

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

JEAN-PIERRE MARCO

LAURENT NIEDERMAN

Sur la construction des solutions de seconde espèce dans le problème plan restreint des trois corps

Annales de l'I. H. P., section A, tome 62, n° 3 (1995), p. 211-249

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1995__62_3_211_0

© Gauthier-Villars, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur la construction des solutions de seconde espèce dans le problème plan restreint des trois corps

par

Jean-Pierre MARCO

Université Pierre-et-Marie-Curie, UFR 920,
4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France.

et

Laurent NIEDERMAN

Bureau des Longitudes,
Astronomie et Systèmes Dynamiques, JE 337,
3, rue Mazarine, 75006 Paris, France.

et Université Paris Sud, Topologie et Dynamique,
URA 1169, bâtiment 425 (mathématiques),
91405 Orsay Cedex, France.

RÉSUMÉ. – Après une régularisation de Levi-Civita, les solutions de seconde espèce apparaissent comme bifurcations d'orbites homoclines relatives à un point fixe hyperbolique. L'idée est de J. Henrard, nous améliorons sa démonstration en utilisant un simple théorème d'approximation autour du point fixe, et nous donnons dans ce contexte de manière analytique les conditions nécessaires d'existence des solutions.

Mots clés : Solutions périodiques, perturbations singulières, problème des trois corps, solutions homoclines, bifurcations.

ABSTRACT. – Levi-Civita's regularization leads to a construction of second species solutions as bifurcations of homoclinic solutions relative to a hyperbolic fixed point. This idea is Henrard's one, we improve his proof by using a simple approximation theorem in the neighbourhood of the fixed point, and we give in this context analytical necessary conditions for the existence of second species solutions.

INTRODUCTION

Dans le premier tome des *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, H. Poincaré met en évidence l'importance des solutions périodiques dans la description du problème des trois corps. Il en donne d'abord des constructions perturbatives, à partir des solutions périodiques non dégénérées du problème obtenu lorsque deux des masses s'annulent. Il choisit ainsi de perturber un problème dit « planétaire », les deux masses nulles décrivant des orbites keplériennes elliptiques sans croisement autour de la masse principale. Depuis Poincaré, les solutions périodiques ainsi construites sont dites *de première espèce*.

Dans le troisième tome [1], Poincaré s'aperçoit que d'autres solutions périodiques du problème général s'obtiennent en perturbant des solutions *avec singularités* du problème à deux masses nulles – les singularités correspondant aux collisions de ces deux particules – et envisage donc la perturbation de configurations non planétaires, avec croisement des trajectoires keplériennes. Il baptise *solutions de seconde espèce* ces nouvelles solutions périodiques.

La démonstration donnée par Poincaré de l'existence des solutions de seconde espèce est très courte, et paraît assez difficile à justifier complètement. En particulier, la géométrie du problème n'est pas éclaircie.

Nous envisageons dans cet article un problème plus simple, directement lié au problème initial de Poincaré, et étudié aussi par Hill, celui de la construction des solutions de seconde espèce dans le problème restreint. On entend ici par problème restreint l'étude du mouvement d'une particule P_3 de masse nulle située dans le plan de deux points P_2 et P_1 , de masses respectives $\mu \in]0, 1[$ et $1 - \mu$, en mouvement circulaire autour de leur centre de masse C . Cette étude est effectuée dans le repère tournant lié à P_1 et P_2 et donne lieu à un hamiltonien à deux degrés de liberté. Les solutions de seconde espèce seront ici des familles, paramétrées par μ , de solutions périodiques du problème restreint, existant pour μ petit, et convergeant lorsque μ tend vers 0 vers la réunion de deux solutions *distinctes* du problème limite – le problème de Kepler de P_3 autour de P_1 , en repère tournant.

Le problème que nous venons de décrire a donné lieu à de nombreuses études analytiques (cf. [2]-[7]). Nous suivons ici une approche géométrique introduite par J. Henrard [8], qui régularise les singularités de collision P_3, P_2 par une méthode de Levi-Civita. C'est en effet par ce procédé que le caractère « perturbations singulières » de ce problème est le plus transparent. Lorsque $\mu \neq 0$, la régularisation consiste à compactifier

localement la variété d'énergie constante par adjonction d'un cercle, les solutions singulières du problème initial étant envoyées sur les solutions intersectant ce cercle. Pour $\mu = 0$, le cercle dégénère en un point d'équilibre *hyperbolique*, de signature 2-2.

Nous montrons que ce point fixe de Levi-Civita possède une infinité de solutions homoclines, et, suivant Henrard, faisons apparaître les solutions de seconde espèce comme bifurcations de ces solutions homoclines. Plus précisément, le point de départ est la donnée de deux segments φ_s et φ_u de solutions homoclines distinctes (pour le problème de Kepler en repère tournant), et la démonstration consiste à recoller deux solutions voisines de φ_s et φ_u (dans le problème restreint) de telle manière que ce recollement soit une solution périodique. Nous décrivons en détail ce procédé.

Il faut noter que la démonstration de Henrard est basée sur l'utilisation d'un théorème de conjugaison (à la Hartman) au voisinage du point d'équilibre, difficile à utiliser correctement dans un cadre symplectique. En particulier, cette conjugaison ne conserve pas l'énergie et le procédé de raccordement de Henrard porte sur des segments de solutions *d'énergies différentes*, ce qui est incorrect. Pour éviter ce problème, nous utilisons ici un simple théorème d'approximation C^1 autour du point fixe, qui nous permet de tenir explicitement compte de la conservation de l'énergie.

Nous donnons de plus les expressions analytiques explicites des conditions d'existence des solutions de seconde espèce en termes de conditions initiales pour les orbites homoclines limites, (alors que les études précédentes de ce problème étaient seulement numériques [9]).

La section 1 donne une description des problèmes considérés et de leur régularisation. On donne dans la section 2 la définition précise des solutions de seconde espèce et on montre l'existence d'une infinité d'orbites homoclines relatives au point fixe de Levi-Civita. On décrit dans la section 3 la méthode de construction des solutions de seconde espèce à partir de ces orbites homoclines. Les conditions d'existence des solutions de seconde espèce sont données sous forme analytique dans la section 4.

1. LE PROBLÈME PLAN RESTREINT DES TROIS CORPS

Dans toute la suite, on étudie un système hamiltonien sur $T^(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Si φ est une solution du système, on appelle orbite de φ son image dans $T^*(\mathbb{C})$ et trajectoire de φ l'image de l'orbite par la projection canonique sur l'espace de configuration \mathbb{C} .*

1. 1. Description et équations du problème

Le problème plan restreint des trois corps est l'étude du mouvement d'une particule P_3 de masse nulle située dans le plan de deux points P_2 et P_1 , de masses respectives $\mu \in]0, 1[$ et $1 - \mu$, en mouvement circulaire autour de leur centre de masse C . On posera toujours $\nu = 1 - \mu$. Décrivons brièvement la mise en équations (classique) du système.

1. 1. 1. Équations dans le repère fixe

Les équations du mouvement dans le repère fixe (C, X_1, X_2) s'écrivent

$$\frac{dY}{dt} = \frac{d^2 X}{dt^2} = -\nu \frac{X + \mu e^{it}}{|X + \mu e^{it}|^3} - \mu \frac{X - \nu e^{it}}{|X - \nu e^{it}|^3} \quad (1)$$

où $X \in \mathbb{C}$ désigne la position de la particule P_3 et $Y \in \mathbb{C}$ sa vitesse.

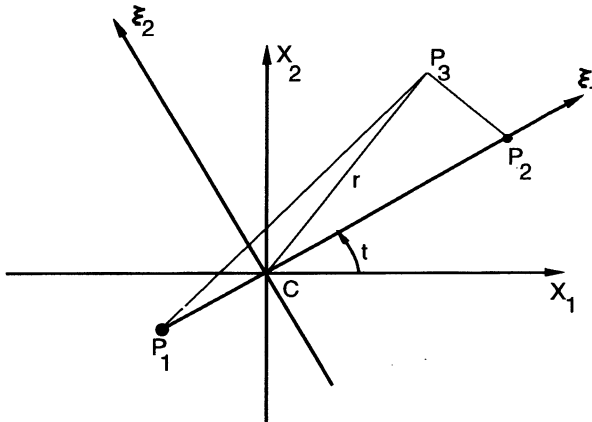


Fig. 1. – Systèmes de référence.

1. 1. 2. Équations dans le repère tournant d'origine C

Il est plus commode de travailler dans un nouveau repère d'origine C , en rotation avec les corps primaires P_1 et P_2 . Dans ce repère, les coordonnées (ξ, η) de position et de vitesse vérifient

$$X = \xi e^{it} \quad \text{et} \quad Y = \eta e^{it} \quad (2)$$

Les équations du mouvement en repère tournant s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \eta - i\xi \\ \frac{d\eta}{dt} = -i\eta - \nu \frac{\xi + \mu}{|\xi + \mu|^3} - \mu \frac{\xi - \nu}{|\xi - \nu|^3} \end{cases} \quad (3)$$

On vérifie que ce sont les équations du champ hamiltonien associé à la fonction

$$R_\mu (\xi, \eta) = |\eta|^2 + i (\eta\bar{\xi} - \bar{\eta}\xi) - \frac{2\nu}{|\xi + \mu|} - \frac{2\mu}{|\xi - \nu|} + 2\nu + \nu^2 \quad (4)$$

lorsque $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ est muni de la forme symplectique

$$\Omega = d\eta \wedge d\bar{\xi} + d\bar{\eta} \wedge d\xi \quad (5)$$

La constante dans l'hamiltonien est choisie pour simplifier l'étude des régularisations du problème.

1. 1. 3. Régions de Hill pour $\mu \neq 0$

On suppose ici μ et ν non nuls. Pour h fixée, la région de Hill d'énergie h est la projection sur le plan de configuration du sous-ensemble $R_\mu^{-1} (h)$. Elle a donc pour équation

$$|\eta - i\xi|^2 = h + |\xi|^2 + \frac{2\nu}{|\xi + \mu|} + \frac{2\mu}{|\xi - \nu|} - 2\nu - \nu^2 \geq 0$$

Les représentations des régions de Hill en référentiel tournant sont données dans la figure suivante, où les h_i sont les valeurs critiques de R_μ .

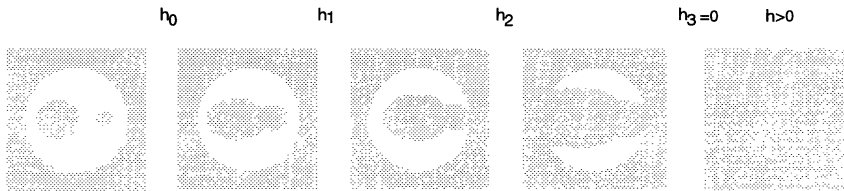


Fig. 2. – Régions de Hill.

La nature même des solutions de seconde espèce conduit à ne considérer que des énergies supérieures à la première valeur critique h_0 , rendant ainsi possibles les transitions de la particule P_3 entre P_1 et P_2 . Dans le but de simplifier l'étude, on supposera même toujours l'énergie h supérieure à la dernière valeur critique $h_3 = 0$.

1. 1. 4. Repère tournant centré en P_2

Le problème étudié dans la suite est traité par régularisation de la singularité de collision avec P_2 , on introduit donc un nouveau repère centré en P_2 . On définit les coordonnées (M, N) par

$$M = \xi - \nu, N = \eta - i\nu \quad (6)$$

et le nouvel hamiltonien s'écrit

$$H_\mu(M, N) = |N|^2 + i(\overline{M}N - M\overline{N}) - \frac{2\mu}{|M|} - \nu \left(\frac{2}{|1+M|} - 2 + (M + \overline{M}) \right) \quad (7)$$

pour la forme symplectique

$$\Omega = dM \wedge d\overline{N} + d\overline{M} \wedge dN \quad (8)$$

1.2. Le problème limite : Kepler en repère tournant

Le paramètre utilisé par la suite est μ , que l'on supposera toujours voisin de 0. Lorsque $\mu = 0$, l'hamiltonien s'écrit

$$H_0(M, N) = |N|^2 + i(\overline{M}N - M\overline{N}) - \left(\frac{2}{|1+M|} - 2 + (M + \overline{M}) \right) \quad (9)$$

C'est l'hamiltonien d'un problème de Kepler relatif au centre P_1 , dans le repère tournant centré en P_2 .

Il est cependant plus simple d'étudier ce problème dans le repère tournant centré en P_1 , le passage de l'un à l'autre s'effectue par une simple translation (6). Comme $\mu = 0$, le point P_1 est au centre d'inertie C , et on utilise les coordonnées (ξ, η) définies en 1.1.2. L'hamiltonien s'écrit

$$H_0(\xi, \eta) = |\eta|^2 + i(\eta\overline{\xi} - \overline{\eta}\xi) - \frac{2}{|\xi|} + 3 \quad (10)$$

L'hamiltonien H_0 se relie au moment cinétique et à l'énergie de P_3 dans le repère fixe centré en P_1 . On obtient respectivement :

$$\sigma(\xi, \eta) = \frac{i}{2}(\eta\overline{\xi} - \overline{\eta}\xi) \quad F_0(\xi, \eta) = |\eta|^2 - \frac{2}{|\xi|} + 3 \quad (11)$$

pour le moment et l'énergie dans le repère fixe, et donc :

$$H_0(\xi, \eta) = F_0(\xi, \eta) - 2\sigma(\xi, \eta) \quad (11')$$

Le moment cinétique fixe σ est évidemment une intégrale première de H_0 et le problème est complètement intégrable.

1.2.1. Topologie du problème

Les régions de Hill s'étudient sans difficulté, pour $h < 0$ la région d'énergie h est la réunion d'un disque centré en P_1 , de rayon < 1 (privé de l'origine), et du complémentaire dans \mathbb{C} d'un disque de rayon > 1 ; pour la

valeur critique $h = 0$ les deux régions se recollent sur le cercle de rayon 1 ; pour $h > 0$, la région est \mathbb{C}^* . Toute sous-variété d'énergie $h > 0$ est donc difféomorphe à $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{C}^*$.

