

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

LAURENCE NEDELEC

Résonances semi-classiques pour l'opérateur de Schrödinger matriciel en dimension deux

Annales de l'I. H. P., section A, tome 65, n° 2 (1996), p. 129-162

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1996__65_2_129_0

© Gauthier-Villars, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Résonances semi-classiques pour l'opérateur de Schrödinger matriciel en dimension deux

par

Laurence NEDELEC

Université de Paris-Nord, Département de Mathématiques
(CNRS URA 742), Institut Galilée, 93430 Villetaneuse, France.

RÉSUMÉ. – Nous donnons des propriétés des résonances de l'opérateur de Schrödinger résultant de l'approximation de Born-Oppenheimer, lorsque le potentiel est une matrice admettant deux valeurs propres qui se croisent dans la zone classiquement permise.

ABSTRACT. – We study the resonances of the Schrödinger operator resulting from the Born-Oppenheimer approximation, where the potential is a two by two matrix whose eigenvalues cross in the classically allowed region.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	130
2. Notations, résultats	132
3. Résonances des opérateurs $-\Delta + W$	135
4. Comparaison des résonances de H et Q	136
5. Transformation du problème modèle	143
6. Construction BKW pour l'opérateur $P_\nu + E$	145
7. Étude du spectre de l'opérateur $P_\nu _{L^2([\alpha_1, \alpha_2])}$	151
8. Lien entre $P_\nu _{L^2([\alpha_1, \alpha_2])}$ et $P_\nu _{L^2([0, \alpha_2])}$	154
9. Résonances de P_ν proches de l'axe réel	156
A. Constructions formelles	160

1. INTRODUCTION

L'approximation de Born-Oppenheimer consiste, pour l'étude quantique d'une molécule, à considérer la masse des noyaux grande par rapport à celle des électrons. Les mouvements des noyaux sont alors beaucoup plus lents que ceux des électrons autour d'eux et ces derniers s'adaptent instantanément et adiabatiquement à tout déplacement nucléaire. Les noyaux, dont la position est notée x , se trouvent soumis à un potentiel effectif (matriciel en général) $M(x)$ qui résulte des potentiels de répulsion des noyaux et d'un potentiel créé par les électrons. Ce dernier est une fonction simple de leurs énergies, que l'on note $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$, \dots , et on trouve la justification mathématique de cette approximation dans [KMSW92] et [CDS81]. Dans [SW89] le lecteur trouvera des travaux de physiciens portant sur ce sujet.

Lorsque les niveaux d'énergie du système sont suffisamment distants, le potentiel matriciel effectif peut alors être pris diagonal. (Les articles de A. Martinez [Mar91a] et [Mar91b] traitent de cette situation. Ils justifient l'approximation et donnent des résultats sur les résonances du système pour des potentiels réguliers.) Nakamura dans [Nak94a] traite aussi de ce problème. En revanche lorsque deux niveaux d'énergie se croisent, il faut tenir compte des deux dans le potentiel effectif qui est alors une matrice non nécessairement diagonale dont les valeurs propres sont les énergies électroniques.

Dans [Hag94] Hagedorn classe les formes de croisement et étudie l'évolution en temps. (Sur l'évolution en temps, les articles [Joy94] et [Nak94b] présentent des similitudes avec l'approximation de Born-Oppenheimer.) Concernant le cas de niveaux électroniques se croisant, le travail de P. Pettersson [Pet93] étudie le cas d'un potentiel $M(x)$ diagonal perturbé par un potentiel h^2N non diagonal (h petit). Il obtient des constructions B.K.W pour le bas du spectre, dans le cas où le croisement se fait dans la zone classiquement interdite. D'autre part, une étude des résonances proches d'une énergie différente de celle du croisement est faite dans [Mes93], [Kle87] et [KR93].

C'est le cas où $M(x)$ est non diagonal et où le croisement se fait dans la zone classiquement permise qui nous intéresse dans ce travail. Plus précisément on étudie la situation suivante : la position x des noyaux varie dans \mathbb{R}^2 et le potentiel est une matrice $M(x)$ admettant deux valeurs propres $\lambda_1(x) \leq \lambda_2(x)$ distinctes pour $x \neq 0$ et égales au point 0. L'espace de Hilbert sur lequel on travaille est $L^2(\mathbb{R}^2) \oplus L^2(\mathbb{R}^2)$. Notre but est alors d'étudier les résonances des opérateurs $Q = -h^2\Delta + M$ qui tendent vers

le niveau d'énergie du croisement lorsque h tend vers zéro. Celles-ci étant engendrées par le comportement du potentiel au voisinage de zéro, nous nous intéressons particulièrement à l'opérateur modèle $H = -h^2\Delta + W$ où $W(x)$ est le terme linéaire du développement de Taylor en zéro de $M(x)$, et se comporte essentiellement comme le potentiel $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & -y_1 \end{pmatrix}$ où y_1 et y_2 sont des formes linéaires indépendantes. Nous donnons une définition des résonances de l'opérateur H à l'aide du dilaté H_θ de H .

Dans une première partie, nous cherchons des informations sur les résonances tendant vers zéro de Q en supposant connues celles de H . Pour s'assurer de l'absence d'éventuelles résonances dues au comportement du potentiel $M(x)$ hors d'un voisinage de zéro, nous sommes amenés à faire deux hypothèses sur le potentiel : une hypothèse de viriel sur la valeur propre $\lambda_1(x)$, et une hypothèse d'ellipticité sur la valeur propre $\lambda_2(x)$.

Notant M_θ et W_θ les dilatés de M et W , nous utilisons un opérateur intermédiaire R_θ de potentiel $M_\theta(x)$ sur un voisinage de l'origine et de potentiel $W_\theta(x)$ ailleurs. A l'aide d'inégalités du type Lithner-Agmon et d'un problème de Grushin, nous prouvons que le spectre de l'opérateur R_θ est le même que celui de l'opérateur Q_θ à des termes exponentiellement petits près, et ainsi qu'il existe une bijection de la forme $I + \mathcal{O}(e^{-\frac{1}{Cst\epsilon h}})$ qui transforme le spectre de Q_θ compté avec multiplicité en celui de R_θ .

A l'aide de techniques introduites par Briet, Combes et Duclos dans [BCD87], nous comparons le spectre de R_θ à celui de H_θ . Par ce biais nous prouvons qu'il existe une bijection de la forme $I + \mathcal{O}(h^{\frac{2}{3}})$ qui transforme le spectre de H_θ compté avec multiplicité en celui de R_θ . (On remarquera que le spectre de H_θ est constitué des $h^{\frac{2}{3}}\lambda$ où λ décrit l'ensemble des résonances de $H^0 = -\Delta + W$.) Nous obtenons aussi pour toute valeur propre simple de H_θ un développement asymptotique en puissances de $h^{\frac{2}{3}}$ de la valeur propre de R_θ qui lui correspond.

Dans une deuxième partie nous étudions un cas particulier des opérateurs H^0 , à savoir l'opérateur $-\Delta + V$ de potentiel $V(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & -x_1 \end{pmatrix}$ pour $x = (x_1, x_2)$. Nous prouvons l'existence de résonances pour cet opérateur en procédant en plusieurs étapes.

Dans une première approche, nous transformons le problème en utilisant les propriétés de symétrie du potentiel V et un développement en série de Fourier. Ceci nous conduit à étudier les résonances d'une famille d'opérateurs différentiels P_ν d'ordre 1, indexée par $\nu \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$.

Nous constatons que les surfaces d'énergie définies par $P_\nu(x, \xi) = 0$ sont constituées d'un « puits » (*i.e.* une partie compacte) et d'une « mer »

(i.e. une partie disjointe de la précédente et non bornée). Nous utilisons alors des distorsions analytiques, de paramètre complexe μ . Pour une distorsion ne perturbant pas l'opérateur P_ν dans un voisinage du puits, les valeurs propres des « distordus » $Q_{\mu\nu}$ de P_ν sont les résonances de P_ν .

Par des méthodes BKW complexes à grande énergie nous trouvons des valeurs propres de l'opérateur P_ν restreint au puits. En utilisant des inégalités de Lithner-Agmon et un problème de Grushin, nous prouvons que ces valeurs propres diffèrent des valeurs propres de $Q_{\mu\nu}$ par un terme en $\mathcal{O}(e^{-C|E|^{-\frac{3}{2}}})$.

Finalement nous parvenons à construire une suite de résonances à partie réelle assez grande pour $-\Delta + V$. En combinant ce résultat à celui de la première partie nous obtenons l'existence de résonances de l'opérateur $-\hbar^2\Delta + M$ dans le cas particulier où $W = V$.

2. NOTATIONS, RÉSULTATS

Notons $V(x)$ le potentiel $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & -x_1 \end{pmatrix}$ agissant sur $L^2(\mathbb{R}^2) \oplus L^2(\mathbb{R}^2)$. Le symbole $W(x)$ désigne un potentiel matriciel symétrique linéaire en $x = (x_1, x_2)$ qui a deux valeurs propres distinctes pour x différent de zéro, égales à zéro en zéro. Nous pouvons donc écrire cet opérateur sous la forme générale :

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1(x_1, x_2) + y_3(x_1, x_2) & y_2(x_1, x_2) \\ y_2(x_1, x_2) & -y_1(x_1, x_2) + y_3(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

où les fonctions y_1 , y_2 et y_3 sont des formes linéaires en x_1 , x_2 . Nous supposons qu'elles vérifient les propriétés suivantes :

(H1) les fonctions y_1 et y_2 sont des formes linéaires en x_1, x_2 indépendantes, il existe une constante $0 < \delta' < 1$ telle que $|y_3|^2 \leq \delta'(|y_1|^2 + |y_2|^2)$.

Sous ces hypothèses **(H1)** la norme $u \rightarrow \|Wu\|_{L^2 \oplus L^2}$ est équivalente à la norme $u \rightarrow \| |x|u \|_{L^2 \oplus L^2}$. Notons S le domaine $S = \{z \in \mathbb{C}^2; |\operatorname{Im}z| < a(1 + |\operatorname{Re}z|)\}$, avec $a > 0$. Soit M un potentiel matriciel vérifiant :

M est holomorphe sur l'ensemble S ,

M est symétrique, $M(0) = 0$,

(H2) $\lim_{|z| \rightarrow \infty, z \in S} M(z) = M_0$.

Les valeurs propres μ_1, μ_2 de M_0 vérifient $\mu_1 < 0 < \mu_2$.

$$\frac{\partial M}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial W}{\partial x}(0, 0).$$

Pour tout $\delta > 0$, nous notons χ une fonction telle que :

$$\chi \in C_0^\infty, \text{ Supp}\chi \subset B(0, 2\delta), \chi = 1 \text{ si } |x| < \delta. \tag{2.1}$$

Nous introduisons les notations W_θ et M_θ qui désignent respectivement $e^{i\theta}W$ et $M(e^{i\theta})$. Définissons également les opérateurs suivants pour $\theta \in \mathbb{C}$ assez petit :

$$\begin{aligned} H^0 &= -\Delta + W, & H_\theta^0 &= -e^{-2i\theta} \Delta + e^{i\theta}W, \\ H &= -h^2 \Delta + W, & H_\theta &= -h^2 e^{-2i\theta} \Delta + e^{i\theta}W, \\ Q &= -h^2 \Delta + M, & Q_\theta &= -h^2 e^{-2i\theta} \Delta + M(e^{i\theta}x), \\ R_\theta &= -h^2 e^{-2i\theta} \Delta + Y_\theta, & Y_\theta &= \chi M_\theta + (1 - \chi)W_\theta. \end{aligned}$$

La norme L^2 d'un élément $u \in L^2(\mathbb{R}^2) \oplus L^2(\mathbb{R}^2)$, de composantes u_1, u_2 sera notée $\|u\|_{L^2} = [\|u_1\|_{L^2}^2 + \|u_2\|_{L^2}^2]^{\frac{1}{2}}$. Le domaine des opérateurs H_θ, H_θ^0 et R_θ est $\mathcal{D} = \{u \in H^2, |x|u \in L^2\}$. On munit l'espace \mathcal{D} d'une structure hilbertienne avec la norme $\|u\|_{\mathcal{D}} = (\|u\|_{H^2}^2 + \||x|u\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$. Le domaine des opérateurs Q et Q_θ est $H^2(\mathbb{R}^2)$. Pour tout x , notons $\lambda_1(x) \leq \lambda_2(x)$ les deux valeurs propres de la matrice M . Nous ferons sur M les hypothèses suivantes :

$$\lambda_1(x) < 0 < \lambda_2(x) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } \lambda_1(0) = \lambda_2(0).$$

(H3) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha_\varepsilon > 0$ tel que pour $|x| > \varepsilon$ et $\theta > 0$ assez petit $\text{Re}(e^{2i\theta} \lambda_2(xe^{i\theta})) \geq \alpha_\varepsilon, -\text{Im}(e^{2i\theta} \lambda_1(xe^{i\theta})) \geq \alpha_\varepsilon \theta$.

Remarquons que la dernière condition est une condition de viriel. En effet, la dérivée par rapport à θ du membre de gauche est $-(2\lambda_1(x) + x \cdot \nabla \lambda_1(x))$. Pour tout $\varepsilon > 0$ les fonctions $\lambda_1(x), \lambda_2(x)$ sont holomorphes sur $|x| > \varepsilon$, on peut définir $\lambda_1(xe^{i\theta}), \lambda_2(xe^{i\theta})$ pour θ assez petit. Nous noterons $\langle x \rangle = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ et $B(e, r)$ la boule dans \mathbb{C} de centre e et de rayon r .

THÉORÈME 2.1. - (i) Pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{3}[, z \in \mathbb{C}$, l'opérateur $(H_\theta^0 - z)$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0.

(ii) Les spectres des opérateurs H_θ^0 sont discrets et indépendants de θ .

(iii) Les valeurs propres de H_θ^0 appartiennent à $\{\rho e^{-iw}, 0 \leq \rho, 0 \leq w \leq \frac{2}{3}\pi\}$.

Les résonances de H^0 sont définies alors comme les éléments du spectre discret d'un opérateur H_θ^0 pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{3}[$. Soit e_j une résonance de multiplicité n_j de l'opérateur H^0 , on note Γ_j le disque de centre $e_j h^{\frac{2}{3}}$

et de rayon $rh^{\frac{2}{3}}$, Γ'_j le disque de centre $e_j h^{\frac{2}{3}}$ et de rayon $2rh^{\frac{2}{3}}$. Pour tout $D > 0$, le spectre de l'opérateur H_θ^0 étant discret, il existe une constante $r > 0$ telle que pour tout couple de valeurs propres distinctes (e_j, e_k) de l'opérateur H_θ^0 de modules inférieurs à D on ait :

$$\Gamma'_j \cap \Gamma'_k = \emptyset.$$

Les résonances de Q sont définies de manière analogue à celles de [AC71] c'est-à-dire comme étant les valeurs propres d'un dilaté Q_θ de Q . Le potentiel $M - M_0$ est dilatable analytiquement et on peut aussi définir les résonances de $-\Delta + M$.

THÉORÈME 2.2. – (i) L'opérateur Q n'admet pas de résonances dans $\{z, |z| \leq Dh^{\frac{2}{3}}\}$ en dehors des voisinages Γ_j des résonances de H .

