôme de Taylor d'ordre $2(m-1)$ de $A^{\lambda\mu}(x^\alpha, \bar{\phi}(x^\alpha))$ au point $(x^\alpha) = 0$.

Soit

$$\begin{aligned} G(s, x^i, \ldots, x^n) = {} & \bar{A}^{00}(s, x^1, \ldots, x^n) \\ & - 2\sum_{i=1}^{n} \bar{A}^{0i}(s, x^1, \ldots, x^n)\,\frac{x^i}{s} \\ & + \sum_{1\le i,\, j\le n} \bar{A}^{ij}(s, x^1, \ldots, x^n)\,\frac{x^i\,x^j}{s^2}. \end{aligned}$$

Comme dans (i), on montre, à l'aide du théorème 2.1.8 que l'hypothèse (1.2.9) entraîne :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{C}_T \text{ est un conoïde isotrope par rapport à } (\bar{A}^{\alpha\beta}) \\ \text{c'est-à-dire que } G \text{ est identiquement nulle sur } \mathcal{C}_T. \end{array}\right. \tag{2.2.2}$$

2.3. Deux lemmes

2.3.1. LEMME. – *Soit* $\alpha \in]-\infty, 0[$. *Soit* f *une fonction numérique définie dans* $[0, t]$ *telle que :*

$$f \in L^2([0, t]) \quad et \quad \tau^\alpha f(\tau) \in L^\infty([0, t]).$$

Alors f *vérifie l'inégalité suivante :*

$$t^{\alpha-1/2}\left(\int_0^t f^2(\tau)\,d\tau\right)^{1/2} \leq \operatorname*{Ess\,Sup}_{\tau\in]0,t]} \tau^\alpha\,|f(\tau)|$$

Preuve évidente.

2.3.2 LEMME DE GRONWALL. – *Soient* a, b, c *et* x *quatre fonctions positives dans* $[0, T]$ *telle que* a *est intégrable,* b *et* x *sont de carré intégrable et* c *est croissante. Alors l'inégalité intégrale :*

$$x^2(t) \leq k_1\left[c^2(t) + \int_0^t x(\tau)\,a(\tau)\,d\tau + \int_0^t x^2(\tau)\,b(\tau)\,d\tau\right]$$
$$\forall t \in [0, T]$$

entraîne que :

$$x(t) \leq k_2\, e^{k_3 t^{1/2}\left(\int_0^t b^2(\tau)\,d\tau\right)^{1/2}}\left[c(t) + \int_0^t a(\tau)\,d\tau\right]$$

k_2, k_3 *étant des constantes* > 0, *ne dépendant que de* T *et de la constante* k_1.

CHAPITRE III

RÉSULTAT D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ POUR LE PROBLÈME DE CAUCHY LINÉAIRE (1.2.1) : PREUVE DU THÉORÈME 1

3.1. Définition et propriété de deux constantes h_1 et h_2 associées à une métrique hyperbolique de classe C^0 dans un domaine Y_T.

Soit T un réel > 0. Soit $(A^{\lambda\mu})$ une métrique hyperbolique sur Y_T de classe C^0 et telle que :

$$(3.1.1)\quad \begin{cases} \text{Sur } Y_T, \quad \text{on a : } A^{00} > 0 \qquad \text{et} \qquad \displaystyle\sum_{1\leq i,\,j\leq n} A^{ij}\,X_i\,X_j < 0 \\ \forall\,(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\} \end{cases}$$

On associe à la métrique hyperbolique $(A^{\lambda\mu})$ la métrique définie positive $(\gamma^{\lambda\mu})$ définie sur Y_T par:

$$\gamma^{00} = A^{00}, \quad \gamma^{0i} = 0, \quad \gamma^{ij} = -A^{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n. \tag{3.1.2}$$

On pose:

$$\left\{\begin{array}{l} S = \text{sphère-unité de } \mathbb{R}^{n+1} \\ h_1 = \inf\limits_{\substack{(x^\alpha)\in Y_T \\ (p_\lambda)\in S}} \gamma^{\lambda\mu}(x^\alpha)\, p_\lambda\, p_\mu; \quad h_2 = \sup\limits_{\substack{(x^\alpha)\in Y_T \\ (p_\lambda)\in S}} \gamma^{\lambda\mu}(x^\alpha)\, p_\lambda\, p_\mu \end{array}\right. \tag{3.1.3}$$

Alors, Y_T étant un domaine fermé borné de $\mathbb{R}^{n+1}$, donc un compact de $\mathbb{R}^{n+1}$ et les $(A^{\lambda\mu})$ étant continues dans Y_T, la condition (3.1.1) entraîne que h_1 et h_2 sont des réels > 0 tels que pour tout $X = (X_0, X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et pour tout $(x^\alpha) \in Y_T$, on a:

$$h_1 \sum_{\alpha=0}^{n} (X_\alpha)^2 \leq \gamma^{\lambda\mu}(x^\alpha)\, X_\lambda\, X_\mu \leq h_2 \sum_{\alpha=0}^{n} (X_\alpha)^2 \tag{3.1.4}$$

3.2. LEMME. – *Inégalité fondamentale pour la métrique* $(A^{\lambda\mu})$

Soit $(A^{\lambda\mu})$ une métrique hyperbolique de classe C^1 dans Y_T, vérifiant (3.1.1) et l'hypothèse suivante:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{C}_T \text{ est un conoïde } isotrope \text{ par rapport à } (A^{\lambda\mu}), \\ \text{ce qui signifie :} \\ A^{00}(s, x^1, \ldots, x^n) - \sum\limits_{i=1}^{n} 2\, A^{0i}(s, x^1, \ldots, x^n)\, \dfrac{x_i}{s} \\ \quad + \sum\limits_{1\leq i, j\leq n} A^{ij}(s, x^1, \ldots, x^n)\, \dfrac{x^i\, x^j}{s^2} = 0 \\ \forall\, (x^1, \ldots, x^n) \in \mathcal{V}_T \end{array}\right. \tag{3.2.1}$$

Soit $v \in C^\infty(Y_T)$.

Alors v vérifie l'inégalité suivante pour tout $t \in]0, T]$:

$$\|v\|^2_{H^1(G_t, Y)} \leq C \left[\int_0^t a(\tau) \left(\|v\|_{H^1(G_\tau, Y)} \right)^2 d\tau + \int_{Y_t} |P[v]|\, dx^0 \ldots dx^n + \int_0^t \left(\|v\|_{H^1(\Sigma_\tau, C)} \right)^2 d\tau \right] \tag{3.2.2}$$

où :

$$a(\tau) = \max\{1, b(\tau)\} \qquad \text{avec} \quad b(\tau) = \sup_{\substack{\lambda, \mu, \nu \\ x^\alpha \in G_\tau}} \left| \frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} \right| (x^\alpha),$$

$$P[v] = \frac{\partial v}{\partial x^0} \cdot A^{\lambda\mu} \frac{\partial^2 v}{\partial x^\lambda \partial x^\mu},$$

C est une fonction croissante de T, $\frac{1}{h_1}$ et h_2.

Preuve. – On a

$$\text{(1)} \qquad P[v] = \frac{\partial}{\partial x^0} \left\{ \frac{1}{2} A^{00} \left(\frac{\partial v}{\partial x^0} \right)^2 - \frac{1}{2} A^{ij} \frac{\partial v}{\partial x^i} \frac{\partial v}{\partial x^j} \right\}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ A^{0i} \left(\frac{\partial v}{\partial x^0} \right)^2 + A^{ij} \frac{\partial v}{\partial x^0} \frac{\partial v}{\partial x^j} \right\}$$
$$+ \sum_{\nu, \lambda, \alpha, \beta, \gamma \in \{0, \ldots, n\}} C_{\nu, \lambda, \alpha, \beta, \gamma} \frac{\partial A^{\nu\lambda}}{\partial x^0} \cdot \frac{\partial v}{\partial x^\beta} \frac{\partial v}{\partial x^\gamma}$$

où les $C_{\nu, \lambda, \alpha, \beta, \gamma}$ sont des constantes indépendantes de $(A^{\lambda\mu})$, v et T.

En intégrant (1) sur Y_t, on obtient, grâce à la formule de Stokes-Gauss, et en tenant compte de l'hypothèse (3.2.1), de la définition de $(\gamma^{\lambda\mu})$ et des inégalités (3.1.4) :

$$\text{(2)} \qquad \int_{G_t} \sum_{\alpha=0}^{n} \left(\frac{\partial v}{\partial x^\alpha} \right)^2 dx^1 \ldots dx^n$$
$$\leq C_1 \left[\int_0^t b(\tau) \left(\|v\|_{H^1(G_\tau, Y)} \right)^2 d\tau \right.$$
$$\left. + \int_{Y_t} |P[v]| dx^0 \ldots dx^n + \int_0^t \left(\|v\|_{H^1(\Sigma_\tau, C)} \right)^2 d\tau \right],$$

C_1 étant une constante > 0, fonction croissante de T, h_1^{-1} et h_2. D'autre part, en intégrant sur Y_t l'identité :

$$\text{(3)} \qquad 2v \frac{\partial v}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial x^0} \{v^2\}$$

On obtient, grâce à la formule de Stokes-Gauss :

$$(4)\qquad \int_{G_t} v^2\, dx^1 \dots dx^n \\ \leq 2\left[\int_0^t \left(\|v\|_{H^1(G_\tau, Y)}\right)^2 d\tau + \int_0^t \left(\|v\|_{H^1(\Sigma_\tau, \mathcal{C})}\right)^2 d\tau\right],$$

En ajoutant membre à membre (2) et (4), on obtient l'inégalité (3.2.2) du lemme 3.2.

3.3. THÉORÈME. – *Premières inégalités énergétiques.*

Soient :

• m_0, m_1, m_2, m des entiers naturels vérifiant les conditions $m_i > \frac{n}{2} + i - 1\ \forall\, i \in \{0, 1, 2\}$ et $2 \leq m \leq \min\limits_{0 \leq i \leq 2} \{m_i\} + 1$

• K une constante > 0

• $u = (u^I)$ une fonction vectorielle sur Y_T tels que :

1) u est une solution de l'équation $(\mathcal{E})$:

$$L[u] \equiv A^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha\, \partial x^\beta} + B^\lambda \frac{\partial u}{\partial x^\lambda} + C \cdot u = F$$

avec :

2) $A^{\alpha\beta}$, B, C, $F \in C^\infty(Y_T)$ et $u = \bar{u} + u_1 \in C^\infty(Y_T)$, $\bar{u}$ étant le polynôme de Taylor à l'ordre $2(m-1)$ de u au point 0 ; $\|A^{\alpha\beta}\|_{K^{m_2}(Y_T)} < K$, $\|B\|_{K^{m_1}(Y_T)} < K$, $\|C\|_{K^{m_0}(Y_T)} < K$.

3) les $(A^{\alpha\beta})$ vérifiant les hypothèses (3.1.1) et (3.2.1).

Conclusion. – Il existe des constantes $c > 0$, fonctions croissantes de T, K, h_1^{-1}, h_2 telles que pour tout $t \in]0, t]$, on a :

$$(3.3.1)\qquad \|v\|_{H^1(Y_t)} \leq C\left[\|u\|_{H^1(\mathcal{C}_t)} + t^{1/2}\|F\|_{L^2(Y_t)}\right]$$

$$(3.3.2)\qquad \|u\|_{F^m(Y_t)} \\ \leq C\left[|u_1|_{m, \mathcal{C}_t} + t^{1/2}\|u_1\|_{m, \mathcal{C}_t} + t^{1/2}\|R\|_{K^{m-1}(Y_t)}\right]$$

avec : $|u_1|_{m, \mathcal{C}_t} = \sum\limits_I \sum\limits_{i=0}^m \left(\int_0^t \tau^{-n-2i} \|u_1^I\|_{H^{m-i}(\Sigma_\tau, \mathcal{C})}\, d\tau\right)^{1/2}$;

$$\|u_1\|_{m, \mathcal{C}_t} = \sum_I \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=0}^{m-k} \operatorname{Ess} \sup_{\tau \in]0, t]} \tau^{-\frac{n-1}{2}} \|s^{-i} [\partial_0^k u_1^I]\|_{H^{m-k-i} (\Sigma_\tau, \mathcal{C})}$$

$$R = F - A^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - B^\lambda \frac{\partial \bar{u}}{\partial x^\lambda} - C \bar{u}$$

(*cf.* (3.1.6) pour une définition de h_1 et h_2).

Preuve.

Convention. – Les constantes $C > 0$ qui interviennent dans les inégalités qui apparaissent dans les preuves ci-dessous, seront toutes des fonctions croissantes de T, h_1^{-1}, h_2 et K.

Preuve de (3.3.1). – Il découle d'une variante évidente des calculs de la preuve de l'inégalité (3.3.2) dans le cas $m = 1$ [*cf.* notamment l'inégalité (13) de cette preuve] que:

(1) $$\|u\|^2_{H^1 (G_\tau, Y)} \leq C_1 [\|u\|^2_{H^1 (\mathcal{C}_\tau)} + \tau \|F\|^2_{L^2 (Y_\tau)}]$$

L'intégration de (1) par rapport à τ sur $]0, t]$ donne immédiatement l'inégalité (3.3.1).

Preuve de (3.3.2). – Il existe une constante $c_2 > 0$ ne dépendant que de m et n telle que:

(2) $$c_2 \sum_{|\alpha| \leq m-1} \|D^\alpha u_1\|^2_{H^1 (G_{t_1}, Y)} \leq \|u_1\|^2_{H^m (G_{t_1}, Y)} \leq \sum_{|\alpha| \leq m-1} \|D^\alpha u_1\|^2_{H^1 (G_{t_1}, Y)}$$

L'application de l'inégalité fondamentale (3.3.2) du lemme 3.2 aux fonctions vectorielles $V = D^\alpha u_1$ pour $|\alpha| \leq m - 1$ donne:

(3) $$\sum_{|\alpha| \leq m-1} \|D^\alpha u_1\|^2_{H^1 (G_{t_1}, Y)} \leq C_3 \Bigg[\sum_{|\alpha| \leq m-1} \int_0^{t_1} a(\tau) (\|D^\alpha u_1\|_{H^1 (G_{t_1}, Y)})^2 \, d\tau + \sum_{|\alpha| \leq m-1} \int_{Y_{t_1}} |P [D^\alpha u_1]| dx^0 \ldots dx^n + \sum_{|\alpha| \leq m-1} \int_0^{t_1} (\|D^\alpha u_1\|_{H^1 (\Sigma_\tau, \mathcal{C})})^2 \, d\tau \Bigg]$$

Estimation de $\sum_{|\alpha|\leq m-1} \int_{Y_{t_1}} |P[D^\alpha u_1]| dx^0 \dots dx^n$.

On a pour $|\alpha| \leq m-1$:

$$P(D^\alpha u_1) = \frac{\partial}{\partial x^0}(D^\alpha u_1) A^{\lambda\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\mu}(D^\alpha u_1)$$

c'est-à-dire, compte tenu du fait que u est une solution de l'équation $(\mathcal{E})$:

$$\begin{aligned} P[D^\alpha u_1] &= \frac{\partial}{\partial x^0}(D^\alpha u_1)\left\{D^\alpha\left(A^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^\lambda \partial x^\mu}\right) + L_A^\alpha\right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^0}(D^\alpha u_1)(L_A^\alpha + L_B^\alpha + L_C^\alpha + D^\alpha R) \end{aligned} \tag{4}$$

où

$$\left\{\begin{array}{l} L_A^\alpha = \text{somme de termes } D^\beta A \cdot D^\nu u_1 \\ \quad (|\beta| \leq |\alpha| \text{ et } |\beta| + |\nu| \leq |\alpha| + 2) \\ L_B^\alpha = \text{somme de termes } D^\beta B \cdot D^\nu u_1 \\ \quad (|\beta| \leq |\alpha| \text{ et } |\beta| + |\nu| \leq |\alpha| + 1) \\ L_C^\alpha = \text{somme de termes } D^\beta C \cdot D^\nu u_1 \\ \quad (|\beta| \leq |\alpha| \text{ et } |\beta| + |\nu| \leq |\alpha|) \\ (\text{voir l'énoncé du théorème 3.3 pour une définition de } R) \end{array}\right. \tag{5}$$

On a donc:

$$\begin{aligned} \int_{Y_t} |P[D^\alpha u_1]| dx^0 \dots dx^n &= \int_0^t \left\{\int_{G_\tau} |P[D^\alpha u_1]| dx^1 \dots dx^n\right\} d\tau \\ &= \int_0^t \left\{\int_{G_\tau} \left|\frac{\partial}{\partial x^0}(D^\alpha u_1)(L_A^\alpha + L_B^\alpha + L_C^\alpha + D^\alpha R)\right| dx^1 \dots dx^n\right\} d\tau \\ &\leq C_4 \int_0^t \left\|\frac{\partial}{\partial x^0}(D^\alpha u_1)\right\|_{L^2(G_\tau)} \\ &\times \left\{\|L_A^\alpha\|_{L^2(G_\tau)} + \|L_B^\alpha\|_{L^2(G_\tau)} + \|L_C^\alpha\|_{L^2(G_\tau)} + \|D^\alpha R\|_{L^2(G_\tau)}\right\} d\tau \end{aligned} \tag{6}$$

Compte tenu des expressions (5), l'évaluation en norme des quantités L_A^α, L_B^α, L_C^α, $D^\alpha R$ s'effectue grâce aux inégalités de Sobolev consignées dans le théorème 2.1.4. On obtient alors:

(7)

$$\sum_{|\alpha|\leq m-1} \int_{Y_{t_1}} |P[D^\alpha u_1]| dx^0 \ldots dx^n \leq C_5 \int_0^{t_1} \|u_1\|_{H^m(G_\tau, Y)}$$
$$\times \Big[\|F\|_{H^{m-1}(G_\tau, Y)} + \|u_1\|_{H^m(G_\tau, Y)} \tau^{-n/2}$$
$$\times \Big(\|A^{\lambda\mu}\|_{H^{m_2}(G_\tau, Y)} + \|B\|_{H^{m_1}(G_\tau, Y)} + \|C\|_{H^{m_0}(G_\tau, Y)} \Big) \Big] d\tau.$$

En substituant (7) dans (3), puis (3) dans (2), on obtient pour tout $t_1 \in]0, T]$:

$$(8) \quad \|u_1\|^2_{H^m(G_{t_1}, Y)} \leq C_6 \Big[\int_0^{t_1} b_m(\tau) \|u_1\|_{H^m(G_\tau, Y)} d\tau + \int_0^{t_1} a_m(\tau) \|u_1\|^2_{H^m(G_\tau, Y)} d\tau + \bar{c}_m(t_1) \Big]$$

avec :

$$(9)\ a_m(\tau) = a(\tau) + \tau^{-n/2} \Big(\|A^{\lambda\mu}\|_{H^{m_2}(G_\tau, Y)} + \|B\|_{H^{m_1}(G_\tau, Y)} + \|C\|_{H^{m_0}(G_\tau, Y)} \Big)$$

$$(10) \qquad b_m(\tau) = \|R\|_{H^{m-1}(G_\tau, Y)}$$

(11) $\qquad \bar{c}_m(t_1) = \|D^{[m-1]} u_1\|_{H^1(C_{t_1})}$ (*cf.* notations 1.1),

L'application du lemme 2.2.2 à (8) donne :

$$(12) \quad \|u_1\|_{H^m(G_{t_1}, Y)} \leq K_1 e^{k_2 t_1^{1/2} \left(\int_0^{t_1} a_m^2(\tau) d\tau \right)^{1/2}} \times \left[\bar{c}_m(t_1) + t_1^{1/2} \left(\int_0^{t_1} b_m^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} \right]$$

c'est-à-dire, en revenant aux définitions de $a_m(\tau)$, $b_m(\tau)$, $c_m(\tau)$:

$$(13) \qquad \|u_1\|_{H^m(G_{t_1}, Y)} \leq C_7 [t_1^{1/2} \|R\|_{H^{m-1}(Y_{t_1})} + \|D^{[m-1]} u_1\|_{H^1(C_{t_1})}]$$

D'autre part, on montre (*cf.* formule (4.7.1) de [13]) que :

$$
\begin{aligned}
(14) \qquad & \|D^{[m-1]} u_1\|_{H^1(\mathcal{C}_{t_1})} \\
& \leq C_8 \sum_I \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{m-k} \|s^{-i}\,[\partial_0^k u_1^I]\|_{H^{m-k-i}(\mathcal{C}_{t_1})} \\
& \leq C_9 \sum_I \sum_{i=0}^{m} \left(\int_0^{t_1} \tau^{-2i} \|[u_1^I]\|^2_{H^{m-i}(\Sigma_\tau, \mathcal{C})}\, d\tau \right)^{1/2} \\
& \quad + C_{10} \sum_I \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=0}^{m-k} \|s^{-i}\,[\partial_0^k u_1^I]\|_{H^{m-k-i}(\mathcal{C}_{t_1})}
\end{aligned}
$$

En substituant (14) dans (13) et en multipliant l'inégalité résultante par $t_1^{-n/2}$ et en prenant Ess sup sur $(0,\ t]$, on trouve finalement, grâce au lemme 2.2.1, l'inégalité (3.3.2).