1.2.2. Structure des sous-variétés d'énergie constante positive

L'expression (11') montre que h étant fixée, les solutions d'énergie h (dans le repère tournant) ont une énergie dans le repère fixe qui dépend de leur moment cinétique dans le repère fixe. Compte tenu du choix de la constante dans F_0 , on dira qu'une solution de H_0 est *elliptique* lorsque son énergie fixe (constante) F_0 est < 3 , *parabolique* lorsque $F_0 = 3$ et *hyperbolique* si $F_0 > 3$ (i.e. si la trajectoire de la solution en repère fixe est respectivement elliptique, parabolique ou hyperbolique). On dira enfin qu'une solution est *directe* si son moment cinétique fixe est positif et *rétrograde* dans le cas contraire.

Étudions maintenant les sous-variétés d'énergie constante $h > 0$, qui seront les seules à intervenir par la suite. Fixons $h > 0$ et notons $\mathcal{H} = H_0^{-1}(h)$. \mathcal{H} est la réunion de

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_+ &= \mathcal{H} \cap (F_0^{-1}([3, +\infty[)), & \mathcal{H}_0 &= \mathcal{H} \cap (F_0^{-1}(3)), \\ \mathcal{H}_- &= \mathcal{H} \cap (F_0^{-1}(]-\infty, 3])).\end{aligned}$$

La composante \mathcal{H}_+ , difféomorphe au produit de \mathbb{C}^* par le cercle \mathbb{T}^1 , est feuilletée (par le moment cinétique) en cylindres invariants et contient les orbites hyperboliques. La composante \mathcal{H}_- , contenant les orbites elliptiques et difféomorphe à $\mathbb{C}^* \times \mathbb{T}^1$, est feuilletée en tores invariants \mathbb{T}^2 (le tore de moment nul étant privé du cercle collision sur P_1 , voir plus loin) ayant pour âme commune une orbite circulaire (rétrograde). Le cylindre \mathcal{H}_0 contient les orbites paraboliques.

1.2.3. Les domaines singuliers

Le cercle des vitesses C_0 au dessus de P_2 dans la sous-variété \mathcal{H} joue un rôle particulier dans la suite : les orbites donnant naissance aux solutions de seconde espèce le rencontrent deux fois. On définit le *domaine singulier* \mathcal{D} de \mathcal{H} comme la réunion des tores et cylindres invariants qui intersectent C_0 . On se limitera en fait dans ce qui suit au *domaine singulier elliptique* $\mathcal{D}_e \subset \mathcal{D}$, formé par la réunion des tores d'orbites elliptiques qui intersectent C_0 .

1.2.4. Évolution de la structure de \mathcal{H} en fonction de h

Il nous a semblé intéressant de donner une description rapide de l'évolution en fonction de l'énergie des positions respectives de \mathcal{H}_+ , \mathcal{H}_- , \mathcal{H}_0 , C_0 , \mathcal{D} et \mathcal{D}_e . La figure 3 représente les sections de \mathcal{H} par le plan

$\theta = 0$ (où θ est l'angle polaire relatif à P_1 de la particule dans le plan de configuration). Ce plan contient le cercle C_0 (représenté en pointillés). Tous les autres objets représentés se déduisent des figures par produit direct par un cercle \mathbb{T}^1 . Le domaine singulier elliptique \mathcal{D}_e est partout représenté en gris. Enfin, il est utile d'introduire la sous-variété \mathcal{S} de moment cinétique fixe nul, contenant le cercle de collision $P_3 P_1$ et formée par les orbites d'éjection collision de P_3 sur P_1 . L'intersection du cercle de collision $P_3 P_1$ avec le plan de section est représentée par le signe \circ . La variété \mathcal{S} est soit un tore \mathbb{T}^2 (pour $0 < h < 3$), soit un cylindre $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ (pour $h > 3$).

○ Pour $h \in]0, 3 - 2\sqrt{2}[$, le domaine singulier \mathcal{D} est entièrement contenu dans \mathcal{H}_- , donc $\mathcal{D} = \mathcal{D}_e$. Les moments cinétiques limites du domaine, correspondant à la tangence des tores avec C_0 sont $\sigma_-(h) = 1 - \sqrt{h}$ et $\sigma_+(h) = 1 + \sqrt{h}$. Le domaine elliptique ne contient que des orbites directes.

○ Pour $h = 3 - 2\sqrt{2}$, le cylindre \mathcal{H}_0 est tangent en un point au cercle C_0 .

○ Pour $h \in]3 - 2\sqrt{2}, 1[$, le cylindre parabolique intersecte le cercle C_0 en deux points distincts, donc $\mathcal{D}_e \neq \mathcal{D}$ et $\mathcal{D} \cap \mathcal{H}_+ \neq \emptyset$: le domaine singulier contient des cylindres hyperboliques. Les moments cinétiques limites du domaine singulier elliptique sont $\sigma_-(h) = 1 - \sqrt{h}$ et $\sigma_+(h) = (3 - h)/2$ (ce dernier correspondant au cylindre \mathcal{H}_0).

○ Pour $h = 1$, le tore \mathcal{S} est tangent au cercle C_0 .

○ Pour $h \in]1, 3[$, le tore \mathcal{S} intersecte le cercle C_0 en deux points distincts, et \mathcal{D}_e contient à la fois des orbites directes et rétrogrades. Les moments cinétiques limites de \mathcal{D}_e sont $\sigma_-(h) = 1 - \sqrt{h}$ et $\sigma_+(h) = (3 - h)/2$.

○ Pour $h = 3$, le cylindre \mathcal{H}_0 coïncide avec \mathcal{S} , les solutions d'éjection-collision sur P_1 ont donc des trajectoires (fixes) paraboliques.

○ Pour $h \in]3, 4[$, les orbites directes ont donc disparu. Les moments cinétiques limites de \mathcal{D}_e sont $\sigma_-(h) = 1 - \sqrt{h}$ et $\sigma_+(h) = (3 - h)/2$.

○ Pour $h = 4$, l'orbite circulaire rétrograde intersecte le cercle C_0 , et $\mathcal{D}_e = \mathcal{H}_-$.

○ Pour $h \in]4, 3 + 2\sqrt{2}[$, l'orbite circulaire rétrograde a un rayon > 1 , et de nouveau $\mathcal{H}_- \neq \mathcal{D}_e$. Les moments cinétiques limites de \mathcal{D}_e sont $\sigma_-(h) = 1 - \sqrt{h}$ et $\sigma_+(h) = (3 - h)/2$.

○ Pour $h = 3 + 2\sqrt{2}$, le cylindre \mathcal{H}_0 est tangent au cercle de singularité, et pour $h \geq 3 + 2\sqrt{2}$, $\mathcal{D}_e = \emptyset$. Ceci conduira à partir de la section 2 à supposer $h \in]0, 3 + 2\sqrt{2}[$.

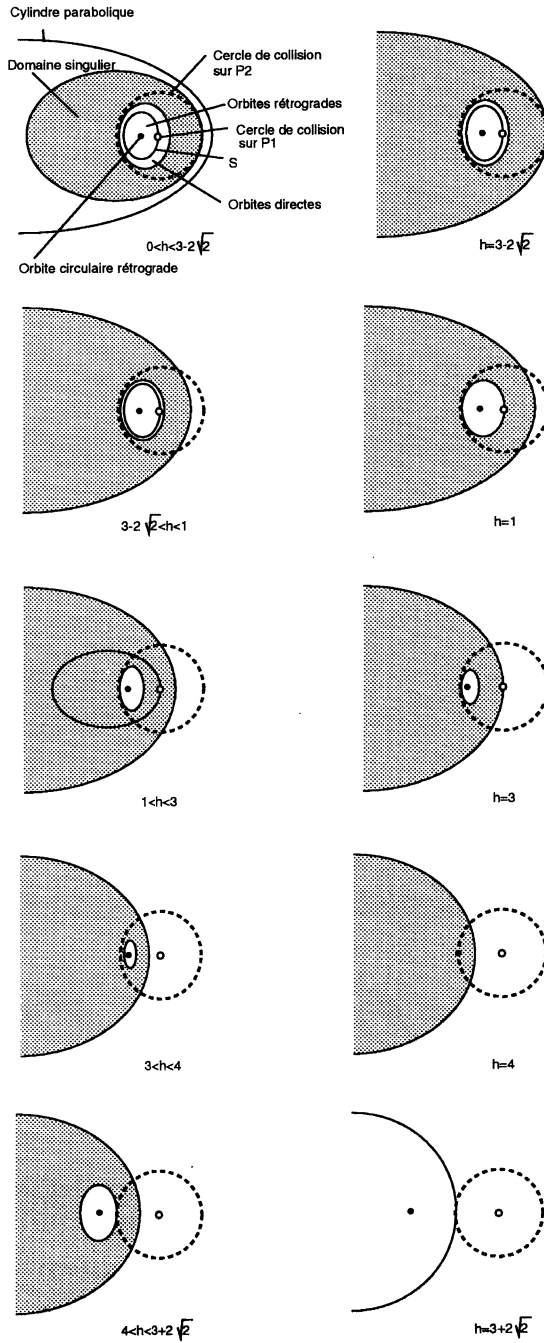


Fig. 3. – Description globale.

1.3. Régularisation du système

On revient maintenant au système hamiltonien complet H_μ défini par l'équation (7). On fixe toujours une énergie $h > 0$, et on note $\mathcal{H}_\mu = H_\mu^{-1}(h)$. On note X_{H_μ} la restriction à \mathcal{H}_μ du champ hamiltonien associé à H_μ .

Le problème des solutions de seconde espèce se traite par perturbation du cas $\mu = 0$. Bien que le système H_0 ne présente pas de singularité lorsque la particule P_3 est en P_2 , la base de l'étude est la construction d'une méthode de régularisation gardant un sens pour la valeur $\mu = 0$.

1.3.1. Régularisation de Levi-Civita à énergie fixée

La régularisation de la collision avec P_2 s'obtient au moyen d'une application ρ de Levi-Civita, de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, définie par

$$\rho(z, w) = \left(\frac{z^2}{h}, \frac{\sqrt{hw}}{\bar{z}} \right) \quad (12)$$

qui vérifie $\rho^*(\Omega) = \frac{2}{\sqrt{h}}\Omega$. L'hamiltonien transformé

$$L_\mu = \frac{|z|^2}{h} (H_\mu - h) \circ \rho \quad (13)$$

possède un unique prolongement analytique à \mathbb{C}^2 , qui a pour expression

$$L_\mu(z, w) = |w|^2 - |z|^2 - 2\mu + i \frac{|z|^2}{h^{3/2}} (\bar{z}w - z\bar{w}) - \frac{\nu}{h^3} f(z) \quad (14)$$

avec

$$f(z) = -|z|^6 + \frac{3}{4}|z|^2(z^2 + \bar{z}^2)^2 + O_8(z) \quad (15)$$

Notons C_μ l'intersection avec $\mathcal{L}_\mu = L_\mu^{-1}(0)$ du plan $z = 0$, i.e. le cercle correspondant à la collision $P_2 P_3$. La restriction de ρ au complémentaire $V_\mu = \mathcal{L}_\mu \setminus C_\mu$ est un revêtement à deux feuillets sur \mathcal{H}_μ , et l'image de ρ de la restriction Y_μ à V_μ du champ hamiltonien X_{L_μ} coïncide, au facteur multiplicatif $\xi(z, w) = |z|^2/h^{3/2}$ près, avec la restriction à la variété d'énergie constante \mathcal{H}_μ de X_{H_μ} (pour plus de détails, on pourra consulter [10] ou [11]). On dira simplement que $(\mathcal{L}_\mu, X_{L_\mu})$ est une *régularisation* de $(\mathcal{H}_\mu, X_{H_\mu})$.

1.3.2. Étude locale du point fixe

Le champ hamiltonien X_{L_μ} associé à L_μ possède un point fixe hyperbolique à l'origine, de partie linéaire

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \bar{w}} = w \\ \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \bar{z}} = z \end{cases} \quad (16)$$

Les sous-espaces stable E_s et instable E_u sont donc de dimension 2 et ont pour équations $w = -z$ et $w = z$ respectivement.

Dans un voisinage de l'origine, la sous-variété d'énergie nulle \mathcal{L}_μ de L_μ a pour équation

$$|w|^2 - |z|^2 = 2\mu + O_6(|z|, |w|) \quad (17)$$

Lorsque $\mu \neq 0$, l'intersection de \mathcal{L}_μ avec la bande B de \mathbb{C}^2 d'équation $|z|^2 \leq \alpha$ (où $\alpha > 0$ est petit) est un tore plein fermé d'âme C_μ . Lorsque $\mu \rightarrow 0$, le cercle C_μ converge vers l'origine, et lorsque $\mu = 0$ le sous-ensemble $\mathcal{L}_0 \cap B$ est homéomorphe à un cône de sommet à l'origine et de base le tore de dimension 2 d'équation $|z|^2 = |w|^2 = \alpha$. \mathcal{L}_0 n'est donc plus une sous-variété de $T^*\mathbb{C}$.

A un revêtement à deux feuilletés près, la régularisation précédente peut être vue dans le cas $\mu > 0$ comme une compactification de la variété \mathcal{H}_μ par adjonction d'un cercle C_μ , telle que (après changement de paramétrage ξ) l'image du champ initial se prolonge analytiquement à la variété obtenue, en un champ transverse à C_μ .

Le cas limite $\mu = 0$ est différent. Le cercle C_0 des vitesses au-dessus du point P_2 , initialement transverse au champ, est tout entier envoyé par ρ sur le point fixe O du système de Levi-Civita. La dynamique du système est donc modifiée, le cylindre obtenu par transport de C_0 par le flot du problème de Kepler et envoyé par ρ sur la réunion des variétés stable et instable du point fixe O . L'image d'une orbite de ce cylindre possède donc O comme α ou ω -limite, ce qui est rendu possible par la singularité à l'origine du changement de paramétrage temporel (fonction ξ). Le champ initial est donc *singularisé* lorsque $\mu = 0$.

On peut remarquer enfin que le Hamiltonien régularisé $L_\mu(z, w)$ diffère de celui que Conley étudie dans sa thèse [12], qui correspond ici au cas $h < 0$ (la particule est piégée dans un voisinage du corps P_2 , et l'influence de P_1 est vue comme une perturbation). Dans ce cas, l'application ρ correspondante est donnée par

$$\rho(z, w) = \left(\frac{z^2}{h}, \frac{\sqrt{-\bar{h}w}}{\bar{z}} \right)$$

l'hamiltonien s'écrit

$$L'_\mu(z, w) = |w|^2 + |z|^2 - 2\mu + \dots$$

et il donne lieu à un point fixe *elliptique* (voir aussi [11]).