(ii) Dans un disque Γ_j les opérateurs Q et H possèdent le même nombre de résonances (comptées avec multiplicité).

(iii) Soit $eh^{\frac{2}{3}}$ une résonance simple de H à laquelle on a associé le disque Γ_j . Alors, l'unique résonance notée $\lambda h^{\frac{2}{3}}$ de l'opérateur Q dans le disque Γ_j admet un développement asymptotique en $h^{\frac{2}{3}}$:

$$\lambda = e + \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j h^{\frac{2j}{3}} + \mathcal{O}(h^{\frac{2m}{3}}).$$

THÉORÈME 2.3. – Pour E_0 assez grand, pour tout $C > 1$ il existe une constante r_C telle que l'opérateur $-\Delta + V$ admet une famille de résonances dans $E_0[\frac{1}{C}, C] - i\mathcal{O}(e^{-E_0^{3/2}/C})$. Ces résonances sont indicées par deux nombres quantiques ν et k tels que $\nu \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, $\nu \in I \times E_0^{3/2}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \in I \times E_0^{3/2}$ ou I est un compact. En particulier le nombre de résonances est alors supérieur à $C^{\text{ste}} E_0^3$. Les résonances obtenues sont les résonances des opérateurs P_ν (introduits dans la section 5) pour certaines valeurs du paramètre ν . Ces résonances sont à $\mathcal{O}(e^{-E_0^{3/2}/C})$ près $E_0 E$ ou E est solution de (les notations sont dans la section 6) :

$$A(E, E_0^{-3/2}\nu) - E_0^{-3/2}C_{E,\nu}(E_0) = 2\pi E_0^{-3/2}k.$$

Remarque 2.4. – D'après l'inégalité de Kato [Kat76], l'opérateur $-\Delta + V$ est essentiellement autoadjoint de spectre absolument continu] $-\infty, \infty$ [.

Remarque 2.5. – Pour obtenir toutes les résonances de $-\Delta + V$, nous serions conduit à étudier les valeurs propres d'opérateurs P_ν , dont le déterminant du symbole admet un minimum non dégénéré, où bien dont

les caractéristiques se croisent. Les formes normales de [HS90] et [HS89] pourraient être utiles.

3. RÉSONANCES DES OPÉRATEURS $-\Delta + W$

Le potentiel $W(x)$ se comportant à l'infini comme $|x|$, il n'est pas dilatable analytiquement. Cependant la théorie de Fredholm permet de définir les résonances à l'aide du lemme suivant :

LEMME 3.1. – Soient $\theta \in]0, \frac{\pi}{3}[$ et $z \in \mathbb{C}$ tels que $\text{Im}(ze^{-i\theta}) > 0$.

(i) Il existe $C(z, \theta) > 0$ tel que pour tout $u \in \mathcal{D}$:

$$\|(H_\theta^0 - z)u\|_{L^2} \geq C(z, \theta)\|u\|_{\mathcal{D}}. \tag{3.1}$$

(ii) $(H_\theta^0 - z)$ est bijectif de \mathcal{D} dans L^2 .

Démonstration du lemme 3.1. – Le symbole de l'opérateur $(H_\theta^0 - z)$ est $e^{-2i\theta}\xi^2 + e^{i\theta}W - z$. Il est bijectif pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2*}$ si z n'appartient pas à $e^{-2i\theta}[0, \infty[+ e^{i\theta}\mathbb{R} = \{z, \text{Im}(ze^{-i\theta}) \leq 0\}$. La démonstration du (i) est alors semblable à celle de [BCD85], en utilisant le fait que W est linéaire et que \mathcal{C}_0^∞ est dense dans l'espace complet \mathcal{D} . Pour prouver que $(H_\theta^0 - z)$ est surjectif il suffit de montrer que $[\text{Im}(H_\theta^0 - z)]^\perp = 0$. Soit un élément u de $L^2 \cap (\text{Im}(H_\theta^0 - z))^\perp$ il vérifie $(H_{(-\theta)}^0 - \bar{z})u = 0$ au sens des distributions, *a fortiori* $(H_\theta^0 - z)\bar{u} = 0$. On prouve en utilisant les expressions du gradient et du laplacien de $\langle sx \rangle$ que $\frac{\bar{u}}{\langle sx \rangle^2}$ est un élément de \mathcal{D} . Donc il vérifie l'inégalité (3.1) ce qui est en contradiction pour s assez petit avec le fait que $(H_\theta^0 - z)\bar{u}\langle sx \rangle^{-2} = \mathcal{O}(s)\|\bar{u}\langle sx \rangle^{-2}\|_{\mathcal{D}}$ sauf si $\bar{u} = 0$. \square

Démonstration du théorème 2.1. – Soit z_θ tel que $\text{Im}(z_\theta e^{-i\theta}) > 0$. L'opérateur $(H_\theta^0 - z_\theta)^{-1}$ est compact de L^2 dans L^2 car l'injection de \mathcal{D} dans L^2 est compacte. Nous avons :

$$\begin{aligned} (H_\theta^0 - z)(H_\theta^0 - z_\theta)^{-1} &= I + (z_\theta - z)(H_\theta^0 - z_\theta)^{-1} = I + R_1, \\ (H_\theta^0 - z_\theta)^{-1}(H_\theta^0 - z) &= I + (z_\theta - z)(H_\theta^0 - z_\theta)^{-1}_{/\mathcal{D}} = I + R_2, \end{aligned}$$

où R_1, R_2 sont des opérateurs compacts. Les résultats sur les opérateurs de Fredholm [Kat76] prouve que H_θ^0 est un opérateur de Fredholm d'indice zéro. Nous démontrons le reste du théorème 2.1 à l'aide du théorème de Fredholm-méromorphe. Comme dans l'effet Stark, voir l'article [HeSi81] il n'y pas de spectre essentiel. Ce qui permet d'avoir l'invariance en θ du spectre de H_θ^0 . L'inégalité (3.1) prouve alors le (iii). \square

4. COMPARAISON DES RÉSONANCES DE H ET Q

Prouvons l'existence d'une bijection entre les résonances de Q et celles de H . Pour cela comparons les spectres des opérateurs Q_θ et H_θ avec celui de l'opérateur R_θ pour dissocier les difficultés dues au comportement à l'infini de ces opérateurs, de celle dues à l'approximation au voisinage de zéro. On choisit la constante $\delta = \delta(\theta)$ de (2.1) tel que le potentiel Y_θ vérifie les hypothèses **(H3)** et tel que l'opérateur R_θ ait un spectre purement discret (ceci est possible car le lemme 3.1 s'applique aussi à l'opérateur R_θ).

Démonstration du théorème 2.2 (i). – Soit β une constante qui sera déterminée ultérieurement. L'opérateur $Q_\theta|_{L^2(|x|>\beta)}$ de domaine $\mathcal{D}(Q_\theta^e) = H^2(|x| > \beta) \cap H_0^1(|x| > \beta)$ (condition de Dirichlet) est noté Q_θ^e . La demi-trace de la matrice M est notée $\alpha_3(x)$. La matrice M s'écrit alors :

$$M(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1(x) + \alpha_3(x) & \alpha_2(x) \\ \alpha_2(x) & -\alpha_1(x) + \alpha_3(x) \end{pmatrix}.$$

Si on note $\alpha(x) = (\alpha_1(x)^2 + \alpha_2(x)^2)^{\frac{1}{2}}$, les hypothèses sur M impliquent l'existence d'une constante $d < 1$ telle que $|\alpha_3(x)| < d\alpha(x)$. Soit $F = F^2 \times \mathbb{R}^+$, où F^2 est un revêtement connexe à deux feuillet de S^1 . Soit f une fonction continue de $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ dans S^1 nous la prolongeons de manière continue en une fonction de $F^2 = \mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}$ dans S^1 où bien de F^2 dans F^2 de la façon suivante. Soit \tilde{f} un relèvement continu de S^1 à \mathbb{R} de f . Le prolongement de f est alors :

$$\alpha \in [0, 2\pi[\rightarrow \tilde{f}(\alpha), \quad \alpha \in [2\pi, 4\pi[\rightarrow \tilde{f}(2\pi^-) + \tilde{f}(\alpha - 2\pi).$$

Nous travaillerons sur l'espace F muni de la norme $L^2 \|f\|_{L^2(F)} = \int_{[0, 4\pi[\times \mathbb{R}^+} \|f(\rho, \alpha)\|^2 \rho d\rho d\alpha$. Notons \tilde{R} la matrice de $C^\infty(F^2)$ égale à

$$\tilde{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) & \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \\ -\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) & \cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \end{pmatrix}.$$

La matrice $R(xe^{i\theta}) = \tilde{R}\left(\left(\frac{\alpha_1(xe^{i\theta})}{\alpha(xe^{i\theta})}, \frac{\alpha_2(xe^{i\theta})}{\alpha(xe^{i\theta})}\right)\right)$ est holomorphe en $i\theta$, elle « diagonalise » M :

$$M(xe^{i\theta}) = {}^t R(xe^{i\theta}) \begin{pmatrix} \lambda_2(xe^{i\theta}) & 0 \\ 0 & \lambda_1(xe^{i\theta}) \end{pmatrix} R(xe^{i\theta}), \quad {}^t R R = R {}^t R = I.$$

Notons S la matrice $S(x) = \overline{{}^t R(xe^{i\theta})} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i + \varepsilon \end{pmatrix} R(xe^{i\theta})$ où ε est donné dans l'énoncé du lemme 4.1 qui suit.

LEMME 4.1. – Il existe deux constantes $\beta_1 > 0$ et $\beta_2 > 0$ indépendantes de $\theta \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $u \in D(Q_\theta^e)$ et pour $\varepsilon = 2\beta_2\theta$, $|z| \leq \theta/C$ on ait uniformément en θ et h assez petits :

$$|\langle e^{2i\theta}(Q_\theta^e - z)u, Su \rangle_{L^2(F)}| \geq \left[\beta_1\theta + \mathcal{O}_\beta\left(\frac{h^2}{\theta}\right) \right] \|u\|^2 + \beta_2\theta \|h\nabla u\|^2.$$

Démonstration. – Posons $v(x) = R(xe^{i\theta})u(x)$.

$$\begin{aligned} \langle e^{2i\theta}(Q_\theta^e - z)u, Su \rangle &= \left\langle -h^2 R \Delta^t R v, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i + \varepsilon \end{pmatrix} v \right\rangle \\ &+ \left\langle \begin{pmatrix} (\lambda_2(xe^{i\theta}) - z)e^{2i\theta} & 0 \\ 0 & (\lambda_1(xe^{i\theta}) - z)e^{2i\theta} \end{pmatrix} v, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i + \varepsilon \end{pmatrix} v \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Sur $\{x; |x| > \beta\}$ les fonctions $R(\nabla^t R)$ et $R(\Delta^t R)$ sont bornées par des constantes dépendant de β . D'après l'égalité $R\Delta^t R = \Delta + 2R(\nabla^t R)\nabla + R(\Delta^t R)$, notons A la partie réelle du premier terme de droite dans l'équation (4.1) il vérifie :

$$A \geq \frac{h^2}{2} \|\nabla v_1\|^2 + \frac{h^2}{2} \varepsilon \|\nabla v_2\|^2 + \mathcal{O}_\beta\left(\frac{h^2}{\varepsilon}\right) \|v_2\|^2 + \mathcal{O}_\beta\left(\frac{h^2}{\varepsilon}\right) \|v_1\|^2. \quad (4.2)$$

Notons B le deuxième terme de droite de (4.1), il vérifie l'inégalité :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(B) &\geq \inf_{|x|>\beta} [-\operatorname{Im}((\lambda_1(xe^{i\theta}))e^{2i\theta})] \|v_2\|^2 - \mathcal{O}(|z|) \|v\|^2 \\ &+ \inf_{|x|>\beta} \operatorname{Re}((\lambda_2(xe^{i\theta}))e^{2i\theta}) \|v_1\|^2 - \varepsilon \sup_{|x|>\beta} |\operatorname{Re}(\lambda_1(xe^{i\theta}))e^{2i\theta}| \|v_2\|^2. \end{aligned}$$

La fonction $\lambda_1(x)$ étant analytique et bornée sur S , il existe une constante $\alpha'_\beta > 0$ telle que $\operatorname{Sup}_{|x|>\beta} |\operatorname{Re}(\lambda_1(xe^{i\theta}))| < \alpha'_\beta$ uniformément en θ pour θ assez petit. Soit α_β la constante introduite dans les hypothèses (H3), pour $\varepsilon = 2\beta_2\theta$ où β_2 est assez petit ($\beta_2 < \alpha_\beta \frac{1}{4\alpha'_\beta}$) alors :

$$\operatorname{Re}B \geq (\alpha_\beta + \mathcal{O}(|z|)) \|v_1\|^2 + \left[\frac{1}{2} \alpha_\beta \theta + \mathcal{O}(|z|) \right] \|v_2\|^2. \quad (4.3)$$

Les inégalités $\|v\|^2 \geq (1 - \mathcal{O}(\theta)) \|u\|^2$, $\|\nabla v\|^2 \geq (1 - \mathcal{O}(\theta)) \|\nabla u\|^2 - \mathcal{O}_\beta(1) \|u\|^2$ terminent la démonstration du lemme. \square

Une conséquence immédiate de ce lemme est le résultat suivant :

LEMME 4.2. – *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \frac{1}{C}\theta$, pour tout $h > 0$ tel que $h < \frac{1}{C}\theta$, l'opérateur $(Q_\theta^e - z)$ soit inversible et vérifie uniformément en θ pour $\theta > 0$ assez petit et en h :*

$$\|(Q_\theta^e - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\theta}\right), \|(Q_\theta^e - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2, H^1)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h\theta}\right).$$

Comme dans l'article [BCD87] nous démontrons :

LEMME 4.3. – *Pour tous $0 < h < 1$, $\theta \in]0, \frac{\pi}{3}[$ et $p \in [0, 1]$, l'opérateur $H_\theta - z$ vérifie uniformément en z sur le domaine $\Omega = \{z, |z| < Dh^{\frac{2}{3}}\} \setminus \cup_j \dot{\Gamma}_j$:*

$$\begin{aligned} (i) \quad & \| |x|^p (H_\theta - z)^{-1} \|_{\mathcal{L}(L^2)} = \mathcal{O}(h^{\frac{2}{3}(p-1)}), \\ (ii) \quad & \| \nabla (H_\theta - z)^{-1} \|_{\mathcal{L}(L^2)} = \mathcal{O}(h^{-\frac{4}{3}}). \end{aligned}$$

Soient $J_e \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $J_i \in C_0^\infty(|x| < 2\beta, \mathbb{R})$ telles que $J_e = 0$ pour $|x| < \beta$, $J_i^2 + J_e^2 = 1$. Notons J l'opérateur suivant (il vérifie $JJ^* = I$) :

$$\begin{aligned} J : L^2(\mathbb{R}^2) \oplus L^2(|x| > \beta) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}^2) \\ u \oplus v &\rightarrow J_i u + J_e v. \end{aligned}$$

Notons π l'opérateur $(Q_\theta J - J(H_\theta \oplus Q_\theta^e))$. Par simple indentation nous avons :

$$B = [I + \pi((H_\theta \oplus Q_\theta^e) - z)^{-1} J^*] = (Q_\theta - z)J((H_\theta \oplus Q_\theta^e) - z)^{-1} J^*.$$

Pour montrer que l'opérateur $(Q_\theta - z)$ est inversible il suffit de montrer que B est inversible.

$$\begin{aligned} B - I &= (Q_\theta - H_\theta)J_i(H_\theta - z)^{-1}J_i - h^2 e^{-2i\theta}[\Delta, J_i](H_\theta - z)^{-1}J_i \\ &\quad - h^2 e^{-2i\theta}[\Delta, J_e](Q_\theta^e - z)^{-1}J_e. \end{aligned}$$

Les deux premiers termes de cette quantité se majorent avec l'égalité :

$$(Q_\theta - H_\theta)J_i = (M(xe^{i\theta}) - W(xe^{i\theta}))J_i(x) = \mathcal{O}(x^2) \quad (4.4)$$

et le lemme 4.3 respectivement par $\mathcal{O}(\beta)$, $\mathcal{O}_\beta(h^{\frac{2}{3}})$. Le lemme 4.2 majore alors le dernier terme par $\mathcal{O}_{\beta, \theta}(h)$. En prenant β assez petit, puis h assez

petit, nous obtenons que B est inversible, que son inverse a une norme bornée uniformément par rapport à h donc :

$$\|(Q_\theta - z)^{-1}\| = \mathcal{O}(1) \quad \|J((H_\theta \oplus Q_\theta^e) - z)^{-1} J^*\| = \mathcal{O}_\beta(h^{-\frac{2}{3}}).$$

□ théorème 2.2 (i)

Le lemme 3.1 s'appliquant également à l'opérateur R_θ :

Remarque 4.4. – L'opérateur R_θ n'admet pas de valeurs propres dans l'ensemble $\{z, |z| \leq Dh^{\frac{2}{3}}\}$ en dehors des voisinages Γ_j des résonances de l'opérateur H .