Remarque. – Il découle des calculs de la preuve précédente, notamment de l'inégalité (8) de cette preuve que toute solution u de l'équation $A^{\alpha\beta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta} + B^\lambda\,\frac{\partial u}{\partial x^\lambda} + C\,u = F$ dans Y_T vérifie l'inégalité intégrale suivante, $\forall\, t \in (0,\ T]$:

$$
\begin{aligned}
(3.3.3) \quad \|u\|^2_{H^m(G_t, Y)} \leq c \Bigg[& \int_0^t b_m(\tau)\, \|u\|_{H^m(G_\tau, Y)} \\
& + \int_0^t a_m(\tau)\, \|u\|^2_{H^m(G_\tau, Y)} + \bar{c}_m(t) \Bigg]
\end{aligned}
$$

avec :

$$
\begin{aligned}
a_m(\tau) &= a(\tau) + \\
& \tau^{-n/2} \Big(\|A^{\lambda\mu}\|_{H^{m_2}(G_\tau, Y)} + \|B\|_{H^{m_1}(G_\tau, Y)} + \|C\|_{H^{m_0}(G_\tau, Y)} \Big)
\end{aligned}
$$

$$
b_m(\tau) = \|F\|_{H^{m-1}(G_\tau, Y)}\,; \quad \bar{c}_m(t) = \|D^{[m-1]} u\|_{H^1(\mathcal{C}_t)}
$$

3.4. THÉORÈME. – *Un résultat d'unicité. Soient* m_0, m_1, m_2 *des entiers naturels tels que :*

$$
m_i > \frac{n}{2} + i - 1 \quad \forall\, i \in \{0,\ 1,\ 2\} \qquad \textit{et} \qquad 2 \leq m \leq \min_{0 \leq i \leq 2} \{m_i\} + 1.
$$

Alors, sous les hypothèses (1.2.2), (1.2.3) et (1.2.4), le problème de Cauchy (1.2.1) admet au plus une solution u vérifiant la condition de structure :

$(\star)$: $u = \bar{u} + u_1$ avec $(\bar{u},\, u_1) \in C^\infty(Y_T) \times \tilde{K}^m(Y_T)$.

Preuve. – Il suffit de montrer que sous les hypothèses (1.2.2), (1.2.3) et (1.2.4) le problème de Cauchy linéaire suivant :

$$(1)\qquad \begin{cases} A^{\lambda\mu}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^\lambda\,\partial x^\mu} + B^\lambda\,\dfrac{\partial u}{\partial x^\lambda} + C\,u = 0 \\[2ex] u/\mathcal{C} = 0 \end{cases}$$

admet la seule solution $u = 0$, qui vérifie $(\star)$.

Soit donc $u = \bar{u} + u_1$, avec $\bar{u} \in C^\infty(Y_T)$ et $u_1 \in \tilde{K}^m(Y_T)$, une solution de (1).

Soient : $(u_{1,k})$, $(B_{1,k})$, $(C_{1,k})$ des suites d'éléments de $C^\infty_\infty(Y_T)$ convergeant dans les espaces respectifs $\tilde{K}^m(Y_T)$, $\tilde{K}^{m_1}(Y_T)$, $\tilde{K}^{m_0}(Y_T)$ vers les limites respectives u_1, B_1, C_1. Soit $(\phi_{1,k})$ la suite d'éléments de $C^\infty_\infty(\mathcal{V}_T)$ définie par $\phi_{1,n} = u_{1,n}/\mathcal{C}$.

Soit : $(A^{\lambda\mu}_{1,k})$ une suite d'éléments de $C^\infty_\infty(Y_T)$ convergeant vers $A^{\lambda\mu}_1$ dans $\tilde{K}^{m_2}(Y_T)$. Montrons qu'on peut toujours choisir la suite $(A^{\lambda\mu}_{1,k})$ de façon que, $\forall\, k$, $\mathcal{C}$ soit un conoïde isotrope relativement à la métrique $(A^{\lambda\mu}_k)$ avec $A^{\lambda\mu}_k = \bar{A}^{\lambda\mu} + A^{\lambda\mu}_{1,k}$.

En effet, $\forall\,(\lambda,\, \mu) \neq (0,\, 0)$, soit $(A^{\lambda\mu}_{1,k})$ une suite d'éléments de $C^\infty_\infty(Y_T)$ convergeant dans $\tilde{K}^{m_2}(Y_T)$ vers $A^{\lambda\mu}_1$. Soit $(\tilde{A}^{00}_{1,k})$ une suite d'éléments de $C^\infty_\infty(Y_T)$ convergeant dans $\tilde{K}^{m_2}(Y_T)$ vers A^{00}_1. Posons alors :

$$(2)\qquad \begin{aligned} &A^{00}_{1,k}(x^0,\, x^1,\, \ldots,\, x^n) \\ &\quad = \tilde{A}^{00}_{1,k}(x^0,\, x^1,\, \ldots,\, x^n) - \tilde{A}^{00}_{1,k}(s,\, x^1,\, \ldots,\, x^n) \\ &\qquad + 2\sum_{i=1}^{n} A^{0i}_{1,k}(s,\, x^1,\, \ldots,\, x^n)\,\frac{x^i}{s} \\ &\qquad - \sum_{1\le i,\, j\le n} A^{ij}_{1,k}(s,\, x^1,\, \ldots,\, x^n)\,\frac{x^i\, x^j}{s^2} \end{aligned}$$

Alors, compte tenu de (1.2.4) et (2.2.1) [qui découle de (1.2.2) et (1.2.4)], on a:

$$A_{1,k}^{00} \vdash A_1^{00} \quad \text{dans } \tilde{K}^{m_2}(Y_T) \tag{3}$$

et $\mathcal{C}$ est isotrope relativement à $(A_{1,k}^{\lambda\mu})$.

Posons maintenant:

$$\begin{gathered} A_k^{\lambda\mu} = \bar{A}^{\lambda\mu} + A_{1,k}^{\lambda\mu}\,; \quad B_k = \bar{B} + B_{1,k}\,; \\ C_k = \bar{C} + C_{1,k}\,; \quad u_k = \bar{u} + u_{1,k} \end{gathered} \tag{4}$$

$$F_{1,k} = A_k^{\lambda\mu} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^\lambda \, \partial x^\mu} + B_k^\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x^\lambda} + C_k\, u_k\,; \tag{5}$$

$$\phi_k = \bar{u}/\mathcal{C} + u_{1,k/\mathcal{C}}$$

On a alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_k^{\lambda\mu} \vdash A^{\lambda\mu} \quad \text{dans } K^{m_2}(Y_T) \\ B_k \vdash B \quad \text{dans } K^{m_1}(Y_T) \\ C_k \vdash C \quad \text{dans } K^{m_0}(Y_T) \\ u_k \vdash u \quad \text{dans } K^{m}(Y_T) \\ \phi_k \vdash u/\mathcal{C} \quad \text{dans } H^1(\mathcal{C}_T) \text{ (et même dans } H^m(\mathcal{C}_T)) \\ F_k \vdash 0 \quad \text{dans } L^2(Y_T) \end{array} \right. \tag{6}$$

$\forall\, k$, (u_k) est une solution du problème de Cauchy linéaire suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_k^{\lambda\mu} \dfrac{\partial^2 u_k}{\partial x^\lambda \, \partial x^\mu} + B_k^\lambda \dfrac{\partial u_k}{\partial x^\lambda} + C_k\, u_k = F_k\, (\mathcal{E}_k) \\ u_k/\mathcal{C} = \phi_k \end{array} \right. \tag{7}$$

D'autre part, d'après (2), (1.2.4) et (2.2.1), $\mathcal{C}$ est un conoïde *caractéristique* pour $(\mathcal{E}_k)$.

D'après l'inégalité (3.3.1) du théorème 3.3, il existe une constante $\bar{C}_1 > 0$, indépendante de k, telle que:

$$\|u_k\|_{H^1(Y_T)} \leq \bar{C}_1 \left[\|\phi_k\|_{H^1(\mathcal{C}_T)} + T^{1/2} \, \|F_k\|_{L^2(Y_T)} \right] \tag{8}$$

Compte tenu de (6), (8) donne par passage à la limite sur k:

$$\|u\|_{H^1(Y_T)} \leq 0, \tag{9}$$

c'est-à-dire $u = 0$.

3.5. HYPOTHÈSE (0_m). – Le théorème 3.3 nous a fourni pour une solution $u = \bar{u} + u_1$ de l'équation $(\mathcal{E})$ l'inégalité énergétique suivante:

$$\|u_1\|_{F^m(Y_t)} \leq C\left[|u_1|_{m,\mathcal{C}_t} + t^{1/2}\|u_1\|_{m,\mathcal{C}_t} + t^{1/2}\|R\|_{K^{m-1}(Y_t)}\right]$$

On se propose de montrer dans le prochain théorème que les quantités $|u_1|_{m,\mathcal{C}_t}$, $\|u_1\|_{m,\mathcal{C}_t}$, $\|R\|_{K^{m-1}(Y_t)}$ peuvent être évaluées en fonction de normes convenables de $u_1/\mathcal{C}$ et de F. Pour ce faire, on aura *momentanément* besoin de l'hypothèse suivante:

Hypothèse (0_m)

$$(3.5.1)\quad \left\{\begin{array}{l}\text{On suppose que la fonction vectorielle } \bar{u}(x^\alpha)\\ \text{vérifie au point 0 l'équation } (\bar{\mathcal{E}})\\ \text{(obtenue à partir de l'équation } (\mathcal{E}) \text{ de (1.2.1)}\\ \text{en remplacant } (A^{\lambda\mu}(x^\alpha)),\ B(x^\alpha),\ C(x^\alpha),\ F(x^\alpha),\ u(x^\alpha)\\ \text{respectivement par } (\bar{A}^{\lambda\mu}(x^\alpha)),\ \bar{B}(x^\alpha),\ \bar{C}(x^\alpha),\\ \bar{F}(x^\alpha),\ \bar{u}(x^\alpha) \text{ et les équations dérivées}\\ \text{jusqu'à l'ordre } 2(m-2).\end{array}\right.$$

On montrera plus tard que toute donnée de Cauchy $\phi = \bar{\phi}/\mathcal{C} + \phi_1$ avec $(\bar{\phi}, \phi_1) \in C^\infty(Y_T) \times \tilde{K}^m(\mathcal{C}_T)$ peut être redécomposée sous la forme $\phi = \bar{u}/\mathcal{C} + \tilde{\phi}_1$ avec $(\bar{u}, \tilde{\phi}_1) \in C^\infty(Y_T) \times \tilde{K}^m(\mathcal{C}_T)$, $\bar{u}$ vérifiant la condition (0_m).

3.6. THÉORÈME. – *Inégalités énergétiques pour la solution du problème de Cauchy linéaire* (1.2.1).

Soient: m_0, m_1, m_2, m des entiers naturels vérifiant les conditions $m_i > \frac{n}{2} + i - 1$ et $1 \leq m \leq \min_{0\leq i\leq 2}\{m_i\} + 1$, K une constante > 0, $u = (u^I)$ une fonction vectorielle sur Y_T tels que:

1) u est une solution de l'équation $(\mathcal{E})$:

$$L[u] \equiv A^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 u}{\partial x^\lambda\,\partial x^\mu} + B^\lambda\frac{\partial u}{\partial x^\lambda} + C\,u = F$$

avec :

2) $A^{\lambda\mu} = \bar{A}^{\lambda\mu} + A_1^{\lambda\mu}$ avec $A_1^{\lambda\mu} \in C^{\infty}_{2(m_2-1)}(Y_T)$ et $\|A_1^{\lambda\mu}\|_{\tilde{K}^{m_2}(Y_T)} \leq K$
$B = \bar{B} + B_1$ avec $B_1 \in C^{\infty}_{2(m_1-1)}(Y_T)$ et $\|B_1\|_{\tilde{K}^{m_1}(Y_T)} \leq K$,
$C = \bar{C} + C_1$ avec $C_1 \in C^{\infty}_{2(m_0-1)}(Y_T)$ et $\|C_1\|_{\tilde{K}^{m_0}(Y_T)} \leq K$,
$F = \bar{F} + F_1$ avec $F_1 \in C^{\infty}_{2(m-2)}(Y_T)$,
$u = \bar{u} + u_1$ avec $u_1 \in C^{\infty}_{2(m-1)}(Y_T)$ et $\bar{u} = (\bar{u}^I)$ fonction vectorielle à composantes polynomiales de degré $\leq 2(m-1)$,

3) $(\bar{A}^{\alpha\beta},\ \bar{B},\ \bar{C},\ \bar{F},\ \bar{u})$ vérifie l'hypothèse (0_m).

Conclusion. – Il existe des constantes $C > 0$, fonctions croissantes de T, K, $M + |a|$, h_1^{-1}, h_2 telles que pour tout $t \in]0,\ T]$ on a :

(3.6.1) $$\|u_1\|_{F^m(Y_t)} \leq C t^{1/2}\,[|a| + \|u_1\|_{\tilde{K}^m(\mathcal{C}_t)} + \|F_1\|_{\tilde{K}^{m-1}(Y_t)}]$$

(3.6.2) $$\|u_1\|_{F'^m(Y_t)} \leq C\,[t^{1/2}|a| + \|u_1\|_{\tilde{K}^m(\mathcal{C}_t)} + t^{1/2}\|F_1\|_{\tilde{K}^{m-1}(Y_t)}]$$

(3.6.3) $$\|u_1\|_{\tilde{F}^m(Y_t)} \leq C\,[t^{1/2}|a| + \|u_1\|_{\tilde{F}^m(\mathcal{C}_t)} + t^{1/2}\|F_1\|_{\tilde{K}^{m-1}(Y_t)}]$$

avec : $|a| = \max\limits_{I,\,|\alpha|\leq 2(m-1)} |D^{\alpha}\,\bar{u}^I(0)|$, $M = \max \mathcal{M}$ et $\mathcal{M}$ est l'ensemble des valeurs absolues des coefficients polynomiaux des fonctions polynômes $\bar{A}^{\lambda\mu}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$.

Avant de démontrer ce théorème, donnons la définition suivante :

DÉFINITION. – *On appellera f. r. de degré k toute fraction rationnelle en x^i, s de degré k, de dénominateur s^{ℓ} ($\ell \in \mathbb{N}$) ne dépendant que des éléments de $\mathcal{M}$.*

Preuve du théorème 3.6.

Preuve de l'inégalité (3.6.1). – D'après l'inégalité (3.3.2) du théorème 3.3, on a :

(1) $$\|u_1\|_{F^m(Y_t)} \leq C\,[|u_1|_{m,\mathcal{C}_t} + t^{1/2}\,\|u_1\|_{m,\mathcal{C}_t} + t^{1/2}\,\|R\|_{K^{m-1}(Y_t)}]$$

Comme $A^{\lambda\mu} = \bar{A}^{\lambda\mu} + A_1^{\lambda\mu}$, $B = \bar{B} + B_1$, $C = \bar{C} + C_1$, $F = \bar{F} + F_1$, on a :

$$R \equiv F - A^{\alpha\beta}\,\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^{\alpha}\,\partial x^{\beta}} - B^{\lambda}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial x^{\lambda}} - C\,\bar{u} = F_1 + R_1 + R_2$$

avec :

$$R_1 = -\left(A_1^{\lambda\mu}\,\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^\lambda\,\partial x^\mu} + B_1^\lambda\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial x^\lambda} + C_1\,\bar{u}\right)$$

$$R_2 = \bar{F} - \bar{A}^{\lambda\mu}\,\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^\lambda\,\partial x^\mu} - \bar{B}^\lambda\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial x^\lambda} - \bar{C}\,\bar{u}$$

Donc vu la nature polynomiale de $(\bar{A}^{\alpha\beta},\ \bar{B},\ \bar{C},\ \bar{F},\ \bar{u})$ et compte tenu du fait que $(\bar{A}^{\alpha\beta},\ \bar{B},\ \bar{C},\ \bar{F},\ \bar{u})$ vérifie l'hypothèse (0_m), on a :

$$(2)\quad \begin{aligned} \|R\|_{K^{m-1}(Y_t)} &\leq \|F_1\|_{K^{m-1}(Y_t)} + \|R_1\|_{K^{m-1}(Y_t)} + \|R_2\|_{K^{m-1}(Y_t)} \\ &\leq \|F_1\|_{K^{m-1}(Y_t)} + C|a| \end{aligned}$$

où C est une constante > 0, ne dépendant que de T, K, $M + |a|$.

D'autre part, par définition de $|u_1|_{m,\mathcal{C}_t}$ (*cf.* énoncé du théorème 3.3), il existe des constantes $C_T > 0$, fonctions croissantes de T, indépendantes de t, telles que :

$$(3)\qquad \begin{aligned} |u_1|_{m,\mathcal{C}_t} &\leq C_T\, t^{m-\frac{3}{2}}\, \|u_1\|_{\tilde{K}^m(\mathcal{C}_t)} \\ &\leq C_T\, t^{1/2}\, \|u_1\|_{\tilde{K}^m(\mathcal{C}_t)} \end{aligned}$$

car $m \geq 2$.

Enfin, on sait que par définition :

$$\|u_1\|_{m,\mathcal{C}_t} = \sum_I \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=0}^{m-k} \operatorname{Ess}\sup_{\tau\in(0,\,t]} \{\tau^{-\frac{n-1}{2}}\, \|s^{-i}\,[\partial_0^k u_1^I]\|_{H^{m-k-i}(\Sigma_\tau,\mathcal{C})}\}$$

Pour obtenir de bonnes majorations des quantités

$$\operatorname{Ess}\sup_{\tau\in(0,\,t]} \{\tau^{-\frac{n-1}{2}}\, \|s^{-i}\,[\partial_0^k u_1^I]\|_{H^{m-k-i}(\Sigma_\tau,\mathcal{C})}\},$$

on va former, en considérant les restrictions au demi-conoïde $\mathcal{C}$ de l'équation $(\mathcal{E})$ et des équations dérivées de $(\mathcal{E})$ et en tenant compte de l'hypothèse (0_m), les équations aux dérivées partielles vérifiées par les fonctions $\{s^{-i}\,[\partial_0^k u_1^I]\}$ et leurs dérivées. Les équations aux dérivées partielles trouvées seront *hyperboliques* sur $\mathcal{C}$; on en déduira, grâce aux inégalités de Sobolev du théorème 2.1.4 de bonnes inégalités énergétiques pour les $\{s^{-i}\,[\partial_0^k u_1^I]\}$ et leurs dérivées ; on en déduira l'inégalité (3.6.1).