2. SOLUTIONS HOMOCLINES ET SOLUTIONS DE SECONDE ESPÈCE

2.1. Formulation du problème

On fixe une énergie h qui garantit l'existence d'un domaine singulier elliptique, soit $h \in]0, 3 + 2\sqrt{2}[$ (cf. 1. 2.). On fera les conventions suivantes : pour $\mu > 0$, on notera \mathcal{P}_μ le système $(\mathcal{H}_\mu, X_{H_\mu})$, et \mathcal{P}_0 le système (singulier) obtenu par restriction de (\mathcal{H}_0, X_{H_0}) au complémentaire dans \mathcal{H}_0 du cercle des vitesses au-dessus de P_2 . Pour $\mu \geq 0$, on notera d'autre part \mathcal{Q}_μ le système régularisé $(\mathcal{L}_\mu, X_{L_\mu})$.

2.1.1. Solutions homoclines limites

On considère donc une énergie $h \in]0, 3 + 2\sqrt{2}[$, et deux moments cinétiques σ_u et σ_s dans l'intervalle $]\sigma_-(h), \sigma_+(h)[$ correspondant au domaine singulier elliptique \mathcal{D} pour cette énergie. On note φ_u et φ_s deux solutions du problème \mathcal{P}_0 , de moments respectifs σ_u et σ_s , chacune étant positivement et négativement asymptote au cercle de singularité au-dessus de P_2 . On suppose de plus que leurs intervalles de définition sont consécutifs, i.e. de la forme $\text{Dom}(\varphi_s) =]-t_c, t_c[$ et $\text{Dom}(\varphi_u) =]t_c, t_c + l[$. Dans le plan de configuration, leurs trajectoires sont donc deux arcs d'ellipses (vues en repère tournant), d'origines et d'extrémités au point P_2 . La figure 4 donne l'exemple de deux trajectoires doublement singulières, issues de la même trajectoire elliptique vue dans le repère tournant. L'arc intérieur (de diamètre minimal) sera repris comme exemple dans la figure 5 (pour d'autres exemples, voir [13]).

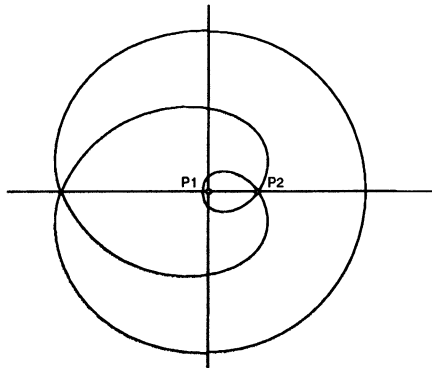


Fig. 4. – Exemple de trajectoires doublement singulières.

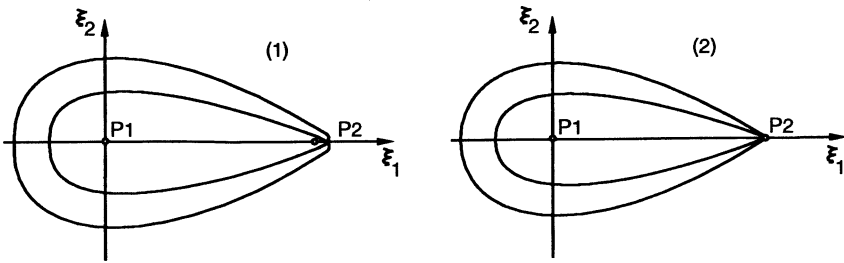


Fig. 5. – Les arcs φ_s et φ_u (2) et une solution de seconde espèce (1).

Dans le problème régularisé \mathcal{Q}_0 , les (quatre) solutions correspondant à φ_u et φ_s sont donc des solutions homoclines relatives au point fixe de Levi-Civita.

2.1.2. Famille de solutions de seconde espèce

On note φ la fonction réunion de φ_s et φ_u , i.e. la fonction définie sur $\text{Dom}(\varphi_s) \cup \text{Dom}(\varphi_u)$ dont la restriction à $\text{Dom}(\varphi_s)$ (resp. $\text{Dom}(\varphi_u)$) est φ_s (resp. φ_u). On appelle classiquement famille de solutions de seconde espèce associée à φ_u et φ_s une famille (φ_μ) , définie pour $\mu > 0$ et voisin de 0, de fonctions périodiques solutions pour chaque μ du problème \mathcal{P}_μ , qui converge vers φ sur $\text{Dom}(\varphi_s) \cup \text{Dom}(\varphi_u)$ lorsque $\mu \rightarrow 0$. S'il existe une telle famille, les solutions limites φ_u et φ_s sont dites génératrices.

La traduction pour le problème \mathcal{Q}_μ est immédiate, les deux familles (ψ_μ^\pm) de solutions correspondantes dans le revêtement convergent chacune pour $\mu \rightarrow 0$ vers la réunion de deux solutions homoclines distinctes relatives au point fixe O . Il faut noter que ces solutions (ψ_μ^\pm) , correspondant à des solutions périodiques (et donc non singulières) du problème restreint, ne rencontrent pas le cercle de singularité C_μ . Notre travail portant essentiellement sur le système régularisé \mathcal{Q}_μ , il sera commode de généraliser un peu la définition précédente des solutions de seconde espèce en prenant en compte les (φ_μ) possédant éventuellement des singularités de collision $P_2 P_3$, i.e. correspondant précisément aux solutions (ψ_μ^\pm) rencontrant C_μ . Nous nous limiterons donc à la recherche des familles (ψ_μ^\pm) , sans précision supplémentaire.

Toute la suite de ce travail est consacrée à la détermination des conditions analytiques pour que des solutions limites φ_u et φ_s soient génératrices (au sens généralisé précédent). En particulier, notre résultat principal est le théorème de densité suivant.

THÉORÈME 1. – Soient $\sigma_1 < \sigma_2$ deux moments cinétiques dans l'intervalle $]\sigma_-, \sigma_+[$. Pour tout $\eta > 0$, il existe des solutions génératrices φ_u et φ_s

du problème \mathcal{P}_0 , de moments cinétiques respectifs m_1 et m_2 vérifiant $|m_1 - \sigma_1| < \eta$ et $|m_2 - \sigma_2| < \eta$.

2.2. Existence et densité des solutions homoclines

Nous montrons dans ce paragraphe l'existence, dans le cas $\mu = 0$ et pour une énergie $h \in]0, 3 + 2\sqrt{2}[$ fixée, d'une infinité d'orbites homoclines limites *symétriques* (dans un sens précis) dans le système \mathcal{Q}_0 , ainsi que la densité des tores correspondants dans le domaine singulier de la sous-variété d'énergie h .

2.2.1. Ellipses à double collision sur P_2

L'idée est de se placer dans le repère fixe et de déterminer les solutions (elliptiques) de P_3 présentant des collisions consécutives avec P_2 . Dans le repère tournant, les trajectoires associées présentent une auto-intersection au point fixe P_2 , et on voit facilement que les arcs situés entre deux passages en P_2 se relèvent en orbites homoclines relatives au point fixe de Levi-Civita.

Montrons d'abord l'existence de certaines solutions à collisions consécutives avec P_2 , d'après une étude de Hénon [14] et Bruno [15], [13]. On travaille donc ici dans le repère fixe, sans fixer l'énergie pour commencer. Le problème est de trouver une solution keplerienne elliptique décrite par P_3 autour d'un corps P_1 (de masse 1), rencontrant au moins deux fois un point P_2 en orbite circulaire de rayon 1 autour de P_1 avec une vitesse angulaire unité.

Il suffit en fait de connaître le demi grand axe a et l'excentricité e de la solution, ceci détermine en effet la famille des solutions situées sur un même tore (de moment cinétique constant) dans le problème fixe. A ce tore correspond dans le problème tournant son image par le changement de paramètre (2), qui est aussi un tore invariant du problème, évidemment situé dans le domaine singulier. Les arcs de solution cherchés sont ceux qui connectent les trous dans ce tore (*i.e.* les intersections du tore avec le cercle de singularité de C_0).

La première remarque porte sur la période T de la solution. Lorsque celle-ci est dans un rapport rationnel avec celle de P_2 (2π), les particules P_2 et P_3 subissent une infinité de collisions, toutes situées au même point dans le repère fixe. Sur le tore correspondant dans le problème tournant, les solutions sont périodiques et les deux arcs (éventuellement confondus) issus des deux trous reviennent donc à leur origine. Ces solutions ne sont pas symétriques en général, et n'interviendront pas dans la suite. On se limite donc au cas où le rapport $T/2\pi$ est *irrationnel*.

On suppose donc maintenant que les points C_- et C_+ du repère fixe où se produisent deux collisions consécutives sont distincts. De manière équivalente, l'arc correspondant dans le problème tournant connecte maintenant les deux trous du tore. Les seuls paramètres recherchés étant a et e , on peut centrer le référentiel sur la solution considérée. L'origine des temps sera choisie au milieu de l'intervalle entre les deux collisions, de sorte qu'elles se produisent aux instants $-t_c$ et $+t_c$. Les points C_- et C_+ sont sur l'intersection de l'ellipse décrite par P_3 (de foyer P_1) avec la trajectoire circulaire de P_2 , ils sont symétriques par rapport au grand axe de l'ellipse, qui se confond donc avec la bissectrice de $(C_-P_1C_+)$. On définit ensuite le repère (P_1, X_1, X_2) : (P_1, X_1) est le grand axe de l'orbite de P_3 dirigé vers son apocentre et (P_1, X_2) est orthogonal à (P_1, X_1) et tel que P_2 décrive une orbite directe dans (P_1, X_1, X_2) .

Puisque la particule P_2 a une vitesse angulaire constante, elle se trouve en $t = 0$ sur l'axe (P_1, X_1) , et par symétrie la particule P_3 se trouve aussi sur (P_1, X_1) donc est à l'apocentre ou au péricentre.

On va se borner ici à étudier les solutions génératrices correspondant au cas où la trajectoire de P_3 est décrite dans le sens direct et part du péricentre en $t = 0$. Ceci suffira pour démontrer les résultats de densité énoncés plus haut.

Si E désigne l'anomalie excentrique de P_3 dans le référentiel fixe (P_1, X_1, X_2) , comptée à partir de sa position à $t = 0$, la trajectoire de P_3 a pour équation

$$\begin{cases} X_1 = a(e - \cos E) \\ X_2 = -a\sqrt{1 - e^2} \sin E \end{cases} \tag{18}$$

et le temps de parcours est donné par

$$t = a^{3/2} (E - e \sin(E)) \tag{19}$$

Les équations traduisant que le point P_3 est en C_- , à $t = t_0$ et pour une valeur de l'anomalie excentrique $E = E_0 > 0$ s'en déduisent directement

$$\begin{cases} \cos(t_0) = a(e - \cos(E_0)) \\ \sin(t_0) = -a\sqrt{1 - e^2} \sin(E_0) \\ t_0 = a^{3/2} (E_0 - e \sin(E_0)) \end{cases} \tag{20}$$

C'est un système d'équations en (E_0, a, e) . On obtient par symétrie les mêmes équations pour le choc en $t = -t_0$. Les deux premières équations conduisent à

$$\cos(E_0) = \frac{a-1}{ae} \quad \cos(t_0) = \frac{1-a(1-e^2)}{e} \quad (21)$$

Notons \cos^{-1} la détermination de l'angle appartenant à $[0, \pi]$. La troisième équation s'écrit alors

$$2\pi(ka^{3/2} - m) + a^{3/2} \left[\cos^{-1} \left(\frac{a-1}{ae} \right) - \sqrt{e^2 - \left(\frac{a-1}{a} \right)^2} \right] \\ + \cos^{-1} \left[\frac{1-a(1-e^2)}{e} \right] = 0$$

où k et m sont des entiers quelconques.

2.2.2. Premier résultat de densité

Pour une énergie $h \in]0, 3 + 2\sqrt{2}[$ (ce qui garantit l'existence d'un domaine singulier elliptique \mathcal{D}_e), les tores du problème \mathcal{P}_0 contenant des arcs d'orbites symétriques à double collision forment un sous-ensemble dense de \mathcal{D}_e .

◁ Le point P_3 a pour période $2\pi^{3/2}$ et P_2 a pour période 2π , on a donc supposé $a^{3/2}$ irrationnel. L'ensemble $(ka^{3/2} - m)_{k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}}$ est donc dense dans \mathbb{R} . Introduisons la fonction

$$G(a, e) = a^{3/2} \left[\cos^{-1} \left(\frac{a-1}{ae} \right) - \sqrt{e^2 - \left(\frac{a-1}{a} \right)^2} \right] \\ + \cos^{-1} \left[\frac{1-a(1-e^2)}{e} \right]$$

Ce qui précède montre que le tore de paramètres (a, e) contient une orbite à double collision si et seulement si l'égalité $G(a, e) = 2\pi(ka^{3/2} - m)$ est vérifiée pour des entiers k et m quelconques.

Raisonnons maintenant à énergie h fixée. Soit (a, e) un couple de paramètres correspondant à h , c'est-à-dire vérifiant

$$h = -\frac{1}{a} + 2\sqrt{a(1-e^2)}$$

Le problème est de trouver des paramètres (a', e') arbitrairement voisins de (a, e) , correspondant à la même énergie h , tels que $G(a', e') = 2\pi(ka^{3/2} - m)$.

Fixons $\delta > 0$. On peut trouver $k, m \in \mathbb{Z}$ tels que $|G(a, e) - 2\pi(ka^{3/2} - m)| < \delta$. On peut de plus supposer $|k|$ arbitrairement grand. On vérifie alors facilement que l'application

$$\psi : (a', e') \mapsto (h(a', e'), G(a', e') - 2\pi ka^{3/2})$$

est un difféomorphisme local d'un voisinage \mathcal{O} de (a, e) sur un voisinage \mathcal{U} de $\psi(a, e)$, et que les valeurs de δ et $|k|$ peuvent être choisies de sorte que le voisinage \mathcal{U} contienne le point $(h, 2\pi m)$. L'image réciproque $(a', e') = \psi^{-1}(h, 2\pi m)$ répond au problème \triangleright

COROLLAIRE. – *Pour une énergie $h \in]0, 3 + 2\sqrt{2}[$, le point fixe du problème \mathcal{Q}_0 possède une infinité d'orbites homoclines symétriques.*

\triangleleft En effet, chaque solution à double collision se relève par l'application de Levi-Civita en deux solutions homoclines du problème \mathcal{Q}_0 . Ce dernier en possède donc une infinité, toutes contenues dans la sous-variété \mathcal{L}_0 \triangleright

3. LA MÉTHODE DE CONSTRUCTION DES SOLUTIONS DE SECONDE ESPÈCE

3.1. Définitions et notations

- Dans toute la suite, p est la projection canonique de $T^*(\mathbb{C})$ sur \mathbb{C} . On conserve les hypothèses et notations du 2, en particulier $h \in]0, 3 + 2\sqrt{2}[$ est toujours une énergie fixée.