Inégalité de type Lithner-Agmon pour R_θ . – Améliorons l'inégalité du lemme 3.1 avec un poids. L'opérateur H_θ étant obtenu en prenant formellement $\chi = 0$ dans l'expression de R_θ , il est facile de vérifier que tous les résultats qui suivent peuvent lui être appliqués. Soit $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\tilde{\chi} = 1 \text{ si } |x| < \frac{\delta}{4}, \quad \tilde{\chi} = 0 \text{ si } |x| > \frac{\delta}{3}, \quad \text{posons } 1 - \hat{\chi} = (1 - \tilde{\chi})^2.$$

Notons \tilde{S} la matrice suivante $\tilde{S} = {}^t \overline{R(x)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} R(x)$, avec $R(x) = \tilde{R}(\Pi(\frac{y_1(x)}{y(x)}, \frac{y_2(x)}{y(x)}))$.

Notons ψ une fonction définie par :

$$\psi(x) = \frac{2}{3} \psi_0^{\frac{1}{2}} \cos(3\theta)^{\frac{1}{2}} |x|^{\frac{3}{2}}, \quad \text{où } 0 < \psi_0 < \min(C \sin(3\theta), 1), C > 0. \tag{4.5}$$

Elle vérifie l'égalité $|\nabla \psi|^2 = \cos(3\theta) \psi_0 |x|$. Notons $\|u\|_{\mathcal{D}'}^2 = \| |x|^{\frac{1}{2}} u \|_{L^2}^2 + h^2 \|\nabla u\|_{L^2}^2$.

LEMME 4.5. – *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de θ telle que pour tout $v \in \mathcal{D}$, $\theta \in]0, \frac{\pi}{3}[$ et toute ψ vérifiant (4.5) on a :*

$$\begin{aligned} | \langle e^{\frac{\psi}{h}} [-h^2 \Delta_\theta + Y_\theta] v, e^{\frac{\psi}{h}} (1 - \hat{\chi}) \tilde{S} v \rangle | &\geq \left(C \sin(3\theta) + \mathcal{O}(\theta^3) + \mathcal{O}_\theta(h) \right. \\ &\left. + \mathcal{O}_\theta \left(\frac{h}{\delta^{\frac{1}{2}}} \right) \right) \| (1 - \tilde{\chi}) e^{\frac{\psi}{h}} v \|_{\mathcal{D}'}^2 + \mathcal{O}(h) \| e^{\frac{\psi}{h}} v \|_{L^2(\text{Supp} \nabla \tilde{\chi})}^2. \end{aligned} \tag{4.6}$$

La démonstration de ce lemme utilise principalement, la proposition suivante qui s'obtient par simple calcul :

PROPOSITION 4.6. – *Il existe une constante C indépendante de θ telle que pour toute fonction ψ définie par (4.5) et pour tout $u \in \mathcal{D}$:*

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle \left(-h^2 \Delta + e^{3i\theta} \begin{pmatrix} |y| + y_3 & 0 \\ 0 & y_3 - |y| \end{pmatrix} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - |\nabla \psi|^2 \right) u + 2h \nabla \psi \nabla u, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} u \right\rangle \right| \\ & \geq C \sin(3\theta) \|u\|_{\mathcal{D}}^2. \end{aligned}$$

Démonstration du lemme 4.5. – Nous nous ramenons à l'inégalité de la proposition 4.6 en utilisant $(1 - \tilde{\chi})(W_\theta - Y_\theta) = \mathcal{O}(\theta^3|x|^{\frac{1}{2}})$ et en posant $v = (1 - \tilde{\chi})R(x)e^{\frac{\psi}{h}}u$ (R est introduite avec la définition de \tilde{S}). \square

Dans la suite, nous fixons $\theta \in]0, \frac{\pi}{3}[$ et nous omettrons désormais la dépendance en θ des constantes. Soit $\tilde{\varphi}$ une fonction telle que :

$$\text{Supp}(1 - \tilde{\varphi}) \subset \text{Supp}(1 - \tilde{\chi}), \quad \text{Supp} \nabla(1 - \tilde{\varphi}) \subset \left\{ \frac{1}{2}\delta < |x| < \delta \right\}.$$

LEMME 4.7. – *Pour tout élément u_0 unitaire appartenant aux sous-espaces caractéristiques de R_θ a une valeur propre λ_0 appartenant à $\{\lambda, |\lambda| < Dh^{\frac{2}{3}}\}$ et tout z sur le cercle de centre λ_0 et de rayon $rh^{\frac{2}{3}}$, $r > 0$ assez petit, h assez petit on a :*

$$\|(1 - \tilde{\varphi})u_0\|_{\mathcal{D}'}^2 \leq \mathcal{O}(e^{-1/Ch}), \quad \|(1 - \tilde{\varphi})(R_\theta - z)^{-1}u_0\|_{L^2}^2 \leq \mathcal{O}(e^{-1/Ch}), \quad C > 0.$$

Démonstration du lemme. – Nous obtenons facilement à partir du lemme 4.5 ces inégalités pour u_0 vecteur propre de l'opérateur R_θ associé à la valeur propre λ_0 , les arguments sont semblables à [HS84]. Le théorème se démontre de même pour un élément de l'espace caractéristique de R_θ associé à la valeur propre λ_0 , sauf qu'on utilise l'inégalité suivante : considérons une base $(u_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}$ orthonormée d'un des espaces caractéristiques dans laquelle la matrice R_θ est triangulaire supérieure. Le lemme 4.5 donne aisément l'existence pour tout $p \in \mathbb{N}$ d'une constante $q \in \mathbb{Q}$ telle que $h^q \sum_{k=0}^p \|e^{\frac{\psi}{h}} u_{p-k}\|_{L^2(\text{Supp} \nabla \tilde{\chi})}^2 \geq C \|(1 - \tilde{\chi})e^{\frac{\psi}{h}} u_p\|_{\mathcal{D}'}^2$. \square

Toujours de manière similaire à [HS84] nous avons :

LEMME 4.8. – *Pour tout $u \in L^2$ vérifiant $\text{Supp} u \subset \text{Supp} \tilde{\chi}$, tout $z \in \partial \Gamma_j$ et h assez petit nous avons :*

$$\|(1 - \tilde{\varphi})(R_\theta - z)^{-1}u\|_{\mathcal{D}'} \leq \mathcal{O}(e^{-1/Ch}) \|u\|_{L^2}, \quad C > 0.$$

Les inégalités obtenues vont nous permettre de majorer par des termes $\mathcal{O}(e^{-1/Ch})$, $C > 0$ la différence des projecteurs spectraux de R_θ et de Q_θ , en utilisant un problème de Grushin.

THÉORÈME 4.9. – (i) Pour toute valeur propre λ de Q_θ appartenant à Γ_j , il existe une valeur propre λ_0 de R_θ appartenant au disque Γ_j telle que $\lambda - \lambda_0 = \mathcal{O}(e^{-1/Ch})$, $C > 0$, pour h assez petit.

(ii) Dans le domaine Γ_j les opérateurs R_θ et Q_θ possèdent le même nombre de valeurs propres comptées avec multiplicité.

La démonstration se base sur la construction d'un inverse approché à l'opérateur Q_θ que nous construisons ici. Prenons $\beta < \delta$. Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions de C_0^∞ telles que $\text{Supp}\varphi_1 \subset \{x; \chi = 1\}$, $\text{Supp}(1 - \varphi_2) \subset \text{Supp}J_e$, $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2$. Soit $Q_\theta = \begin{pmatrix} Q_\theta - z & \varphi_1 \\ \varphi_2 & 0 \end{pmatrix}$ de domaine $D(Q_\theta) \oplus \text{Im}\Pi_{R_\theta}$. Notons $E = (R_\theta|_{\ker \Pi_{R_\theta}} - z)^{-1}(1 - \Pi_{R_\theta})$, les inverses approchés respectivement à droite et à gauche de Q_θ sont :

$$\mathcal{F}_\theta = \begin{pmatrix} \varphi_1 E \varphi_2 + (Q_\theta^e - z)^{-1}(1 - \varphi_2) & \varphi_1 \\ \Pi_{R_\theta} \varphi_2 & (z - R_\theta)|_{\text{Im}\Pi_{R_\theta}} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{G}_\theta = \begin{pmatrix} \varphi_1 E \varphi_2 + (1 - \varphi_2)(Q_\theta^e - z)^{-1}(1 - \varphi_2) & \varphi_1 \\ \Pi_{R_\theta} & (z - R_\theta)|_{\text{Im}\Pi_{R_\theta}} \end{pmatrix}.$$

LEMME 4.10. – Pour h assez petit $Q_\theta \mathcal{F}_\theta = I + \mathcal{R}_\theta$ avec $\|\mathcal{R}_\theta\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})} = \mathcal{O}(e^{-1/Ch})$, $\mathcal{G}_\theta Q_\theta = I + \mathcal{O}(e^{-1/Ch})$, $C > 0$.

Démonstration. – Notons (a_{ij}) les coefficients de la matrice $Q_\theta \mathcal{F}_\theta$.

$$a_{11} = 1 + [Q_\theta, \varphi_1]E\varphi_2, \quad a_{12} = [R_\theta, \varphi_1]\Pi_{R_\theta}, \quad a_{21} = \Pi_{R_\theta}\varphi_1,$$

$$a_{22} = \Pi_{R_\theta}\varphi_1(R_\theta|_{\ker \Pi_{R_\theta}} - z)^{-1}(1 - \Pi_{R_\theta})\varphi_2 + \Pi_{R_\theta}(Q_\theta^e - z)^{-1}(1 - \varphi_2).$$

Toutes ces quantités se majorent en utilisant l'expression de E suivante :

$$E = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Gamma_j} (R_\theta - z')^{-1}(z - z')^{-1} dz'$$

et des applications des lemmes 4.8 et 4.7 qui donnent uniformément en z' sur Γ_j :

$$\|\nabla\varphi_1\nabla(R_\theta - z')^{-1}\varphi_2\| = \mathcal{O}(e^{-1/Ch}), \quad \|\Delta\varphi_1(R_\theta - z')^{-1}\varphi_2\| = \mathcal{O}(e^{-1/Ch}),$$

$$[R_\theta, \varphi_1]\Pi_{R_\theta} = \mathcal{O}(e^{-1/Ch}), \quad (1 - \varphi_1)\Pi_{R_\theta} = \mathcal{O}(e^{-1/Ch}), \quad C > 0.$$

On procède de même pour $\mathcal{F}_\theta Q_\theta$. \square

Démonstration du théorème 4.9. – Le lemme 4.10 prouve que l'opérateur Q_θ admet un inverse de coefficient en bas à droite $(z - R_\theta)|_{\text{Im}\Pi_{R_\theta}} + f(z, h)$ où la fonction $f(z, h)$ est une matrice à coefficients holomorphes en z

vérifiant $\|\frac{\partial}{\partial z}f(z, h)\| = \mathcal{O}(e^{-1/Ch})$. Les résultats sur les problèmes de Grushin [HS86] montrent que le spectre discret de l'opérateur Q_θ est inclus dans $\lambda_0 + \mathcal{O}(e^{-1/Ch})$. Pour comparer les opérateurs Π_{R_θ} et Π_{Q_θ} , il nous faut une estimation supplémentaire, nous l'obtenons en considérant le terme $\langle e^{\frac{\psi}{h}}(R_\theta - z)v, (1 - \tilde{\chi})Se^{\frac{\psi}{h}}|y|v \rangle$ qui est supérieur à des termes de la forme $\mathcal{O}(1)\|e^{\frac{\psi}{h}}v\|_{\mathcal{D}}^2 + \||x|ve^{\frac{\psi}{h}}\|^2$. Cela implique :

$$\|(1 - \chi)|x|(R_\theta - z)^{-1}\| = \mathcal{O}(e^{-1/Ch}), C > 0.$$

Nous avons prouvé que $\Pi_{R_\theta} = \Pi_{Q_\theta} + \mathcal{O}(e^{-1/Ch})$ et $\text{Rang}\Pi_{R_\theta} = \text{Rang}\Pi_{Q_\theta}$. \square

Démonstration du théorème 2.2 (ii). – Notons U l'opérateur unitaire de $L^2 \rightarrow L^2$ défini par $Uu(x) = u(xh^{-\frac{2}{3}})h^{-\frac{4}{3}}$. Notons \tilde{R}_θ l'opérateur $h^{-\frac{2}{3}}U^{-1}R_\theta U = H_\theta^0 + h^{-\frac{2}{3}}\chi(xh^{\frac{2}{3}})[V_\theta(xh^{\frac{2}{3}}) - W_\theta(xh^{\frac{2}{3}})]$. La différence entre \tilde{R}_θ et H_θ^0 est un opérateur de multiplication noté $f(x)$ qui vérifie $|f(x)| = \mathcal{O}(h^{-\frac{2}{3}}|x|^2) = \mathcal{O}(\delta|x|)$. Comparons les projecteurs spectraux de \tilde{R}_θ et de H_θ^0 , notés $\Pi_{\tilde{R}_\theta}$ et $\Pi_{H_\theta^0}$:

$$\Pi_{\tilde{R}_\theta} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial h^{-\frac{2}{3}}\Gamma_j} (z - \tilde{R}_\theta)^{-1} dz, \quad \Pi_{H_\theta^0} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial h^{-\frac{2}{3}}\Gamma_j} (z - H_\theta^0)^{-1} dz.$$

En calculant $(z - \tilde{R}_\theta)^{-1} - (z - H_\theta^0)^{-1}$ pour $z \in \partial h^{-\frac{2}{3}}\Gamma_j$ nous obtenons :

$$(z - \tilde{R}_\theta)^{-1} - (z - H_\theta^0)^{-1} = (z - H_\theta^0)^{-1} f(x) (z - H_\theta^0)^{-1} (I - f(x) (z - H_\theta^0)^{-1})^{-1}.$$

$$\|(z - \tilde{R}_\theta)^{-1} - (z - H_\theta^0)^{-1}\| \leq \mathcal{O}(h^{\frac{2}{3}}) \sum_{j=1}^{j=2} \|x_j (z - H_\theta^0)^{-1}\| \|(z - H_\theta^0)^{-1} x_j\|.$$

D'après le théorème 3.1 on peut choisir la constante δ telle que $\Pi_{\tilde{R}_\theta} - \Pi_{H_\theta^0} = \mathcal{O}(h^{\frac{2}{3}})$. Donc pour h assez petit dans un disque Γ_j les opérateurs R_θ et H_θ possèdent le même nombre de valeurs propres (comptées avec multiplicité). Le théorème 4.9 donne alors le résultat. \square

Démonstration du théorème 2.2 (iii). – Nous utilisons ici une technique due à B. Simon introduite dans [Sim83]. D'après le théorème 4.9 il suffit de trouver un développement asymptotique des valeurs propres de R_θ appartenant au disque Γ_j qui lui correspond. Soit φ un vecteur propre de l'opérateur H_θ^0 associé à une valeur propre simple alors $(\frac{\langle \Pi_{\tilde{R}_\theta} \varphi, \tilde{R}_\theta \varphi \rangle}{\langle \Pi_{\tilde{R}_\theta} \varphi, \varphi \rangle^{\frac{1}{2}}})$ est la valeur propre dont on cherche le développement asymptotique. Il s'obtient comme dans [Sim83]. \square

5. TRANSFORMATION DU PROBLÈME MODÈLE

Nous nous intéressons au cas particulier de l'opérateur $-\Delta + V$ cité dans [Hag90], que nous ramenons à une série d'opérateurs plus simples.