En effet, comme :

$$u = \bar{u} + u_1, \qquad A^{\lambda\mu} = \bar{A}^{\lambda\mu} + A_1^{\lambda\mu}, \qquad B = \bar{B} + B_1,$$
$$C = \bar{C} + C_1, \qquad F = \bar{F} + F_1$$

l'équation $(\mathcal{E})$ peut se transformer en l'équation d'inconnue u_1 :

$$(\mathcal{E}_1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & A^{\lambda\mu} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^\lambda \, \partial x^\mu} + B^\lambda \frac{\partial u_1}{\partial x^\lambda} + C\, u_1 - F_1 \\ & \quad + A_1^{\lambda\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^\lambda \, \partial x^\mu} + B_1^\lambda \frac{\partial \bar{u}}{\partial x^\lambda} + C_1\, \bar{u} \\ & \quad + \bar{A}^{\lambda\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^\lambda \, \partial x^\mu} + \bar{B}^\lambda \frac{\partial \bar{u}}{\partial x^\lambda} + \bar{C}\, \bar{u} - \bar{F} = 0 \end{aligned} \right.$$

où, compte tenu de l'hypothèse (0_m) la dernière somme

$$\bar{A}^{\lambda\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^\lambda \, \partial x^\mu} + \bar{B}^\lambda \frac{\partial \bar{u}}{\partial x^\lambda} + \bar{C}\, \bar{u} - \bar{F} \in C^\infty_{2\,(m-2)}\,(Y_T).$$

L'équation $(\mathcal{E}_1)$ se compose de N équations aux dérivées partielles $(\mathcal{E}_1^I)$ à N inconnues u_1^I. En appliquant aux équations $(\mathcal{E}_1^I)$ l'opérateur différentiel ∂_0^{k-1} $(k \geq 1)$, on obtient des équations $(\mathcal{E}_{1k}^I)$. En appliquant aux $[\mathcal{E}_{1k}^I]$ (restrictions à $\mathcal{C}$ des $(\mathcal{E}_{1k}^I)$) l'opérateur différentiel $s^{-j}\, \partial^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq 2\,(m-k) - 1$, $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq 2\,(m-k) - |\alpha| - 1)$, on peut obtenir par une démonstration par récurrence :

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} & s^{-j}\, \partial^\alpha\, [\mathcal{E}_{1k}^I] \equiv 2\,([A^{0i}] + [A^{il}]\, q_l)\, \frac{\partial}{\partial x^i}\, \{s^{-j}\, \partial^\alpha\, [\partial_0^k u_1^I]\} \\ & \quad + \frac{2}{s}\, (|\alpha| + j + 1)\, \{s^{-j}\, \partial^\alpha\, [\partial_0^k u_1^I]\} \\ & \quad + \sum_{0 \leq i + |\beta| \leq |\alpha|} A_{\beta i l}^I\, \{s^{-i-j}\, \partial^\beta\, [\partial_0^k\, u_1^L]\} \\ & \quad + \sum_{\substack{0 \leq i \leq k-1 \\ 0 \leq i \leq |\alpha| \\ 0 \leq i + |\beta| \leq |\alpha| + 2}} D_{\beta i L}^{lI}\, \{s^{-i-j}\, \partial^\beta\, [\partial_0^l\, u_1^L]\} \\ & \quad + \sum_{\substack{0 \leq i \leq k-1 \\ 0 \leq i \leq |\alpha| \\ 0 \leq i + |\beta| \leq |\alpha|}} E_{\beta i}^l\, \{s^{-i-j}\, \partial^\beta\, [\partial_0^l\, F_1^I]\} \\ & \quad + \sum_{L,\,\mu} G_L^{I\mu}\, a_\mu^L + \sum_{\substack{r > 2\,(m-2) - (k-1) - |\alpha| - j \\ L,\,\mu}} H_{Lr}^{I\mu}\, a_\mu^L = 0 \end{aligned} \right.$$

où : $q_l = -\frac{x^l}{s}$; les a_μ^L désignent les coefficients polynomiaux de la fonction polynôme $\bar{u}$, les coefficients $A_{\beta i L}^I$, $D_{\beta i L}^{lI}$, $E_{\beta i}^l$, $G_L^{I\mu}$, $H_{Lr}^{I\mu}$ sont de la forme suivante :

les $D_{\beta i L}^{lI}$ sont des $f.\,r$ de degré ≥ 0, multipliées le cas échéant par les fonctions :

$$s^{-i'}\,\partial^{\nu'}\,[\partial_0^{l'} A_1^{\lambda\mu}]\ 0 \leq l' \leq (k-1) - l;\quad 0 \leq i' + |\nu'| \leq |\alpha|;$$
$$0 \leq i + |\beta| + i' + |\nu'| \leq |\alpha| + 2,$$
$$s^{-i'}\,\partial^{\nu'}\,[\partial_0^{l'} B_1^{\lambda L}]\ 0 \leq l' \leq (k-1) - l;\quad 0 \leq i' + |\nu'| \leq |\alpha|;$$
$$0 \leq i + |\beta| + i' + |\nu'| \leq |\alpha| + 1,$$
$$s^{-i'}\,\partial^{\nu'}\,[\partial_0^{l'} C_{1L}^I]\ 0 \leq l' \leq (k-1) - l;\quad 0 \leq i + |\nu'| + |\beta| + i' \leq |\alpha|;$$

les $A_{\beta i L}^I$ sont de même nature que les $D_{\beta i L}^{lI}$ en faisant $l = k - 1$;

les $E_{\beta i}^l$ sont des $f.r$ de degré ≥ 0 ;

les $G_L^{I\mu}$ sont des produits par s^{-j} des fonctions de même nature que les $D_{\beta i L}^{lI}$ en faisant $l = 0$;

les $H_{Lr}^{I\mu}$ sont des $f.r$ de degré $\geq r \geq 0$.

Comme dans [16] (pages 45, 46 et 47), on déduit des équations hyperboliques (4) en utilisant les inégalités de Sobolev du théorème 2.1.4, des inégalités énergétiques de la forme suivante :

$$(5)\qquad (L_{k,\,r,\,j}^{t_1})^2 \leq C\left[\int_0^{t_1} \alpha(\tau)\,(L_{k,\,r,\,j}^{\tau})^2\,d\tau + \int_0^{t_1} \beta(\tau)\,L_{k,\,r,\,j}^{\tau}\,d\tau\right]$$

avec :

$$(6)\qquad \alpha(\tau) = 1 + \tau^{-\frac{n-1}{2}}\,\Big(\sum_{\lambda,\,\pi} \|A_1^{\lambda\mu}\|_{\tilde{H}^{m_2}(\Sigma_\tau,\,C)} + \|B_1\|_{\tilde{H}^{m_1}(\Sigma_\tau,\,C)} + \|C_1\|_{\tilde{H}^{m_0}(\Sigma_\tau,\,C)}\Big)$$

(notation :

$$\|X\|^2_{\tilde{H}^p(\Sigma_\tau,\,C)} = \sum_{k'=0}^{p-1}\ \sum_{r'=0}^{2(p-k')-1} \tau^{-4(p-k')+2r'+2}\,\|[\partial_0^{k'} X]\|^2_{H^{r'}(\Sigma_\tau,\,C)}$$

$$(7)\qquad \beta(\tau) = \alpha(\tau)\,\Big\{\sum_{1\leq i\leq r} L_{k,\,r-i,\,i+j}^{\tau} + \sum_{\substack{0\leq i\leq r\\ 0\leq l\leq k-1}} L_{l,\,r-i+2(k-l),\,i+j}^{\tau} + \tau^{\frac{n-1}{2}}\,|a|\Big\} + \sum_{\substack{0\leq i\leq k-1\\ 0\leq v\leq r}} R_{l,\,v,\,r-v+j}^{\tau}$$

$$(8)\qquad L^{\tau}_{k,r,j} = (\sum_I \tau^{-2j}\,\|[\partial_0^k u_1^I]\|^2_{H^r(\Sigma_\tau, C)})^{1/2}$$

$$(9)\qquad R^{\tau}_{k,r,j} = (\sum_I \tau^{-2j}\,\|[\partial_0^k F_1^I]\|^2_{H^r(\Sigma_\tau, C)})^{1/2}$$

En appliquant à (5) le lemme 2.3.2 (de Gronwall), on obtient:

$$(10)\qquad L^{t_1}_{k,r,j} \leq C_1\, e^{c_2\, t_1^{1/2}\left(\int_0^{t_1} \alpha^2(\tau)\,d\tau\right)^{1/2}} \left[\int_0^t \beta(\tau)\,d\tau\right].$$

On en déduit, vu les expressions (5) et (7):

$$(11)\qquad L^{t_1}_{k,r,j} \leq C[\sum_{1\leq i\leq r} N^{t_1}_{k,r-i,i+j} + \sum_{\substack{0\leq i\leq r\\ 0\leq l\leq k-1}} N^{t_1}_{l,r-i+2(k-l),i+j} + t_1^{\frac{n}{2}}\,|a| + \sum_{\substack{0\leq i\leq k-1\\ 0\leq v\leq r}} t_1^{1/2}\cdot F^{t_1}_{l,v,r-v+j}]$$

où:

$$(12)\qquad \begin{cases} N^{t_1}_{k,r,j} = \left(\displaystyle\sum_I \int_0^{t_1} \tau^{-2j}\,\|[\partial_0^k u_1^I]\|^2_{H^r(\Sigma_\tau, C)}\,d\tau\right)^{1/2} \\ F^{t_1}_{k,r,j} = \left(\displaystyle\sum_I \int_0^{t_1} \tau^{-2j}\,\|[\partial_0^k F_1^I]\|^2_{H^r(\Sigma_\tau, C)}\,d\tau\right)^{1/2} \end{cases}$$

En multipliant l'inégalité (11) par $t_1^{-\frac{n-1}{2}}$ et en prenant $\operatorname{Ess\,sup}_{t_1\in\,]0,t]}$ on obtient grâce au lemme 2.3.1:

$$(13)\qquad \tilde{N}^t_{k,r,j} \leq C\,[t^{1/2}\sum_{1\leq i\leq r} \tilde{N}^t_{k,r-i,i+j} + t^{1/2}\sum_{\substack{0\leq i\leq r\\ 1\leq l\leq k-1}} \tilde{N}^t_{l,r-i+2(k-l),i+j} + \sum_{0\leq i\leq r} \hat{N}^t_{0,r-i+2k,i+j} + t^{1/2}\,|a| + t^{1/2}\sum_{\substack{0\leq l\leq k-1\\ 0\leq v\leq r}} \cdot\tilde{F}^t_{l,v,r-v+j}]$$

où :

$$(14)\quad \begin{cases} \tilde{N}^t_{k,r,j} = \sum_I \operatorname{Ess}\sup_{\tau\in(0,t]} \{\tau^{-j-\frac{n-1}{2}} \|[\partial_0^k u_1^I]\|_{H^r(\Sigma_\tau, C)}\}, \quad (k \geq 1) \\ \hat{N}^t_{0,r,j} = \sum_I \left(\int_0^t \tau^{-2j-(n-1)} \|[u_1^I]\|^2_{H^r(\Sigma_\tau, C)}\, d\tau\right)^{1/2} \\ \tilde{F}^t_{k,r,j} = \left(\sum_I \int_0^t \tau^{-2j-(n-1)} \|[\partial_0^k F_1^I]\|^2_{H^r(\Sigma_\tau, C)}\, d\tau\right)^{1/2} \end{cases}$$

En faisant des substitutions successives à partir de (13) (*cf.* par exemple les pages 50 et 51 de [16] pour des calculs similaires), on obtient pour $1 \leq k \leq m-1$, $0 \leq r \leq 2(m-k)-1$, $0 \leq j \leq 2(m-k)-r-1$:

$$(15)\qquad \tilde{N}^t_{k,r,j} \leq C\Big[\sum_{2\leq v\leq r+2k} \hat{N}^t_{0,v,r+2k-v+j} + t^{1/2}|a| + t^{1/2} \sum_{\substack{0\leq l\leq k-1 \\ 0\leq v\leq r+2(k-l-1)}} \tilde{F}^t_{l,v,r+2(k-l-1)-v+j}\Big]$$

Donc :

$$(16)\qquad \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-k} \tilde{N}^t_{k,m-k-j,j} \leq C\Big[\sum_{2\leq v\leq 2m-1} \hat{N}^t_{0,v,2m-1-v} + t^{1/2}|a| + t^{1/2} \sum_{\substack{0\leq v\leq 2(m-1-l)-v-1 \\ 0\leq l\leq m-2}} \cdot \tilde{F}^t_{l,v,2(m-1-l)-v-1}\Big]$$

On en déduit par définition de $\|u_1\|_{m,C_t}$ (remarquer que sur $\sum_\tau$, $s=\tau$) que :

$$(17)\quad \|u_1\|_{m,C_t} \leq C\Big[\sum_{2\leq v\leq 2m-1} \hat{N}^t_{0,v,2m-1-v} + t^{1/2}|a| + t^{1/2} \sum_{\substack{0\leq v\leq 2(m-1-l)-v-1 \\ 0\leq l\leq m-2}} \cdot \tilde{F}^t_{l,v,2(m-1-l)-v-1}\Big]$$

En substituant (2), (3) et (17) dans (1), on obtient (3.6.1):

$$\|u_1\|_{F^m(Y_t)} \leq C\, t^{1/2}\, [|a| + \|u_1\|_{\tilde{K}^m(\mathcal{C}_t)} + \|F_1\|_{\tilde{K}^{m-1}(Y_t)}]$$

D'autre part, il découle de l'inégalité (15) en faisant $1 \leq k \leq m-1$, $0 \leq r \leq 2(m-k) - 1$ et $j = 2(m-k) - r$ que:

$$\text{(18)} \qquad \|u_1\|_{F'^m(\mathcal{C}_t, Y)} \leq C\, [\|u_1\|_{\tilde{K}^m(\mathcal{C}_t)} + t^{1/2}\, |a| + t^{1/2}\, \|F_1\|_{\tilde{K}^{m-1}(\mathcal{C}_t, Y)}]$$

En ajoutant (18) et (3.6.1), on trouve l'inégalité (3.6.2).

L'inégalité (3.6.3) découle alors immédiatement de l'inégalité (3.6.2).

Remarque. – Il découle de divers calculs des preuves des théorèmes 3.3 et 3.6 (*cf.* notamment l'inégalité (14) de la preuve du théorème 3.3 et les inégalités (17) et (18) de la preuve du théorème 3.6) que toute solution $u = \bar{u} + u_1$ de l'équation $A^{\lambda\mu}\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^\lambda\, \partial x^\mu} + B^\lambda\, \frac{\partial u}{\partial x^\lambda} + C \cdot u = F$ vérifie, sous les hypothèses 2) et 3) du théorème 3.6 les inégalités énergétiques suivantes:

$$\text{(3.6.4)} \qquad \|D^{[m-1]} u\|_{\tilde{E}^1(\mathcal{C}_T)} \leq C\, [|a| + \|u_1\|_{\tilde{F}^m(\mathcal{C}_T)} + \|F_1\|_{\tilde{K}^{m-1}(Y_T)}]$$

$$\text{(3.6.5)} \qquad \|u_1\|_{\tilde{F}^m(\mathcal{C}_T, Y)} \leq C\, [|a| + \|u_1\|_{\tilde{F}^m(\mathcal{C}_T)} + \|F_1\|_{\tilde{K}^{m-1}(Y_T)}]$$

dont on aura besoin au chapitre V.

3.7 *Preuve du théorème* 1.

Preuve de 1. – a) *Construction de la fonction vectorielle à composantes polynomiales* $\bar{u} = (\bar{u}^I)$ *vérifiant l'hypothèse* (0_m).

D'après (1.2.3), on a: $\bar{A}^{\alpha\beta}(0) = \eta^{\alpha\beta}$ $\forall\, \alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n$. $(\bar{A}^{\alpha\beta})$ est donc hyperbolique au point 0, donc $(\bar{A}^{\alpha\beta})$ est aussi, par continuité, hyperbolique dans un voisinage D de 0 dans $\mathbb{R}^{n+1}$. On sait d'autre part que (1.2.2) et (1.2.4) entraînent (2.2.1): le demi-conoïde $\mathcal{C}$ de sommet 0 est caractéristique par rapport à la métrique $(\bar{A}^{\alpha\beta})$. Considérons alors le problème de Cauchy caractéristique à données C^∞:

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \bar{A}^{\alpha\beta}(x^\lambda)\, \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^\alpha\, \partial x^\beta} + \bar{B}^\alpha(x^\lambda)\, \dfrac{\partial v}{\partial x^\alpha} + \bar{C}(x^\alpha)\, v = \bar{F} \\ \text{dans } Y_T \cap D(\bar{\mathcal{E}}) \\ v/\mathcal{C} = \bar{\phi}/\mathcal{C} \end{cases}$$

D'après le théorème 5.3 et la remarque 5.2 de [12] (*cf.* aussi le théorème 5.4.2 de [18]), il existe une fonction $v \in C^\infty(D)$, solution du problème (1) dans le domaine $Y_T \cap D$. Soit σ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^{n+1}$, égale à 1 dans un voisinage de 0 dans D et nulle dans $\mathbb{R} - D$.

Posons :

(2) $\tilde{u} = \sigma v + (1-\sigma)\bar{\phi} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$

Alors on a :

(3) $\tilde{u} = \bar{\phi}$ sur $\mathcal{C}_T$ tout entier.

(4) $\tilde{u}$ vérifie au point 0 l'équation $(\bar{\mathcal{E}})$ et toutes les équations dérivées de tout ordre.

On prendra :

(5) $\bar{u}=$ le polynôme de Taylor à l'ordre $2(m-1)$ de $\tilde{u}$ au point 0.

Alors, vu (4), $\bar{u}$ vérifie l'hypothèse (0_m) c'est-à-dire, vérifie au point 0 l'équation $(\bar{\mathcal{E}})$ et les équations dérivées jusqu'à l'ordre $2(m-2)$.

b) *Décomposition de la donnée initiale ϕ sous la forme :*

$$\phi = \bar{u}/\mathcal{C} + \tilde{\phi}_1 \qquad \text{avec} \quad \tilde{\phi}_1 \in \tilde{K}^m(\mathcal{C}_T)$$

En effet, vu (3) on a :

$$\phi = \bar{\phi}/\mathcal{C}_T + \phi_1 = \tilde{u}/\mathcal{C}_T + \phi_1 = \bar{u}/\mathcal{C}_T + \tilde{\phi}_1 \tag{6}$$

avec :

$$\tilde{\phi}_1 = (\tilde{u} - \bar{u})/\mathcal{C}_T + \phi_1 \tag{7}$$

$\tilde{\phi}_1$ appartient à $\tilde{K}^m(\mathcal{C}_T)$ car vu (5) $\tilde{u} - \bar{u} \in C^\infty_{2(m-1)}(Y_T)$, donc $(\tilde{u} - \bar{u})/\mathcal{C}_T \in \tilde{K}^m(\mathcal{C}_T)$.

Preuve de 2). – L'unicité est une conséquence immédiate du théorème 3.4.