- Pour $\mu \geq 0$, on note Φ_μ le flot du système \mathcal{P}_μ et Ψ_μ celui du système régularisé \mathcal{Q}_μ défini en 2.1. Pour $u \in T^*(\mathbb{C})$ donné, et pour un sous-ensemble Δ de \mathbb{R} , on note $\Phi_\mu(\Delta, u)$ l'ensemble des $\Phi_\mu(t, u)$ pour les $t \in \Delta$ tels que cette expression soit définie.

- Le Hamiltonien du problème \mathcal{Q}_μ s'écrit

$$L_\mu(z, w) = |w|^2 - |z|^2 - 2\mu + i \frac{|z|^2}{h^{\frac{3}{2}}} (\bar{z}w - z\bar{w}) - \frac{\nu}{h^3} f(z) \quad (22)$$

avec

$$f(z) = -|z|^6 + \frac{3}{4}|z|^2(z^2 + \bar{z}^2)^2 + O_8(z)$$

- On note S la symétrie de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ définie par $S(M, N) = (\bar{M}, -\bar{N})$. Pour tout μ , l'hamiltonien H_μ est invariant par S . Puisque $S^*(\Omega) = -\Omega$, pour toute solution φ de \mathcal{P}_μ , l'application $\tilde{\varphi}$ définie par $\tilde{\varphi}(t) = S(\varphi(-t))$ est encore une solution de \mathcal{P}_μ .

• Une solution φ de \mathcal{P}_μ sera dite *symétrique* si son orbite est invariante par S .

• Pour $\mu \geq 0$, on pose $\mathcal{I}_\mu = \{(M, N) \in \mathcal{H}_\mu, \text{Im}(M) = \text{Re}(N) = 0\}$. \mathcal{I}_μ est donc une sous-variété de dimension 1 de $\mathcal{H}_\mu = H_\mu^{-1}(h)$, invariante par S , à deux composantes connexes.

• Une solution φ de \mathcal{P}_μ sera dite à *croisement orthogonal* lorsque son orbite rencontre \mathcal{I}_μ , sa trajectoire est en effet orthogonale à l'axe OM_1 au point correspondant.

3.2. Raccordement et construction des solutions de seconde espèce

Toute la construction qui va suivre est basée sur le lemme suivant, dû à Poincaré, de démonstration immédiate à partir de la propriété de symétrie de H_μ .

LEMME. – Symétrie et périodicité. *Soit φ une solution de \mathcal{P}_μ , pour laquelle il existe deux instants t_1 et t_2 dans $\text{Dom}(\varphi)$ tels que $\varphi(t_1) \in \mathcal{I}_\mu$ et $\varphi(t_2) \in \mathcal{I}_\mu$, avec $t_1 \neq t_2$. Alors φ est périodique, de période $T = 2(t_2 - t_1)$, et symétrique, plus précisément $S(\varphi(T - t)) = \varphi(t), \forall t \in \mathbb{R}$.*

On peut maintenant décrire la méthode de construction des solutions de seconde espèce. Comme il a été précisé dans l'introduction, notre démonstration diffère de celle de Henrard par l'utilisation d'approximations C^1 autour du point fixe, au lieu du théorème de conjugaison (du type Hartman) de Henrard, incorrectement utilisé sous forme symplectique.

Le point de départ est la donnée de deux arcs de solutions elliptiques φ_s et φ_u d'énergie h du problème \mathcal{P}_0 , qui vérifient $\text{Dom}(\varphi_s) =] - tc, tc[$, $\text{Dom}(\varphi_u) =]tc, tc + l[$, et avec le prolongement évident des solutions) $p \circ \varphi_s(\pm tc) = p \circ \varphi_u(tc) = p \circ \varphi_u(tc + l) = P_2$. Leurs trajectoires dans un cas très simple sont données figure 5 (2), pour d'autres représentations, voir [13]. L'étude du paragraphe précédent montre que ces solutions sont symétriques, plus précisément que $\varphi_s(0) \in \mathcal{I}_0$, et $\varphi_u(\tau) \in \mathcal{I}_0$, où $tc + l/2$. On notera $A_s = \varphi_s(0)$, $A_u = \varphi_u(\tau)$, et $n_s = p \circ \varphi_s(0)$, $n_u = p \circ \varphi_u(\tau)$ les points d'intersection (orthogonale) des trajectoires de φ_s et φ_u avec l'axe OM_1 .

On suppose maintenant $\mu > 0$ et petit. On note $A_s(\mu)$ et $A_u(\mu)$ les points de \mathcal{I}_μ qui vérifient $p(A_s(\mu)) = n_s$ et $p(A_u(\mu)) = n_u$ et dont les limites pour $\mu \rightarrow 0$ sont A_s et A_u (cette dernière condition portant sur le choix des composantes de $\mathcal{I}(\mu)$ contenant $A_{s,u}(\mu)$). La variété \mathcal{I}_μ étant de dimension 1, on peut définir deux familles $I_s(\mu)$ et $I_u(\mu)$ de voisinages des points $A_s(\mu)$ et $A_u(\mu)$ dans \mathcal{I}_μ , difféomorphes à des

intervalles, et dont la taille sera précisée par la suite. Pour $\varepsilon > 0$ donné, que l'on précisera dans la suite, on définit les sous-variétés de dimension 2 de \mathcal{H}_μ suivantes :

$$V_s(\mu) = \Phi_\mu([0, t_c + \varepsilon[, I_s(\mu)), \quad V_u(\mu) = \Phi_\mu(] - \tau - \varepsilon, 0], I_u(\mu))$$

elles s'obtiennent simplement en traduisant les arcs $I_s(\mu)$ et $I_u(\mu)$ par le flot Φ_μ .

Le lemme de périodicité précédent entraîne qu'une condition suffisante pour que les solutions φ_s et φ_u soient génératrices est que les variétés $V_s(\mu)$ et $V_u(\mu)$ aient une intersection non vide pour tout $\mu > 0$, l'orbite associée à un point de cette intersection étant périodique.

On se limitera ici à rechercher les solutions initiales φ_s et φ_u pour lesquelles les variétés $V_s(\mu)$ et $V_u(\mu)$ ont pour $\mu \neq 0$ une intersection transverse dans \mathcal{H}_μ . La difficulté, traduisant la nature singulière de la perturbation provient du fait que cette intersection disparaît pour $\mu = 0$. L'idée de la démonstration est assez classique, on raisonne au voisinage de l'origine O dans les systèmes régularisés \mathcal{Q}_μ et on construit des blocs isolants (cf. [16]) dans \mathbb{C}^2 pour O (ces blocs seront les boules \mathcal{B}_ε de centre O et de rayon ε assez petit pour une norme adaptée au problème). On note d'autre part $W_s(\mu)$ et $W_u(\mu)$ des relèvements (convenablement choisis) de $V_s(\mu)$ et $V_u(\mu)$ par l'application de Levi-Civita. Pour $\mu = 0$, on détermine les intersections (analytiques) des sous-variétés $W_s(0)$ et $W_u(0)$ avec respectivement l'ensemble d'entrée $\partial^+\mathcal{B}_\varepsilon$ et l'ensemble de sortie $\partial^-\mathcal{B}_\varepsilon$ du bloc. Ces intersections dépendent analytiquement de μ , on en déduit leurs approximations au premier ordre pour $\mu \neq 0$. D'autre part, pour ε assez petit, les applications de transition $f_{\mu\varepsilon}$ relatives aux blocs sont C^1 -approchées de manière *uniforme* (en μ) par leur linéarisée (*indépendante* de μ) à l'origine. Il est donc possible d'en déduire une condition de transversalité de $[f_{\mu\varepsilon}(W_s(\mu) \cap \partial^+\mathcal{B}_\varepsilon)] \cap (W_u(\mu) \cap \partial^-\mathcal{B}_\varepsilon)$, donc une condition d'intersection transverse des variétés $W_s(\mu)$ et $W_u(\mu)$ pour $\mu \neq 0$. On en déduit l'intersection transverse de $V_s(\mu)$ et $V_u(\mu)$, sous la même condition, ainsi que la propriété de continuité demandée dans la définition des solutions de seconde espèce.

3.3. Analyse locale au voisinage de l'origine

A partir de ce paragraphe, on suppose données les deux solutions elliptiques φ_s et φ_u du problème \mathcal{P}_0 , et on conserve les notations précédentes. La première étape est la diagonalisation de la partie linéaire du hamiltonien L_μ , suivant une base adaptée aux données.

3.3.1. Choix du système de coordonnées

Comme précédemment, les solutions φ_s et φ_u sont prolongées par continuité aux limites de leurs domaines de définition. On notera dans toute la suite $\varphi_s(t_c) = (0, N_s)$ et $\varphi_u(t_c) = (0, N_u)$ dans les coordonnées (6) du repère centré en P_2 . Il résulte directement de la forme du système que

$$\begin{aligned}\varphi_s(t) &= (N_s(t - t_c) + O_2(t - t_c), N_s + O_1(t - t_c)) \\ \varphi_u(t) &= (N_u(t - t_c) + O_2(t - t_c), N_u + O_1(t - t_c))\end{aligned}\quad (23)$$

Les points $(0, N_s)$ et $(0, N_u)$ sont dans \mathcal{H}_0 , donc $|N_s|^2 = |N_u|^2 = h$. On notera r_s et r_u des déterminations (dont le choix sera précisé dans la suite) des racines carrées de N_s et N_u . L'application ρ de Levi-Civita est un revêtement à deux feuillets, chaque solution du système \mathcal{P}_μ se relève en deux solutions de \mathcal{Q}_μ se déduisant l'une de l'autre par la symétrie $z \mapsto -z$. On notera $\gamma_s = (z_s, w_s)$ et $\gamma_u = (z_u, w_u)$ les fonctions qui vérifient

$$\rho \circ \gamma_s = \varphi_s, \quad \rho \circ \gamma_u = \varphi_u$$

et dont les développements au voisinage de t_c sont reliés au choix des racines r_s et r_u par

$$\begin{aligned}z_s(t) &= v_s \sqrt{t_c - t} + O_{3/2}(t_c - t), \\ w_s(t) &= -v_s \sqrt{t_c - t} + O_{3/2}(t_c - t)\end{aligned}\quad (24)$$

$$\begin{aligned}z_u(t) &= v_u \sqrt{t - t_c} + O_{3/2}(t - t_c), \\ w_u(t) &= v_u \sqrt{t - t_c} + O_{3/2}(t - t_c)\end{aligned}\quad (24')$$

où l'on a posé

$$v_s = i\sqrt{h}r_s \quad \text{et} \quad v_u = \sqrt{h}r_u \quad (24'')$$

Les fonctions γ diffèrent donc des solutions du système \mathcal{Q}_0 par le choix d'une détermination de la racine et par leur paramétrage temporel, mais leurs orbites sont identiques.

D'autre part, si (e_1, e_2, f_1, f_2) sont des complexes vérifiant les conditions

$$(e_1|f_1) = (e_2|f_2) \neq 0, \quad (e_1|f_2) = (e_2|f_1) = 0 \quad (25)$$

(où $(z_1|z_2) = \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$), et tels que le couple (e_1, f_1) soit une \mathbb{R} base de \mathbb{C} , les vecteurs

$$\begin{aligned}S_1 &= (e_1, -e_1), & S_2 &= (e_2, -e_2), \\ U_1 &= (f_1, f_1), & U_2 &= (f_2, f_2)\end{aligned}\quad (26)$$

forment une \mathbb{R} base de \mathbb{C}^2 , symplectique au facteur $-2(e_1|f_1)$ près.

Notons $\alpha = (e_1 | f_1)$. Si $(\tilde{s}, \tilde{u}) = (\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ sont les coordonnées de \mathbb{C}^2 définies par cette base, le Hamiltonien l_μ transformé de L_μ s'écrit

$$l_\mu(\tilde{s}, \tilde{u}) = 2(\tilde{s}_1 \tilde{u}_1 + \tilde{s}_2 \tilde{u}_2) + \frac{\mu}{\alpha} + \left(\sum_{1 \leq i, j \leq 2} \tilde{s}_i \tilde{u}_j \right) O_2(\tilde{s}, \tilde{u}) + O_6(\tilde{s}, \tilde{u}) \quad (27)$$

(avec $\tilde{s} = \tilde{s}_1 e_1 + \tilde{s}_2 e_2$ et $\tilde{u} = \tilde{u}_1 f_1 + \tilde{u}_2 f_2$). Pour simplifier les approximations ultérieures, on choisit

$$e_1 = v_s, \quad f_1 = v_u, \quad e_2 = iv_u, \quad f_2 = iv_s \quad (28)$$

et on suppose que les conditions (25) sont vérifiées, en particulier les vitesses v_s et v_u devront être choisies non perpendiculaires (ce qui équivaut à N_s et N_u non colinéaires).

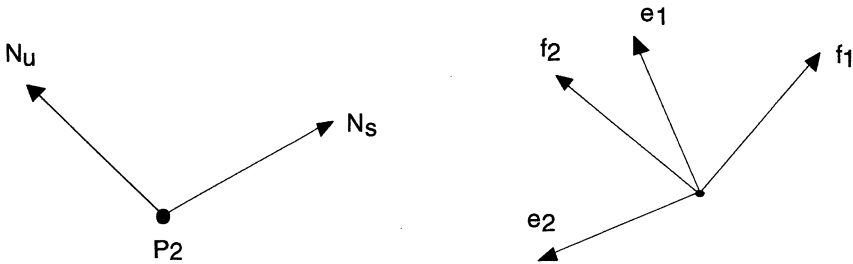


Fig. 6. – Exemple de vitesses admissibles.