THÉORÈME 5.1. – (i) Pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{3}[$, λ_θ est une valeur propre de l'opérateur $(-\Delta_\theta + V_\theta)$ de domaine \mathcal{D} si et seulement si il existe $\nu \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ tel que $(-\lambda_\theta)$ soit une valeur propre de l'opérateur $P_{\theta, \nu} = \begin{pmatrix} -e^{-i2\theta}r^2 + e^{i\theta}D_r & e^{i\theta}\frac{\nu}{r} \\ e^{i\theta}\frac{\nu}{r} & -e^{-i2\theta}r^2 - e^{i\theta}D_r \end{pmatrix}$ de domaine noté D_ν respectivement pour $\nu = \pm\frac{1}{2}$ et $\nu \notin \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ égal à :

$$\{u \in L^2(]0, \infty[); r^2u \in L^2(]0, \infty[), r^{\frac{1}{2}}D_r(r^{-\frac{1}{2}}u_j) \in L^2(]0, \infty[) \\ \text{pour } j \in \{1, 2\}\}, \\ \{u \in H^1(]0, \infty[); \frac{u}{r} \in L^2(]0, \infty[), r^2u \in L^2(]0, \infty[)\}.$$

(ii) Notons n_ν la multiplicité de la résonance λ_θ de l'opérateur $P_{0, \nu} = P_\nu$. La résonance λ_θ de l'opérateur $-\Delta + V$ est de multiplicité n si et seulement si $\sum_{\nu \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}} n_\nu = n$.

Démonstration. – On commence par diminuer l'ordre de l'opérateur différentiel à étudier en effectuant une transformée de Fourier. Puis les coordonnées polaires simplifient encore le problème car le potentiel est invariant par rotation. La dernière étape est une décomposition en série de Fourier pour se ramener à une série de problèmes à une variable. Notons \mathcal{F} la transformation de Fourier. Utilisons les coordonnées polaires $\xi_1 = r \cos(\varphi)$, $\xi_2 = r \sin(\varphi)$, notons $\mathcal{F}u(\xi_1, \xi_2) = \mathcal{F}u(r, \varphi)$, $\chi(\varphi)$ la matrice de la rotation d'angle φ , R la transformation associée à la multiplication par $r^{\frac{1}{2}}$ et $T = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Remarque 5.2. – Pour $v \in L^2(\mathbb{R}^2, d\xi_1 d\xi_2)$, nous notons \tilde{v} la fonction de $L^2(]0, \infty[\times T, r dr d\varphi)$ vérifiant $\tilde{v}(r, \varphi) = v(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Alors :

$$r^{\frac{1}{2}}\tilde{v} \in L^2(]0, \infty[\times T, dr d\varphi), \\ v \in H^1(\mathbb{R}^2, d\xi_1 d\xi_2) \Leftrightarrow r^{\frac{1}{2}}D_r\tilde{v} \in L^2(]0, \infty[\times T, dr d\varphi), \\ r^{-\frac{1}{2}}D_\varphi\tilde{v} \in L^2(]0, \infty[\times T, dr d\varphi).$$

Soit $(u_\theta, \lambda_\theta, v_\theta)$ un triplet tel que

$$u_\theta \in \mathcal{D}, (-\Delta_\theta + V_\theta - \lambda_\theta)u_\theta = v_\theta. \tag{5.1}$$

Notons $R\chi(-\frac{\varphi}{2})\mathcal{F}u_\theta = w_\theta$, $R\chi(-\frac{\varphi}{2})\mathcal{F}v_\theta = y_\theta$, alors (5.1) est équivalent à :

$$\begin{aligned} \langle r \rangle^2 w_\theta \in L^2, \quad D_r w_\theta - \frac{1}{2ir} w_\theta \in L^2, \quad r^{-1} \left[D_\varphi w_\theta + \frac{1}{2i} \chi\left(\frac{\pi}{2}\right) w_\theta \right] \in L^2, \\ w_\theta \text{ est } 2\pi \text{ anti-périodique.} \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$(e^{-2i\theta} r^2 - e^{i\theta} D_r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{e^{i\theta}}{r} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} D_\varphi - \lambda_\theta) w_\theta = P_\theta w_\theta = y_\theta.$$

Notons respectivement $w_{1,\theta}$, $w_{2,\theta}$, $y_{1,\theta}$, $y_{2,\theta}$ les composantes des vecteurs w_θ , y_θ . Les fonctions $e^{i\frac{\varphi}{2}} w_{j,\theta}$ et $e^{i\frac{\varphi}{2}} y_{j,\theta}$ sont des éléments de $L^2([0, \infty[\times [0, 2\pi[)$, 2π périodiques en φ donc :

$$w_{j,\theta} = \sum_{\nu \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}} e^{i\nu\varphi} w_{j,\nu,\theta}(r), \quad y_{j,\theta} = \sum_{\nu \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}} e^{i\nu\varphi} y_{j,\nu,\theta}(r).$$

Les $w_{j,\theta}$, $y_{j,\theta}$ vérifient le système (5.2) si et seulement si pour tout $\nu \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \langle r \rangle^2 w_{j,\nu,\theta} \in L^2(dr), \quad D_r w_{j,\nu,\theta} - \frac{1}{2ir} w_{j,\nu,\theta} \in L^2(dr), \\ r^{-1} \left[\nu w_{1,\nu,\theta} - \frac{1}{2i} w_{2,\nu,\theta} \right] \in L^2(dr), \\ r^{-1} \left[\nu w_{2,\nu,\theta} + \frac{1}{2i} w_{1,\nu,\theta} \right] \in L^2(dr), \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\nu \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}} \|\langle r \rangle^2 w_{j,\nu,\theta}\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{1}{r} \left(\nu w_{2,\nu,\theta} \pm \frac{1}{2i} w_{1,\nu,\theta} \right) \right\|_{L^2}^2 \\ + \left\| \left(D_r - \frac{1}{2ir} \right) w_{j,\nu,\theta} \right\|_{L^2}^2 < \infty, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_\theta - e^{-2i\theta} r^2 + e^{i\theta} D_r & e^{i\theta} \frac{\nu}{r} \\ e^{i\theta} \frac{\nu}{r} & \lambda_\theta - e^{-2i\theta} r^2 - e^{i\theta} D_r \end{pmatrix} w_{\nu,\theta} = -y_{\nu,\theta}. \quad (5.5)$$

A partir d'une solution de (5.1) telle que $v_\theta = 0$ on construit une solution de l'un des systèmes (5.3) et (5.5) avec $y_{\nu,\theta} = 0$ et inversement. Ceci démontre le (i) du théorème 5.1. \square

Soit λ_θ une résonance de l'opérateur $-\Delta + V$ de multiplicité n , soit $\gamma(\lambda_\theta)$ un voisinage ouvert de λ_θ tel que $\partial\gamma(\lambda_\theta) \cap \sigma(-\Delta_\theta + V_\theta) = \emptyset$, $\gamma(\lambda_\theta) \cap \sigma(-\Delta_\theta + V_\theta) = \{\lambda_\theta\}$ alors :

$$n = \dim \operatorname{Im} \int_{\partial\gamma(\lambda_\theta)} [-\Delta_\theta + V_\theta - z]^{-1} dz.$$

Dans ce cas λ_θ est une valeur propre de l'opérateur P_θ de multiplicité m :

$$m = \dim \operatorname{Im} \int_{\partial\gamma(\lambda_\theta)} [P_\theta - z]^{-1} dz.$$

De la relation $[\mathcal{F}^{-1}\chi(\frac{\varphi}{2})R^{-1}](P_\theta - z)^{-1}[R\chi(-\frac{\varphi}{2})\mathcal{F}] = (-\Delta_\theta + V_\theta - z)^{-1}$, nous obtenons $m = n$. De la relation :

$$\int_{\partial\gamma(\lambda_\theta)} (P_\theta - z)^{-1} dz = \bigoplus_\nu \int_{\partial\gamma(\lambda_\theta)} (P_{\nu\theta} - z)^{-1} dz,$$

nous obtenons que si n_ν est la multiplicité de λ_θ résonance de l'opérateur P_ν alors $m = \sum n_\nu$. Soit α, α' deux réels vérifiant $\alpha' > \alpha > 0$, soit $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ vérifiant

$$\omega(x) = x \text{ sur } [\alpha', \infty[, \omega(x) = 0 \text{ sur } [0, \alpha], \omega(x) \geq 0. \tag{5.6}$$

Pour $\mu \in \mathbb{C}$ de module assez petit, on note $Q_{\mu\nu}$ l'opérateur distordu de P_ν où la distorsion est l'application $x \rightarrow x + \mu\omega(x)$ de domaine \mathcal{D}_ν . D'après [Hun86] :

THÉORÈME 5.3. – Soient $\nu \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ et $\theta, |\theta| < \pi$, (on pose $\mu = e^{i\theta} - 1$) alors :

- (i) $(-\lambda_\theta)$ est une valeur propre de l'opérateur $P_{\theta,\nu}$ si et seulement si $(-\lambda_\theta)$ est une valeur propre de l'opérateur $Q_{\mu,\nu}$.
- (ii) La valeur propre $(-\lambda_\theta)$ est de même multiplicité pour les opérateurs $P_{\theta,\nu}$ et $Q_{\mu,\nu}$.

6. CONSTRUCTION BKW POUR L'OPÉRATEUR $P_\nu + E$

Pour étudier les grandes résonances de l'opérateur P_ν proches de l'axe réel, on se donne un grand paramètre E_0 réel, puis on cherche les résonances de P_ν proches de $\pm E_0$. Avec le changement de variables :

$$\tilde{x} = xE_0^{-\frac{1}{2}}, \tilde{\nu} = \nu E_0^{-\frac{3}{2}}, \tilde{E} = \frac{E}{E_0}, h = E_0^{-\frac{3}{2}}, (\tilde{\nu} = \nu h)$$

nous obtenons $(P_\nu + E)(x, D_x) = h^{-\frac{2}{3}}(P_{\tilde{\nu}} + \tilde{E})(\tilde{x}, hD_{\tilde{x}})$. D'après le théorème 5.1, nous n'avons besoin d'étudier les opérateurs $P_{\tilde{\nu}}$ que pour $\tilde{\nu} \in (\frac{1}{2} + \mathbb{Z})h$. Mais nous étudierons les résonances de l'opérateur $P_{\tilde{\nu}}(x, hD_x)$ proches de ± 1 lorsque $\tilde{\nu}$ parcourt $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nous n'imposerons l'appartenance de $\tilde{\nu}$ à $(\frac{1}{2} + \mathbb{Z})h$ que lorsque le besoin s'en fera sentir.

Nous omettrons dans la suite tout les tildes pour désigner les nouvelles variables. Notons :

$$O_1 = \left\{ (E, \nu) \in \mathbb{R}^2, \nu \neq 0, E > 0, |\nu| < 2 \left(\frac{E}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \right\},$$

PROPOSITION 6.1. – *L'équation $\det(P_\nu + E)(x, 0) = 0$ admet sur O_1 trois solutions réelles positives notées $x_1(E, \nu)$, $x_2(E, \nu)$, $x_3(E, \nu)$ vérifiant $0 < x_1 < x_2 < x_3$. La fonction $(x, \xi) \rightarrow \det(P_\nu + E)(x, \xi)$ admet uniquement trois points, qui sont $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, $(x_3, 0)$ solutions de :*

$$\det(P_\nu + E)(x, \xi) = 0, \partial_\xi \det(P_\nu + E)(x, \xi) = 0. \quad (6.1)$$

Ils vérifient $\partial_x \det(P_\nu + E)(x_j, 0) \neq 0$. La fonction

$$(x, \xi) \rightarrow \det(P_\nu + E)(x, \xi)$$

admet deux points (x_0, ξ_0) et $(x_0, -\xi_0)$ solutions de :

$$\det(P_\nu + E)(x, \xi) = 0, \partial_x \det(P_\nu + E)(x, \xi) = 0. \quad (6.2)$$

En ces deux points nous avons $\partial_\xi \det(P_\nu + E)(x, \xi) \neq 0$.

La fonction $x \rightarrow \det(P_\nu + E)(x, 0)$ est croissante sur $[(\frac{E}{3})^{\frac{1}{2}}, \infty[$.

Démonstration. – Sans perte de généralité, on peut supposer $\nu > 0$. Posons $f_\pm(x) = x^3 - Ex \pm \nu$. La courbe $0 = \det(P_\nu + E)(x, \xi) = \frac{f_+(x)f_-(x) - x^2\xi^2}{x^2}$ est symétrique par rapport à l'axe $(0x)$. Les intersections de cette courbe avec la demi droite $[0x)$ sont les points $(x, 0)$ tels que $f_\pm(x) = 0$ et $x > 0$. Elles sont au nombre de trois si $E > 0$ et $\nu \leq \nu_E$ d'après l'étude des fonctions f_\pm , en ces points la courbe admet des tangentes verticales. Elle admet en deux points des tangentes horizontales dont les projections sur $[0x)$ appartiennent à $[x_1, x_2]$. \square

Le problème est alors semblable au cas du puits dans une île de [HS86]. Nous démontrons dans la section 9 que des résonances de P_ν sont proches des valeurs propres de P_ν restreint au puits. Pour enlever la singularité en zéro, nous montrons que ces valeurs propres sont en bijection avec celle de l'opérateur P_ν restreint au puits moins un voisinage de zéro pour lequel nous calculons les valeurs propres.