Existence de la solution u du problème (1.2.1) *sous la forme $u = \bar{u} + u_1$ avec $u_1 \in F'^m(Y_T)$.*

Soient :

$$(8) \quad \begin{cases} (\phi_{1,k}) \text{ une suite d'éléments de } C^\infty_\infty(Y_T) \text{ convergeant vers } \tilde{\phi}_1 \\ \text{dans } \tilde{K}^m(\mathcal{C}_T) \\ (B_{1,k}) \text{ une suite d'éléments de } C^\infty_\infty(Y_T) \text{ convergeant vers } B_1 \\ \text{dans } \tilde{K}^{m_1}(Y_T) \\ (C_{1,k}) \text{ une suite d'éléments de } C^\infty_\infty(Y_T) \text{ convergeant vers } C_1 \\ \text{dans } \tilde{K}^{m_0}(Y_T) \\ (F_{1,k}) \text{ une suite d'éléments de } C^\infty_\infty(Y_T) \text{ convergeant vers } F_1 \\ \text{dans } \tilde{K}^{m-1}(Y_T) \end{cases}$$

Comme dans la preuve du théorème 3.4, on peut aussi construire, compte tenu de (2.2.1), une suite $(A^{\lambda\mu}_{1,k})$ d'éléments de $C^{\infty}_{\infty}(Y_T)$ telle que :

$$A^{\lambda\mu}_{1,k} \vdash A^{\lambda\mu}_{1} \quad \text{dans } \tilde{K}^{m_2}(Y_T), \tag{9}$$

$$\begin{cases} \text{le demi-conoïde } \mathcal{C} \text{ est caractéristique par rapport} \\ \text{à la métrique } A^{\lambda\mu}_{k} = \bar{A}^{\lambda\mu} + \bar{A}^{\lambda\mu}_{1,k} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{10}$$

Posons :

$$\begin{cases} B_k = \bar{B} + B_{1,k}\,; \qquad C_k = \bar{C} + C_{1,k}\,; \qquad F_k = \bar{F} + F_{1,k} \\ A^{\lambda\mu}_{k} = \bar{A}^{\lambda\mu} + A^{\lambda\mu}_{1,k} \end{cases} \tag{11}$$

Alors le problème de Cauchy linéaire caractéristique à données C^{∞} :

$$\begin{cases} L_k[u] \equiv A^{\lambda\mu}_{k} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + B^{\lambda}_{k} \dfrac{\partial u}{\partial x^\lambda} + C_k \cdot u = F \quad \text{dans } Y_T\,(\mathcal{E}_k) \\ u/\mathcal{C} = (\bar{u} + \phi_{1,k})/\mathcal{C} \end{cases} \tag{12}$$

a, d'après le théorème 5.3 de [12] et la remarque 5.2 de [12], une solution unique $u_k \in C^{\infty}(Y_T)$.

Par construction $\bar{u}$ vérifie au point 0 l'équation $(\mathcal{E}_k)$ et les équations dérivées jusqu'à l'ordre $2(m-2)$; cela entraîne, grâce à la proposition 4.2 de [12] (*cf.* aussi le premier théorème de la partie B III de [3]), que la solution u_k peut s'écrire sous la forme :

$$u_k = \bar{u} + u_{1,k} \qquad \text{avec} \quad u_{1,k} \in C^{\infty}_{2(m-1)}(Y_T) \tag{13}$$

avec :

$$u_{1,k}/\mathcal{C}_T = \phi_{1,k}/\mathcal{C}_T \tag{14}$$

Alors, d'après l'inégalité énergétique (3.6.2) du théorème 3.6, il existe une constante $C > 0$, indépendante de k, fonction croissante de T, telle que pour tout $t \in (0, T]$, on a :

$$\begin{aligned} \|u_{1,k}\|_{\tilde{K}^m(Y_t)} &\le t^{1/2}\,\|u_{1,k}\|_{F'^m(Y_t)} + \|\phi_{1,k}\|_{\tilde{K}^m(\mathcal{C}_t)} \\ &\le C\,[t|a| + \|\phi_{1,k}\|_{\tilde{K}^m(\mathcal{C}_t)} + t\|F_{1,k}\|_{\tilde{K}^{m-1}(Y_t)}] \end{aligned} \tag{15}$$

Il découle de (15), l'existence d'une constante $C_0 > 0$, indépendante de k, telle que:

(16) $$\|u_{1,k}\|_{\tilde{K}^m(Y_T)} \leq C_0$$

D'autre part, $\forall\, k,\ l \in \mathbb{N}$, on a:

(17) $$\begin{cases} L_k[u_k - u_l] = F_k - F_l + L_l[u_l] - L_k[u_l] \\ (u_k - u_l)/\mathcal{C}_T = (\phi_{1,k} - \phi_{1,l})/\mathcal{C}_T \end{cases}$$

L'application de l'inégalité énergétique (3.6.2) à l'ordre $m-1$, à (17) donne, compte tenu de (16) et des inégalités de Sobolev du théorème 2.1.4, une inégalité qui, vu (8), entraîne que la suite $(u_{1,k})$ est de Cauchy dans l'espace hilbertien $\tilde{K}^{m-1}(Y_T)$, donc converge vers une fonction vectorielle $u_1 \in \tilde{K}^{m-1}(Y_T)$.

Le fait que la suite $(u_{1,k})$ converge vers u_1 dans $\tilde{K}^{m-1}(Y_T)$ entraîne, par définition de la norme dans $\tilde{K}^{m-1}(Y_T)$, que $u_{1,k}/\mathcal{C}_T$ converge vers $u_1/\mathcal{C}_T$ dans $\tilde{K}^{m-1}(\mathcal{C}_T)$.

Donc:

(18) $$u_1/\mathcal{C}_T = \tilde{\phi}_1$$

car, vu (8), $u_{1,k}/\mathcal{C}_T = \phi_{1,k}$ converge vers $\tilde{\phi}_1$ dans $\tilde{K}^m(\mathcal{C}_T)$, donc aussi dans $\tilde{K}^{m-1}(\mathcal{C}_T)$.

Revenons maintenant aux inégalités (15) et (16). Elles entraînent, d'après le théorème de Banach-Alaoglu, qu'il existe une sous suite (u_{1,k_l}) de $(u_{1,k})$ qui converge faiblement dans l'espace hilbertien $\tilde{K}^m(Y_T)$ vers une fonction $\tilde{u}_1 \in \tilde{K}^m(Y_T)$. On en déduit que:

(19) $$u_1 = \tilde{u}_1 \in \tilde{K}^m(Y_T).$$

On va maintenant montrer que $u = \bar{u} + u_1$ est une solution de l'équation $(\mathcal{E})$. En effet, (u_{1,k_l}) converge faiblement vers u_1 dans $\tilde{K}^m(Y_T)$, donc $(u_{k_l}) = (\bar{u} + u_{1,k_l})$ converge faiblement vers $u = \bar{u} + u_1$ dans $K^m(Y_T)$. De même, vu (8) et (9), $A_k^{\lambda\mu} = \bar{A}^{\lambda\mu} + A_{1,k}^{\lambda\mu}$, $B_k = \bar{B} + B_{1,k}$, $C_k = \bar{C} + C_{1,k}$ convergent fortement respectivement vers $A^{\lambda\mu}$ dans $K^{m_2}(Y_T)$, vers B dans $K^{m_1}(Y_T)$, vers C dans $K^{m_0}(Y_T)$. On en déduit que $L_{k_l}[u_{k_l}]$ converge vers $L[u]$ au sens des distributions. Mais, vu (8) et (9), $L_{k_l}[u_{k_l}] \equiv F_{k_l}$ converge vers F dans $K^{m-1}(Y_T)$, donc aussi au sens des distributions.

Donc:

(20) $$L[u] = F \quad \text{dans } Y_T$$

Il découle de (18), (19) et (20) que $u = \bar{u} + u_1$ est l'unique solution du problème de Cauchy linéaire (1.2.1).

Il reste à montrer que $u_1 \in F'^m(Y_T)$ et vérifie les inégalités énergétiques (1.2.6) et (1.2.7).

Or, la solution $u_k = \bar{u} + u_{1,k}$ du problème de Cauchy approché (12) vérifie, d'après les inégalités (3.6.1) et (3.6.2) du théorème 3.6, les inégalités énergétiques :

$$\|u_{1,k}\|_{F'^m(Y_t)} \leq C\,[t^{1/2}|a| + \|\phi_{1,k}\|_{\tilde{K}^m(\mathcal{C}_t)} + t^{1/2}\,\|F_{1,k}\|_{\tilde{K}^{m-1}(Y_t)}] \tag{21}$$

$$\|u_{1,k}\|_{F^m(Y_t)} \leq C\,t^{1/2}\,[|a| + \|\phi_{1,k}\|_{\tilde{K}^m(\mathcal{C}_t)} + \|F_{1,k}\|_{\tilde{K}^{m-1}(Y_t)}] \tag{22}$$

les C étant des constantes > 0, indépendantes de k, fonctions croissantes de T.

Un argument classique de faible compacité, basé sur les inégalités (21), (22) et la proposition 2.1.2, et semblable à celui utilisé dans les preuves des théorèmes 6.2 et 7.3 de [20], permet de conclure.

Si de plus $\phi_1 \in \tilde{F}^m(\mathcal{C}_T)$, alors, vu (7) et (18), $u_1/\mathcal{C}_T = \tilde{\phi}_1 \in \tilde{F}^m(\mathcal{C}_T)$, donc $u_1 \in \tilde{F}^m(Y_T)$ et vérifie, compte tenu de (1.2.6), l'inégalité énergétique (1.2.7).

3.8. *Remarque.* – Si en plus des hypothèses (1.2.2), (1.2.3), (1.2.4) on a $A^{\lambda\mu} \in C^\infty(Y_T)$ et $\phi_1 \in \hat{F}^m(\mathcal{C}_T)$, alors $u_1 \in \hat{F}^m(Y_T)$. En effet, dans ce cas, si on note toujours $u_k = \bar{u} + u_{1,k}$, la solution du problème de Cauchy linéaire C^∞ approché (12), on peut montrer directement, à partir de l'inégalité énergétique (1.2.6), que la suite de fonctions C^∞ $(u_{1,k})$ est de Cauchy dans l'espace Banach $\hat{F}^m(Y_T)$ et converge donc dans cet espace, vers une fonction $\hat{u}_1$.

Donc $u_1 = \hat{u}_1 \in \hat{F}^m(Y_T)$.

CHAPITRE IV

PROBLÈME DE CAUCHY QUASI-LINÉAIRE DU SECOND ORDRE AVEC DONNÉE SUR UN CONOÏDE CARACTÉRISTIQUE : PREUVES DES THÉORÈMES 2 ET 3

Preuve du théorème 2

Preuve de 1) *et* 2). – La preuve des parties 1) et 2) du théorème 4.1 se fera en plusieurs étapes :

1re étape : construction de $\bar{u}$ vérifiant au point 0 l'équation non linéaire $(\mathcal{E})$ de (1.2.8) et les équations dérivées jusqu'à l'ordre $2\,(m-2)$.

2e étape : décomposition de la donnée initiale ϕ sous la forme

$$\phi = \bar{u}/\mathcal{C}_T + \tilde{\phi}_1 \quad \text{avec}\, \tilde{\phi}_1 \in \tilde{F}^m\,(\mathcal{C}_T).$$

3e étape : détermination de $u_1 \in \tilde{F}^m\,(Y_T)$ de façon que $u = \bar{u} + u_1$ soit solution du problème (1.2.8).

4e étape : unicité de solution pour le problème (1.2.8).

1re étape : Construction de $\bar{u}$ vérifiant au point 0 l'équation non linéaire $(\mathcal{E})$ de (1.2.8) et les équations dérivées jusqu'à l'ordre $2\,(m-2)$

Soit $A_0^{\lambda\mu}$ le polynôme de Taylor d'ordre $2\,(m-1)$ de $A^{\lambda\mu}$ au point $(0;\,(a^I))$. D'après l'hypothèse (1.2.9) (ou hypothèse $(\mathcal{H}_m)$ du chapitre I), on a :

$$A_0^{\lambda\mu}\,(0;\,,\,(a^I)) = A^{\lambda\mu}\,(0;\,(a^I)) = \eta^{\lambda\mu} \qquad \forall\,\lambda,\,\mu = 0,\,1,\,\ldots,\,n.$$

$(A_0^{\lambda\mu})$ est donc hyperbolique au point $(0;\,,\,(a^I))$. On en déduit, par continuité, que $(A_0^{\lambda\mu})$ est hyperbolique dans un voisinage $\tilde{U} \times \tilde{W}$ de $(0;\,,\,(a^I))$ dans $U \times W$. De plus $(A_0^{\lambda\mu})$ est de classe C^∞ dans ce domaine $\tilde{U} \times \tilde{W}$. Comme $(\bar{\phi}\,(0);\,D\bar{\phi}\,(0)) = ((a^I);\,(a^I_\lambda)) \in \tilde{W} \times W'$ et $(\bar{\phi},\,D\bar{\phi})$ est continue en 0, on peut supposer, en diminuant si nécessaire la taille de $\tilde{U}$:

$$\bar{\phi}\,(\tilde{U}) \times D\bar{\phi}\,(\tilde{U}) \subset \tilde{W} \times W'.$$

Soit $\tilde{\mathcal{C}}$ le demi-conoïde isotrope de sommet 0, orienté vers les $x^0 \geq 0$, déterminé par la métrique hyperbolique $A_0^{\lambda\mu}\,(x^\alpha;\,\bar{\phi}\,(x^\alpha))/\tilde{U}$. D'après [3] et [12] (*cf.* le paragraphe II-II du chapitre II de [12]) et vu (2.2.2) (qui découle de l'hypothèse (1.2.9)), $\tilde{\mathcal{C}}$ admet une représentation paramétrique de la forme :

$$x^0 = S\,(x^1,\,\ldots,\,x^n) \tag{2}$$

où :

S est une fonction définie dans un voisinage $\tilde{\mathcal{V}}$ de 0 dans $\mathbb{R}^n$;

S est positive et continue dans $\tilde{\mathcal{V}}$;

S est de classe C^∞ dans $\tilde{\mathcal{V}} - \{0\}$;

S admet un développement limité en fractions rationnelles homogènes en x^i, $s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2}$ de la forme :

$$S(x^1, \ldots, x^n) = s + 0(s^{2(m-1)}). \tag{3}$$

Notons :

$$\tilde{Y} = \{(x^0, x^1, \ldots, x^n) \in \tilde{U} \,|\, S(x^1, \ldots, x^n) \leq x^0 < +\infty\},$$

$$\tilde{Y}_T = \tilde{Y} \cap \{x^0 < T\},$$

f_0 le polynôme de Taylor d'ordre $2(m-2)$ de f au point $(0; , (a^I); (a^I_\lambda))$, et considérons le problème de Cauchy caractéristique quasi-linéaire à données C^∞ :

$$\left\{\begin{array}{l} A_0^{\lambda\mu}(x^\alpha, V(x^\alpha)) \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \\ \qquad + f_0(x^\alpha, V(x^\alpha), D_\nu V(x^\alpha)) = 0 \quad \text{dans } \tilde{Y} \\ V/\tilde{\mathcal{C}} = \bar{\phi}/\tilde{\mathcal{C}}. \end{array}\right. \tag{4}$$

D'après le théorème 5.3 de [12] (*cf.* aussi théorème 2 de [35]), il existe $T_1 \in]0, T]$ et une fonction $V \in C^\infty(\tilde{Y}_{T_1})$ solution du problème (4) dans le domaine $\tilde{Y}_{T_1}$. D'après la proposition 4.1 de [12], on a :

$$V(0) = (a^I), \quad D_\lambda V(0) = (a^I_\lambda). \tag{5}$$

On choisit alors $\bar{u}$ *égal au polynome de Taylor d'ordre* $2(m-1)$ *de* V *au point* 0. On a, compte tenu de (5) :

$$\bar{u}(0) = (a^I), \quad D_\lambda \bar{u}(0) = (a^I_\lambda).$$

De plus, vu la définition de V, $\bar{u}$ vérifie au point 0, l'équation non linéaire $(\mathcal{E})$ de (1.2.8) et toutes les équations dérivées jusqu'à l'ordre $2(m-2)$.

2e étape : Décomposition de la donnée initiale ϕ *sous la forme* $\phi = \bar{u}/\mathcal{C} + \tilde{\phi}_1$ *avec* $\tilde{\phi}_1 \in \tilde{F}^m(\mathcal{C}_T)$

$\forall (x^1, \ldots, x^n) \in \tilde{\mathcal{V}}$, on a :

$$(6) \quad \bar{\phi}(s, x^1, \ldots, x^n) = \bar{u}(s, x^1, \ldots, x^n) + \sum_{i=1}^{3} V_i(x^1, \ldots, x^n)$$

avec :

$$(7) \quad \begin{cases} V_1(x^1, \ldots, x^n) = \bar{u}(S(x^i), x^1, \ldots, x^n) \\ \qquad\qquad -\bar{u}(s, x^1, \ldots, x^n) \\ V_2(x^1, \ldots, x^n) = V(S(x^i), x^1, \ldots, x^n) \\ \qquad\qquad -\bar{u}(S(x^i), x^1, \ldots, x^n) \\ V_3(x^1, \ldots, x^n) = \bar{\phi}(s, x^1, \ldots, x^n) \\ \qquad\qquad -\bar{\phi}(S(x^i), x^1, \ldots, x^n). \end{cases}$$

Posons :

$$\mathcal{P} = \{w : \tilde{\mathcal{V}} \to \mathbb{R}^N \mid w \text{ est de classe } C^{2m-1} \text{ et } D^\alpha w(0) = 0, \\ \forall \alpha, |\alpha| \leq 2m - 2\}.$$

Alors, vu (3) et vu la définition de $\bar{u}$, on a :

$$(8) \qquad V_i \in \mathcal{P} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Soit K un voisinage compact de 0 dans $\tilde{\mathcal{V}}$.

Soit σ une fonction définie et de classe C^∞ sur $\mathcal{V}$, égale à 1 sur K et à support compact contenu dans $\mathcal{V}$. Alors $\forall (s, x^1, \ldots, x^n) \in \mathcal{C}$, on a :

$$(9) \quad \bar{\phi}(s, x^1, \ldots, x^n) = \bar{u}(s, x^1, \ldots, x^n) + \sum_{i=1}^{5} \tilde{V}_i(x^1, \ldots, x^n)$$

avec :

$$(10) \qquad \tilde{V}_i(x^1, \ldots, x^n) = (\sigma \cdot V_i)(x^1, \ldots, x^n) \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

$$(11) \qquad \tilde{V}_4(x^1, \ldots, x^n) = (\sigma - 1)(x^1, \ldots, x^n) \cdot \bar{u}(s, x^1, \ldots, x^n)$$

$$(12) \qquad \tilde{V}_5(x^1, \ldots, x^n) = (1 - \sigma)(x^1, \ldots, x^n) \cdot \bar{\phi}(s, x^1, \ldots, x^n).$$

Posons :

$$\tilde{\mathcal{P}} = \{w : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^N \mid w \text{ est de classe } C^{2m-1} \text{ et } D^\alpha w(0) = 0, \\ \forall \alpha, |\alpha| \leq 2m - 2\}.$$

Alors, vu le choix de σ, on a :

$$\tilde{V}_i \in \tilde{\mathcal{P}} \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}. \tag{13}$$

On a finalement, d'après (9) :

$$\phi = \bar{u}/\mathcal{C} + \tilde{\phi}_1 \tag{14}$$

avec :

$$\tilde{\phi}_1 (s, x^1, \ldots, x^n) = \sum_{i=1}^{5} \tilde{V}_i (x^1, \ldots, x^n) + \phi_1 (s, x^1, \ldots, x^n). \tag{15}$$

Il découle de (13) et du fait que $\phi_1 \in \tilde{F}^m (\mathcal{C}_T)$ que :

$$\tilde{\phi}_1 \in \tilde{F}^m (\mathcal{C}_T). \tag{16}$$

3^e étape : Détermination de $u_1 \in \tilde{F}^m (Y_T)$ de façon que $u = \bar{u} + u_1$ soit solution du problème (1.2.8)

On se propose, dans cette étape, de construire u_1 comme point fixe de l'application $V_1 \mapsto u_1$ d'une *boule* B de $\tilde{F}^m (Y_T)$ dans elle-même, où $u = \bar{u} + u_1$ est la solution du problème de Cauchy caractéristique linéaire :

$$(\star) \quad \begin{cases} A^{\lambda\mu} (x^\alpha, V) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + f (x^\alpha, V, DV) = 0 \quad \text{dans } Y_T \\ u/\mathcal{C} = \phi \quad \text{avec } u = (u^I), \quad f = (f^I), \quad \phi = (\phi^I) \end{cases}$$

avec : $V = \bar{u} + V_1$.