Il est d'autre part facile (par exemple voir [17], § 3.2, p. 182-186) d'introduire de nouvelles coordonnées $(s, u) = (\tilde{s} + O_5(\tilde{s}, \tilde{u}), \tilde{u} + O_5(\tilde{s}, \tilde{u}))$ dans un voisinage de l'origine pour lesquelles la sous-variété stable (resp. instable) de O dans le problème \mathcal{Q}_0 a pour équation $u = 0$ (resp. $s = 0$), et telles que les orbites de φ_s et φ_u soient portées respectivement par l'axe Os_1 l'axe Ou_1 . L'hamiltonien L_μ exprimé dans ces coordonnées s'écrit donc

$$l_\mu(s, u) = 2(s_1 u_1 + s_2 u_2) + \frac{\mu}{\alpha} + \left(\sum_{1 \leq i, j \leq 2} s_i u_j \right) O_2(s, u) + O_6(s, u) \quad (27')$$

(avec $s = s_1 e_1 + s_2 e_2$ et $u = u_1 f_1 + u_2 f_2$).

On notera cependant que ce changement n'a aucune raison d'être symplectique, ce qui n'aura pas d'importance dans la suite puisqu'on n'utilise que l'invariance de $l_\mu(s, u)$ le long des solutions. Il est aussi clair que le changement précédent ne perturbe pas la forme des équations linéarisées. Signalons enfin que les théorèmes de redressement des variétés invariantes valables dans un cadre symplectique ([18], chap. 8) s'appliquent dans notre cas, mais sans apporter de simplification notable.

3.3.2. Blocs isolants

On renvoie à [16] et [17] pour les notions relatives aux blocs isolants. nous n'utilisons ici que la *terminologie* de [16], il suffirait d'ailleurs de parler de sections. On définit la norme $\|(s, u)\| = \text{Sup}(|s|, |u|)$, et on note $\mathcal{B}_\varepsilon = \mathcal{B}(\varepsilon h^{3/4})$ la boule de centre 0 et de rayon $\varepsilon h^{3/4}$ dans \mathbb{C}^2 (le facteur $h^{3/4}$ intervient pour simplifier les calculs ultérieurs). Son bord est la réunion des ensembles $C_s(\varepsilon)$ et $C_u(\varepsilon)$ définis par

$$C_s(\varepsilon) = \{|s| = \varepsilon h^{3/4}; |u| \leq \varepsilon h^{3/4}\}, \quad C_u(\varepsilon) = \{|s| \leq \varepsilon h^{3/4}; |u| = \varepsilon h^{3/4}\}.$$

On vérifie facilement que pour ε assez petit, $\mathcal{B}(\varepsilon h^{3/4})$ est un bloc isolant (non différentiable) pour le champ linéarisé $X_{\tilde{L}_\mu}$ correspondant au champ X_{L_μ} défini par l'hamiltonien L_μ . \mathcal{C} est donc aussi un bloc isolant pour X_{L_μ} . L'ensemble d'entrée $\partial^+ \mathcal{B}(\varepsilon h^{3/4})$ est $C_s(\varepsilon)$ et l'ensemble de sortie $\partial^- \mathcal{B}(\varepsilon h^{3/4})$ est $C_u(\varepsilon)$. Le champ X_{L_μ} est transverse à $C_s(\varepsilon)$ et à $C_u(\varepsilon)$ en tout point de leurs intérieurs.

3.3.3. Choix des coordonnées sur $C_s(\varepsilon)$ et $C_u(\varepsilon)$.

On définit les coordonnées (x_s, y_s, θ_s) d'un point (s, u) dans $C_s(\varepsilon)$ par les égalités

$$u = x_s s + y_s (is), \quad s = \varepsilon h^{3/4} e^{i\theta_s} \quad (29)$$

De même, les coordonnées (x_u, y_u, θ_u) d'un point (s, u) de $C_u(\varepsilon)$ seront données par

$$s = x_u u + y_u (iu), \quad u = \varepsilon h^{3/4} e^{i\theta_u} \quad (30)$$

Les expressions explicites des coordonnées (x, y) sont donc :

$$\begin{cases} x_s = \frac{1}{\varepsilon^2 h^{3/2}} (s_1 u_1 + s_2 u_2) \\ y_s = \frac{1}{\varepsilon^2 h^{3/2}} (s_1 u_2 - s_2 u_1) \end{cases} \quad \begin{cases} x_u = \frac{1}{\varepsilon^2 h^{3/2}} (s_1 u_1 + s_2 u_2) \\ y_u = \frac{1}{\varepsilon^2 h^{3/2}} (s_2 u_1 + s_1 u_2) \end{cases} \quad (31)$$

3.3.4. *L'application de transition approchée de $C_s(\varepsilon)$ dans $C_u(\varepsilon)$.*

Le système linéarisé au voisinage du point fixe $(s, u) = (0, 0)$ est associé à la partie quadratique de $l_\mu(27')$ et est donc indépendant de μ . Il a pour expression :

$$\frac{ds}{dt} = -s, \quad \frac{du}{dt} = u$$

et a donc pour flot $\phi(t, (s_0, u_0)) = (e^{-t} s_0, e^t u_0)$. L'application de transition f_ε de $C_s(\varepsilon)$ dans $C_u(\varepsilon)$ associée à ce système s'écrit

$$f_\varepsilon(s, u) = \left(\frac{|u|}{\varepsilon h^{3/4}} s, \frac{\varepsilon h^{3/4}}{|u|} u \right) \tag{32}$$

Les coordonnées (x_u, y_u, θ_u) de $f_\varepsilon(s, u) \in C_u$ s'écrivent donc, en fonction des coordonnées (x_s, y_s, θ_s) de $(s, u) \in C_s$

$$x_u = x_s, \quad y_u = -y_s, \quad e^{i\theta_u} = \frac{u}{|u|} \tag{33}$$

et la dernière égalité s'écrit

$$\begin{cases} \cos(\theta_u) = \frac{x_s \cos \theta_s - y_s \sin \theta_s}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2}} \\ \sin(\theta_u) = \frac{x_s \sin \theta_s - y_s \cos \theta_s}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2}} \end{cases} \tag{34}$$

3.3.5. *Approximation de l'application de transition.*

On rappelle enfin le théorème d'approximation C^1 utilisé par la suite (par exemple voir [17], § 3.2, prop. 3.2.5 et 3.2.6) : l'application de transition linéarisée f_ε approche l'application de transition exacte $f_{\varepsilon\mu}$ en topologie C^1 à l'ordre ε^2 .

**4. CONDITIONS D'EXISTENCE
DES SOLUTIONS GÉNÉRATRICES**

On conserve les notations de 2 et 3, en particulier, on rappelle que $\text{Dom } \varphi_s =] - t_c, t_c[$ et $\text{Dom } \varphi_u =]t_c, t_c + l[$. On notera de plus a_s et a_u les demi grands axes des solutions elliptiques φ_s et φ_u . On vérifie facilement que, pour $\mu \geq 0$, le demi grand axe peut être choisi comme paramètre sur \mathcal{I}_μ au voisinage de $\varphi_s(0)$ et $\varphi_u(0)$. On notera $i_s^\mu : U_s \rightarrow \mathcal{I}_\mu$ et $i_u^\mu : U_u \rightarrow \mathcal{I}_\mu$ les paramétrisations (analytiques) ainsi définies, où U_s et U_u sont des voisinages de a_s et a_u dans \mathbb{R} , et où $i_s^0(a_s) = \varphi_s(0)$, et $i_u^0(a_u) = \varphi_u(0)$.

La détermination des conditions d'existence des solutions génératrices repose sur trois lemmes.

Le lemme a est une application directe de la transversalité du champ sur $C_s(\varepsilon)$ et $C_u(\varepsilon)$. Notons $\tilde{\Phi}_\mu$ le relèvement (par l'application de Levi-Civita ρ) de Φ_μ à \mathcal{L}_μ , compatible avec le relèvement γ_s défini dans 3.3.1. $\tilde{\Phi}_\mu$ diffère donc du flot Ψ_μ de \mathcal{Q}_μ seulement par le paramétrage temporel.

LEMME a. — *Pour ε et μ assez petits, il existe un réel $\delta_s > 0$ tel que la relation $\tilde{\Phi}_\mu(t, i_s(a)) \in C_s(\varepsilon)$ définisse une fonction implicite $\tau_s^{\mu\varepsilon}(a)$, définie dans l'intervalle $I_{\delta_s} =]a_s - \delta_s, a_s + \delta_s[$, dont l'image est voisine de t_c . L'application $q_s^{\mu\varepsilon}$ définie par $q_s^{\mu\varepsilon}(a) = \tilde{\Phi}_\mu(\tau_s^{\mu\varepsilon}(a), i_s^\mu(a))$ est un difféomorphisme analytique de I_{δ_s} sur son image dans $C_s(\varepsilon)$. On a la même propriété pour la section $C_u(\varepsilon)$, et on définit de la même manière δ_u, I_{δ_u} et $q_u^{\mu\varepsilon}$.*

Par transversalité, les images des fonctions $q_s^{\mu\varepsilon}$ et $q_u^{\mu\varepsilon}$ sont les arcs intersection des variétés $W_s(\mu)$ et $W_u(\mu)$ définies dans 3.2 avec le bord du bloc isolant autour de 0. Dans la suite, le paramètre ε est fixé par le contexte, et les fonctions définies dans le lemme a seront simplement notées $\tau_s^\mu, q_s^\mu, q_u^\mu$.

La première étape est le calcul des développements limités des fonctions q_s^0 et q_u^0 . On s'intéresse d'abord au système non régularisé. Pour $t < t_c$, on note $h_s(t, a) = \Phi_0(t, i_s^0(a))$, avec $a \in I_s$, et pour $t > t_c$ et $a \in I_u$, on note $h_u(t, a) = \Phi_0(t, i_u^0(a))$. On précise dans le lemme suivant la forme du développement de Taylor à l'ordre 1 des fonctions h_s et h_u , aux points (t_c, a_s) et (t_c, a_u) respectivement.

LEMME b. — *Le développement de Taylor au premier ordre au point (t_c, a_s) de la fonction h_s s'écrit*

$$\begin{cases} M(t, a) = N_s(t - t_c) + \Delta M_s(a - a_s) + O_2((a - a_s), (t_c - t)) \\ N(t, a) = N_s + \Delta N_s(a - a_s) + O_2((a - a_s), (t_c - t)) \end{cases} \quad (35)$$

avec

$$\begin{cases} \Delta M_s = \frac{1}{a_s} + (N_s + i) \left(\frac{1 - a_s \sqrt{\sigma_s}}{2 a_s^2 e_s} \sin t_c - \frac{3 t_c}{2 a_s} \right) \\ \quad + \frac{a_s \sigma_s^2 - \sigma_s}{2 a_s^3 e_s} \left(a_s - i \frac{2 e_s \sin t_c}{1 - e_s^2} \right) e^{-i t_c} \\ \Delta N_s = -\frac{N_s + i}{2 a_s} - \left(\frac{1 - a_s \sigma_s}{2 a_s^2 e_s} \sin t_c - \frac{3 t_c}{2 a_s} \right) \\ \quad + i (a_s e_s - \cos t_c) \frac{a_s \sigma_s - 1}{2 a_s^3 e_s} \end{cases} \quad (36)$$

où l'on a posé $\sigma_s = \sqrt{a_s(1 - e_s^2)}$. Les relations analogues pour h_u s'obtiennent directement en remplaçant les indices s par u .

◁ Il suffit de se placer dans le repère fixe. Les coordonnées du point $h(t, a)$ sont données en fonction de l'anomalie excentrique par

$$\begin{cases} X(t, a) = a(e + \cos E) + ia(1 - e^2)^{1/2} \sin E \\ Y(t, a) = -\frac{\sin E}{\sqrt{a}(1 + e \cos E)} + i \frac{(1 - e^2)^{1/2} \cos E}{\sqrt{a}(1 + e \cos E)} \end{cases}$$

avec la relation

$$t = a^{3/2} (E + e \sin E)$$

Les variables sont alors reliées par les égalités $X(t_c, a_s) = e^{it_c}$, $Y(t_c, a_s) = (N_s + i) e^{it_c}$. On en déduit directement le calcul des dérivées premières, d'après les relations

$$\begin{aligned} \frac{de}{da}(t_c, a_s) &= \frac{a_s^2(1 - e_s^2) - (a_s(1 - e_s^2))^{1/2}}{2a_s^3 e_s} \\ \frac{\partial E}{\partial a}(t_c, a_s) &= \frac{1 - (a_s(1 - e_s^2))^{1/2} a_s}{2a_s^{5/2} e_s} \sin t_c - \frac{3t_c}{2a_s^{3/2}} \end{aligned}$$

en notant que le changement de (X, Y) en (M, N) s'écrit $M = X e^{-it} - 1$, $N = Y e^{-it} - i$ ▷

On passe maintenant au système régularisé, et on donne dans le lemme suivant les développements de q_s et q_u aux points a_s et a_u , dans les systèmes de coordonnées de $C_s(\varepsilon)$ et $C_u(\varepsilon)$ construits au paragraphe précédent.

LEMME c. – *Les approximations des fonctions q_s^0 et q_u^0 au voisinage de a_s et a_u sont données, relativement aux coordonnées (x_s, y_s, θ_s) et (x_u, y_u, θ_u) sur $C_s(\varepsilon)$ et $C_u(\varepsilon)$ définies en (29) et (30), par*

$$q_s^0(a_s) = (0, 0, 0) \quad q_u^0(a_u) = (0, 0, 0) \tag{37}$$

et

$$\begin{cases} \frac{dx_s}{da}(a_s) = O(1) \\ \frac{dy_s}{da}(a_s) = -\frac{\text{Im}(\Delta M_s \overline{N_s})}{2h^{5/2} \varepsilon^2} + O(1) \\ \frac{d\theta_s}{da}(a_s) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{ds_2}{da}(a_s) + O(\varepsilon) \\ \frac{dx_u}{da}(a_u) = O(1) \\ \frac{dy_u}{da}(a_u) = -\frac{\text{Im}(\Delta M_u \overline{N_u})}{2h^{5/2} \varepsilon^2} + O(1) \\ \frac{d\theta_u}{da}(a_u) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{du_2}{da}(a_u) + O(\varepsilon) \end{cases} \tag{38}$$

◁ (i) Notons $\tau_s(\varepsilon) = \tau_s^0(a_s)$ et $\tau_u(\varepsilon) = \tau_u^0(a_u)$ les fonctions définies au lemme a). Les points $q_s(a_s) = \gamma_s(\tau_s(\varepsilon))$ et $q_u(a_u) = \gamma_u(\tau_u(\varepsilon))$ sont donc respectivement les intersections des orbites de γ_s et γ_u avec le bord du bloc isolant \mathcal{B}_ε .