Nous construisons maintenant des solutions BKW, le lecteur pourra se référer à [Fed83]. Nous utilisons les espaces $H_0^{loc}(W)$ introduits par J. Sjöstrand dans [Sj82] et les symboles analytiques (voir l'appendice). Un

problème similaire est traité en exercice dans [GS94] dans le cas C^∞ pour des opérateurs scalaires.

LEMME 6.2. – Soit ω un compact inclus dans O_1 . Pour tout $(E, \nu) \in \omega$ alors :

- Il existe deux solutions à l'équation eikonale $\det(P_\nu + E)(x, \varphi'(x)) = 0$ sur l'intervalle $]x_1, x_2[$ que l'on note φ et $-\varphi$ avec $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x_1) = 0$ et deux solutions sur l'intervalle $]x_3, \infty[$, notées φ_3 et $-\varphi_3$ avec $\varphi_3'(x) > 0$, $\varphi_3(x_3) = 0$.

- L'équation eikonale $\det(P_\nu + E)(x, i\phi'(x)) = 0$ admet deux solutions, notées ϕ_2 et $-\phi_2$ sur l'intervalle $]x_2, x_3[$ et deux solutions, notées ϕ_1 et $-\phi_1$ sur l'intervalle $]0, x_1[$.

- L'équation eikonale $\det(P_\nu + E)(-\psi'(\xi), \xi) = 0$ admet trois solutions paires, ψ_1, ψ_2 définies sur $]-\xi_0, \xi_0[$, ψ_3 définie sur \mathbb{R} telles qu'il existe des constantes $C_j > 0$ telles que $\psi_j(0) = 0$, $\psi_1' \leq \psi_2' \leq \psi_3'$, $-\psi_j'(\xi) = x_j + \frac{(-1)^{j+1}}{C_j} \xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3)$.

Démonstration. – D'après la proposition 6.1 nous pouvons appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction $(x, \xi) \rightarrow \det(P_\nu + E)(x, \xi)$. Une intégration donne alors les résultats. \square Les fonctions manipulées sont analytiques dans les variables E, ν et x . Nous pouvons étendre les résultats à des valeurs complexes de E . Pour tout compact $\omega \subset O_1$ il existe une constante $\delta > 0$ telle que sur le compact

$$\Omega = \{(E, \nu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}; |\text{Im}(E)| < \delta, (\text{Re}(E), \nu) \in \omega\} \tag{6.3}$$

les propriétés de la proposition 6.1 et du lemme 6.2 soient vérifiées.

Notons $\text{Puits}(E, \nu)$ la composante connexe bornée de $\{(x, \xi); \det(P_\nu + E)(x, \xi) \geq 0\}$, sa projection sur (Ox) est incluse dans $[x_1, x_2]$, notons $A(E, \nu)$ l'aire de $\text{Puits}(E, \nu)$. La composante connexe non bornée de $\{(x, \xi); \det(P_\nu + E)(x, \xi) \geq 0\}$ a sa projection incluse dans $[x_3, \infty[$. Notons pour $t_0 > 0$:

$$V_j = \{x \in \mathbb{C}; |x - x_j| < t_0, |\text{Im}(x - x_j)| \leq \tan(t_0)|\text{Re}(x - x_j)|\},$$

qui se décompose naturellement en deux ensembles, l'un contenant un bout du puits, l'autre symétrique au premier V_j^p et V_j^h .

PROPOSITION 6.3. – Pour tout compact Ω définie par (6.3), il existe $t_0 > 0$ telles que pour $(E, \nu) \in \Omega$, $j \in \{1, 2\}$, h assez petit :

(i) Il existe des fonctions $G_j = G_j(E, \nu)$, W_j^\pm sur V_j , des symboles analytiques $w_j^\pm(x, h)$, $w_{j,\pm}^\pm(x, h)$ respectivement dans $H_0^{loc}\{V_j^h\}$ et $H_0^{loc}\{V_j^p\}$ qui dépendent analytiquement de (E, ν) tels que :

$$e^{\frac{\pm\phi_j(x)}{h}}(P_\nu(x, hD_x) + E)e^{-\frac{\pm\phi_j(x)}{h}}w_j^\pm(x, h) = 0 \text{ dans } H_0^{loc}\{V_j^h\},$$

$$W_j^\pm = e^{-\frac{\pm\phi_j(x)}{h}}w_j^\pm(x, h) \text{ ou bien}$$

$$W_j^\pm = e^{\frac{i(\varphi(x)+G_j)}{h}}w_{j,+}^\pm(x, h) + e^{\frac{-i(\varphi(x)+G_j)}{h}}w_{j,-}^\pm(x, h) \text{ sur } V_j,$$

$$(P_\nu(x, hD_x) + E)e^{\frac{\pm i(\varphi(x)+G_j)}{h}}w_j^\pm(x, h) = 0 \text{ dans } H_0^{loc}\{V_j^p\}$$

De plus :

$$w_{1,\pm}^+ = \lambda_{1,\pm}^+(E, \nu) \left(\pm\varphi' - \frac{-\frac{\nu}{x}}{x^2} + E \right) + \mathcal{O}(h),$$

$$w_j^\pm = \lambda_j^\pm(E, \nu) \left(\pm i\phi_j' - \frac{-\frac{\nu}{x}}{x^2} + E \right) + \mathcal{O}(h).$$

(ii) Il existe un symbole analytique à valeurs réelles pour $E \in \mathbb{R}$, noté $C_E(h)$ tel que les relations suivantes soient vérifiées au sens des symboles :

$$w_{2,+}^+ = w_{1,+}^+, \quad w_{2,-}^+ = e^{iC_E(h)}w_{1,-}^+.$$

(iii) $G_2 - G_1 = \frac{1}{2} \int_{(x,\xi) \in P(E,\nu)} dx d\xi = A(E, \nu)$.

Démonstration. – Nous ne démontrons le théorème que pour l'indice en bas $j = 1$, l'indice en haut $\pm := +$ (les indices disparaissent dans la preuve), la démonstration est très similaire dans les autres cas. De plus nous ne ferons la démonstration que pour $E \in \mathbb{R}$ le passage à E complexe est alors simple. La matrice $x(p_\nu(x, \xi) + E)$ ne s'annule pas pour $x \neq 0$. De plus d'après le lemme 6.2 les fonctions φ et $i\phi_1$ vérifient les hypothèses du lemme A.1 pour l'opérateur $(P_\nu + E)$. Notons \mathcal{P}_f l'opérateur $e^{-\frac{f}{h}}(P_\nu + E)e^{\frac{f}{h}}$. Il existe des symboles analytiques v_1 sur V_1^h , v_\pm sur V_1^p tels que $\mathcal{P}_{\pm i\varphi}v_\pm = 0$, $\mathcal{P}_{-\phi_1}v_1 = 0$. De même, la fonction ψ_1 vérifie les hypothèses du lemme A.1 pour l'opérateur $(-hD_\xi P_\nu - EhD_\xi)$. Donc il existe un symbole analytique sur $V_0 =]-\xi_0, \xi_0[$, u tel que $e^{-\frac{i\psi_1}{h}}(-hD_\xi P_\nu - EhD_\xi)e^{\frac{i\psi_1}{h}}u = 0$. Notons $g(x, \xi)$ la fonction $x\xi + \psi_1(\xi)$. Le lemme suivant correspond aux techniques de la méthode du col, voir [Lau85].

LEMME 6.4. – Il existe $C' > 0$ telles que pour tout $(E, \nu) \in \Omega$ il existe une constante $G = G(E, \nu)$ et une famille de chemins $\gamma(x)$ définis sur V_1 , d'extrémités γ_\pm indépendant de x , vérifiant à droite de x_1 les propriétés :

$$\text{Im}g(x, \gamma(x)(t)) \geq -|\text{Im}(\varphi(x) + G)|, \quad \text{Im}g(x, \gamma_\pm) > C' - |\text{Im}(\varphi(x) + G)|$$

et à gauche de x_1 :

$$\text{Im}g(x, \gamma(x)(t)) \geq \text{Re}(\phi_1(x)), \text{Im}g(x, \gamma_{\pm}) > \text{Re}(\phi_1(x)) + C'.$$

Sur les chemins $\gamma(x)$ la fonction $g(x, \xi)$ admet à gauche de x_1 un point critique unique de valeur critique $i\phi_1(x)$, à droite de x_1 deux points critiques de valeurs critiques $\varphi(x) + G$ et $-\varphi(x) - G$. Les chemins vérifient la symétrie $\overline{\gamma(x)(t)} = -\gamma(x)(-t)$.

Démonstration. – Il existe C avec $\text{Re}(C) > 0$ tel que la fonction phase $\xi \rightarrow g(x, \xi)$ admet deux points critiques qui sont :

$$\xi_{\pm}^c = \pm \sqrt{C(x - x_1)} + \mathcal{O}(|x - x_1|).$$

La racine carrée est définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. La valeur de $\text{Im}g(x, \xi)$ est positive en ξ_-^c , négative en ξ_+^c pour x tel que $|x - x_1| < \varepsilon$ avec ε assez petit. Au voisinage d'un des points critiques (x, ξ_{\pm}^c) on a l'approximation suivante :

$$\begin{aligned} \text{Im}g(x, \xi) - \text{Im}g(x, \xi_{\pm}^c) &= \text{Im} \left(\frac{1}{2} \partial_{\xi}^2 g(x, \xi_{\pm}^c) (\xi - \xi_{\pm}^c)^2 \right) \\ &+ \text{Im} \left(\frac{1}{6} (\partial_{\xi}^3 g(x, \xi_{\pm}^c) + \mathcal{O}(|\xi - \xi_{\pm}^c|)) (\xi - \xi_{\pm}^c)^3 \right). \end{aligned}$$

Avec $\partial_{\xi}^2 g(x, \xi) = -2\xi \text{Re}(C^{-1}) + \mathcal{O}(|\xi^2|) + \mathcal{O}(\delta)$, $\partial_{\xi}^3 g(x, \xi) = -2\text{Re}(C^{-1}) + \mathcal{O}(|\xi|) + \mathcal{O}(\delta)$. Les quantités principales sont $\text{Re}(C^{-1})\text{Im}[-\xi_{\pm}^c (\xi - \xi_{\pm}^c)^2]$ et $-2\text{Re}(C^{-1})\text{Im}(\xi - \xi_{\pm}^c)^3$. Les deux quantités sont positives à gauche de x_1 sur le domaine borné en ξ qui tend vers :

$$D(x) = \left\{ \xi; \arg(\xi - \xi_-^c) \in \left[-\frac{\pi}{3}, 0 \right] \cup \left[\pi, \frac{4\pi}{5} \right] \right\},$$

lorsque x tend vers x_1 . Pour x à droite de x_1 les deux quantités sont positives sur un domaine qui tend vers :

$$\begin{aligned} D(x) = \left\{ \xi; \arg(\xi - \xi_-^c) \in \left[\pi, \pi + \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{2\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right] \text{ ou} \right. \\ \left. \arg(\xi - \xi_+^c) \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{6} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{3}, 0 \right] \right\}, \end{aligned}$$

lorsque x tend vers x_1 . Les quantités non principales sont alors négligeables sur un domaine inclus dans $D(x)$. On choisit deux points γ_{\pm} tels que

$\gamma_+ = -\bar{\gamma}_-$ appartenant à $\cap_{x, |x-x_1| < \varepsilon} D(x)$ tels que $\operatorname{Re} \gamma_- < 0$, $\operatorname{Re} \gamma_+ > 0$ et $|\gamma_{\pm}|$ assez petit. On peut alors trouver des chemins d'extrémités γ_{\pm} possédant la propriété énoncée au lemme 6.4. \square

La fonction définie par $g(x, \xi_{\pm}^c(x))$ est une solution de l'équation $\det(p(x, \varphi'(x)) + E) = 0$. Elle est donc égale à $\varphi_{\pm}(x) + G_{\pm}$. Des relations de symétrie on déduit $G_+ = -G_-$. De même nous avons $\phi_1(x) = -ig(x, \xi_-^c(x))$. Nous noterons u une réalisation du symbole u .

La fonction $W(x, h) = \left(\frac{h}{2i\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\gamma(x)} e^{\frac{i\varphi(x, \xi)}{h}} u(\xi, h) d\xi$ est définie et analytique dans un voisinage de x_1 . L'intégrale qui définit W vérifie les hypothèses de la phase stationnaire pour les symboles analytiques. (voir [Sj82]). Il existe des symboles analytiques w_{\pm} , respectivement w , tels que à droite (resp. à gauche) de x_1 :

$$W(x, h) = e^{\frac{i(\varphi(x)+G)}{h}} w_+(x, h) + e^{-\frac{i(\varphi(x)+G)}{h}} w_-(x, h),$$

$$W(x, h) = e^{-\frac{\phi_1(x)}{h}} w(x, h).$$

En calculant $(P_{\nu}(x, hD_x) + E)W(x, h)$ on obtient qu'il existe des fonctions analytiques r_{\pm} , r nulles respectivement dans les espaces $H_0^{loc}(V_1^h)$, $H_0^{loc}(V_1^P)$ telles que :

$$(P_{\nu}(x, hD_x) + E)W(x, h) = e^{\frac{i(\varphi(x)+G)}{h}} r_+(x, h) + e^{-\frac{i(\varphi(x)+G)}{h}} r_-(x, h),$$

$$(P_{\nu}(x, hD_x) + E)W(x, h) = e^{-\frac{\phi_1(x)}{h}} r(x, h).$$

De plus nous avons $\mathcal{P}_{\pm i\varphi} w_{\pm}(x, h) = 0$, d'après le lemme A.1, il existe des symboles classiques s_{\pm} qui vérifie $w_{\pm} = s_{\pm} v_{\pm}$. Ces expressions fournissent un prolongement holomorphe de la fonction $W(x, h)$ sur $]x_1, x_2[$. La fonction $W(x, h)$ admet aussi un prolongement sur l'intervalle $]0, x_1[$ défini à l'aide du symbole v_1 . La démonstration du (ii) se fait immédiatement en appliquant le lemme A.1 (i).

Notons S la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, Γ la transformation $u \rightarrow \bar{u}$, Λ la transformation $(x \rightarrow u(x)) \rightarrow (x \rightarrow u(-x))$, \mathcal{F}_h la transformation de Fourier $\mathcal{F}_h u(\xi) = \int e^{-\frac{i\varphi\xi}{h}} u(x) dx$. Utilisons maintenant les symétries, comme P_{ν} vérifie les relations $P_{\nu} S \Gamma = S \Gamma P_{\nu}$ et $P_{\nu} S \Gamma \Lambda = S \Gamma \Lambda P_{\nu}$, il existe des symboles analytiques $f(h)$, $k(h)$ tels que $S \Gamma v_+ = f(h) v_-$, $S \Gamma \Lambda u = k(h) u$, ce qui implique $\bar{s}_- = k(h) \bar{f}(h) s_+$. Comme $(S \Gamma)^2 = I$ on trouve que k est de module 1. On écrit k sous la forme $k = e^{iC_E(h)}$. Les expressions des fonctions W_j sont en changeant les notations :

$$W_1 = e^{i\frac{(\varphi+G_1)}{h}} w_{1,+} + e^{-i\frac{(\varphi+G_1)}{h}} w_{1,-},$$

$$W_2 = e^{i\frac{(\varphi+G_2)}{h}} w_{1,+} + e^{-i\frac{(\varphi+G_2)}{h}} e^{iC_E(h)} w_{1,-}^+.$$

Lorsque $E \in \mathbb{R}$, le symbole $C_E(h)$ est réel.