Pour montrer plus tard, que la boule B est *non vide,* il sera important de savoir construire sur le domaine Y_T une fonction $w_1 \in \tilde{F}^m (Y_T)$ telle que $w_1/\mathcal{C}_T = \tilde{\phi}_1$:

a) *Construction sur le domaine Y_T d'une fonction w_1 telle que $w_1 \in \tilde{F}^m (Y_T)$, $w_1/\mathcal{C}_T = \tilde{\phi}_1$, $w_1 (0) = 0$, $Dw_1 (0) = 0$.*

Considérons l'opérateur des ondes $\square = \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}$. Alors, d'après le théorème 1, le problème de Cauchy caractéristique linéaire suivant :

$$\begin{cases} \square w_1 = 0 \quad \text{dans } Y_T \\ w_1/\mathcal{C}_T = \tilde{\phi}_1 \in \tilde{F}^m (\mathcal{C}_T) \end{cases}$$

admet une solution unique $w_1 \in \tilde{F}^m(Y_T)$; de plus il découle de l'inégalité (1.2.5) du théorème 1 et de l'inégalité de Sobolev (2.1.7) du théorème 2.1.4 et vu que $m > \frac{n}{2} + 1$, que $\forall t \in (0, T]$, on a :

$$|w_1(0)| \leq C \| w_1 \|_{F^m(Y_t)} \leq C_1 t^{1/2} \| \tilde{\phi}_1 \|_{\tilde{K}^m(C_t)},$$

$$|Dw_1(0)| \leq C \| w_1 \|_{F^m(Y_t)} \leq C_2 t^{1/2} \| \tilde{\phi}_1 \|_{\tilde{K}^m(C_t)},$$

C_1 et C_2 étant des constantes > 0, ne dépendant que de T. On en déduit que :

$$w_1(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad Dw_1(0) = 0.$$

b) *Propriétés de l'application* $V_1 \longrightarrow u_1$ *définie par le problème de Cauchy linéaire* $(\star)$.

DÉFINITION DES DOMAINES W_0, W_0' ET DES RÉELS T_1, ε_1, ε_2. – Soient W et W' les ouverts respectifs de $\mathbb{R}^N$ $\mathbb{R}^{(n+1)N}$ introduits dans l'hypothèse (1.2.9) et tels que les données $A^{\lambda\mu}$ et f_r sont respectivement définies sur $Y \times W$ et $Y \times W \times W'$. Comme la fonction polynomiale $\bar{u}$ vérifie :

$$(\bar{u}(0);\ D\bar{u}(0)) = (\bar{\phi}(0);\ D\bar{\phi}(0)) \equiv ((a^I);\ (a^I_\lambda)) \in W \times W'$$

il existe un réel $T_1 \in]0, T]$, un voisinage ouvert W_0 de 0 dans $\mathbb{R}^N$ et un voisinage ouvert W_0' de 0 dans $\mathbb{R}^{(n+1)N}$ tels que :

$$(\bar{u}(x^\alpha) + V_1,\ D\bar{u}(x^\alpha) + V_2) \in W \times W'$$

pour tout $(x^\alpha) \in Y_{T_1}$ et tout $(V_1, V_2) \in W_0 \times W_0'$. Dans le cas où $W' = \mathbb{R}^{(n+1)N}$,, on prendra $W_0' = \mathbb{R}^{(n+1)N}$.

Soient ε_1 et ε_2 deux réels > 0 tels que :

$$\bar{B}_{\varepsilon_1} \subset W_0 \qquad \text{et} \qquad \bar{\mathrm{B}}'_{\varepsilon_2} \subset W_0'$$

avec :

$$B_{\varepsilon_1} = \{w \in \mathbb{R}^N \mid |w| < \varepsilon_1\}; \quad B'_{\varepsilon_2} = \{w' \in \mathbb{R}^{(n+1)N} \mid |w'| < \varepsilon_2\}.$$

Dans le cas où $W' = W_0' = \mathbb{R}^{(n+1)N}$, on prendra ε_2 aussi grand qu'il sera nécessaire dans les calculs ultérieurs.

LEMME 1. – *Soit* $T_2 \in]0, T_1]$; *considérons sur le domaine* Y_{T_2} *une fonction* V_1 *telle que* $V_1 \in \tilde{F}^m(Y_{T_2})$ *et* $(V_1(x^\alpha), DV_1(x^\alpha)) \in B_{\varepsilon_1} \times B'_{\varepsilon_2}$ *pour tout* $(x^\alpha) \in Y_{T_2}$.

Posons :

$$
(4.1.1)\quad \begin{cases} V = \bar{u} + V_1; \quad A^{\lambda\mu}(x^\alpha,\, V(x^\alpha)) = \bar{A}^{\lambda\mu}(x^\alpha) + A_1^{\lambda\mu}(x^\alpha) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + A_2^{\lambda\mu}(x^\alpha,\, V_1(x^\alpha)); \\ f_r(x^\alpha,\, V(x^\alpha),\, DV(x^\alpha)) \\ \quad = \bar{f}_r(x^\alpha) + f_{r,1}(x^\alpha) + f_{r,2}(x^\alpha,\, V_1(x^\alpha),\, DV_1(x^\alpha)) \end{cases}
$$

avec :

$$
(4.1.2)\quad \begin{cases} \bar{A}^{\lambda\mu}(x^\alpha) = \text{le polynome de Taylor d'ordre } 2(m-1) \\ \text{de } A^{\lambda\mu}(x^\alpha,\, \bar{u}(x^\alpha)) \text{ au point } (x^\alpha) = 0 \\ A_1^{\lambda\mu}(x^\alpha) = A^{\lambda\mu}(x^\alpha,\, \bar{u}(x^\alpha)) - \bar{A}^{\lambda\mu}(x^\alpha) \\ A_2^{\lambda\mu}(x^\alpha,\, V_1(x^\alpha)) = A^{\lambda\mu}(x^\alpha,\, V(x^\alpha)) - A^{\lambda\mu}(x^\alpha,\, \bar{u}(x^\alpha)) \\ \bar{f}_r(x^\alpha) = \text{le polynome de Taylor d'ordre } 2(m-2) \\ \text{de } f_r(x^\alpha,\, \bar{u}(x^\alpha),\, D\bar{u}(x^\alpha)) \text{ au point } (x^\alpha) = 0 \\ f_{r,1}(x) = f_r(x^\alpha,\, \bar{u}(x^\alpha),\, D\bar{u}(x^\alpha)) - \bar{f}_r(x^\alpha); \\ f_{r,2}(x^\alpha,\, V_1,\, (x^\alpha),\, DV_1(x^\alpha)) = f_r(x^\alpha,\, V(x^\alpha),\, DV(x^\alpha)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - f_r(x^\alpha,\, \bar{u}(x^\alpha),\, D\bar{u}(x^\alpha)). \end{cases}
$$

Posons :

$$(4.1.3)\quad \begin{cases} |a| = \max\limits_{\substack{|\alpha| \leq 2(m-1) \\ I}} |D^\alpha \bar{u}^I(0) \quad \text{si } \bar{u} = (\bar{u}^I) \\ \bar{f} = (\bar{f}_r); \quad f_1 = (f_{r,1}); \quad f_2 = (f_{r,2}) \\ \gamma^{00} = A^{00}, \quad \gamma^{0i} = 0, \ \gamma^{ij} = -A^{ij} \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \\ S = \text{sphère-unité de } \mathbb{R}^{n+1}; \quad V_1 = u(Y_{T_1}) + B_{\varepsilon_1} \\ k_1 = \inf \gamma^{\lambda\mu}(x^\alpha, \omega)\, p_\lambda\, p_\mu \\ ((x^\alpha); \omega; (p_\lambda)) \in \bar{Y}_T \times \bar{V}_1 \times S \\ \text{(vu les hypothèses d'hyperbolicité faites sur } (A^{\lambda\mu}), \\ \text{on a : } k_1 > 0) \\ \| f_2 \|_{k,t} = \max\{|P_2|_k, \ \| f_2 \|_{c_b^k(\bar{Y}_t \times \bar{B}_{\varepsilon_1} \times \bar{B}'_{\varepsilon_2})}\} \\ \text{avec :} \\ P_2 = \text{polynome de Taylor d'ordre } k \text{ de } f_2 \\ \text{au point } (0, 0, 0). \\ \tilde{f}_2 = f_2 - P_2 \\ |P_2|_k = \max\limits_{|\alpha|+|\gamma|+|\delta| \leq k} |D_x^\alpha D_u^\gamma D_{Du}^\delta P_2(0, 0, 0)| \\ \| A_2^{\lambda\mu} \|_{k,t} = \max\{|P_2^{\lambda\mu}|_k, \ \| \tilde{A}_2^{\lambda\mu} \|_{c_b^k(\bar{Y}_t \times \bar{B}_{\varepsilon_1})}\} \\ \text{avec :} \\ P_2^{\lambda\mu} = \text{polynome de Taylor d'ordre } k \text{ de} \\ A_2^{\lambda\mu} \text{ au point } (0, 0) \\ \tilde{A}_2^{\lambda\mu} = A_2^{\lambda\mu} - P_2^{\lambda\mu} \\ |P_2^{\lambda\mu}|_k = \max\limits_{|\alpha|+|\gamma| \leq k} |D_x^\alpha D_u^\gamma P_2^{\lambda\mu}(0, 0)| \\ m_2 = \begin{cases} m-1 & \text{si } m > \frac{n}{2} + 2 \\ m & \text{si } \frac{n}{2} + 1 < m < \frac{n}{2} + 2 \end{cases} \end{cases}$$

Alors le problème de Cauchy caractéristique linéaire :

$$(4.1.4)\quad \begin{cases} A^{\lambda\mu}(x^\alpha, V(x^\alpha)) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \\ \quad + f(x^\alpha, V(x^\alpha), DV(x^\alpha)) = 0 \\ u/\mathcal{C} = \bar{u}/\mathcal{C} + \tilde{\phi}_1 \quad \text{avec } \tilde{\phi}_1 \in \tilde{F}^m(\mathcal{C}_T) \end{cases}$$

admet, dans le domaine Y_{T_2}, une seule solution $u = \bar{u} + u_1$ telle que $u_1 \in \tilde{F}^m(Y_{T_2})$. De plus $u_1(0) = 0$, $Du_1(0) = 0$ et u_1 vérifie $\forall t \in (0, T_2]$ l'inégalité énergétique :

$$(4.1.5) \qquad \begin{aligned} \| u_1 \|_{\tilde{F}^m(Y_t)} \leq C_1 [t^{1/2} \, | a | \\ + \| \tilde{\phi}_1 \|_{\tilde{F}^m(C_t)} + t^{1/2} \| f_1 \|_{\tilde{K}^{m-1}(Y_t)} \\ + t^{1/2} \| f_2 \|_{2m-3, t} (1 + \| V_1 \|_{\tilde{F}^m(Y_t)})^{2m-3}], \end{aligned}$$

C_1 étant une constante > 0, ne dépendant que de T, $\| A_1^{\lambda\mu} \|_{\tilde{K}^m(Y_{T_1})}$, $\| A_1^{\lambda\mu} \|_{\tilde{F}^{m_2}(Y_{T_1})}$, $\| A_2^{\lambda\mu} \|_{2m_2-1, T_1}$, k_1, et des coefficients des polynômes $(\bar{A}^{\lambda\mu})$ et $\bar{u}$ (donc indépendante de t et T_2).

Remarque importante. – Dans le cas où $\frac{n}{2} + 1 < m \leq \frac{n}{2} + 2$ et $W' = \mathbb{R}^{(n+1)N}$, on peut prendre dans l'énoncé du lemme 1 $\varepsilon_2 = C \| V_1 \|_{\tilde{F}^m(Y_{T_2})}$ où C est une constante de Sobolev de l'inégalité :

$$\| W \|_{c_b^0(Y_{T_2})} \leq C \| W \|_{\tilde{F}^m(Y_{T_2})}.$$

Preuve du lemme 1. – Vu (4.1.2) et (4.1.3), on a $A_1^{\lambda\mu} \in \tilde{K}^m(Y_{T_2})$ et $f_1 \in \tilde{K}^{m-1}(Y_{T_2})$.

Vu (4.1.1), (4.1.2) et l'inégalité (2.1.15) du théorème de substitution 2.1.5 où l'on fait $r = p = m_2$, on a :

$$A_2^{\lambda\mu}(x^\alpha, V_1) \in \tilde{K}^{m_2}(Y_{T_2}).$$

Vu (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3) et l'inégalité (2.1.15) du théorème de substitution 2.1.5 où l'on fait $r = p = m - 1$, on a :

$$f_2(x^\alpha, V_1, DV_1) \in \tilde{K}^{m-1}(Y_{T_2}).$$

D'après le théorème 1 du chapitre I, le problème (4.1.4) admet une unique solution $u = \bar{u} + u_1$ avec $u_1 \in \tilde{F}^m(Y_{T_2}) \cdot u_1$ vérifie l'inégalité énergétique suivante $\forall t \in (0, T_2]$:

$$(1) \quad \begin{aligned} \| u_1 \|_{\tilde{F}^m(Y_t)} \leq C_1' [t^{\frac{1}{2}} \, | a | \\ + \| \tilde{\phi}_1 \|_{\tilde{F}^m(C_t)} + t^{\frac{1}{2}} \| f_1(x^\alpha) + f_2(x^\alpha, V_1, DV_1) \|_{\tilde{K}^{m-1}(Y_t)}] \end{aligned}$$

C_1' étant une fonction continue croissante de T,

$$\| A_1^{\lambda\mu}(x^\alpha) + A_2^{\lambda\mu}(x^\alpha, V_1) \|_{\tilde{K}^{m_2}(Y_{T_2})}, \; k_1^{-1}$$

et k_2 et dépendant éventuellement des coefficients des polynômes $(\bar{A}^{\lambda\mu})$ et $\bar{u}$; ici on a posé :

(2) $$k_2 = \sup_{\substack{(x^\alpha)\in Y_T \\ (p_\lambda)\in S^2 \\ V_1'\in \bar{B}_{\varepsilon_1}}} \gamma^{\lambda\mu}(x^\alpha,\ \bar{u}(x^\alpha) + v_1')\, p_\lambda\, p_\mu > 0.$$

Vu (4.1.2), (4.1.3) et l'inégalité (2.1.15) du théorème 2.1.5 où l'on fait $r = m_2$ et $p = m$, on a :

(3) $$\| A_1^{\lambda\mu} + A_2^{\lambda\mu}(x^\alpha,\ V_1) \|_{\tilde{K}^{m_2}(Y_{T_2})} \leq \| A_1^{\lambda\mu} \|_{\tilde{K}^{m_2}(Y_{T_2})} + c_2' \| A_2^{\lambda\mu} \|_{2m_2-1,\,T} \cdot (1 + \| V_1 \|_{\tilde{F}^m(Y_{T_2})})^{2\,m_2-1}$$

c_2' étant une fonction croissante de T, dépendant des coefficients du polynôme $\bar{u}$.

Vu (4.1.2), (4.1.3) et l'inégalité (2.1.15) du théorème 2.1.5 où l'on fait $r = p = m - 1$, on a :

(4) $$\| f_1 + f_2(x^\alpha,\ V_1,\ DV_1) \|_{\tilde{K}^{m-1}(Y_t)} \leq \| f_1 \|_{\tilde{K}^{m-1}(Y_t)} + c_3' \| f_2 \|_{2m-3,\,T} \cdot (1 + \| V_1 \|_{\tilde{F}^m(Y_t)})^{2\,m-3}$$

c_3' étant de même nature que c_2'.

Posons :

$$|\bar{A}| = \max_{|\beta|\leq 2m-1} |D^\beta \bar{A}^{\lambda\mu}(0)|.$$

Alors vu (2), (4.1.1), (4.1.2) et compte tenu de l'inégalité de Sobolev (2.1.7) du théorème 2.1.4, on a :

(5) $$0 < k_2 < c\,[\,|\bar{A}| + \| A_1^{\lambda\mu} \|_{\tilde{F}^{m_2}(Y_{T_1})} + \| A_2^{\lambda\mu} \|_{2\,m_2-1,\,T_1}].$$

En substituant (3), (4) et (5) dans (1), on obtient l'inégalité (4.1.5).

Il reste à montrer que $u_1(0) = 0$, $Du_1(0) = 0$.

Or, comme solution du problème de Cauchy (4.1.4), u_1 vérifie, d'après l'inégalité (1.2.5) du théorème 1 et compte tenu du fait que $m > \frac{n}{2} + 1$:

$$|u_1(0)| \leq c\,\| u_1 \|_{F^m(Y_t)} \leq c_1''\, t^{1/2} \cdot S_t \quad \forall t \in (0,\ T_2],$$

$$|Du_1(0)| \leq c\,\| u_1 \|_{F^m(Y_t)} \leq c_2''\, t^{1/2} \cdot S_t \quad \forall t \in (0,\ T_2]$$

avec :

$$S_t = | a | + \| \tilde{\phi}_1 \|_{\tilde{K}^m (C_t)} + \| f_1 \|_{\tilde{K}^{m-1} (Y_t)}$$
$$+ \| f_2 \|_{2m-3, T} (1 + \| V_1 \|_{\tilde{F}^m (Y_t)})^{2m-3}$$

c_1'' et c_2'' étant des constantes > 0, ne dépendant que de T_1, k_1, $\| A_1^{\lambda\mu} \|_{\tilde{F}^{m_2} (Y_{T_1})}$, $\| A_2^{\lambda\mu} \|_{2m_2-1, T_1}$ et des coefficients des polynômes $(\bar{A}^{\lambda\mu})$ et $\bar{u}$.

On en déduit que $u_1 (0) = 0$ et $Du_1 (0) = 0$.

LEMME 2. – *a) Si* $m > \frac{n}{2} + 2$, *il existe une constante* $c_2 (\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$ *ne dépendant que de* $B_{\varepsilon_1} \times B'_{\varepsilon_2}$ *telle que si* $V_1 (0) = 0$, $DV_1 (0) = 0$ *et si* $t \| V_1 \|_{\tilde{F}^m (Y_{T_1})} < c_2 (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *alors* $(V_1 (x^\alpha), DV_1 (x^\alpha)) \in B_{\varepsilon_1} \times B'_{\varepsilon_2}$ *pour tout* $(x^\alpha) \in Y_t$.

b) Si $\frac{n}{2} + 1 < m \leq \frac{n}{2} + 2$, *il existe une constante* $c_3 (\varepsilon_1) > 0$, *ne dépendant que de* B_{ε_1} *telle que si* $V_1 (0) = 0$ *et si* $t \| V_1 \|_{\tilde{F}^m (Y_t)} < c_3 (\varepsilon_1)$ *alors* $V_1 (x^\alpha) \in B_{\varepsilon_1}$ *pour tout* $(x^\alpha) \in Y_t$.