Le choix des coordonnées (s, u) du paragraphe précédent entraîne que

$$q_s(a_s) = (\varepsilon, 0, 0, 0), \quad q_u(a_u) = (0, 0, \varepsilon, 0)$$

On en déduit directement l'équation (37), compte tenu de (29), (30), (31).

La transversalité du champ à $\partial\mathcal{B}_\varepsilon$ au voisinage des points $q_s(a_s)$ et $q_u(a_u)$ entraîne que les fonctions $\tau_s(\varepsilon)$ et $\tau_u(\varepsilon)$ de la taille ε du bloc sont analytiques. Les développements (24) et le choix des vecteurs de base (26), (28) entraînent que

$$\begin{aligned} \gamma_s(t) &= (\sqrt{t_c - t} + O_{3/2}(t_c - t), 0, 0, 0) \\ \gamma_u(t) &= (0, 0, \sqrt{t - t_c} + O_{3/2}(t - t_c), 0) \end{aligned}$$

en coordonnées (s, u) . Comme par définition $\|\gamma_s(\tau_s)\| = \|\gamma_u(\tau_u)\| = \varepsilon h^{3/4}$, on vérifie que

$$t_c - \tau_s(\varepsilon) = \varepsilon^2 + O_4(\varepsilon), \quad \tau_u(\varepsilon) - t_c = \varepsilon^2 + O_4(\varepsilon).$$

(ii) On doit maintenant évaluer les dérivées suivant le paramètre a . Comme

$$\frac{dh_s}{da}(\tau_s, a_s) = \frac{\partial h_s}{\partial a}(\tau_s, a_s) + \frac{\partial h_s}{\partial t}(\tau_s, a_s) \frac{d\tau_s}{da}(a_s)$$

il suffit de connaître les estimations des dérivées partielles suivantes de h_s en coordonnées de Levi-Civita.

$$\left| \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t}(t, a_s) &= -\frac{1}{2\sqrt{(t_c - t)}}v_s + O_{\frac{1}{2}}(t_c - t) \\ \frac{\partial w}{\partial t}(t, a_s) &= \frac{1}{2\sqrt{(t_c - t)}}v_s + O_{\frac{1}{2}}(t_c - t) \\ \frac{\partial z}{\partial a}(t, a_s) &= -\frac{\Delta M_s \overline{N}_s}{2h\sqrt{(t_c - t)}}v_s + O_{\frac{1}{2}}(t_c - t) \\ \frac{\partial w}{\partial a}(t, a_s) &= \frac{\overline{\Delta M}_s N_s}{2h\sqrt{(t_c - t)}}v_s + O_{\frac{1}{2}}(t_c - t) \end{aligned} \right.$$

où v_s est défini en (24''). Le deuxième système s'écrit

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial a}(t, a_s) &= -\frac{1}{2h\sqrt{(t_c-t)}} [\operatorname{Re}(\Delta M_s \overline{N_s}) v_s \\ &\quad + \operatorname{Im}(\Delta M_s \overline{N_s})(i v_s)] + O_{1/2}(t_c-t) \\ \frac{\partial w}{\partial a}(t, a_s) &= \frac{1}{2h\sqrt{(t_c-t)}} [\operatorname{Re}(\Delta M_s \overline{N_s}) v_s \\ &\quad - \operatorname{Im}(\Delta M_s \overline{N_s})(i v_s)] + O_{1/2}(t_c-t) \end{aligned} \right.$$

On obtient donc

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial z}{\partial t}(t, a_s), \frac{\partial w}{\partial t}(t, a_s) \right) &= -\frac{1}{2h\sqrt{(t_c-t)}} S_1 + O_{1/2}(t_c-t) \\ \left(\frac{\partial z}{\partial a}(t, a_s), \frac{\partial w}{\partial a}(t, a_s) \right) &= -\frac{\operatorname{Re}(\Delta M_s \overline{N_s})}{2h\sqrt{(t_c-t)}} S_1 \\ &\quad - \frac{\operatorname{Im}(\Delta M_s \overline{N_s})}{2h\sqrt{(t_c-t)}} U_2 + O_{1/2}(t_c-t) \end{aligned} \right.$$

où S_1 est le premier vecteur de la base canonique dans les coordonnées (s, u) . Compte tenu de la forme du changement de variables linéaires (26), (28) et puisque $t_c - \tau_s(\varepsilon) = O_2(\varepsilon)$, on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial s_1}{\partial t}(\tau_s, a_s) &= -\frac{1}{2h\varepsilon} + O(\varepsilon) & \frac{\partial u_1}{\partial t}(\tau_s, a_s) &= O(\varepsilon) \\ \frac{\partial s_2}{\partial t}(\tau_s, a_s) &= O(\varepsilon) & \frac{\partial u_2}{\partial t}(\tau_s, a_s) &= O(\varepsilon) \end{aligned} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial s_1}{\partial a}(\tau_s, a_s) = -\frac{\operatorname{Re}(\Delta M_s \overline{N_s})}{2h\varepsilon} + O(\varepsilon) \\ \frac{\partial s_2}{\partial a}(\tau_s, a_s) = O(\varepsilon) \\ \frac{\partial u_1}{\partial a}(\tau_s, a_s) = O(\varepsilon) \\ \frac{\partial u_2}{\partial a}(\tau_s, a_s) = -\frac{\operatorname{Im}(\Delta M_s \overline{N_s})}{2h\varepsilon} + O(\varepsilon) \end{array} \right.$$

La dérivée $\frac{d\tau_s}{da}(a_s)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_s}{da}(a_s) &= -\frac{\partial |s|^2}{\partial a}(\tau_s, a_s) \left(\frac{\partial |s|^2}{\partial t}(\tau_s, a_s) \right)^{-1} \\ &= -\operatorname{Re}(\Delta M_s \overline{N_s}) + O_2(\varepsilon). \end{aligned}$$

On en déduit le calcul des dérivées suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds_1}{da}(a_s) = O(\varepsilon) \\ \frac{ds_2}{da}(a_s) = O(\varepsilon) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{du_1}{da}(a_s) = O(\varepsilon) \\ \frac{du_2}{da}(a_s) = -\frac{\operatorname{Im}(\Delta M_s \overline{N_s})}{2h\varepsilon} + O(\varepsilon) \end{array} \right. \quad (39)$$

et un simple calcul conduit à la forme indiquée. On raisonne de même pour $k_u \triangleright$

L'énoncé du théorème d'existence des solutions génératrices nécessite une définition supplémentaire concernant les variétés V_s et V_u introduites en 3.2.

DÉFINITION. — Notons \tilde{P}_{2s} (resp. \tilde{P}_{2u}) le relèvement (par la projection $p : T^*\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$) du point P_2 sur la variété $V_s(0)$ (resp. $V_u(0)$). On dira que $V_s(0)$ (resp. $V_u(0)$) est *p-régulière* en P_2 lorsque la restriction de p à $V_s(0)$ (resp. $V_u(0)$) est un difféomorphisme local au voisinage du point \tilde{P}_{2s} (resp. \tilde{P}_{2u}). On déduit facilement du lemme b qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $V_s(0)$ (resp. $V_u(0)$) soit *p-régulière* en P_2 est que $\operatorname{Im}(\Delta M_s \overline{N_s}) \neq 0$ (resp. $\operatorname{Im}(\Delta M_u \overline{N_u}) \neq 0$).

THÉORÈME 2. — *On suppose que les variétés $V_s(0)$ et $V_u(0)$ sont p-régulières en P_2 , et que les vitesses N_s et N_u ne sont pas colinéaires.*

Il existe un réel $\mu_1 > 0$ tel que, pour tout $\mu < \mu_1$, les variétés $V_s(\mu)$ et $V_u(\mu)$ aient une intersection transverse dans la variété \mathcal{H}_μ . Les solutions φ_s et φ_u sont donc alors génératrices.

Démonstration. – Il suffit de raisonner dans le système régularisé \mathcal{L}_μ , et de montrer la propriété d'intersection pour les relèvements de $V_s(\mu)$ et $V_u(\mu)$ compatibles avec γ_s et γ_u , que l'on note $W_s(\mu)$ et $W_u(\mu)$.

La famille à un paramètre de sous-variétés $(W_s(\mu))_{\mu \geq 0}$ dépend analytiquement de μ pour $\mu \geq 0$; la famille $(C_s(\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$ est analytique en ε , pour $\varepsilon > 0$ (pour $\varepsilon = 0$, la section $C_s(\varepsilon)$ n'est plus définie). Par transversalité, les intersections $(W_s(\mu) \cap C_s(\varepsilon))_{\mu \geq 0, \varepsilon > 0}$ des sous-variétés $W_s(\mu)$ avec le bord du bloc isolant sont des arcs (de dimension 1) analytiques en ε et μ (ces deux paramètres variant dans le domaine indiqué). Ils sont contenus dans $\mathcal{L}_\mu \cap C_s(\varepsilon)$ et donc de codimension 1 dans cette sous-variété de dimension 2. Les mêmes résultats sont valables pour les variétés $W_u(\mu)$ et $C_u(\varepsilon)$, et les arcs $(W_u(\mu) \cap C_u(\varepsilon))_{\mu, \varepsilon}$ dans $\mathcal{L}_\mu \cap C_u(\varepsilon)$.

On étudiera d'abord l'arc $f_\varepsilon(W_s(\mu) \cap C_s(\varepsilon))$, image de $W_s(\mu) \cap C_s(\varepsilon)$ par l'application de transition approchée. Le théorème d'approximation 3.3.5 permettra d'en déduire, pour $\mu \geq 0$, des estimations C^1 pour l'arc $f_{\varepsilon\mu}(W_s(\mu) \cap C_s(\varepsilon))$ ($f_{\varepsilon\mu}$ étant l'application de transition exacte). On effectuera ensuite la même étude sur l'arc $W_u(\mu) \cap C_u(\varepsilon)$. Les estimations obtenues permettront enfin d'assurer l'existence et la transversalité de l'intersection $f_{\varepsilon\mu}(W_s(\mu) \cap C_s(\varepsilon)) \cap W_u(\mu) \cap C_u(\varepsilon)$. La démonstration se fait en six étapes.

a. *Domaines de définition des arcs q_s^μ et q_u^μ .* – Commençons par préciser la longueur des intervalles I_{δ_s} et I_{δ_u} introduits dans le lemme a, pour permettre dans la suite des estimations uniformes.

On note C_0 un majorant de la norme de la différentielle du champ de Kepler en référentiel tournant non régularisé (problème \mathcal{P}_0) dans un voisinage assez grand de l'image de φ_s (qu'il n'est pas utile de préciser d'avantage). On peut donc écrire

$$\begin{aligned} & \| \Phi_0(\tau_s^0(a_s), i_s^0(a)) - \Phi_0(\tau_s^0(a_s), i_s^0(a_s)) \| \\ & \leq \exp(C_0 \tau_s^0(a_s)) \| i_s^0(a) - i_s^0(a_s) \| \end{aligned}$$

La fonction i_s^0 est analytique au voisinage de a_s et, en considérant le prolongement analytique de i_s^0 sur un domaine complexe contenant a_s , on peut écrire l'inégalité suivante :

$$\left\| \frac{di_s^0}{da} \right\|_{U_s} \leq C_1 \| i_s^0 \|_{U_s}$$

où $\| \cdot \|_{U_s}$ est la norme L^∞ sur le voisinage U_s (introduit au début de la section 4) et où C_1 est une constante > 0 . On obtient donc

$$\begin{aligned} & \| \Phi_0(\tau_s^0(a_s), i_s^0(a)) - \Phi_0(\tau_s^0(a_s), i_s^0(a_s)) \| \\ & \leq C_1 \| i_s^0 \|_{U_s} |a - a_s| \exp(C_0 \tau_s^0(a_s)) \end{aligned}$$

Nous allons fixer $\delta_s = \varepsilon^{7/3}$ ce qui permettra d'affirmer que

$$\| \Phi_0(\tau_s^0(a_s), i_s^0(a)) - \Phi_0(\tau_s^0(a_s), i_s^0(a_s)) \| = O(\varepsilon^{7/3})$$

En considérant l'image $\rho(C_\varepsilon)$ de la surface de section par la transformation de Lévi-Civita, et en utilisant le développement des coordonnées non régularisées donné dans le lemme b, on obtient l'égalité suivante :

$$(M, N)(\Phi_0(\tau_s^0(a_s), i_s^0(a))) = (-\varepsilon^2 N_s, N_s) + O(\varepsilon^{7/3}) \quad \forall a \in I_{\delta_s}.$$

il en résulte que $P_2 \notin \Phi_0(\tau_s^0(a_s), i_s^0(I_{\delta_s}))$ (pour ε assez petit). On vérifie facilement que l'application q_s^0 est alors bien définie sur I_{δ_s} avec $|\tau_s^0(a) - \tau_s^0(a_s)| = O(\varepsilon^{7/3})$, et nous obtenons enfin :

$$(s, u)(q_s^0(a)) = (\varepsilon, 0) + O(\varepsilon^{4/3})$$

La longueur du domaine de I_{δ_s} se choisit de la même manière, avec $\delta_s = \varepsilon^{7/3}$.

b. Développements limités de l'arc q_s^0 . – On donne d'abord des estimations sur les vecteurs tangents à la variété V_s , puis on en déduit une estimation de la dérivée le long de l'arc.