Notons y_j la valeur $\frac{x_0+x_j}{2}$, ξ_j la valeur $\xi_{j,+}^c(y_j)$. Comme $\psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$, le réel G_j est défini par $G_j = -\varphi(y_j) + \psi_j(\xi_j) + y_j\xi_j$ d'où :

$$\begin{aligned} G_2 - G_1 &= - \int_0^{\xi_1} \psi'_1(\xi)d\xi + \int_0^{\xi_2} \psi'_2(\xi)d\xi \\ &\quad + \int_{y_2}^{y_1} \varphi'_x(x)dx + [x\xi]_{(y_1,\xi_1)}^{(y_2,\xi_2)} \quad \square \\ &= \frac{1}{2} \int_{(x,\xi) \in P(E,\nu)} dx d\xi = A(E, \nu). \end{aligned}$$

7. ÉTUDE DU SPECTRE DE L'OPÉRATEUR $P_\nu|_{L^2([\alpha_1,\alpha_2])}$

Dans cette section nous calculons des résonances de $P_\nu|_{L^2([\alpha_1,\alpha_2])}$. Notons $P_{\nu,\alpha_1,\alpha_2}(x, hD_x)$ l'opérateur différentiel P_ν de domaine :

$$D(P_{\nu,\alpha_1,\alpha_2}) = \{u \in H^1([\alpha_1, \alpha_2]); u_1(\alpha_1) = u_2(\alpha_1), u_2(\alpha_2) = u_1(\alpha_2)\}.$$

Il est auto-adjoint de spectre discret. Soit ω un compact inclus tel que $\omega \subset \{(E, \nu) \in O_1; E \in [1/C_0, C_0]\}$ avec $C_0 > 0$. Soit α_1 et α_2 des constantes telles que $\alpha_1 < \inf_{(E,\nu) \in \Omega}(\text{Re}(x_1))$ et $\sup_{(E,\nu) \in \Omega}(\text{Re}(x_2)) < \alpha_2 < \inf_{(E,\nu) \in \Omega}(\text{Re}(x_3))$. Ce n'est possible que pour certains Ω définis par (6.3), mais quitte à recouvrir celui-ci, ce problème technique disparaît.

Notons $l = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Introduisons pour $(E, \nu) \in \Omega$ l'équation :

$$e^{-i\frac{A(E,\nu)}{h} + iC_E(h)} = 1 \tag{7.1}$$

Cette équation est celle de la quantification de Bohr-Sommerfeld [GS94].

THÉORÈME 7.1. – *Soit ω comme ci-dessus. Il existe une constante $r > 0$ telle que pour h assez petit, $(E, \nu) \in \Omega$ il existe une bijection entre les solutions de (7.1) réelles et les valeurs propres de $P_{\nu,\alpha_1,\alpha_2}$:*

(i) *Les valeurs propres de l'opérateur $P_{\nu,\alpha_1,\alpha_2}$ appartenant à $[-C_0, -1/C_0]$ forment une famille finie croissante $(E_j)_{j \in I}$ qui vérifie :*

$$rh \leq E_{j+1} - E_j \leq \frac{h}{r}$$

(ii) *Les valeurs propres $-E_j(\nu, h)$ sont simples et sont des fonctions C^∞ .*

(iii) *Pour toute solution \tilde{E}_j de l'équation (7.1), respectivement toute valeur propre de $P_{\nu,\alpha_1,\alpha_2}$, appartenant à $[-C_0, -1/C_0]$ il existe une unique valeur*

propre $-E_j$ de $P_{\nu, \alpha_1, \alpha_2}$ (resp. solution de l'équation (7.1)) appartenant à $\tilde{E}_j + B(0, rh)$. Elle vérifie $|\tilde{E}_j - E_j| \leq \mathcal{O}(e^{-1/Ch})$, $C > 0$.

Avant de commencer la démonstration de ce théorème, nous donnerons une caractérisation simple des valeurs propres à l'aide des solutions exactes de l'équation différentielle $(P_\nu + E)u = 0$. Nous donnerons ensuite une propriété du comportement de ces solutions. Puis nous comparerons les solutions de l'équation (7.1) aux valeurs propres de l'opérateur $P_{\nu, \alpha_1, \alpha_2}$.

Définissons le Wronskien de u_1, u_2 par $W(u_1, u_2)(x) = \begin{vmatrix} u_{1,1}(x) & u_{2,1}(x) \\ u_{1,2}(x) & u_{2,2}(x) \end{vmatrix}$. Si u_1, u_2 sont des solutions de l'équation différentielle $(P_\nu + E)u = 0$ alors le Wronskien de u_1, u_2 est une fonction constante, notée $W(u_1, u_2)$. L'équation $(P_{\nu, \alpha_1, \alpha_2} + E)u = 0$, $u \in \mathcal{D}(P_{\nu, \alpha_1, \alpha_2})$ admet une solution si et seulement si pour un couple (v_1, v_2) de solutions de $(P_\nu + E)u = 0$ telles que $v_1(\alpha_1)$ et $v_2(\alpha_2)$ sont non nuls et colinéaires au vecteur $(1, 1)$ nous avons $W(v_1, v_2) = 0$. Nous construisons dans les lignes suivantes un tel couple v_1, v_2 . Notons H la fonction de Heaviside et δ la masse de Dirac. Soit φ_y l'unique solution du problème $(P_\nu + E)\varphi_y(x) = 0$, $\varphi_y(y) = 1$. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ vérifiant $\beta < \inf_{(E, \nu) \in \Omega} (\alpha_1, \operatorname{Re}(x_3) - \alpha_2)$.

Les fonctions W_j^\pm construites au théorème 6.3 sont telles que les deux vecteurs $W_j^+(\alpha_j, h)$ et $W_j^-(\alpha_j, h)$ ne sont pas colinéaires. Il existe un complexe t_j tel que le vecteur $(W_j^+ + t_j W_j^-)(\alpha_j, h)$ est colinéaire au vecteur $(1, 1)$. De plus $|t_j| \leq \mathcal{O}(e^{-\frac{2\operatorname{Re}(\phi_j(\alpha_j))}{h}})$ et il existe une constante $\tau_1(h)$ uniformément bornée en h telle que $W(\tau_1(h)w_{1,+}^+, \tau_1(h)w_{1,-}^+)(z) = 1$. Les fonctions $\tau_1(W_j^+ + t_j W_j^-)$ sont notées w_j . La fonction v_j égale à :

$$v_j(x) = w_j(x) - \frac{i}{h} \int_{\alpha_j}^x \varphi_y(x)(P_\nu + E)w_j(y)dy \quad (7.2)$$

est analytique sur son domaine de définition (qui est pour $j = 1$: $] \beta, \operatorname{Re}(x_2) - \beta[$, pour $j = 2$: $] \operatorname{Re}(x_1) + \beta, \operatorname{Re}(x_3) - \beta[$,) analytique en (E, ν) sur Ω . Le vecteur $v_j(\alpha_j)$ est colinéaire à $(1, 1)$ et vérifie $(P_\nu + E)v_j = 0$. \square Fin de la construction

Soit un point $z \in] \operatorname{Re}(x_1), \operatorname{Re}(x_2)[$ fixé indépendamment de h, E, ν . Comme dans [Ma92] section 7 nous démontrons :

LEMME 7.2. – Soit Ω un compact de largeur assez petite, pour tout $M > 0$ et $\varepsilon > 0$ il existe $C_{\varepsilon, \Omega} > 0$ telle que pour toute solution u de l'équation $(P_\nu + E)u = 0$ tout $(E, \nu) \in \Omega$ et h assez petit :

$$\|u(x)\| \leq C_{\varepsilon, \Omega} e^{\frac{\Phi(x, y) + \varepsilon}{h}} \|u(y)\|,$$

avec $\Phi(x, y) = \operatorname{Re} \int_y^x [(\frac{\nu}{t})^2 - (E - t^2)^2]^{\frac{1}{2}} dt$, uniformément en $(x, y) \in]0, M[$.

PROPOSITION 7.3. – Soit ω comme ci-dessus, il existe des constantes $r > 0$ $C_\omega > 0$ telles que si h est assez petit et $(E, \nu) \in \omega$:

(i) La distance entre deux solutions $\tilde{E}(\nu, h)$ distinctes de l'équation (7.1) appartenant à $[1/C_0, C_0]$ est supérieure à rh . Les solutions $\tilde{E}(\nu, h)$ sont des fonctions C^∞ en (ν, h) .

(ii) Il existe une famille finie de solutions de l'équation (7.1) appartenant à $[1/C_0, C_0]$ notée $(\tilde{E}_j(\nu, h))_{j \in I}$. Le nombre de solutions de l'équation (7.1) est supérieur à $\frac{C_\omega}{h}$.

Démonstration de la proposition. – Les solutions de l'équation (7.1) sont les solutions du système :

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad A(E, \nu) - hC_E(h) = 2kh\pi. \tag{7.3}$$

Pour h assez petit la fonction $E \rightarrow A(E, \nu) - hC_E(h)$ est strictement croissante et elle a une dérivée supérieure à une constante $C > 0$. En particulier la courbe $E \rightarrow A(E, \nu) - hC_E(h)$ croise les droites $y = 2kh\pi$ en un unique point E_k lorsque $2kh\pi$ appartient à l'intérieur de $\operatorname{Im}_{(E, \nu) \in \omega} A(E, \nu)$, soit pour seulement $\frac{C_\omega}{h}$ valeurs de k . Si E_1 et E_2 sont deux solutions de (7.3) alors :

$$C|E_1 - E_2| \geq |A(E_1, \nu) - hC_{E_1}(h) - A(E_2, \nu) + hC_{E_2}(h)| \geq 2h\pi.$$

Finalement $|E_1 - E_2| > rh > 0$. \square

Démonstration du théorème 7.1. – Notons $Q_u(E, \nu, h) = [e^{-i\frac{A(E, \nu)}{2h}} - e^{i\frac{A(E, \nu)}{2h} + iC_E(h)}]$. Calculons le Wronskien de w_1 et w_2 au point z , à l'aide des expressions de la proposition 6.3 :

$$W(w_1, w_2)(z) = Q_u(E, \nu, h) + \mathcal{O}(e^{-\frac{2}{h}\operatorname{Re}(\phi_1(\alpha_1) + \phi_2(\alpha_2) + \mathcal{O}(\operatorname{Im}(E)))}). \tag{7.4}$$

Comparons le Wronskien de w_1 et w_2 à celui de v_1 et v_2 . D'après la formule (7.2), le lemme 7.2 et la proposition 6.3 pour γ un chemin d'extrémités α_j et z inclus dans $\{x/\operatorname{Arg}(x - x_j) < t_0\}$:

$$\|v_j(z) - w_j(z)\| \leq \int_\gamma |\varphi_y(x)| |(P_\nu + E)w_j(y)| \leq \mathcal{O}(e^{-1/Ch}).$$

Donc la fonction $W(v_1, v_2)(z) - W(w_1, w_2)(z)$ est analytique en E et vérifie :

$$\|W(v_1, v_2)(z) - W(w_1, w_2)(z)\| \leq \mathcal{O}(e^{-1/Ch}).$$

D'après l'égalité (7.4), la fonction $W(v_1, v_2)(z) - Q_u(E, \nu, h)$ est analytique en E et vérifie :

$$\|W(v_1, v_2)(z) - Q_u(E, \nu, h)\| \leq \mathcal{O}(e^{-1/Ch}).$$

Sur Γ un contour qui est à une distance $\tilde{r}h$ des solutions de l'équation (7.1) avec \tilde{r} assez petit :

$$\|W(v_1, v_2) - Q_u(E, \nu, h)\| < \|Q_u(E, \nu, h)\|.$$

D'après le théorème de Rouché à l'intérieur du rectangle de contour Γ les deux fonctions $W(v_1, v_2)$ et $Q_u(E, \nu, h)$ ont le même nombre de zéros. Ce résultat est vrai pour tout contour à distance $\tilde{r}h$ des zéros de l'équation (7.1), en particulier lorsque ce contour entoure une unique solution de l'équation (7.1). Soit alors E_j le zéro de $W(v_1, v_2)$ à distance inférieure à $\tilde{r}h$ d'un zéro \tilde{E}_j de $Q_u(E, \nu, h)$ nous avons :

$$|Q_u(E_j, \nu, h) - Q_u(\tilde{E}_j, \nu, h)| \geq (E_j - \tilde{E}_j) \frac{C'}{h} - (E_j - \tilde{E}_j)^2 \frac{C'}{h^2}.$$

Donc $|E_j - \tilde{E}_j| \leq \mathcal{O}(e^{-1/Ch})$. \square

8. LIEN ENTRE $P_\nu \big|_{L^2([\alpha_1, \alpha_2])}$ ET $P_\nu \big|_{L^2([0, \alpha_2])}$

Notons P_{ν, α_2} l'opérateur P_ν de domaine $D = \{u \in H^1(]0, \alpha_2[); \frac{u}{x} \in L^2(]0, \alpha_2[), u_1(\alpha_2) = u_2(\alpha_2)\}$.

LEMME 8.1. – Pour tout $|\nu| > \frac{1}{2}h$, l'opérateur P_{ν, α_2} est auto-adjoint.

Démonstration du lemme 8.1. – Notons \tilde{D} l'ensemble

$$\{u \in C_0^\infty(]0, \alpha[); u_1(\alpha) = u_2(\alpha)\}$$

dense dans D muni de la norme $\|u\|_D = \|u\|_{H^1} + \|\frac{u}{x}\|_{L^2}$. Pour $u, v \in C_0^\infty(]0, \alpha_2[), \mathbb{C}^2)$ nous avons :

$$\begin{aligned} & \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} h D_x u, v \right\rangle_{L^2(]0, \alpha_2])} \\ & - \left\langle u, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} h D_x v \right\rangle_{L^2(]0, \alpha_2])} = i(u_2 \bar{v}_2 - u_1 \bar{v}_1)(\alpha_2) \quad (8.1) \end{aligned}$$

Soient $v \in \tilde{D}$, $u \in \tilde{D}$ alors $\langle v, P_{\nu, \alpha_2} u \rangle = \langle P_{\nu, \alpha_2} v, u \rangle$. Par densité cette relation s'étend au cas $u \in D$, puis au cas $v \in D$. Donc P_{ν, α_2} est

symétrique. Soit $u \in D(P_{\nu, \alpha_2}^*)$, notons $v = P_{\nu, \alpha_2}^* u$, alors $v \in L^2$. Comme $\nu \notin]-h\frac{1}{2}, h\frac{1}{2}]$, $u \in L^2(]0, \alpha[)$ et $hD_x u + i\nu\frac{u}{x} \in L^2(]0, \alpha[)$ nous avons $u \in H^1(]0, \alpha[)$ et $\frac{u}{x} \in L^2(]0, \alpha[)$. (Ceci se démontre en exprimant la solution u de $hD_x u + i\nu\frac{u}{x} = f$, puis en utilisant une inégalité de Hardy). l'égalité (8.1) démontre alors que pour tout $\phi \in \tilde{D}$:

$$\langle P_{\nu, \alpha_2} u, \phi \rangle = \langle u, P_{\nu, \alpha_2} \phi \rangle - i(u_1(\alpha_2)\bar{\phi}_1(\alpha_2) - u_2(\alpha_2)\bar{\phi}_2(\alpha_2)). \tag{8.2}$$

Comme $P_{\nu, \alpha_2}^* u = P_{\nu, \alpha_2} u$ dans L^2 nous avons $\langle P_{\nu, \alpha_2} u, \phi \rangle = \langle P_{\nu, \alpha_2}^* u, \phi \rangle = \langle u, P_{\nu, \alpha_2} \phi \rangle$. En confrontant ce résultat avec l'équation (8.2), on obtient $u_1(\alpha_2) = u_2(\alpha_2)$ donc $u \in D$. \square

Donc le spectre de l'opérateur P_{ν, α_2} est discret pour tout $|\nu| > \frac{1}{2}h$.