Preuve de a). – $\forall (x^\alpha) \in Y_t$, on a :

$$(1) \qquad V_1 (x^\alpha) = V_1 (x^\alpha) - V_1 (0) = \sum_{\lambda=0}^{n} x^\lambda \int_0^1 \frac{\partial V_1}{\partial x^\lambda} (\tau x^\alpha) \, d\tau$$

$$(2) \quad DV_1 (x^\alpha) = DV_1 (x^\alpha) - DV_1 (0) = \sum_{\lambda=0}^{n} x^\lambda \int_0^1 \frac{\partial (DV_1)}{\partial x^\lambda} (\tau x^\alpha) \, d\tau.$$

On en déduit, vu l'inégalité de Sobolev (2.1.7) du théorème 2.1.4, que :

$$(3) \qquad | V_1 (x^\alpha) | \leq c_1' t \| V_1 \|_{\tilde{F}^m (Y_t)} \quad \forall (x^\alpha) \in Y_t$$

$$(4) \qquad | DV_1 (x^\alpha) | \leq c_2' t \| V_1 \|_{\tilde{F}^m (Y_t)} \quad \forall (x^\alpha) \in Y_t$$

c_1' et c_2' étant des constantes > 0, ne dépendant que de T.

Soit $c_2 = \text{Min} \left(\frac{\varepsilon_1}{c_1'}, \frac{\varepsilon_2}{c_2'} \right)$. Alors $(V_1 (x^\alpha), DV_1 (x^\alpha)) \in B_{\varepsilon_1} \times B'_{\varepsilon_2} \, \forall (x^\alpha) \in Y_t$ pour $t \| V_1 \|_{\tilde{F}^m (Y_t)} < c_2$.

Preuve de b). – Elle est similaire à celle de *a*).

LEMME 3. – *Les hypothèses et les notations étant celles du lemme 1, soient* V_1 *et* V_1' *deux choix de* V_1 *vérifiant la condition initiale* $V_1 / C_{T_2} = V_1' / C_{T_2} = \tilde{\phi}_1$ *et* u_1 *et* u_1' *les solutions correspondantes du problème de Cauchy* (4.1.4).

Alors on a pour tout $t \in]0, T_2]$:

$$(4.1.6) \qquad \| u_1 - u_1' \|_{\tilde F^{m-1}(Y_t)} \leq c_4 (T_1, k_1^{-1}, L, \| A_1^{\lambda\mu} \|_{\tilde F^{m_2}(Y_{T_1})}, | A_2^{\lambda\mu} |_{2m_2-1, T_1}, ||| f_2 |||_{2m_2-3, T_1}) t^{1/2} \| V_1 - V_1' \|_{\tilde K^{m-1}(Y_t)}$$

où c_4 *est une fonction croissante de* T_1, k_1^{-1}, L, $\| A_1^{\lambda\mu} \|_{\tilde F^{m_2}(Y_{T_1})}$, $| A_2^{\lambda\mu} |_{2m_2-1, T_1}$, $||| f_2 |||_{2m_2-3, T_1}$, *pouvant dépendre des coefficients des polynômes* $(\bar A^{\lambda\mu})$ *avec :*

$$L = \| V_1 \|_{\tilde F^m(Y_{T_2})} + \| V_1' \|_{\tilde F^m(Y_{T_2})}$$

$$| A_2^{\lambda\mu} |_{2m_2-1, T_1} = \max \{ \| A_2^{\lambda\mu} \|_{2m_2-1, T_1}, \max_{1 \leq i \leq N} \| D_{V_i} A_2^{\lambda\mu} \|_{2m_2-3, T_1} \}$$

$$||| f_2 |||_{2m_2-3, T_1} = \max \{ \max_{1 \leq i \leq N} \| D_{V_i} f_2 \|_{2m_2-3, T_1}; \max_{\substack{1 \leq i \leq N \\ \alpha \leq \lambda \leq n}} \| D_{D_\lambda v_i} f_2 \|_{2m_2-3, T_1} \}.$$

Preuve. – On a :

$$(1) \qquad A^{\lambda\mu} (x^\alpha, \bar u + V_1') D_{\lambda\mu} (u_1' - u_1) + f_2 (x^\alpha, V_1', DV_1') - f_2 (x^\alpha, V_1, DV_1) + (A_2^{\lambda\mu} (x^\alpha, V_1) - A_2^{\lambda\mu} (x^\alpha, V_1')) D_{\lambda\mu} (\bar u + u_1) = 0.$$

Vu l'inégalité (2.1.16) du théorème 2.1.6 où l'on fait $r = m - 1$ et $p = m - 1$ si $m > \frac{n}{2} + 2$ et l'inégalité (2.1.20) du théorème 2.1.7 où l'on fait $r = m - 1$ et $p = m - 1$ si $\frac{n}{2} + 1 < m \leq \frac{n}{2} + 2$, on a pour tout $t \in (0, T_2]$:

$$(2) \quad \| f_2 (x^\alpha, V_1', DV_1') - f_2 (x^\alpha, V_1, DV_1) \|_{\tilde K^{m-2}(Y_t)} \leq c ||| f_2 |||_{2m_2-3, T_1} \times (1 + \| V_1 \|_{\tilde F^m(Y_t)} + \| V_1' \|_{\tilde F^m(Y_t)})^{2m-3} \| V_1' - V_1 \|_{\tilde K^{m-1}(Y_t)}$$

c étant une fonction croissante de T_1.

D'autre part, on a :

$$(3) \quad \| (A_2^{\lambda\mu} (x^\alpha, V_1) - A_2^{\lambda\mu}(x^\alpha, V_1')) D_{\lambda\mu} (\bar u + u_1) \|_{\tilde K^{m-2}(Y_t)} \leq \| (A_2^{\lambda\mu} (x^\alpha, V_1) - A_2^{\lambda\mu}(x^\alpha, V_1')) D_{\lambda\mu} \bar u \|_{\tilde K^{m-2}(Y_t)} + \| (A_2^{\lambda\mu} (x^\alpha, V_1) - A_2^{\lambda\mu} (x^\alpha, V_1')) D_{\lambda\mu} u_1 \|_{\tilde K^{m-2}(Y_t)}.$$

Vu l'inégalité (2.1.13) du théorème 2.1.4, l'inégalité (2.1.16) du théorème 2.1.6 et l'inégalité (2.1.20) du théorème 2.1.7, on a :

$$(4)\quad \| (A_2^{\lambda\mu}(x^\alpha, V_1) - A_2^{\lambda\mu}(x^\alpha, V_1')) D_{\lambda\mu} \bar{u} \|_{\tilde{K}^{m-2}(Y_t)} \\ \leq c \,| A_2^{\lambda\mu} |_{2m_2-1, T_1} \cdot (1 + \| V_1 \|_{\tilde{F}^m(Y_t)} + \| V_1' \|_{\tilde{F}^m(Y_t)})^{2m-3} \\ \times \| V_1' - V_1 \|_{\tilde{K}^{m-1}(Y_t)}$$

c étant une fonction croissante de T_1 et de $|a|$.

Vu l'inégalité (2.1.18) du théorème 2.1.6 où l'on fait $r = m - 1$ et $p = m$, on a :

$$(5)\quad \| (A_2^{\lambda\mu}(x^\alpha, V_1) - A_2^{\lambda\mu}(x^\alpha, V_1')) D_{\lambda\mu} u_1 \|_{\tilde{K}^{m-2}(Y_t)} \\ \leq c \,| A_2^{\lambda\mu} |_{2m_2-1, T_1} \cdot (1 + \| V_1 \|_{\tilde{F}^m(Y_t)} \\ + \| V_1' \|_{\tilde{F}^m(Y_t)})^{2m-3} \| u_1 \|_{\tilde{F}^m(Y_t)} \times \| V_1' - V_1 \|_{\tilde{K}^{m-1}(Y_t)}.$$

Comme unique solution à données nulles sur $\mathcal{C}$ de (1), $u_1' - u_1$ vérifie, d'après l'inégalité énergétique (1.2.7) du théorème 1 du chapitre I, l'inégalité énergétique :

$$(6)\quad \| u_1' - u_1 \|_{\tilde{F}^{m-1}(Y_t)} \\ \leq c t^{1/2} [\| f_2(x^\alpha, V_1', DV_1') - f_2(x^\alpha, V_1, DV_1) \|_{\tilde{K}^{m-2}(Y_t)} \\ + \| (A_2^{\lambda\mu}(x^\alpha, V_1) - A_2^{\lambda\mu}(x^\alpha, V_1')) D_{\lambda\mu}(\bar{u} + u_1) \|_{\tilde{K}^{m-2}(Y_t)}]$$

où c est une fonction croissante de T_1, k_1^{-1}, $\| A_1^{\lambda\mu} \|_{\tilde{F}^{m_2}(Y_{T_1})}$, $\| A_2^{\lambda\mu} \|_{2m_2-1, T_1}$, pouvant dépendre des coefficients des polynômes $(\bar{A}^{\lambda\mu})$.

On en déduit le lemme 3, compte tenu des inégalités (2), (3), (4), (5).

LEMME 4. – *Soit* $R \geq \| w_1 \|_{\tilde{F}^m(Y_T)}$. *Soit* $t \in (0, T_1]$.
Soit

$$B_{R,t} = \{ V \in \tilde{F}^m(Y_t) \,|\, V/\mathcal{C}_t = \tilde{\phi}_1 \text{ et } \| V \|_{\tilde{F}^m(Y_t)} \leq R \}.$$

Alors $B_{R,t}$ *muni de la distance définie par la norme* $\| \quad \|_{\tilde{F}^{m-1}(Y_t)}$ *est un espace métrique complet non vide.*

Preuve. – $B_{R,t}$ est non vide car $w_1 \in B_{R,t}$. Pour le reste, il suffit de montrer que $B_{R,t}$ est un fermé de l'espace complet $(\tilde{F}^{m-1}(Y_t), \| \ \|_{\tilde{F}^{m-1}(Y_t)})$.

Soit (V_k) une suite d'éléments de $B_{R,t}$ telle que $V_k \vdash V$ dans $\tilde{F}^{m-1}(Y_t)$. Il s'agit de montrer que $V \in B_{R,t}$.

Or, on a par hypothèse :

$$\| V_k \|_{\tilde{F}^m(Y_t)} \leq R \tag{1}$$

$$V_k/C_t = w_1/C_t \tag{2}$$

$$V_k \vdash V \quad \text{dans}\, \tilde{F}^{m-1}(Y_t). \tag{3}$$

Des arguments de *faible compacité identiques* à ceux utilisés dans la preuve du théorème 1 permettent alors de déduire de (1) et (3) que $V \in \tilde{K}^m(Y_t)$, $V \in \tilde{F}^m(Y_t)$ et $\| V \|_{\tilde{F}^m(Y_t)} \leq R$. Il découle d'autre part de (2) et (3), vu la définition de la norme $\| \ \|_{\tilde{F}^{m-1}(Y_t)}$ que $V/C_t = w_1/C_t$. Donc $V \in B_{R,t}$. ■

Les lemmes 1, 2, 3 et 4 nous permettront maintenant de montrer que l'application $V_1 \vdash u_1$ où $u = \bar{u} + u_1$ est définie comme solution du problème de Cauchy caractéristique linéaire :

$$(\star) \quad \begin{cases} A^{\lambda\mu}(x^\alpha, V) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^\lambda \, \partial x^\mu} + f(x^\alpha, V, DV) = 0 \quad \text{dans}\, Y \\ u/C = \phi \quad \text{avec } u = (u^I),\ f = (f^I),\ \phi = (\phi^I), \\ \qquad\qquad V = \bar{u} + V_1 \end{cases}$$

est pour R assez grand et pour T_0 assez petit une application contractante de l'espace métrique complet $(B_{R,T_0}, \| \ \|_{\tilde{F}^{m-1}(Y_{T_0})})$ dans lui-même, qui admet donc un point fixe $u_1 . u = \bar{u} + u_1$ sera alors solution du problème de Cauchy quasi-linéaire (1.2.8).

En effet soit $R = 2K$ et

$$K = \max \left\{ \frac{1}{2} \| w_1 \|_{\tilde{F}^m(Y_T)}, C_1 \| \tilde{\phi}_1 \|_{\tilde{F}^m(C_T)} \right\}$$

où C_1 est la constante de l'inégalité (4.1.5) du lemme 1. Soit $T_0 \in (0, T_1]$ suffisamment petit tel que :

(i) $C_1 T_0^{1/2} [| a | + \| f_1 \|_{\tilde{K}^{m-1}(Y_{T_1})} + \| f_2 \|_{2m-3, T_1} (1 + 2K)^{2m-3}] < K$

où, si $\frac{n}{2}+1 < m \leq \frac{n}{2}+2$ et $W' = \mathbb{R}^{(n+1)N}$ on prend, dans la définition de $\| f_2 \|_{2m-3, T_1}$ $\varepsilon_2 = 2CK$, C étant une constante de Sobolev de l'inégalité :

$$(\star\star) \qquad \| X \|_{C_b^0 (Y_{T_1})} \leq C \| X \|_{\tilde{F}^{m-1} (Y_{T_1})}.$$

$$\text{(ii)} \qquad \begin{cases} 2T_0 \cdot K < C_2 (\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \text{si } m > \dfrac{n}{2} + 2 \\ 2T_0 \cdot K < C_3 (\varepsilon_1) & \text{si } \dfrac{n}{2} + 1 < m \leq \dfrac{n}{2} + 2. \end{cases}$$

$$\text{(iii)} \quad C_4 (T_1, k_1^{-1}, k_2, 4K, | A_2^{\lambda\mu} |_{2m_2-1, T_1}, ||| f_2 |||_{2m-3, T_1}) T_0^{1/2} < \frac{1}{2}$$

où C_4 est la constante de l'inégalité (4.1.6) du lemme 3 où on a remplacé L par 4 K, où dans la définition de $||| f_2 |||_{2m-3, T_1}$, on prend :

$$\varepsilon_2 = 2CK \quad \text{si } \frac{n}{2} + 1 < m \leq \frac{n}{2} + 2$$

(C constante de l'inégalité $(\star\star)$).

Alors, vu les lemmes 1, 2, 3, 4, $V_1 \vdash u_1$ est une application contractante de l'espace métrique complet *non vide* B_{2K, T_0} ($w_1 \in B_{2K, T_0}$) dans lui-même; il admet donc un point fixe $u_1 \in B_{2K, T_0}$; $u = \bar{u} + u_1$ est alors solution du problème de Cauchy quasi-linéaire (1.2.8).

Montrons maintenant que $u_1(0) = 0$, $Du_1(0) = 0$.

En effet, comme solution de l'équation linéaire d'inconnue Z :

$$A^{\lambda\mu} (x^\alpha, u) \frac{\partial^2 Z}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + f(x^\alpha, u, Du) = 0 \quad \text{dans } Y_{T_0}$$

$u = \bar{u} + u_1$ vérifie, d'après l'inégalité (1.2.8) du théorème 1 et l'inégalité de Sobolev (2.1.7) du théorème 2.1.4 et vu que $m > \frac{n}{2} + 1$:

$$| u_1 (0) | \leq C \| u_1 \|_{F^m (Y_t)} \leq C_1 t^{1/2} S_t \quad \forall t \in (0, T_0],$$

$$| Du_1 (0) | \leq C \| u_1 \|_{F^m (Y_t)} \leq C_2 t^{1/2} S_t \quad \forall t \in (0, T_0],$$

avec :

$$S_t = | a | + \| \tilde{\phi}_1 \|_{\tilde{K}^m (C_t)} + \| f_1 (x^\alpha) + f_2 (x^\alpha, u_1, Du_1) \|_{\tilde{K}^{m-1} (Y_t)},$$

$$| a | = \max_{\substack{|\alpha| \leq 2m-2 \\ I}} | D^\alpha \bar{u}^I (0) |,$$

$$f_1 (x^\alpha) = f (x^\alpha, \bar{u} (x^\alpha), D\bar{u} (x^\alpha)) - \bar{f} (x^\alpha),$$

$\bar{f}(x^\alpha) =$ polynôme de Taylor d'ordre $2(m-2)$ de $f(x^\alpha, \bar{u}(x^\alpha), D\bar{u}(x^\alpha))$ au point $(x^\alpha) = 0$,

$$f_2(x^\alpha, u_1, Du_1) = f(x^\alpha, u, Du) - f(x^\alpha, \bar{u}, D\bar{u}),$$

C_1 et C_2 étant des constantes positives, indépendantes de t. On en déduit, en faisant tendre t vers 0 que :

$$u_1(0) = 0, \quad Du_1(0) = 0.$$

4^e étape : Unicité de solution pour le problème de Cauchy quasi-linéaire (1.2.8)

Soient u, u^* deux solutions du problème (1.2.8) telles que :

$$u = \bar{u} + u_1; \quad u^* = \bar{u}^* + u_1^* \tag{1}$$

avec $u_1, u_1^* \in \tilde{F}^m(Y_{T_0})$, $\bar{u}$, $\bar{u}^*$ polynômes de degré $\leq 2(m-2)$.

Alors $u - u^*$ vérifie le problème de Cauchy linéaire :

$$\begin{cases} A^{\lambda\mu}(x^\alpha, u) \dfrac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\mu}(u - u^*) + F = 0 \quad \text{dans } Y_{T_0} \\ u - u^*/C_{T_0} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

avec :

$$\begin{aligned} F = {} & f(x^\alpha, u, Du) - f(x^\alpha, u^*, Du^*) \\ & + (A^{\lambda\mu}(x^\alpha, u) - A^{\lambda\mu}(x^\alpha, u^*)) \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^\lambda \partial x^\mu}. \end{aligned} \tag{3}$$

Admettons pour le moment que $u - u^* \in \tilde{F}^2(Y_{T_0})$.

Montrons qu'alors $u - u^* = 0$ dans Y_{T_0}.

En effet, vu (3) et vu que $u - u^*/C_{T_0} = 0$, on a, d'après les inégalités de Sobolev du théorème 2.1.4 et les divers théorèmes de substitution 2.1.5, 2.1.6 et 2.1.7 :

$$F \in \tilde{K}^1(Y_{T_0}) \tag{4}$$

$$\| F \|_{\tilde{K}^1(Y_t)} \leq C_1 \| u - u^* \|_{\tilde{K}^2(Y_t)} \quad \forall t \in (0, T_0] \tag{5}$$

C_1 étant une fonction positive, croissante de T_0, $|a|$, $|a^*|$, $\| u_1 \|_{\tilde{F}^m (Y_{T_0})}$, $\| u_1^* \|_{\tilde{F}^m (Y_{T_0})}$, indépendante de t avec :

$$|a| = \max_{\substack{|\alpha| \leq 2m-2 \\ I}} |D^\alpha \bar{u}^I (0)|, \qquad |a^*| = \max_{\substack{|\alpha| \leq 2m-2 \\ I}} |D^\alpha \bar{u}^{*I} (0)|.$$

D'après l'inégalité (1.2.7) du théorème 1, $u - u^*$ vérifie alors, comme solution de (2) :

$$\| u - u^* \|_{\tilde{F}^2 (Y_t)} \leq C_2 \| F \|_{\tilde{K}^1 (Y_t)} \quad \forall t \in (0, T_0], \tag{6}$$

C_2 étant de même nature que C_1.