Par analyticité du champ associé à \mathcal{P}_0 , on obtient immédiatement les dérivées temporelles :

$$\frac{\partial(M, N)}{\partial t}(\Phi_0(\tau_s^0(a), i_s^0(a))) = (N_s, 0) + O(\varepsilon^{7/3})$$

et donc, après avoir effectué la transformation de Lévi-Civita, nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial(s, u)}{\partial t}(q_s^0(a)) = \frac{\partial(s, u)}{\partial t}(q_s^0(a_s)) + O(\varepsilon^{4/3}) \quad \forall a \in I_{\delta_s}.$$

Les dérivées par rapport au demi grand-axe a nécessitent une étude plus détaillée. On introduit d'abord la fonction

$$\begin{aligned} Z_0(t) = & [\Phi_0(t + \tau_s^0(a) - \tau_s^0(a_s), i_s^0(a+h)) \\ & - \Phi_0(t + \tau_s^0(a) - \tau_s^0(a_s), i_s^0(a))] \\ & - [\Phi_0(t, i_s^0(a_s+h)) - \Phi_0(t, i_s^0(a_s))] \end{aligned}$$

où h est un réel proche de 0 et où a varie dans I_{δ_s} . Avec les notations précédentes, l'analyticité de i_s^0 conduit à la majoration :

$$\left\| \frac{dZ_0}{dt} \right\| \leq C_0 \|Z_0\| + |h| O(\varepsilon^{7/3})$$

et le lemme de Gronwall permet d'en déduire l'inégalité suivante

$$\|Z_0(\tau_s^0(a_s))\| \leq \|Z_0(0)\| \exp(C_0 \tau_s^0(a_s)) + |h| O(\varepsilon^{7/3})$$

L'analyticité du flot Φ_0 conduit d'autre part à l'inégalité :

$$\begin{aligned} \|Z_0(0)\| \leq & C_0 h |\tau_s^0(a) - \tau_s^0(a_s)| \\ & + \|[i_s^0(a+h) - i_s^0(a)] - [i_s^0(a_s+h) - i_s^0(a_s)]\| \end{aligned}$$

soit

$$\|Z_0(\tau_s^0(a_s))\| = |h| O(\varepsilon^{7/3})$$

On en déduit les estimations de la dérivée partielle en a , lorsque $h \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(M, N)}{\partial a}(\Phi_0(\tau_s^0(a), i_s^0(a))) \\ = \frac{\partial(M, N)}{\partial a}(\Phi_0(\tau_s^0(a_s), i_s^0(a_s))) + O(\varepsilon^{7/3}) \end{aligned}$$

soit

$$\frac{\partial(s, u)}{\partial a}(q_s^0(a)) = \frac{\partial(s, u)}{\partial a}(q_s^0(a_s)) + O(\varepsilon^{4/3})$$

On obtient donc finalement pour la dérivée le long de l'arc q_s^0 :

$$\frac{d(s, u)}{da}(q_s^0(a)) = \frac{d(s, u)}{da}(q_s^0(a_s)) + O(\varepsilon^{4/3}) \quad \forall a \in I_{\delta_s}.$$

c. *Écarts entre les arcs perturbés et non perturbés.* – On peut maintenant estimer l'écart entre les fonctions q_s^μ (pour $\mu \neq 0$) et q_s^0 , sur l'intervalle I_{δ_s} . Pour cela, on donne une première majoration de l'écart, correspondant à une étude du système à l'extérieur d'un disque de rayon ε centré en P_2

(dans l'espace des configurations). Puis on prend en compte l'écart dû à la transition entre le voisinage précédent et $\rho(C_s(\varepsilon))$, (image du bord d'entrée du bloc isolant par la transformation de Lévi-Civita). Les écarts sont obtenus dans les deux cas par majoration de la norme de la perturbation.

L'étude du problème restreint en référentiel tournant \mathcal{P}_μ à l'extérieur du disque $\mathcal{D}(P_2, \varepsilon)$ conduit à un écart de la forme suivante

$$\|\Phi_\mu(t, i_s^\mu(a)) - \Phi_0(t, i_s^\mu(a))\| = O\left(\frac{\mu}{\varepsilon^2}\right)$$

puisque la majoration intervient sur un intervalle temporel de la forme $[0, t_c - C_2 \varepsilon]$

Notons $\mathcal{V}_\mu(\varepsilon)$ le relèvement à la variété \mathcal{H}_μ du disque $\mathcal{D}(P_2, \varepsilon)$. Le temps de parcours (pour le problème \mathcal{P}_μ) entre l'entrée dans le voisinage $\mathcal{V}_\mu(\varepsilon)$ et l'arrivée sur $C_s(\varepsilon)$ est d'ordre ε . On en déduit l'estimation :

$$\begin{aligned} & \|\Phi_\mu(\tau_s^0(a), i_s^\mu(a)) - \Phi_0(\tau_s^0(a), i_s^\mu(a))\| \\ &= O\left(\frac{\mu}{\varepsilon^2}\right) + O\left(\frac{\mu}{\varepsilon^4} \varepsilon\right) = O\left(\frac{\mu}{\varepsilon^3}\right) \end{aligned}$$

De la même manière qu'au paragraphe a, on obtient l'estimation suivante pour l'écart dans le problème \mathcal{P}_0

$$\begin{aligned} & \|\Phi_0(\tau_s^0(a), i_s^\mu(a)) - \Phi_0(\tau_s^0(a), i_s^0(a))\| \\ & \leq \|i_s^\mu(a) - i_s^0(a)\| \exp(C_0 \tau_s^0(a)) \end{aligned}$$

Enfin, la fonction $i_s^\mu - i_s^0$ est analytique et vérifie $\|i_s^\mu - i_s^0\|_{U_s} = O(\mu)$ (ce qui correspond à l'écart entre les variétés \mathcal{H}_μ et \mathcal{H}_0 au voisinage de $i_s^0(a_s)$), on obtient donc l'estimation suivante pour l'écart :

$$\|\Phi_\mu(\tau_s^0(a), i_s^\mu(a)) - \Phi_0(\tau_s^0(a), i_s^0(a))\| = O\left(\frac{\mu}{\varepsilon^3}\right)$$

d. *Choix de la masse μ en fonction de ε .* – L'idée principale est maintenant de relier les ordres de grandeur de μ et de ε , afin de permettre des développements suivant une seule variable. Nous allons fixer ici $\mu = \varepsilon^{11/2}$, ce qui garantira la majoration suivante

$$\|\Phi_\mu(\tau_s^0(a), i_s^\mu(a)) - \Phi_0(\tau_s^0(a), i_s^0(a))\| = O(\varepsilon^{5/2})$$

On déduit alors des calculs précédents sur l'arc non perturbé l'estimation :

$$|M(\Phi_\mu(\tau_s^0(a), i_s^\mu(a)))| = \varepsilon^2 |N_s| + O(\varepsilon^{7/3}) + O(\varepsilon^{5/2}) > 0.$$

Le choix précédent de μ entraîne donc que la variété $V_s(\mu)$ intersecte $\rho(C_s(\varepsilon))$ avec de plus, en coordonnées régularisées :

$$(s, u)(q_s^\mu(a)) = (s, u)(q_s^0(a)) + O(\varepsilon^{3/2}) \quad \forall a \in I_{\delta_u} \quad (40)$$

avec $|\tau_s^\mu(a) - \tau_s^0(a)| = O(\varepsilon^{5/2})$, (où la notation (s, u) désigne la fonction associée aux coordonnées).

e. *Développements des arcs perturbés.* – On utilise maintenant une démarche analogue à celle du paragraphe b. Dans le développement de la fonction q_s^μ , les dérivées temporelles vérifient (la notation (M, N) désignant encore la fonction associée) :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(M, N)}{\partial t}(\Phi_\mu(\tau_s^\mu(a), i_s^\mu(a))) \\ &= \frac{\partial(M, N)}{\partial t}(\Phi_0(\tau_s^0(a), i_s^0(a))) + O\left(\frac{\mu}{\varepsilon^4}\right) \end{aligned}$$

soit

$$\frac{\partial(s, u)}{\partial t}(q_s^\mu(a)) = \frac{\partial(s, u)}{\partial t}(q_s^0(a)) + O(\varepsilon^{1/2}) \quad \forall a \in I_{\delta_s}.$$

Pour estimer les dérivées par rapport au demi grand-axe a , on étudie maintenant les variations de :

$$\begin{aligned} Z_\mu(t) &= [\Phi_\mu(t + \tau_s^\mu(a) - \tau_s^0(a), i_s^\mu(a+h)) \\ &\quad - \Phi_\mu(t + \tau_s^\mu(a) - \tau_s^0(a), i_s^\mu(a))] \\ &\quad - [\Phi_0(t, i_s^0(a+h)) - \Phi_0(t, i_s^0(a))] \end{aligned}$$

où h est un réel proche de 0 et où a varie dans I_{δ_s} .

Notons t_ε l’instant d’arrivée de la solution $\Phi_0(t, i_s^0(a))$ au bord du voisinage $\mathcal{V}_\mu(\varepsilon)$. On obtient la majoration suivante, pour $t \in [0, t_\varepsilon]$:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{dZ_\mu}{dt} \right\| &\leq \left[C_0 + O\left(\frac{\mu}{\varepsilon^3}\right) \right] \|Z_\mu\| + \left[\|\Phi_0(\tau_s^\mu(a) - \tau_s^0(a), i_s^\mu(a_s))\right. \\ &\quad \left. - i_s^0(a)\| \exp(C_0 t_\varepsilon) + O\left(\frac{\mu}{\varepsilon^3}\right) \right] \|i_s^0(a+h) - i_s^0(a)\| \end{aligned}$$

Le choix de μ et l’analyticité de i_s^μ et i_s^0 permettent d’écrire :

$$\left\| \frac{dZ_\mu}{dt} \right\| \leq [C_0 + O(\varepsilon^{5/2})] \|Z_\mu\| + |h| O(\varepsilon^{5/2})$$

et donc

$$\|Z_\mu(t_\varepsilon)\| \leq \|Z_\mu(0)\| \exp(C_0 t_\varepsilon) + |h| O(\varepsilon^{5/2})$$

Pour $t \in [t_\varepsilon, \tau_s^0(a)]$, on a l'inégalité :

$$\left\| \frac{dZ_\mu}{dt} \right\| \leq \left[C_0 + O\left(\frac{\mu}{\varepsilon^6}\right) \right] \|Z_\mu\| + \left[\|\Phi_0(\tau_s^\mu(a) - \tau_s^0(a), i_s^\mu(a_s))\right. \\ \left. - i_s^0(a) \|\exp(C_0 \tau_s^0(a)) + O\left(\frac{\mu}{\varepsilon^6}\right)\right] \|i_s^0(a+h) - i_s^0(a)\|$$

et, compte-tenu du choix de la masse μ :

$$\left\| \frac{dZ_\mu}{dt} \right\| \leq [C_0 + O(\varepsilon^{-1/2})] \|Z_\mu\| + |h| O(\varepsilon^{-1/2})$$

L'estimation $\tau_s^0(a) - t_\varepsilon = O(\varepsilon)$ conduit à l'inégalité

$$\|Z_\mu(\tau_s^0(a))\| \leq \|Z_\mu(t_\varepsilon)\| (1 + O(\varepsilon^{1/2})) + |h| O(\varepsilon^{1/2})$$

et l'estimation sur $Z_\mu(t_\varepsilon)$ entraîne :

$$\|Z_\mu(\tau_s^0(a))\| \leq C \|Z_\mu(0)\| (1 + O(\varepsilon^{1/2})) + |h| O(\varepsilon^{1/2})$$

D'autre part

$$Z_\mu(0) = [\Phi_\mu(\tau_s^\mu(a) - \tau_s^0(a), i_s^\mu(a+h)) \\ - \Phi_\mu(\tau_s^\mu(a) - \tau_s^0(a), i_s^\mu(a))] - [i_s^0(a+h) - i_s^0(a)]$$

et le flot Φ_μ est analytique au voisinage de $(0, i_s^\mu(a))$, on obtient donc :

$$\|[\Phi_\mu(\tau_s^\mu(a) - \tau_s^0(a), i_s^\mu(a+h)) - \Phi_\mu(\tau_s^\mu(a) - \tau_s^0(a), i_s^\mu(a))] \\ - [i_s^0(a+h) - i_s^0(a)]\| = |h| O(\varepsilon^{5/2})$$

Il reste à estimer la quantité

$$\| [i_s^\mu(a+h) - i_s^\mu(a)] - [i_s^0(a+h) - i_s^0(a)] \|.$$

La fonction $i_s^\mu - i_s^0$ est analytique sur U_s et, en considérant le prolongement analytique de $i_s^\mu - i_s^0$ sur un domaine complexe contenant U_s , on obtient l'inégalité suivante :

$$\left\| \frac{d(i_s^\mu - i_s^0)}{da} \right\|_{U_s} \leq C_3 \|i_s^\mu - i_s^0\|_{U_s} = O(\mu) = O(\varepsilon^{11/2})$$

où $C_3 > 0$ est indépendante de ε , et

$$\| [i_s^\mu(a+h) - i_s^\mu(a)] - [i_s^0(a+h) - i_s^0(a)] \| = |h| O(\varepsilon^{11/2})$$

En réunissant toutes les estimations précédentes, on obtient :

$$\| Z_\mu(\tau_s^0(a)) \| = |h| O(\varepsilon^{1/2})$$

et en faisant tendre h vers 0 :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(M, N)}{\partial a}(\Phi_\mu(\tau_s^\mu(a), i_s^\mu(a))) \\ &= \frac{\partial(M, N)}{\partial a}(\Phi_0(\tau_s^0(a), i_s^0(a))) + O(\varepsilon^{1/2}) \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{\partial(s, u)}{\partial a}(q_s^\mu(a)) = \frac{\partial(s, u)}{\partial a}(q_s^0(a)) + O(\varepsilon^{-1/2})$$

On en déduit finalement l'estimation uniforme sur la dérivée le long de l'arc :

$$\frac{d(s, u)}{da}(q_s^\mu(a)) = \frac{d(s, u)}{da}(q_s^0(a)) + O(\varepsilon^{-1/2}) \quad \forall \in I_{\delta_s}. \quad (40')$$

Les estimations équivalentes à (40) et (40') au voisinage de $i_u^\mu(a_u)$ sont aussi valables avec $\mu \geq 0$ et ceci va nous permettre de conclure.

f. *Fin de la démonstration.* – Nous introduisons maintenant sur $C_s(\varepsilon)$ et $C_u(\varepsilon)$ deux nouveaux systèmes de coordonnées qui redressent les intersections $\mathcal{L}_\mu \cap C_s(\varepsilon)$ et $\mathcal{L}_\mu \cap C_u(\varepsilon)$. Il seront donnés par les transformations :

$$T_\mu^s(x_s, y_s, \theta_s) = (\tilde{x}_s, y_s, \theta_s) \text{ et } T_\mu^u(x_u, y_u, \theta_u) = (\tilde{x}_u, y_u, \theta_u)$$

où

$$\tilde{x}_s = \frac{1}{2\varepsilon^2 h^{3/2}} \left(\tilde{l}_\mu^s(x_s, y_s, \theta_s) - \frac{\mu}{\alpha} \right)$$

et

$$\tilde{x}_u = \frac{1}{2\varepsilon^2 h^{3/2}} \left(\tilde{l}_\mu^u(x_u, y_u, \theta_u) - \frac{\mu}{\alpha} \right)$$