THÉOREME 8.2. – Soit ω comme précédemment, $(E, \nu) \in \omega$. Soit C'_0 telles que $C'_0 > C_0$. Pour r assez petit, h assez petit, α_1 assez petit, il existe une bijection entre le spectre de $P_{\nu, \alpha_1, \alpha_2}$ et celui de P_{ν, α_2} plus exactement :

- Les valeurs propres de P_{ν, α_2} appartenant à $[-C_0, -\frac{1}{C'_0}]$ appartiennent à $\cup B(-E, rh)$ pour $-E \in \text{Sp}(P_{\nu, \alpha_1, \alpha_2}) \cap [-C'_0, -\frac{1}{C'_0}]$.

- Pour $-E \in [-C'_0, -\frac{1}{C'_0}] \cap \text{Sp}(P_{\nu, \alpha_1, \alpha_2})$, le nombre de valeurs propres de P_{ν, α_2} appartenant à $B(-E, rh)$ est égal à la multiplicité de E et elles sont à une distance $\mathcal{O}(e^{-1/C_h})$ de E , avec $C > 0$.

La démonstration est basée sur la construction d'inégalités similaires à celles de Lithner-Agmon pour estimer la norme des opérateurs apparaissant dans le calcul de la différence des deux projecteurs spectraux. Nous dirons que la fonction ψ vérifie la propriété (P) si ψ vérifie :

$$(P) \begin{cases} \psi \text{ est lipschitzienne sur } [0, \alpha_2], \\ \det(P_\nu + E)(x, i\psi'(x)) = 0 \text{ sur } [0, x_1(E, \nu)[\text{ pour } (E, \nu) \in \omega. \end{cases}$$

Pour tout $\varepsilon < \frac{1}{2}$, posons $\psi_\varepsilon = (1 - \varepsilon)\psi$.

LEMME 8.3. – Pour tout ω comme ci-dessus et $d \in [0, \inf_\omega x_1(E, \nu)[$, il existe des constantes $C_1 > 0, C_2 > 0$ telles que pour tous $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, $(E, \nu) \in \Omega$, $u \in D(P_{\nu, \alpha_2})$ et ψ vérifiant les propriétés (P) on a :

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle e^{\frac{\psi_\varepsilon}{h}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (P_{\nu, \alpha_2} + E)u, e^{\frac{\psi_\varepsilon}{h}} u \right\rangle \right|_{L^2([0, \alpha_2])} \\ & \geq \varepsilon C_1 \|e^{\frac{\psi_\varepsilon}{h}} u\|_{L^2([0, d])}^2 - C_2 \|e^{\frac{\psi_\varepsilon}{h}} u\|_{L^2([x_1(\text{Re}(E), \nu), \alpha_2])}^2. \end{aligned}$$

Démonstration. – Soit α_0 une constante telle que $0 < \alpha_0 < d$. La partie réelle de la quantité à minorer est $\text{Re}\langle V_{\psi_\varepsilon} e^{\frac{\psi_\varepsilon}{h}} u, e^{\frac{\psi_\varepsilon}{h}} u \rangle$, avec $V_{\psi_\varepsilon} =$

$\begin{pmatrix} \frac{\nu}{x} & \text{Re}E - x^2 - i\psi'_\varepsilon \\ \text{Re}E - x^2 + i\psi'_\varepsilon & \frac{\nu}{x} \end{pmatrix}$ qui est un opérateur hermitien sur $D(P_{\nu,\alpha_2})$. C'est un opérateur borné uniformément en ε , E , ν sur $x \in [\alpha_0, \alpha_2]$, il existe $C_2 > 0$ telle que $\|V_{\psi_\varepsilon}\| \leq C_2$. Le déterminant de V_{ψ_ε} égal à $\varepsilon(2 - \varepsilon)(\psi')^2$ est positif sur $[0, x_1(\text{Re}(E), \nu)]$, strictement positif sur $[0, d]$. La trace de V_{ψ_ε} a le même signe que ν . Donc V_{ψ_ε} est une forme positive sur $[0, x_1(\text{Re}(E), \nu)]$ lorsque $\nu > 0$ et négative lorsque $\nu < 0$. Les valeurs propres de V_{ψ_ε} sont distinctes et de normes supérieures à εC_1 sur $[0, d]$. En résumé :

$$|\langle V_{\psi_\varepsilon} e^{\frac{\psi_\varepsilon}{h}} u, e^{\frac{\psi_\varepsilon}{h}} u \rangle| \geq \varepsilon C_1 \|e^{\frac{\psi_\varepsilon}{h}} u\|_{L^2([0,d])}^2 - C_2 \|e^{\frac{\psi_\varepsilon}{h}} u\|_{L^2([x_1(\text{Re}(E), \nu), \alpha_2])}^2.$$

Cette inégalité démontre le résultat. \square

Remarque 8.4. – Le lemme 8.3 est encore valable pour l'opérateur P_{ν,α_2} .

Une application immédiate de ce lemme démontre la proposition suivante :

PROPOSITION 8.5. – *Soit Ω comme avant, pour toute suite de réels telle que $\alpha_1 < d < d' < \tilde{d} < \tilde{d}' < \inf_\omega x_1(E)$, il existe une constante $C > 0$ telle que :*

- (i) *tout vecteur propre u de norme 1 de l'opérateur P_{ν,α_2} ou de l'opérateur $P_{\nu,\alpha_1,\alpha_2}$ associé à la valeur propre $(-E)$ vérifie $\|u\|_{L^2([0,d])} \leq \mathcal{O}(e^{-1/Ch})$,*
- (ii) *pour tout $u \in L^2(]0, \alpha_2])$, tout $(-E) \in \text{Sp}(P_{\nu,\alpha_1,\alpha_2})$ pour tout $z \in \partial B(E, r\hbar)$:*

si $\text{Supp } u \subset [d', \alpha_2]$ alors $\|(P_{\nu,\alpha_2} + z)^{-1}u\|_{L^2([0,d])} \leq \mathcal{O}(e^{-1/Ch})\|u\|$,

si $\text{Supp } u \subset [d, d']$ alors $\|(P_{\nu,\alpha_2} + z)^{-1}u\|_{L^2([\tilde{d}, \tilde{d}'])} \leq \mathcal{O}(e^{-1/Ch})\|u\|$,

(de même pour l'opérateur $P_{\nu,\alpha_1,\alpha_2}$ si on remplace $[0, d]$ par $[\alpha_1, d])$ uniformément en h , z et $(E, \nu) \in \Omega$.

Démonstration du théorème 8.2. – On utilise la proposition 8.5 et le fait que

$\int_{\partial B(E, \frac{1}{4}r\hbar)} (z + P_{\nu,\alpha_1,\alpha_2})^{-1}u dz$ est un vecteur propre de l'opérateur $P_{\nu,\alpha_1,\alpha_2}$ de norme bornée par une puissance de h pour estimer la différence des projecteurs spectraux. \square

9. RÉSONANCES DE P_ν PROCHES DE L'AXE RÉEL

Pour obtenir des résonances des opérateurs P_ν pour $\nu \neq 0$, nous cherchons les valeurs propres des opérateurs $Q_{\mu,\nu}$ d'après le lemme 5.3. Les constantes α et α' sont choisies telles que

$$\alpha_2 < \alpha < \alpha' < \text{Re}(x_3).$$

Soit α'_2 une constante telle que pour $(E, \nu) \in \Omega$, $x_2 < \alpha'_2 < \alpha_2$. L'opérateur Q_{μ, ν, α'_2} est la restriction de l'opérateur $Q_{\mu, \nu}$ à l'espace $L^2([\alpha'_2, \infty[)$ de domaine :

$$\mathcal{D}_{\alpha'_2} = \{u \in H^1([\alpha'_2, \infty[); u_1(\alpha'_2) = u_2(\alpha'_2), x^2 u \in L^2[\alpha'_2, \infty[)\}.$$

Notons $\|u\|_{\mathcal{D}_{\alpha'_2}}^2 = h^2 \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{\mathcal{D}'_{\alpha'_2}}^2$.

PROPOSITION 9.1. – Il existe une constante $k > 0$ telle que pour tous $|\mu|$ assez petit, $(E, \nu) \in \Omega$, $|\text{Im} E| < k|\mu|$, l'opérateur $(Q_{\mu, \nu, \alpha'_2} + E)$ est inversible. Il existe une constante $C_\mu > 0$ telle que $\|(Q_{\mu, \nu, \alpha'_2} + E)^{-1}\| \leq C_\mu$, uniformément en h pour h assez petit.

Démonstration. – L'opérateur de même domaine que Q_{μ, ν, α'_2} dont la matrice est la comatrice de celle de Q_{μ, ν, α'_2} est notée $\tilde{Q}_{\mu, \nu, \alpha'_2}$.

PROPOSITION 9.2. – (i) Il existe un opérateur R_μ vérifiant $\|R_\mu u\|_{L^2} = \mathcal{O}(h)\|u\|_{\mathcal{D}_{\alpha'_2}}$ tel que :

$$(\tilde{Q}_{\mu, \nu, \alpha'_2} + E)(Q_{\mu, \nu, \alpha'_2} + E) = \det(Q_{\mu, \nu, \alpha'_2} + E)(x, hD_x)I_2 + R_\mu.$$

(ii) Il existe une constante $k > 0$ telle que pour tous E vérifiant $|\text{Im} E| < k|\mu|$ et $u \in \mathcal{D}_{\alpha'_2}$ nul en α'_2 :

$$|((1 + \mu\omega')^2 \det(Q_{\mu, \nu, \alpha'_2} + E)(x, hD_x)u, u)_{L^2}| \geq C\|u\|_{\mathcal{D}_{\alpha'_2}}^2.$$

Démonstration de la proposition 9.1. – Soit ψ une fonction à support dans $[0, \alpha_2]$ égale à 1 sur $[\alpha'_2, \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha'_2)]$. D'après la proposition 9.2 et le fait que sur $[0, \alpha_2]$, $\text{Re}(S(Q_{\mu, \nu, \alpha'_2} + E))$ est une forme positive, il existe $C > 0$:

$$\begin{aligned} \|(Q_{\mu, \nu, \alpha'_2} + E)\psi u\|_{L^2([\alpha'_2, \alpha_2])} &\geq \frac{1}{C}\|\psi u\|_{\mathcal{D}_{\alpha'_2}}, \\ \|(Q_{\mu, \nu, \alpha'_2} + E)(1 - \psi)u\|_{L^2([\alpha'_2, \infty[)} &\geq \frac{1}{C}\|(1 - \psi)u\|_{\mathcal{D}_{\alpha'_2}}. \end{aligned}$$

Une combinaison de ces deux lignes termine la preuve. \square

Démonstration de la proposition 9.2. – (i) Il existe une fonction $k_\mu(x) \in C_0^\infty$, analytique en μ , vérifiant $\sup_{x \in \mathbf{R}} |k_\mu| = \mathcal{O}(|\mu|)$ ainsi que :

$$\begin{aligned} Q_{\mu, \nu, \alpha'_2} + E &= \begin{pmatrix} k_\mu(x) & 0 \\ 0 & -k_\mu(x) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} E - (x + \mu\omega(x))^2 + \frac{h}{1 + \mu\omega'(x)} D_x & \\ \frac{\nu}{x + \mu\omega(x)} & E - (x + \mu\omega(x))^2 - \frac{h}{1 + \mu\omega'(x)} D_x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Notons a, b, b, c les coefficients de cette matrice. L'opérateur $(\tilde{Q}_{\mu,\nu,\alpha'_2} + E)$ a pour coefficients $c, -b, -b, a$. En calculant le produit de ces deux opérateurs on trouve :

$$\begin{aligned}
 & (\tilde{Q}_{\mu,\nu,\alpha'_2} + E)(Q_{\mu,\nu,\alpha'_2} + E) = R_\mu(x, hD_x) \\
 & + \left\{ (E - (x + \mu\omega(x))^2)^2 - k_\mu^2(x) \right. \\
 & \left. - \frac{1}{(1 + \mu\omega'(x))^2} (hD_x)^2 - \left(\frac{\nu}{x + \mu\omega(x)} \right)^2 \right\} I_2
 \end{aligned}$$

avec $\|R_\mu(x, hD_x)u\| \leq hC\|u\|_{\mathcal{D}_{\alpha'_2}}$. \square (i)

(ii) Notons $g(\mu, x)$ la fonction :

$$g(\mu, x) = (1 + \mu\omega')^2 \left\{ (E - (x + \mu\omega(x))^2)^2 - \left(\frac{\nu}{x + \mu\omega(x)} \right)^2 \right\}.$$

En calculant on trouve qu'elle est égale à des termes en $\mathcal{O}(|\mu|^2)(x^4 + 1)$ près à :

$$\det(P_\nu + E)(x, 0) + \mu[2\omega' \det(P_\nu + E)(x, 0) + \omega \det'_x(P_\nu + E)(x, 0)].$$

D'après l'étude du symbole $(P_\nu + E)$:

$$\operatorname{Re}(g(\mu, x)) \leq -C_1 \text{ sur } [\alpha'_2, \alpha'], |g(\mu, x)| = \mathcal{O}(x^4 + 1) \text{ sur } [\alpha', \infty[. \tag{9.1}$$

La partie imaginaire de $g(\mu, x)$ est égale à :

$$\operatorname{Im}(E)\mathcal{O}(|x^4 + 1|) + \frac{(\operatorname{Im}\mu)}{\omega}(\omega^2 \det(P_\nu + \operatorname{Re}(E)))(x, 0)'.$$

La fonction $(\omega^2 \det(P_\nu + \operatorname{Re}(E)))(x, 0)$ est croissante strictement sur $]\alpha, \infty[$ et se comporte à l'infini comme un polynôme en x^4 . Donc :

$$|\langle g(\mu, x)u, u \rangle_{L^2([\alpha'_2, \infty[)}| \geq C(\|x^2u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2). \quad \square$$

THÉORÈME 9.3. – Soit ω comme avant.