En substituant (5) dans (6), on obtient :

$$\| u - u^* \|_{\tilde{F}^2 (Y_t)} \leq C_3 \| u - u^* \|_{\tilde{K}^2 (Y_t)} \quad \forall t \in (0, T_0] \tag{7}$$

avec $C_3 = C_1 C_2$.

On en déduit, en utilisant le lemme de Gronwall que :

$$\| u - u^* \|_{\tilde{F}^2 (Y_{T_0})} = 0.$$

Donc $u - u^* = 0$ dans Y_{T_0}.

Il reste donc à montrer que $u - u^* \in \tilde{F}^2 (Y_{T_0})$.

Comme u et $u^* \in F^m (Y_{T_0})$ et $m > \frac{n}{2} + 1$, on a :

$$u \text{ et } u^* \in C_b^1 (Y_{T_0}). \tag{8}$$

D'autre part, comme u et u^* sont solutions du problème (1.2.8), il découle de calculs précédents que :

$$u_1 (0) = u_1^* (0) = 0, \quad Du_1 (0) = Du_1^* (0) = 0. \tag{9}$$

De plus comme $(u - u^*)/\mathcal{C}_{T_0} = 0$, on a aussi vu (8) :

$$u (0) = u^* (0) \tag{10}$$

$$\partial_i [u] = \partial_i [u^*] \quad \text{sur } \mathcal{C}_{T_0} - \{0\} \ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \tag{11}$$

avec :

$$[u] (x^1, \ldots, x^n) = u (s, x^1, \ldots, x^n)$$

et

$$[u^*](x^1, \ldots, x^n) = u^*(s, x^1, \ldots, x^n).$$

Faisons tendre s vers 0 dans (11), en gardant $\frac{x^i}{s} = q_i$ constant ; on obtient vu (9) :

$$\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial x^i}\right](0) + q_i \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial x^0}\right](0) = \left[\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial x^i}\right](0) + q_i \left[\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial x^0}\right](0). \tag{12}$$

On en déduit, en donnant à q_i deux valeurs distinctes :

$$\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial x^i}\right](0) = \left[\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial x^i}\right](0)(1 \leq i \leq n) \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial x^0}\right](0) = \left[\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial x^0}\right](0) \tag{13}$$

(9) et (13) entraînent :

$$Du(0) = Du^*(0) \tag{14}$$

(10), (14) et le fait que $(\bar{u} - \bar{u}^*)/C_{T_0} = (u_1^* - u_1)/C_{T_0} \in \tilde{F}^2(C_{T_0})$ entraînent que $\bar{u} - \bar{u}^* \in \tilde{F}^2(Y_{T_0})$. On en déduit que

$$u - u^* = \bar{u} - \bar{u}^* + u_1 - u_1^* \in \tilde{F}^2(Y_{T_0}).$$

Preuve de la partie 3) du théorème 2. – On montre, comme dans la preuve de la partie 1) du théorème 2, que l'application $V_1 \vdash u_1$ où $u = \bar{u} + u_1$ est définie comme solution du problème de Cauchy caractéristique linéaire :

$$\begin{cases} A^{\lambda\mu}(x^\alpha)\, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^\lambda \, \partial x^\mu} + f(x^\alpha, V, DV) = 0 \quad \text{dans } Y \\ u/C = \phi \end{cases}$$

est pour R assez grand et pour T_0 assez petit une *application contractante de l'espace métrique complet* $(B_{R, T_0}, \| \ \|_{\hat{F}^m(Y_{T_0})})$ dans lui-même ; on utilisera pour cela la remarque 3.8. D'où le résultat.

Preuve de la partie 4) du théorème 2. – C'est une variante facile de la preuve de la partie 2) du théorème 2 avec une exploitation plus précise des inégalités de Sobolev du théorème 2.1.4 et des différents théorèmes de substitution.

4.2. Preuve du théorème 3

En appliquant à la fonction $f(x, \cdot, \cdot)$ de variable (u, Du) la formule de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de $(u, Du) = (0, 0) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{(n+1)N}$, on peut la mettre sous la forme suivante :

$$(1) \qquad f(x, u, Du) = B^{\lambda}(x) \frac{\partial u}{\partial x^{\lambda}} + C(x) \cdot u + R(x, u, Du)$$

avec :

$$(2) \quad R(x, 0, 0) = 0, \qquad D_u R(x, 0, 0) = 0, \qquad D_{Du} R(x, 0, 0) = 0$$

On construit alors la composante u_1 de la solution $u = \overline{u} + u_1$ recherchée comme point fixe de l'application

$$A : \tilde{F}^m(Y_T) \to \tilde{F}^m(Y_T)$$
$$V_1 \to A(V_1) = u_1$$

définie par $u = \overline{u} + u_1$ est solution du problème de Cauchy caractéristique linéaire

$$(3) \qquad \begin{cases} A^{\lambda\mu}(x^{\alpha}, V) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} + B^{\lambda}(x) \dfrac{\partial u}{\partial x^{\lambda}} + C(x) u \\ \quad + R(x, V, DV) = 0 \quad \text{dans } Y_T \\ u/\mathcal{C} = \phi \quad \text{avec } V = \overline{u} + V_1 \end{cases}$$

Pour y arriver, on montre que la solution u_1 de (3) vérifie, compte tenu de (2), l'inégalité énergétique :

$$(4) \quad \|u_1\|_{\tilde{F}^m(Y_T)} \leq \overline{C}_1 \left[|a|_m + \|\tilde{\phi}_1\|_{\tilde{F}^m(C_T)} + \|R_1\|_{\tilde{K}^{m-1}(Y_T)} \right.$$
$$\left. + \|R_2\| \left(1 + \|V_1\|_{\tilde{F}^m(Y_T)}\right)^{2m-3} \|V_1\|^2_{\tilde{F}^m(Y_T)} \right]$$

avec :

$$(5) \qquad \begin{cases} R_1(x^{\alpha}) = R(x^{\alpha}, \overline{u}(x^{\alpha}), D\overline{u}(x^{\alpha})) - \overline{R}(x^{\alpha}) \\ \overline{R}(x^{\alpha}) = \text{polynôme de Taylor d'ordre } 2(m-2) \text{ de} \\ R(x^{\alpha}, \overline{u}(x^{\alpha}), D\overline{u}(x^{\alpha})) \text{ au point } (x^{\alpha}) = 0 \\ R_2(x^{\alpha}, V_1, DV_1) = R(x^{\alpha}, \overline{u}(x^{\alpha}) + V_1, D\overline{u}(x^{\alpha}) + DV_1) \\ \qquad\qquad - R(x^{\alpha}, \overline{u}(x^{\alpha}), D\overline{u}(x^{\alpha})) \\ \|R_2\| = \max\{\|D^2_u R_2\|_{2m-3, T}, \|D^2_{uDu} R_2\|_{2m-3, T}, \\ \qquad \|D^2_{Du} R_2\|_{2m-3, T}\} \end{cases}$$

(*cf.* le lemme 1 du paragraphe précédent pour la définition des normes $\|X\|_{k,T}$)

Vu (2) et (5), il existe une constante $\beta > 0$ telle que :

$$\|R_1\|_{\tilde{K}^{m-1}(Y_T)} \leq \beta |a|_m^2 \leq \beta \|\phi\|_{m,T}^2 \tag{6}$$

D'autre part si $A(V_1) = u_1$, $A(V_1^*) = u_1^*$, on peut aussi montrer que $u_1 - u_1^*$ vérifie l'inégalité énergétique :

$$\|u_1 - u_1^*\|_{\tilde{F}^{m-1}(Y_T)} \leq \overline{C}_2 (L, |||R_2|||)\, L\, \|V_1 - V_1^*\|_{\tilde{F}^{m-1}(Y_T)} \tag{7}$$

avec :

$$\begin{cases} L = \|V_1\|_{\tilde{F}^m(Y_T)} + \|V_2\|_{\tilde{F}^m(Y_T)} \\ |||R_2||| = \max\{\|D_u^2 R_2\|_{2m-3,T}, \|D_{Du}^2 R_2\|_{2m-3,T}, \\ \qquad \|D_{uDu}^2 R_2\|_{2m-3,T}\} \end{cases} \tag{8}$$

Soit w_1 la fonction définie dans la preuve du théorème 2 et vérifiant :

$$\begin{cases} \Box w_1 = 0 \quad \text{dans } Y_T \\ w_1/\mathcal{C}_T = \tilde{\phi}_1 \end{cases}$$

On sait que w_1 vérifie l'inégalité énergétique :

$$\|w_1\|_{\tilde{F}^m(Y_T)} \leq \overline{C}_3 \|\tilde{\phi}_1\|_{\tilde{F}^m(\mathcal{C}_T)} \leq \overline{C}_3 \|\phi\|_{m,T} \tag{9}$$

Supposons désormais $\|\phi\|_{m,T} \leq d$. On va maintenant choisir R en fonction de d de façon que pour d assez petit, l'application $A : V_1 \vdash u_1$ soit contractante sur l'espace métrique complet $(B_{R,T}, \|\|_{\tilde{F}^{m-1}(Y_T)})$ défini par :

$$B_{R,T} = \{X \in \tilde{F}^m(Y_T) |\, X/\mathcal{C}_T = \tilde{\phi}_1 \text{ et } \|X\|_{\tilde{F}^m(Y_T)} \leq R\}$$

Choisissons donc :

$$R = 2\alpha d \quad \text{avec } \alpha = \max\{\overline{C}_1, \overline{C}_3\} \tag{10}$$

où $\overline{C}_1$ et $\overline{C}_3$ sont respectivement les constantes des inégalités (4) et (9).

Choisissons alors $d > 0$, suffisamment petit tel que :

$$\overline{C}_1 [\beta d^2 + \|R_2\|(1 + 2\alpha d)^{2m-3}\, 4\alpha^2 d^2] < \alpha d \tag{11}$$

$$(12)\qquad \begin{cases} 2T\alpha d < C_2(\varepsilon_1,\, \varepsilon_2) & \text{si } m > \dfrac{n}{2}+2 \\ 2T\alpha d < C_3(\varepsilon_1) & \text{si } \dfrac{n}{2}+1 < m \leq \dfrac{n}{2}+2 \end{cases}$$

($C_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et $C_3(\varepsilon_1)$ étant les constantes définies au lemme 2 du paragraphe précédent),

$$(13)\qquad \overline{C}_2\,(4\alpha d,\, |||R_2|||)\, 4\alpha d < \frac{1}{2}$$

où :

$\overline{C}_1$ est la constante de l'inégalité (4),

$\overline{C}_2$ est la constante de l'inégalité (7) où on a remplacé L par $4\alpha d$ et où si $\frac{n}{2}+1 < m \leq \frac{n}{2}+2$, on prend, dans la définition de $|||R_2|||$, $\varepsilon_2 = 2C\alpha d$, C étant une constante de Sobolev de l'inégalité :

$$\|X\|_{C_b^0(Y_T)} \leq C\|X\|_{\tilde{F}^{m-1}(Y_T)}$$

Alors vu (4), (7), (9), (10) et le lemme 2, si $\|\phi\|_{m,T} \leq d$ $A : V_1 \vdash u_1$ est une application contractante sur l'espace métrique complet non vide $(B_{R,T},\, \|\|\|_{\tilde{F}^{m-1}(Y_T)})$.

A admet donc un point fixe $u_1 \cdot u = \overline{u} + u_1$ est alors la solution *globale* du problème (1.2.8).

CHAPITRE V

PREUVE DU THÉORÈME 4

On aura besoin du résultat suivant :

5.1. THÉORÈME. – *Sous l'hypothèse* (A_m) *du chapitre I avec* $m \geq 1$, *c'est-à-dire l'hypothèse* (1.2.11), *on a les résultats suivants :*

1) *la donnée de Cauchy* $\phi = \overline{\phi}/\mathcal{C} + \phi_1$ *du problème de Cauchy* (1.2.10) *peut se redécomposer sous la forme* :

$$\phi = \overline{u}/\mathcal{C} + \tilde{\phi}_1$$

où :

$\overline{u}$ *est un polynôme sur* $\mathbb{R}^{n+1}$ *de degré* $\leq 2(m-1)$, *vérifiant au point* 0, *l'équation non linéaire* :

$$\frac{\partial^2 W}{(\partial x^0)^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 W}{(\partial x^i)^2} + \overline{a}W + \overline{b}W^p = 0$$

d'inconnu W, *et les équations dérivées jusqu'à l'ordre* $2(m-2)$,

• $\tilde{\phi}_1 \in \hat{F}^m_{loc}(\mathcal{C})$

2) *Pour tout* $T \in]0, +\infty[$, *toute solution* u *de* (1.2.10), *définie sur* Y_T *et satisfaisant à la condition de structure* $u = \overline{u} + u_1$ *avec* $u_1 \in \hat{F}^m(Y_T)$ *vérifie une estimation* a priori *de la forme suivante* :

$$\|u_1\|_{\hat{F}^m(Y_T)} \leq c(T, \|\phi\|_{m,T}) \tag{5.1.1}$$

où

• $\|\phi\|_{m,T} = |\overline{u}|_m + \|\tilde{\phi}_1\|_{\hat{F}^m(\mathcal{C}_T)}$ avec $|\overline{u}|_m = \max_{|\alpha| \leq 2(m-1)} |D^\alpha \overline{u}(0)|$,

• *c est une fonction positive, continue, croissante, bornée pour T fini, nulle pour* $\|\phi\|_{m,T} = 0$.

Pour démontrer le théorème 5.1 on a besoin du lemme suivant :

5.2 LEMME. – *Sous les hypothèses* (A_2), *toute solution* $u \in F^2(Y_T)$ *de* (1.2.10) *et satisfaisant à la condition de structure* $u = \overline{u} + u_1$ *avec* $\overline{u}$ *fonction-polynôme sur* $\mathbb{R}^{(n+1)}$ *et* $u_1 \in \hat{F}^2(Y_T)$, *vérifie :*

$$\begin{aligned} \operatorname*{Ess\,sup}_{t \in (0,T]} \left\{ t^{-n} \int_{G_t} \left(|Du|^2 + au^2 + \frac{2}{p+1} b\, u^{p+1} \right) dx^1 \dots dx^n \right\} \\ \leq c\,[\|\phi\|^2_{\hat{E}^1(\mathcal{C}_T)} + \|\phi\|^{p+1}_{\hat{E}^1(\mathcal{C}_T)}] \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

où c est une constante > 0, *fonction croissante de* T (*ne dépendant que de* $\|a_1\|_{F^2(Y_T)}$, $\|b_1\|_{F^2(Y_T)}$, $k_1(T)$, $k_2(T)$ *et des coefficients des polynômes* $\overline{a}$ *et* $\overline{b}$.

Convention. – Les constantes $c > 0$ qui interviendront ci-dessous dans les preuves du lemme 5.2 et du théorème 5.1 seront toujours des fonctions *croissantes* de T (dépendant éventuellement de $\|a_1\|_{\hat{F}^m(Y_T)}$, $\|b_1\|_{\hat{F}^m(Y_T)}$ et des coefficients des fonctions-polynômes sur $\mathbb{R}^{n+1}$ $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{u}$). On désignera aussi par $c(T, \|\phi\|_{m,T})$ des constantes > 0, fonctions continues et croissantes de leurs arguments, bornées pour T fini, nulles pour $\|\phi\|_{m,T} = 0$.

Preuve du lemme 5.2. – Soient $(u_{1,k})$, $(a_{1,k})$, $(b_{1,k})$ des suites d'éléments de $C^\infty_\infty(Y_T)$ convergeant dans $\hat{F}^2(Y_T)$ respectivement vers u_1, a_1, b_1

Posons :

$$(1)\qquad \begin{cases} u_k = \overline{u} + u_{1,\,k}; \quad a_k = \overline{a} + a_{1,\,k}; \quad b_k = \overline{b} + b_{1,\,k;} \\ F_k = \dfrac{\partial^2 u_k}{(\partial x^0)^2} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u_k}{(\partial x^i)^2} + a_k\, u_k + b_k\, u_k^{p+1} \end{cases}$$

D'après les inégalités de Sobolev du théorème 2.1.4 du chapitre II, on a :

$$(2)\qquad \begin{cases} a_k \mapsto a \text{ dans } F^2\,(Y_T) \\ b_k \mapsto b \text{ dans } F^2\,(Y_T) \\ u_k \mapsto u \text{ dans } F^2\,(Y_T) \\ F_k \mapsto 0 \text{ dans } F^0\,(Y_T) \end{cases}$$

On a, en posant

$$\Box\, u_k = \frac{\partial^2 u_k}{(\partial x^0)^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u_k}{(\partial x^i)^2}$$

$$(3)\qquad \frac{\partial u_k}{\partial x^0}\,(\Box u_k + a_k\, u_k + b_k\, u_k^p) = F_k\, \frac{\partial u_k}{\partial x^0}$$

c'est-à-dire :

$$(4)\ \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x^0}\left\{|Du_k|^2 + a_k\, u_k^2 + \frac{2}{p+1}\, b_k\, u_k^{p+1}\right\} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\frac{\partial u_k}{\partial x^0}\,\frac{\partial u_k}{\partial x^i}\right\}$$
$$= F_k\,\frac{\partial u_k}{\partial x^0} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial a_k}{\partial x^0}\cdot u_k^2 + \frac{1}{p+1}\,\frac{\partial b_k}{\partial x^0}\, u_k^{p+1}$$

L'application de la formule de Stokes-Gauss à (4) sur Y_t donne, compte tenu du fait que $\mathcal{C}$ est *isotrope* par rapport à la métrique de Minkowski η et après passage à la limite sur k (*cf.* formule (2)) :

$$(5)\quad \int_{G_t}\left(|Du|^2 + au^2 + \frac{2}{p+1}\, b\, u^{p+1}\right) dx^1 \ldots dx^n$$
$$= \int_{G_t}\left(au^2 + \frac{2}{p+1}\, b\, u^{p+1} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\,[u]\right)^2\right) dx^1 \ldots dx^n$$
$$+ \int_0^t d\tau \int_{G_t}\left(\frac{\partial a}{\partial x^0}\, u^2 + \frac{2}{p+1}\,\frac{\partial b}{\partial x^0}\, u^{p+1}\right) dx^1 \ldots dx^n$$

D'après l'inégalité de Sobolev (2.1.4) du théorème 2.1.4, on a :

$$(6)\qquad \int_{C_t}\left(au^2+\frac{2}{p+1}\,b\,u^{p+1}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}[u]\right)^2\right)dx^1\dots dx^n$$
$$\leq c\left[\int_0^t \|u\|^2_{H^1(\Sigma_\tau,C)}\,d\tau+\int_0^t \tau^{-(n-1)(p-1)/2}\|u\|^{p+1}_{H^1(\Sigma_\tau,C)}\,d\tau\right]$$

D'après l'hypothèse (A_2) on a

$$(7)\qquad \frac{\partial a}{\partial x^0}\leq k_1(T)\,a \quad \text{et} \quad \frac{\partial b}{\partial x^0}\leq k_2(T)\,b \quad \text{sur } Y_T$$

donc aussi :

$$(8)\qquad \int_0^t d\tau\int_{G_t}\left(\frac{\partial a}{\partial x^0}\,u^2+\frac{2}{p+1}\,\frac{\partial b}{\partial x^0}\,u^{p+1}\right)dx^1\dots dx^n$$
$$\leq \operatorname{Max}(k_1(T),\,k_2(T))\int_0^t d\tau\int_{G_\tau}$$
$$\times\left(au^2+\frac{2}{p+1}\,b\,u^{p+1}+|Du|^2\right)dx^1\dots dx^n$$

En substituant (8) et (6) dans (5) et en appliquant à l'inégalité obtenue le lemme 2.3.2 (de Gronwall), puis en multipliant par t^{-n} l'inégalité résultante, et en prenant Ess sup sur $(0,\,T]$, on obtient, grâce au lemme 2.3.1 du chapitre II, l'inégalité (5.2.1) du lemme 5.2.