$\tilde{l}_\mu^{(s,u)}$ désignant la restriction du hamiltonien l_μ à $C_s(\varepsilon)$ ou $C_u(\varepsilon)$, exprimée dans les coordonnées (x, y, θ) correspondantes. L'analyticité de l_μ implique directement celle des applications T_μ^s et T_μ^u , et les relations (27) et (31) entraînent les égalités suivantes sur $\partial\mathcal{B}_\varepsilon$:

$$\tilde{x}_s = x_s + O(\varepsilon); \quad \tilde{x}_u = x_u + O(\varepsilon).$$

Les transformations T_μ^s et T_μ^u sont donc des difféomorphismes analytiques ε -proches de l'identité sur $\partial\mathcal{B}_\varepsilon$. On obtient alors le redressement annoncé, dans les nouvelles coordonnées :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mu \cap C_s(\varepsilon) &= \left\{ (\tilde{x}_s, y_s, \theta_s) \in C_s(\varepsilon) \mid \tilde{x}_s = -\frac{\mu}{2\alpha\varepsilon^2 h^{3/2}} \right\} \\ \mathcal{L}_\mu \cap C_u(\varepsilon) &= \left\{ (\tilde{x}_u, y_u, \theta_u) \in C_u(\varepsilon) \mid \tilde{x}_u = -\frac{\mu}{2\alpha\varepsilon^2 h^{3/2}} \right\} \end{aligned}$$

La relation (40) entraîne l'égalité :

$$(s, u)(q_s^\mu(a_s)) = (\varepsilon, 0) + O(\varepsilon^{3/2})$$

De plus, la relation (40') et l'hypothèse $\text{Im}(\Delta M_s \overline{N_s}) \neq 0$ entraînent que $u_2(q_s^\mu(a))$ varie dans un intervalle de longueur d'ordre $O(\varepsilon^{4/3})$ lorsque a varie dans I_{δ_s} . En particulier, il existe $a_s^\mu \in I_{\delta_s}$ tel que $u_2(q_s^\mu(a_s^\mu)) = 0$, on notera $m_\mu^{(s)}$ le point $q_s^\mu(a_s^\mu)$ correspondant, intersection de l'arc $W_s(\mu) \cap C_s(\varepsilon)$ avec le plan d'équation $u_2 = 0$.

Les coordonnées (s, u) du point $m_\mu^{(s)}$ vérifient

$$(s_1, s_2, u_1)(m_\mu^{(s)}) = (\varepsilon, 0, 0) + O(\varepsilon^{4/3}) \tag{41}$$

et

$$\begin{aligned} &\left(\frac{ds_1}{da}, \frac{ds_2}{da}, \frac{du_1}{da}, \frac{du_2}{da} \right) (m_\mu^{(s)}) \\ &= \left(0, 0, 0, -\frac{\text{Im}(\Delta M_s \overline{N_s})}{2h\varepsilon} \right) + O(\varepsilon^{-1/2}) \end{aligned} \tag{41'}$$

Les expressions (31) et l'hypothèse $\text{Im}(\Delta M_s \overline{N_s}) \neq 0$ entraînent alors :

$$y_s(m_\mu^{(s)}) = O(\varepsilon^{2/3}) \text{ et } \frac{dy_s}{da}(m_\mu^{(s)}) = O(\varepsilon^{-2})$$

La relation (27') entraîne :

$$2[s_1(m_\mu^{(s)}) + (s_1(m_\mu^{(s)}) + s_2(m_\mu^{(s)}))O_2(\varepsilon)]u_1(m_\mu^{(s)}) + \frac{\mu}{\alpha} + O_6(\varepsilon) = 0$$

et on déduit de (41) :

$$u_1(m_\mu^{(s)}) = -\frac{\mu}{2\alpha\varepsilon} + O\left(\frac{\mu}{\varepsilon^{2/3}}\right) = -\frac{\varepsilon^{9/2}}{2\alpha} + O(\varepsilon^{29/6}) \tag{42}$$

On fait maintenant l'hypothèse supplémentaire $\alpha = (v_s | v_u) < 0$ (ce qui est possible dès que les vecteurs N_s et N_u ne sont pas colinéaires, par un choix convenable des racines qui fixe les fonctions γ données au début du paragraphe 3.3.1). Dans ce cas, lorsque ε tend vers 0, $u_1(m_\mu^{(s)}) \rightarrow 0^+$ avec $u_1(m_\mu^{(s)}) \neq 0$, et l'argument du point $u(m_\mu^{(s)}) = (u_1(m_\mu^{(s)}), 0) \in \mathbb{C}$ est nul.

Les coordonnées du point image de $m_\mu^{(s)}$ par l'application de transition linéarisée f_ε seront notées $(\tilde{x}'_u{}^{(l)}, y'_u{}^{(l)}, \theta'_u{}^{(l)})$. On déduit de (33) les égalités :

$$y'_u{}^{(l)} = O(\varepsilon^{2/3}); \quad \theta'_u{}^{(l)} = 0.$$

D'autre part, l'hypothèse $\text{Im}(\Delta M_s \overline{N_s}) \neq 0$ et l'égalité (42) entraînent :

$$\frac{dy'_u{}^{(l)}}{da}(f_\varepsilon(m_\mu^{(s)})) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right); \quad \frac{d\theta'_u{}^{(l)}}{da}(f_\varepsilon(m_\mu^{(s)})) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^{11/2}}\right)$$

En utilisant le théorème d'approximation énoncé dans le paragraphe 3.3.5, nous en déduisons les estimations suivantes sur les coordonnées $(\tilde{x}'_u, y'_u, \theta'_u)$ et leurs dérivées au point image de $m_\mu^{(s)}$ par l'application de transition exacte $f_{\varepsilon\mu}$:

$$y'_u = O(\varepsilon^{2/3}); \quad \theta'_u = O(\varepsilon^2); \quad \frac{dy'_u}{da}(f_{\varepsilon\mu}(m_\mu^{(s)})) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right);$$

$$\frac{d\theta'_u}{da}(f_{\varepsilon\mu}(m_\mu^{(s)})) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^{11/2}}\right).$$

Nous effectuons maintenant une étude analogue pour l'arc $W_u(\mu) \cap C_u(\varepsilon)$. Pour $a \in I_{\delta_u}$, on vérifie que :

$$(s_1, s_2, u_1, u_2)(q_u^\mu(a)) = (0, 0, \varepsilon, 0) + O(\varepsilon^{4/3}) \tag{43}$$

et

$$\left(\frac{ds_1}{da}, \frac{ds_2}{da}, \frac{du_1}{da}, \frac{du_2}{da}\right)(q_u^\mu(a)) = \left(0, -\frac{\text{Im}(\Delta M_u \overline{N_u})}{2h\varepsilon}, 0, 0\right) + O(\varepsilon^{-1/2}). \tag{43'}$$

D'après l'estimation analogue à (40) au voisinage de $i_u^\mu(a_u)$, nous pouvons écrire :

$$(s, u)(q_u^\mu(a_u)) = (0, \varepsilon) + O(\varepsilon^{3/2})$$

de plus, l'estimation (43') et l'hypothèse $\text{Im}(\Delta M_u \overline{N_u}) \neq 0$ entraînent que $s_2(q_u^\mu(a))$ varie dans un intervalle de longueur d'ordre $O(\varepsilon^{4/3})$ lorsque a varie dans I_{δ_u} . En particulier, il existe $a_u^\mu \in I_{\delta_u}$ tel que $s_2(q_u^\mu(a_u^\mu)) = 0$, on notera $m_\mu^{(u)}$ le point $q_u^\mu(a_u^\mu)$ intersection de l'arc $W_u(\mu) \cap C_u(\varepsilon)$ avec le plan d'équation $s_2 = 0$, les coordonnées de $q_u^\mu(a_u^\mu)$ seront notées $(\tilde{x}''_u, y''_u, \theta''_u)$.

On déduit alors des expressions (31) :

$$y_u''(a) = O(\varepsilon^{2/3}) \text{ et } \theta_u''(a) = O(\varepsilon^{1/3})$$

et l'hypothèse $\text{Im}(\Delta M_u \overline{N_u}) \neq 0$ entraîne :

$$\frac{dy_u''}{da}(a) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right); \quad \frac{d\theta_u''}{da}(m_\mu^{(u)}) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^{3/2}}\right).$$

On peut donc choisir ε assez petit pour que la tangente à l'arc $f_{\varepsilon\mu}((W_s(\mu) \cap C_s(\varepsilon))$ au point $f_{\varepsilon\mu}(m_\mu^{(s)})$ (resp. $W_u(\mu) \cap C_u(\varepsilon)$ au point $m_\mu^{(u)})$ soit arbitrairement proche de l'axe des θ_u (resp. de l'axe des y_u). Compte tenu du théorème 3.3.5, on vérifie que les estimations précédentes entraînent l'intersection transverse des arcs $f_{\varepsilon\mu}(W_s(\mu) \cap C_s(\varepsilon))$ et $W_u(\mu) \cap C_u(\varepsilon)$ lorsque les demi grands-axes varient dans des intervalles centrés en a_s^μ et a_u^μ , dont les longueurs respectives sont de l'ordre de $\varepsilon^{17/3}$ et $\varepsilon^{5/2}$ (il s'agit bien d'intervalles contenus dans les domaines de définition I_{δ_s} et I_{δ_u} considérés au début).

La convergence des solutions périodiques φ_μ qui s'en déduisent se montre immédiatement à partir de la construction précédente, puisque $W_s(\mu) \cap W_u(\mu)$ intersecte $\partial\mathcal{B}_\varepsilon$ en des points qui convergent vers les intersections de φ_s et φ_u avec $\partial\mathcal{B}_\varepsilon$. On en déduit que les solutions φ_s et φ_u sont génératrices \triangleright

On peut maintenant montrer le résultat annoncé au paragraphe 2.1.

Démonstration du théorème 1. – On fixe toujours les solutions φ_s et φ_u , de moments cinétique σ_s et σ_u . Remarquons d'abord que la fonction moment cinétique, restreinte à un voisinage des conditions initiales (correspondant à φ_s et φ_u) dans \mathcal{I}_0 , est strictement monotone. Le théorème de densité 2.2.2 entraîne donc la densité des conditions initiales sur \mathcal{I}_0 correspondant à des solutions à double collision. L'idée est maintenant très simple, il suffit de vérifier que les fonctions $\text{Im}(\Delta M_s \overline{N_s})$ et $\text{Im}(\Delta M_u \overline{N_u})$, restreintes à la sous-variété \mathcal{I}_0 , sont analytiques et non constantes, ce qui est clair au moins dans un voisinage des conditions initiales considérées. Le principe des zéros isolés entraîne alors directement l'existence de conditions initiales arbitrairement proches de celles de départ, donnant lieu à des solutions génératrices, et le théorème est démontré \triangleright

Remarque. – La transversalité observée dans la démonstration précédente, associée à la forme de l'application $f_{\varepsilon\mu}$, ne contredit pas l'intégrabilité éventuelle du problème pour $\mu \neq 0$. On aurait en effet une situation analogue pour le problème des deux centres fixes. On peut simplement affirmer qu'il n'existe pas de famille g_μ d'intégrales premières du problème, dépendant

différentiablement de μ , qui converge pour $\mu \rightarrow 0$ vers le moment cinétique. L'étude détaillée et géométrique de ce type de problème donnera lieu à un prochain travail.

REMERCIEMENTS

Nous remercions A. Chenciner pour ses remarques lors de la rédaction de cet article.

RÉFÉRENCES

- [1] H. POINCARÉ, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, 1987, Blanchard, tome 3, Sections 385-391.
- [2] L. M. PERKO, Second species periodic solutions with an $O(\mu)$ near-Moon passage, *Cel. Mech.*, vol. **14**, 1976, p. 395-427.
- [3] L. M. PERKO, Second species solutions with an $O(\mu^\nu)$, $1/3 < \nu < 1$, near-Moon passage, *Cel. Mech.*, vol. **16**, 1977, p. 275-290.
- [4] L. M. PERKO, Second species solutions with an $O(\mu^\nu)$, $0 < \nu < 1$ near-Moon passage, *Cel. Mech.*, vol. **24**, 1981, p. 155-171.
- [5] P. GUILLAUME, Families of symmetric periodic orbits of the restricted three-body problem, when the perturbing mass is small, *Astronomy and Astrophysics*, vol. **3**, 1973, p. 57-76.
- [6] P. GUILLAUME, Linear analysis of one type of second species solutions, *Cel. Mech.*, vol. **11**, 1975, p. 449-467.
- [7] G. GOMEZ et M. OLLÉ, Second species solutions in the circular and elliptic restricted three body problem, I et II, *Celestial Mechanics*, vol. **52**, 1991, p. 107-166.
- [8] J. HENRARD, On Poincaré second species solutions. *Cel. Mech.*, vol. **21**, 1980, p. 83-97.
- [9] M. HÉNON et D. L. HITZL, Critical generating orbits for second species solutions of the restricted problem. *Cel. Mech.*, vol. **15**, 1977, p. 421-452.
- [10] T. LEVI-CIVITA, Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps, *Opere matematiche*, vol. **2**, Bologna, 1956.
- [11] A. CHENCINER, *Le problème de la lune et les systèmes dynamiques*, (I), Preprint Université Paris-VII, 1989.
- [12] C. CONLEY, On some new long periodic solutions of the plane restricted three-body problem, *Comm. on Pure and Applied Math.* XVI, 1963, p. 449-467.
- [13] A. D. BRUNO, Le problème restreint des trois corps, 1990, Nauka, Moscou.
- [14] M. HÉNON, Sur les orbites interplanétaires qui rencontrent deux fois la terre, *Bulletin Astronomique*, Série 3, 1968, p. 377-393.
- [15] A. D. BRUNO, On periodic flybys to the Moon, *Cel. Mech.*, vol. **24**, 1981, p. 255-268.
- [16] C. CONLEY and R. EASTON, Isolated invariant sets and isolating blocs, *Trans. A.M.S.*, vol. **158**, 1971, p. 35-61.
- [17] S. WIGGINS, *Global Bifurcations and Chaos*, 1988, Springer.
- [18] M. CHAPERON, Géométrie différentielle et singularités des systèmes dynamiques, *Astérisque*, 1986.

(Manuscrit reçu le 16 septembre, 1993;
révisé le 3 janvier 1995.)