(i) Il existe une constante k strictement positive telle que pour E appartenant à l'ensemble :

$$\mathcal{E} = \{ \operatorname{Re}(E) \in K; |\operatorname{Im}(E)| < k|\mu|, E \notin \cup B(E_j(\nu, h), rh) \},$$

pour $|\mu|$ et h assez petits, l'opérateur $(Q_{\mu,\nu} + E)$ est inversible.

(ii) A l'intérieur des boules $B(-E_j(\nu, h), rh)$ l'opérateur $Q_{\mu, \nu}$ admet une seule valeur propre. La distance de celle-ci à $-E_j(\nu, h)$ est inférieure à $\mathcal{O}(e^{-1/Ch})$, $C > 0$.

Démonstration. – (i) D'après le théorème 7.1 pour tout E appartenant à \mathcal{E} alors

$\|(P_{\nu, \alpha_2} + E)^{-1}\| \geq \mathcal{O}(h^{-1})$. Soit $\chi_1, \tilde{\chi}_1, \chi_2$ et $\tilde{\chi}_2$ des fonctions telles que :

$$\chi_1, \tilde{\chi}_1 \in C_0^\infty, \tilde{\chi}_2 \in C^\infty, \chi_1 = \tilde{\chi}_1 = 0 \text{ sur } [\alpha_2, \infty[, \chi_1 = 1, \tilde{\chi}_2 = 0 \text{ sur } [0, \alpha'_2], \chi_1 + \chi_2 = 1, \tilde{\chi}_1 \chi_1 = \chi_1, \tilde{\chi}_2 \chi_2 = \chi_2.$$

Notons $P = \tilde{\chi}_1(P_{\nu, \alpha_2} + E)^{-1}\chi_1 + \tilde{\chi}_2(Q_{\mu, \nu, \alpha'_2} + E)^{-1}\chi_2$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} P(Q_{\mu, \nu} + E) &= I + h[\tilde{\chi}_1 \tilde{\chi}_2, (Q_{\mu, \nu, \alpha'_2} + E)^{-1}] \nabla \chi_1 (1 + \mu \omega'(x)) l \\ h(Q_{\mu, \nu, \alpha'_2} + E)^{-1} &[h \nabla \tilde{\chi}_1 l (P_{\nu, \alpha_2} + E)^{-1} + h \nabla \tilde{\chi}_2 l (P_{\nu, \alpha_2} + E)^{-1}] \nabla \chi_1 \\ &+ h \tilde{\chi}_1 (1 - \tilde{\chi}_2) (P_{\nu, \alpha_2} + E)^{-1} \nabla \chi_1 (1 + \mu \omega'(x)) l \\ &- h \tilde{\chi}_2 (1 - \tilde{\chi}_1) (Q_{\mu, \nu, \alpha'_2} + E)^{-1} \nabla \chi_1 (1 + \mu \omega'(x)) l. \end{aligned}$$

Les inégalités de Lithner-Agmon démontrées dans la proposition 8.5 au voisinage du point α_1 se démontrent de même au voisinage du point α_2 . On obtient alors, en utilisant aussi la proposition 9.1, $P(Q_{\mu, \nu} + E) = I + \mathcal{O}(h)$. De même $(Q_{\mu, \nu} + E)P$ est inversible pour h assez petit \square (i)

(ii) Nous allons étudier un problème de Grushin pour E appartenant à l'intérieur d'une boule $B(E_j(\nu, h), rh)$. Notons $\Pi_{P_{\nu, \alpha_2}}$ le projecteur spectral de P_{ν, α_2} associé à cette boule : $\Pi_{P_{\nu, \alpha_2}} = \int_{\partial B(E_j(\nu, h), rh)} (P_{\nu, \alpha_2} + z)^{-1} dz$.

Notons \mathcal{G} l'opérateur $\begin{pmatrix} Q_{\mu, \nu} + E & \tilde{\chi}_1 \\ \Pi_{P_{\nu, \alpha_2}} & 0 \end{pmatrix}$ agissant sur le domaine $\mathcal{D}_\nu \oplus \text{Im} \Pi_{P_{\nu, \alpha_2}}$. On choisit pour inverse approché à l'opérateur \mathcal{G} l'opérateur noté \mathcal{T} :

$$\left(\begin{array}{cc} \tilde{\chi}_1 (P_{\nu, \alpha_2} + E)|_{\text{ker} \Pi} (1 - \Pi) \chi_1 + \tilde{\chi}_2 (Q_{\mu, \alpha_2} + E)^{-1} \chi_2 & \tilde{\chi}_1 \\ \Pi_{P_{\nu, \alpha_2}} \chi_1 & -(P_{\nu, \alpha_2} + E)|_{\text{Im} \Pi_{P_{\nu, \alpha_2}}} \end{array} \right).$$

Le calcul de $\mathcal{G}\mathcal{T}$ et de $\mathcal{T}\mathcal{G}$ donne en utilisant les inégalités d'Agmon l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $\mathcal{G}\mathcal{T} = 1 + \mathcal{O}(e^{-1/Ch})$, $\mathcal{T}\mathcal{G} = 1 + \mathcal{O}(e^{-1/Ch})$. Ceci prouve que l'opérateur \mathcal{G} admet un inverse exact égal à $\mathcal{T}(1 + \mathcal{O}(e^{-1/Ch}))$, de coefficient en bas à droite $g_4 = -(P_{\nu, \alpha_2} + E)|_{\text{Im} \Pi_{P_{\nu, \alpha_2}}} + \mathcal{O}(e^{-1/Ch})$. La valeur propre $(-E)$ est de multiplicité m pour l'opérateur $Q_{\mu, \nu}$ si et seulement si le noyau de l'opérateur g_4 est de dimension m . La fonction $\det(g_4)$ est analytique

en E de dérivée supérieure à un terme en $\mathcal{O}(1)$, de dérivée seconde inférieure à un terme en $\mathcal{O}(1)$. Donc $Q_{\mu,\nu}$ admet une valeur propre égale à $-E_j + \mathcal{O}(e^{-1/Ch})$ de multiplicité 1. \square (ii)

La démonstration du théorème 2.3 provient de l'assemblage des résultats des théorèmes 5.1, 5.3, 8.2, 7.1 et 9.3.

REMERCIEMENTS

Cet article entre dans le cadre de ma thèse préparée sous la direction de A. Martinez et J. Sjöstrand que je remercie pour leurs nombreux conseils et idées et pour avoir su orienter mes recherches. Je tiens aussi à remercier E. Engdahl pour des discussions enrichissantes sur l'utilisation des Wronskiens, que j'ai employés pour trouver des valeurs propres à partir de valeurs propres formelles.

A. Constructions formelles

Un symbole analytique a est une suite $(a_k(z))_{k \in \mathbb{N}}$, on note $a = \sum a_k(z)h^k$, de fonctions holomorphes sur Ω telle que pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe une constante $C_K > 0$ vérifiant $\forall z \in K, |a_k(z)| \leq C_K^{k+1}k^k$. Une réalisation de a est un élément de $H_0^{loc}(\Omega')$ pour $\Omega' \subset K \subset \Omega$, K compact, donnée par $a(z, h) = \sum_{k \leq 1/ehC_K} a_k(z)h^k$. Soit P un opérateur de la forme $P(x, hD_x, h) = \sum_{j=0}^N a_j(x, h)(hD_x)^j$. Les $a_j(x, h)$ sont des matrices 2×2 dont les coefficients sont des symboles analytiques d'ordre zéro sur Ω . Notons $P(x, \xi, h)$ le symbole de P , $p(x, \xi)$ son symbole principal. Soit φ une fonction phase analytique sur Ω vérifiant $\det p(x, \varphi'(x)) = 0$, $(\partial_\xi \det p)(x, \varphi'(x)) \neq 0$.

LEMME A.1. – (i) *Il existe un symbole analytique $v(x, h)$ sur Ω solution de :*

$$\exp \frac{(-i\varphi(x))}{h} P(x, hD_x, h) \exp \frac{(i\varphi(x))}{h} v(x, h) = 0, \quad (\text{A.1})$$

de premier terme $v_0(x)$ non nul et colinéaire aux vecteurs du noyau de $p(x, \varphi'(x))$.

(ii) *Soient $v_1(x, h)$ et $v_2(x, h)$ deux symboles analytiques vérifiant (A.1), alors il existe un symbole analytique $\lambda(h) = \sum_{j=0}^{\infty} h^j \lambda_j$ tel que $v_1(x, h) = \lambda(h)v_2(x, h)$.*

Démonstration. – Pour obtenir des séries formelles $v(x, h)$ solution de (A.1) il suffit d'écrire $P_\varphi = \exp \frac{(-i\varphi(x))}{h} P(x, hD_x, h) \exp \frac{(i\varphi(x))}{h}$ comme

$\sum_{i=0}^{\infty} h^i P_{i,\varphi}(x, D_x)$ et d'annuler tous les termes. En particulier le premier est $p(x, \varphi'(x))v_0(x)$ donc v_0 appartient au noyau de $p(x, \varphi'(x))$. De plus les séries formelles trouvées vérifient (ii). Donc pour montrer l'existence de symboles analytiques solutions du problème il suffit de le faire localement. En utilisant les résultats de Helffer-Sjöstrand [HS90] section (3.2), nous obtenons qu'il existe localement des opérateurs $U(x, hD_x, h)$ et $V(x, hD_x, h)$ tels que :

$$\begin{aligned} & V(x, hD_x, h)R(x, hD_x, h)U(x, hD_x, h) \\ &= \begin{pmatrix} R_1(x, hD_x, h) & 0 \\ 0 & R_2(x, hD_x, h) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le symbole principal de $R_1(x, hD_x, h)$, noté $r_{1,1}$, vérifie $r_{1,1}(x, 0) = 0$ et $\partial_\xi r_{1,1}(x, 0) \neq 0$. D'après les résultats de [Sj80] sur les symboles en dimension 1, on peut alors construire un symbole analytique $v_1(x, h)$ sur Ω tel que $R_1(x, hD_x, h)v_1(x, h) = 0$. Le symbole $v(x, h) = U(x, hD_x, h) \begin{pmatrix} v_1(x, h) \\ 0 \end{pmatrix}$ est alors une solution non nulle de $R(x, hD_x, h)v(x, h) = 0$. \square

RÉFÉRENCES

- [AC71] J. AGUILAR et J. M. COMBES, A class of analytic perturbations for one body Schrödinger Hamiltonians, *Commun. Math. Phys.*, Vol. **22**, 1971, p. 269-279.
- [BCD85] Ph. BRIET, J. M. COMBES et P. DUCLOS, On the location of resonances for Schrödinger operators in the semiclassical limit I, *J. Math. Anal. Appl.*, Nov. 1985.
- [BCD87] Ph. BRIET, J. M. COMBES et P. DUCLOS, On the location of resonances for Schrödinger operators in the semiclassical limit II, *Comm. Part. Diff. Eq.*, Vol. **12**, 1987, p. 209-258.
- [CDS81] J. M. COMBES, P. DUCLOS et R. SEILER, The Born Oppenheimer approximation, *Rigorous Atomic and molecular, Physic*, 1981, p. 185-212.
- [Fed83] M. V. FEDORYUK, *Asymptotic analysis*, 1983, Springer verlag.
- [GS94] A. GRIGIS et J. SJÖSTRAND, *Microlocal analysis for diff. op.*, 1994, Cambridge Univ. Press.
- [Hag90] G. A. HAGEDORN, Electron energy level crossing in time dependent Born Oppenheimer approximation, *Theoretica Chimica Acta.*, Vol. **77**, 1990, p. 163-190.
- [Hag94] G. A. HAGEDORN, Molecular propagation through electron energy level crossings, *Memoirs A.M.S.* 536, Vol. **111**, 1994.
- [HeSi81] I. HERBST et B. SIMON, Dilation analyticity in constant electric field II. The N-body problem, Borel summability, *Commun. Math. Phys.*, Vol. **80**, 1981, p. 181-216.
- [HS84] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND, Multiple wells in the semi classical limit I, *Communication in partial differential equations*, Vol. **9** (5), 1984.
- [HS86] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND, Résonances en limite semi-classique, *Mémoire de la S.M.F.*, 1986.

- [HS89] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND, Semi classical analysis for Harper's equation III, *Mémoire de la S.M.F.*, 1989.
- [HS90] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND, Analyse semi-classique pour l'équation de Harper II, *Mémoire de la S.M.F.*, Vol. **40**, 1990.
- [Hun86] W. HUNZIKER, Distorsion analyticity and molecular resonances curves, *Annales de l'I.H.P.*, mars 1986.
- [Joy94] A. JOYE, Proof of the Landau-Zener formula, *Asympt. Anal.*, Vol. **9**, 1994, p. 209-258.
- [Kat76] KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Springer, 1976.
- [Kle87] M. KLEIN, On the mathematical theory of predissociation, *Ann. of Physics*, Vol. **178** (1), 1987, p. 48-73.
- [KMSW92] M. KLEIN, A. MARTINEZ, R. SEILER et X. P. WANG, On the Born-Oppenheimer expansion for polyatomic molecules, *Comm. Math. Phys.*, Vol. **143**, 1992, p. 607-639.
- [KR93] N. KAÏDI et M. ROULEUX, Forme normale d'un hamiltonien à 2 niveaux près d'un point de branchement. Limite semi-classique, *C.R.A.S.*, Vol. **317**, série I, 1993, p. 359-364.
- [Lau85] P. LAUBIN, Hyperbolic boundary value problems..., *Proc. Nato asi on adv in Microl. anal.*, 1985, p. 165-202.
- [März92] C. MÄRZ, Spectral asymptotics for Hill's equation near the potential maximum, *Asymptotic Analysis*, Vol. **5**, 1992, p. 221-267.
- [Mar91a] A. MARTINEZ, Résonances dans l'approximation de Born Oppenheimer I, *Journal of Differ. Eq.*, 1991, p. 204-234.
- [Mar91b] A. MARTINEZ, Résonances dans l'approximation de Born Oppenheimer II. Largeur des résonances, *Commun. Math. Phys.*, Vol. **135**, 1991, p. 517-530.
- [Mes93] B. MESSIRDI, Asymptotique de Born-Oppenheimer pour la prédissociation moléculaire (cas des potentiels réguliers), *Annales de l'I.H.P., physique théorique*, Vol. **61**, 1993, p. 255-292.
- [Nak94a] S. NAKAMURA, On an example of phase space tunneling, *à paraître*, 1994.
- [Nak94b] S. NAKAMURA, Tunneling effects in momentum space and scattering, *à paraître*, 1994.
- [Pet93] P. PETTERSSON, *W.K.B expansions for systems of Schrödinger operators with crossing eigenvalues*, PhD thesis, University of Lund, 1993.
- [Sim83] B. SIMON, Semi-classical analysis of low lying eigenvalues I. Non degenerate minima : asymptotic expansions, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. **38**, 1983, p. 295-307.
- [Sj80] J. SJÖSTRAND, Problèmes aux limites microhyperboliques, *Math. Anal.*, 1980.
- [Sj82] J. SJÖSTRAND, *Singularités analytiques microlocales*, Vol. **95**, Astérisque, 1982.
- [SW89] A. SHAPER et F. WILCZEK, *Geometric phases in physics*, World Sci., 1989.

(Manuscrit reçu le 27 septembre 1994;
version révisée reçue le 11 octobre 1995.)