Preuve du théorème 5.1. – Elle se fera par récurrence sur m.

$\boxed{\text{cas : } m=2}$

Soit $\alpha=\min\limits_{Y_T} a$. Comme a est >0 et continue sur Y_T, on a :

$\boxed{\alpha>0}$ Posons $\beta=\min(\alpha,\,1)>0$

D'après le lemme 5.2, on a :

$$(1)\qquad \beta\|u\|^2_{F^1(Y_T)}$$
$$\leq \operatorname*{Ess\,sup}_{t\in(0,T]}\left\{t^{-n}\int_{G_t}\left(|Du|^2+au^2+\frac{2}{p+1}\,b\,u^{p+1}\right)dx^1\dots dx^n\right\}$$
$$\leq c\,[\|\phi\|^2_{\hat{E}^1(C_T)}+\|\phi\|^{p+1}_{\hat{E}^1(C_T)}]$$

d'où :

$$\|u\|_{F^1(Y_T)} \leq c(T, \|\phi\|_{\hat{E}^1(\mathcal{C}_T)}) \tag{2}$$

D'autre part, u considérée comme solution de l'équation linéaire $\square u + au = F$ avec $F = -bu^p$ vérifie l'inégalité intégrale (*cf.* l'inégalité (3.3.2) de la remarque qui suit la preuve du théorème 3.3 du chapitre III) :

$$\|u\|^2_{H^2(G_t, Y)} \leq c\left[\int_0^t \|u\|_{H^2(G_\tau, Y)} \|bu^p\|_{H^1(G_\tau, Y)}\, d\tau \right. \\ \left. + \int_0^t \|u\|^2_{H^2(G_\tau, Y)}\, x(\tau)\, d\tau + y^2(t)\right] \tag{3}$$

avec :

$$x(\tau) = 1 + \tau^{-n/2}\|a_1\|_{H^1(G_\tau, Y)}; \qquad y(t) = \|D^{[1]}u\|_{H^1(\mathcal{C}_t)} \tag{4}$$

(*cf.* notations 1.1)

Or il découle des inégalités de Sobolev (2.1.1) et (2.1.2) du théorème 2.1.4 du chapitre II :

$$\|bu^p\|_{H^1(G_t, Y)} \leq c\|u\|^{p-1}_{F^1(Y_T)}\|b\|_{F^2(Y_T)}\|u\|_{H^2(G_t, Y)} \tag{5}$$

En substituant (2) dans (5), puis (5) dans (3) et en appliquant à l'inégalité obtenue le lemme de Gronwall, enfin en multipliant l'inégalité résultante par $t^{-n/2}$ et en prenant Ess sup par $]0, T]$, on trouve, grâce au lemme 2.3.1 :

$$\|u\|_{F^2(Y_T)} \leq c(T, \|\phi\|_{\hat{E}^1(\mathcal{C}_T)})\|D^{[1]}u\|_{\tilde{E}^1(\mathcal{C}_T)} \tag{6}$$

(*cf.* paragraphe 1.1 du chapitre I pour la définition de $\|D^{[1]}u\|_{\tilde{E}^1(\mathcal{C}_T)}$).

Le problème de Cauchy (1.2.10) étant caractéristique, la restriction au conoïde caractéristique $\mathcal{C}$ de l'équation $\square u + au = -bu^p$ se réduit à une équation hyperbolique d'inconnu $\frac{\partial u}{\partial x^0}\Big|_{\mathcal{C}}$ qui vérifie, d'après les inégalités énergétiques (3.6.4) et (3.6.5) de la remarque qui suit la preuve du théorème 3.6, les inégalités énergétiques suivantes :

$$\|D^{[1]}u\|_{\tilde{E}^1(\mathcal{C}_T)} \leq c\,[|\overline{u}|_2 + \|u_1\|_{\hat{F}^2(\mathcal{C}_T)} + \|R\|_{\hat{F}^1(\mathcal{C}_T)}] \tag{7}$$

$$\|u_1\|_{\tilde{F}^2(\mathcal{C}_T, Y)} \leq c\,[|\overline{u}|_2 + \|u_1\|_{\hat{F}^2(\mathcal{C}_T)} + \|R\|_{\hat{F}^1(\mathcal{C}_T)}] \tag{8}$$

où :

$$R = R_1 + R_2 + R_3 \tag{9}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} R_1 = \bar{b}\,\overline{u}^p - R_0 \\ R_0 = \text{polynôme de Taylor d'ordre 2 au point } 0 \\ \qquad \text{de la fonction-polynôme } \bar{b}\,\overline{u}^p \\ R_2 = b_1 \overline{u}^p \\ R_3 = b\,(u^p - \overline{u}^p) = b \displaystyle\sum_{k=1}^{p} C_p^k\, u_1^k \overline{u}^{p-k} \end{array}\right. \tag{10}$$

D'autre part, on a, vu (9) et vu les inégalités de Sobolev du théorème 2.1.4 :

$$\left\{\begin{array}{l} \|R_1\|_{\hat{F}^1\,(C_T)} \leq c\,(|\overline{u}|_2)^p \;(\text{avec } |\overline{u}|_m = \max\limits_{|\alpha| \leq 2\,(m-1)} |D^\alpha \overline{u}\;(0)|) \\ \|R_2\|_{\hat{F}^1\,(C_T)} \leq c\,(|\overline{u}|_2)^p \\ \|R_3\|_{\hat{F}^1\,(C_T)} \leq c\,\|u_1\|_{\hat{F}^2\,(C_T)} \end{array}\right. \tag{11}$$

En substituant (9) et (11) dans (7), puis (7) dans (6), on obtient :

$$\|u_1\|_{F^2\,(Y_T)} \leq c\,(T,\; \|\phi\|_{2,T}) \tag{12}$$

En ajoutant membre à membre les inégalités (8) et (12), on trouve, compte tenu de (9) et (11) :

$$\|u_1\|_{\hat{F}^2\,(Y_T)} \leq c\,(T,\; \|\phi\|_{2,T}) \tag{13}$$

Hypothèse de récurrence. – Supposons qu'on a, pour $m \geq 2$, et sous l'hypothèse (A_m) :

$$\|u_1\|_{\hat{F}^m\,(Y_T)} \leq c\,(T,\; \|\phi\|_{m,T}) \tag{14}$$

Preuve de (5.1.1) *pour* $m+1$ *sous l'hypothèse* (A_{m+1}). – u considérée comme solution de l'équation linéaire $\Box u + au = F$ avec $F = -bu^p$, vérifie, d'après l'inégalité (1.2.5) du théorème 1 du chapitre I, l'inégalité énergétique :

$$\|u_1\|_{\hat{F}^{m+1}\,(Y_T)} \leq c\,[|\overline{u}|_{m+1} + \|\tilde{\phi}_1\|_{\hat{F}^{m+1}\,(C_T)} + \|R\|_{\hat{F}^m\,(Y_T)}] \tag{15}$$

avec :

$$
(16)\qquad \begin{cases} R_0 = \text{polynôme de Taylor d'ordre } 2m \text{ au point } 0 \\ \qquad\quad \text{de la fonction } \overline{b}\,\overline{u}^p \\ R = R_1 + R_2 + R_3 \\ R_1 = \overline{b}\,\overline{u}^p - R_0 \\ R_2 = b_1 \overline{u}^p \\ R_3 = b\,(u^p - \overline{u}^p) = b \displaystyle\sum_{k=1}^{p} C_p^k\, u_1^k \overline{u}^{p-k} \end{cases}
$$

D'autre part, on a, vu (16) et vu les inégalités de Sobolev du théorème 2.1.4 :

$$
(17)\qquad \begin{cases} \|R_1\|_{\hat{F}^m\,(Y_T)} \leq c\,(|\overline{u}|_{m+1})^p \\ \|R_2\|_{\hat{F}^m\,(Y_T)} \leq c\,(|\overline{u}|_{m+1})^p \\ \|R_3\|_{\hat{F}^m\,(Y_T)} \leq c\,(|\overline{u}|) \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \|u_1\|^k_{\hat{F}^m\,(Y_T)} \end{cases}
$$

En substituant (14) dans (17), puis (17) dans (15), on obtient finalement :

$$
(18)\qquad \|u_1\|_{\hat{F}^{m+1}\,(Y_T)} \leq c\,(T,\ \|\phi\|_{m+1,T})
$$

5.3 Preuve du théorème 4

D'après le théorème 2 du chapitre I, il existe une solution $u \in F^m\,(Y_T)$ pour un certain $T > 0$, suffisamment petit, avec u vérifiant la condition de structure : (1) : $u = \overline{u} + u_1$ où $\overline{u}$ est le polynôme sur $\mathbb{R}^{n+1}$ de degré $\leq 2\,(m-1)$ déterminé au théorème 5.1 et $u_1 \in \hat{F}^m\,(Y_T)$. Soit T_∞ la borne supérieure des nombres T tels qu'une solution de (1.2.10) vérifiant la condition de structure (1) existe sur Y_T. Il suffit de montrer que $T_\infty = +\infty$.

Supposons que $T_\infty < +\infty$. Soient T_0, T_2 deux réels tels que $0 < T_0 < T_\infty < T_1$. Posons :

$$
Y_{(T_0,\,T')} = \{(x^0,\, x^1, \ldots,\, x^1) \in Y_\infty | T_0 \leq x^0 < T'\} \quad \text{si } T_0 < T';
$$
$$
H_{T_0} = \mathcal{C}_{T_0^+} \cup G_{T_0} \quad \text{avec } \mathcal{C}_{T_0^+} = \{(x^0,\, x^1, \ldots,\, x^n) \in \mathcal{C} | x^0 \geq T_0\}
$$

Considérons dans le domaine $Y_{(T_0,\,T_1)}$ le problème de Cauchy mixte suivant à donnée initiale sur l'hypersurface spatiocaractéristique H_{T_0} :

$$(\star) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{(\partial x^0)^2} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 w}{(\partial x^i)^2} + aw + bw^p = 0 \\ w|H_{T_0} = \Delta \quad \text{avec}\, \Delta(x) = \phi \quad \text{si}\, x \in C_{T_0^+} \\ \text{et} \quad \Delta(x) = u(x) \quad \text{si}\, x \in G_{T_0} \\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial x^0}\right|_{G_{T_0}} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial x^0}\right|_{G_{T_0}} \end{cases}$$

D'après [21], ce problème admet une solution unique w dans un domaine $Y_{(T_0, T_2)}$ $(T_2 < T_1)$ dont l'épaisseur $T_2 - T_0$ ne dépend que des normes de Δ et $\frac{\partial u}{\partial x^0}\big|_{G_{T_0}}$, donc, en vertu du théorème 5.1, de $\|\phi\|_{m, T_1}$. En choisissant alors T_0 suffisamment proche de T_∞, on peut construire une solution de $(\star)$ dans $Y_{(T_0, T_2)}$ avec $T_0 < T_\infty < T_2 < T_1$.

D'après l'unicité locale de solution du problème de Cauchy spatio-caractéristique cette solution w prolonge la solution u initiale sur $[0, T_2]$; ceci est en contradiction avec la maximalité de T_∞.

Donc $T_\infty = +\infty$ et $u = \overline{u} + u_1$ avec $u_1 \in \hat{F}^m_{\text{loc}}(Y_\infty)$

b) Si toutes les données sont (C^∞), le problème de Cauchy (1.2.10) admet, d'après la partie (a), une solution globale unique u (définie donc sur Y_∞) telle que $\forall T > 0$, on a :

$$u|Y_T \in \bigcap_{m \geq 2} F^m(Y_T) = C^\infty(Y_T)$$

Donc $u \in C^\infty(Y_\infty)$.

RÉFÉRENCES

[1] R. Adams, Sobolev Spaces, Academic press, London, 1975.

[2] T. Aubin, Non linear Analysis on Manifolds, Monge-Ampère Equations, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.

[3] F. Cagnac, Problèmes de Cauchy sur un conoïde caractéristique pour des équations quasi-linéaires, 1980, *Annali di Mathematica Pura Ed Applicata (IV)*, Vol. **129**, pp. 13-41.

[4] F. Cagnac, Problème de Cauchy sur un conoïde caractéristique, Thèse de Doctorat d'État, Université de Paris VI, 1973.

[5] F. Cagnac, Problème de Cauchy sur un conoïde caractéristique, 1975, *Annali Di Matematica Pura Ed Applicata (IV)*, Vol. **104**, pp. 355-393.

[6] F. Cagnac, Problème de Cauchy sur un conoïde caractéristique, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1980, Vol. **11**, pp. 11-19.

[7] F. Cagnac et Y. Choquet-Bruhat, Solution globale d'une équation non linéaire sur une variété hyperbolique, *J. Maths. pures et appl.*, Vol. **63**, 1984, pp. 377-390.

[8] Y. Choquet-Bruhat et M. Novello, Système conforme régulier pour les équations d'Einstein, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1987, t. **305**, Série II, pp. 155-160.
[9] D. Christodoulou, Characteristic initial value problem for quasi hyperbolic systems of second order, *Séminaire Vaillant sur les équations aux dérivées partielles hyperboliques et holomorphes*, Paris VI, 1980-1981.
[10] D. Christodoulou et H. Müller Zum Hagen, Problème de valeur initiale caractéristique pour des systèmes quasi-linéaires du second ordre, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **293**, (6 juillet 1981).
[11] P. Dionne, Sur les problèmes de Cauchy hyperboliques bien posés, *J. Analyse Maths.*, Jerusalem, Vol. **10**, 1962, pp. 1-90.
[12] M. Dossa, Problème de Cauchy sur un conoïde caractéristique pour des équations quasi-linéaires du second ordre, Université de Yaoundé, 1992, Thèse de Doctorat d'État, 1ère partie.
[13] M. Dossa, Théorèmes d'existence et de régularité pour certains problèmes de Cauchy caractéristiques non linéaires, Preprint, 1986, Université de Yaoundé, *Ann. Fac. Sci. Yaoundé*, H.S. II, 1993, p. 90-165.
[14] M. Dossa, Remarque sur les constantes de Sobolev de quelques sous-variétés usuelles de $\mathbb{R}^N$, *Ann. Fac. Sci. Yaoundé*, Nouvelles séries Mathématiques Physique, Série I, t. **1**, n° 3, 1988, pp. 51-69.
[15] M. Dossa, Solution globale d'un problème de Cauchy caractéristique non linéaire, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **303**, Série I, n° 16, 1986.
[16] M. Dossa, Inégalités énergétiques sur un conoïde caractéristique, *Ann. Fac. Sci. Yaoundé, Maths-Phys.*, Nouvelles Séries I, t. **I.1**, janvier 1985.
[17] M. Dossa, Inégalités énergétiques sur un conoïde caractéristique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **296**, Série I, p. 121-124.
[18] F. G. Friedlander, The wave equation on a curved spacetime, Cambridge Monographs on Mathematical Physics-2, 1975.
[19] L. Garding, Cauchy's problem for hyperbolic equations, Lectures Notes, University of Chicago, 1957.
[20] H. Müller Zum Hagen, Characteristic initial value problem for hyperbolic systems of second ordre differential equations, *Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor.*, Vol. **53**, 1990, n° 2, pp. 159-216.
[21] H. Müller Zum Hagen et H. Jurgen Seifert, Characteristic initial value and mixed problems, 1977, General Relativity and Gravitation, Vol. **8**, pp. 259-301.
[22] A. D. Rendall, Reduction of the characteristic initial value problem to the Cauchy problem and its applications to the Einstein Equations, *Proc. Roy. Soc. London Ser A*, Vol. **427**, 1990, pp. 221-239.
[23] T. Damour et B. G. Schmidt, Post-minkowskian expansions and exact solutions, 12th international conference on General Relativity and Gravitation, Boulder, Colorado, USA, July 2-8, Vol. **1**, 1989.
[24] R. A. Isaacson, J. S. Welling et J. Winicour, 1983, *J. Math. Phys.*, Vol. **24**, pp. 1824-1834.
[25] J. M. Stewart dans Classical General Relativity (ed., W. B. Bonnor, J. N. Islam et M. A. H. Mac Callum), Cambridge University Press.
[26] G. F. R. Ellis, S. D. Nel, R. Maartens, W. R. Stoeger et A. P. Whitman, 1985, Physics Reports, Vol. **124**, pp. 315-417.
[27] H. Friedrich, On static and radiative space-times, *Commun. Math. Phys.*, Vol. **119**, 1988, pp. 51-77.
[28] H. Friedrich, On purely radiative space-times, *Commun. Math. Phys.*, Vol. **103**, 1986, pp. 35-65.
[29] H. Friedrich, The asymptotic characteristic initial value problem for Einstein's vacuum field equations as an initial value problem for a first order quasi-linear symmetric hyperbolic system, *Proc. R. Soc. Lond. A*, Vol. **378**, 1980, pp. 401-421.
[30] H. Friedrich, On the regular and asymptotic characteristic Initial value Problem for Einstein's vacuum Field Equation, *Proc. R. Soc., Lond.*, Vol. **A375**, 1981, pp. 169-184.

[31] J. C. BAEZ, I. E. SEGAL and Z. F. ZHOU, The global Goursat problem and scattering for non linear wave equations, *J. Funct. Anal.*, Vol. **93**, 1990, pp. 239-269.

[32] R. d'ADHEMAR, Sur une équation aux dérivées partielles du type hyperbolique, Étude de l'intégrale près d'une frontière caractéristique, *Rend. Circ. Matem. Palermo*, Vol. **20**, 1905, pp. 142-159.

[33] M. RIESZ, L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, *Acta Math.*, Vol. **81**, 1949, p. 1223.

[34] F. CAGNAC et M. DOSSA, Problème de Cauchy sur un conoïde caractéristique. Applications à certains systèmes non linéaires d'origine physique, pp. 35-47 in *Physics on Manifolds* (proceedings of the International Colloquium in honour of Yvonne Choquet-Bruhat, Paris, June 3-5, 1992 edited by Flato, Kerner, Lichnerowicz Mathematical Physics Studies, Vol. **15**, 1994, Kluwer Academic Publishers.

[35] M. DOSSA, Problème de Cauchy sur un conoïde caractéristique pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques, *C. R. Math. Rep.; Acad. sci. Canada*, Vol. **16**, n° 1, février 1994, pp. 17-22.

[36] M. DOSSA, Solutions de problèmes de Cauchy quasi-linéaires sur un conoïde caractéristique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **318**, Série I, 1994, pp. 935-938.

[37] M. DOSSA, Problème de Cauchy sur un conoïde caractéristique pour les équations d'Einstein du vide et les équations de Yang-Mills-Higgs, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **319**, Série I, 1994, p. 295-298.

[38] M. DOSSA, Thèse de Doctorat d'État, (2e partie), université de Yaoundé, 1992, 363 pages.

[39] A. D. RENDALL, The characteristic initial value problem for the Einstein equations, Nonlinear hyperbolic equations and field theory (Lake Como 1991) Pitman, *Res. Notes, Maths-Ser.*, 253, *Longman Sci. Techn. Harlow*, 1992, pp. 154-163.

[40] J. LERAY, Hyperbolic Differential Equations, Princetom, IAS, 1952.

(Manuscrit reçu le 8 août 1995 ;
version révisée reçue le 10 mai 1996.)