

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

F. GOLSE

## **Transport dans les milieux composites fortement contrastés : le modèle du billard**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 61, n° 4 (1994), p. 381-410

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1994\\_\\_61\\_4\\_381\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1994__61_4_381_0)

© Gauthier-Villars, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## **Transport dans les milieux composites fortement contrastés : le modèle du billard**

par

**F. GOLSE**

Université Paris-VII, U.F.R. de Mathématiques  
& Service M.C.N., C.E.A. Limeil Valenton, France

---

**RÉSUMÉ.** – On considère dans ce travail une méthode de calcul des sections efficaces d'absorption et de scattering pour un modèle simplifié de milieu composite fortement contrasté. Le modèle considéré dans ce travail est une assemblée périodique de grains sphériques infiniment diffusifs immergés dans un milieu non diffusif. Les particules se réfléchissent sur les grains suivant la loi de Descartes. La méthode proposée dans ce travail permet également de traiter des modèles similaires avec des formes de grains autres que sphériques et des lois de réflexions plus générales. Le calcul des sections efficaces est abordé par homogénéisation de l'équation de Liouville pour la densité de particules dans les différentes lois d'échelle du milieu. Les techniques d'homogénéisation utilisées ici sont basées sur des développements asymptotiques approchant la solution de l'équation de Liouville au sens de la consistance faible.

**ABSTRACT.** – The subject matter of the present article is a method of computing absorption and scattering cross-sections for a simplified model of highly contrasted composite media. The model considered in this paper is a periodic array of infinitely diffusive spherical obstacles immersed in a non diffusive media. Particles are reflected on these obstacles following Descartes' specular reflection law. The method proposed in this article can also be applied to similar models with non spherical obstacles and more general reflection laws than Descartes'. The computation of the cross-sections is treated by homogenizing the Liouville equation for the particle density in the different cases of scaling laws for the distribution

of inhomogeneities. The homogenization techniques used in this paper are based on asymptotic expansions approaching the solution of the Liouville equation in the sense of weak consistency.

---

## 1. INTRODUCTION – PRÉSENTATION DU MODÈLE

Ce travail est consacré au calcul des sections efficaces d'absorption et de scattering pour le transport de particules dans les milieux composites fortement contrastés. On désigne par « milieu composite fortement contrasté » un milieu très peu diffusif où sont dispersés des nuages de grains très diffusifs. De tels milieux apparaissent lorsqu'on traite des matériaux ayant des défauts de fabrication ou si l'on considère des matériaux composites.

Le calcul des sections efficaces des mélanges a été abordé par plusieurs auteurs : Bensoussan-Lions-Papanicolaou [7] dans le cadre des régimes diffusifs, Artola [2] et Attouch [3] pour l'homogénéisation des équations de la chaleur non linéaires de type Rosseland, Golse [15, 16] et Golse-Sentis [19] sur l'homogénéisation des équations de transport proprement dites et leurs applications. Enfin, pour les équations de transport dans les mélanges aléatoires, voir Vanderhaegen [27] et les travaux de Levermore et coll. [23, 24].

Ces résultats ne s'appliquent naturellement pas au cas des milieux composites fortement contrastés précisément en raison du contraste très fort entre les sections efficaces des constitutants du mélange. (En effet, les sections efficaces des grains sont très grandes devant celles du milieu peu diffusif).

Nous proposons dans ce travail un modèle très simplifié de transport en milieu composite fortement contrasté. Le type de calcul effectués ici peut éventuellement donner des idées sur le calcul des sections efficaces de mélanges provenant d'instabilités hydrodynamiques de type Rayleigh-Taylor ou Richtmeyer-Meshkov [31, 32]. Ces instabilités se rencontrent dans la modélisation des cibles pour la fusion par confinement inertiel (*voir* McCrory et coll. [33]). Levermore et Zimmerman [30] ont proposé une approche alternative basée sur les milieux aléatoires [23, 24] pour calculer les pertes de particules dans les cibles de fusion par confinement inertiel dûes aux débris des enveloppes.

## Le modèle

Le milieu composite fortement contrasté considéré ici occupe l'espace entier de dimension  $D$ ; les grains sont supposés sphériques de rayon  $r$  et leurs centres sont disposés aux sommets d'un réseau régulier à mailles cubiques de côté  $a$ .

Les sections efficaces d'absorption et de scattering du milieu peu diffusif sont prises égales à zéro; celles des grains sont supposées infinies. Plus précisément, on veut dire par là que les particules ne peuvent pénétrer dans les grains pour s'y thermaliser. Donc, le modèle consiste en un gaz de particules n'interagissant pas entre elles et se déplaçant en vol libre entre les grains; de plus, lorsqu'une particule rencontre un grain, elle se réfléchit suivant la loi de Descartes à la surface du grain, sans échanger d'énergie avec ce dernier. En particulier, on pourra toujours supposer que les particules ont toutes la même vitesse, notée  $c$ .

Le problème posé est de calculer les sections efficaces d'une tel milieu composite fortement contrasté. Ce travail présente des calculs asymptotiques pour obtenir ces sections efficaces dans les différents cas de dimensionnement du milieu. (Le sens qu'il convient de donner à l'approximation réalisée par ces calculs asymptotiques sera discuté ultérieurement).

Ce modèle peut être critiqué dans sa simplicité à plusieurs titres. D'une part, dans les applications évoquées ci-dessus, les particules ne sont pas purement réfléchies mais diffusent dans le milieu absorbant et sont réémises de façon isotrope à la surface des grains. D'autre part, la répartition des grains n'est en général pas périodique.

Pour répondre à la première objection on doit considérer ce modèle comme un banc d'essai pour tester une méthode de calcul des sections efficaces; cette même méthode s'appliquerait aussi à l'étude de modèles faisant intervenir des lois de réflexion plus compliquées, où l'on ne négligerait plus la diffusion des particules à la surface des grains : voir Golse [17] et le paragraphe 6.

En ce qui concerne l'hypothèse de répartition périodique des grains, il faut se souvenir que, dans la plupart des applications évoquées ci-dessus, on n'a en général pas accès au détail de la répartition des grains. Le calcul dans le cas périodique est un moyen simple d'obtenir les ordres de grandeur des sections efficaces, suffisants en première approximation (comme c'est le cas dans de nombreux problèmes d'homogénéisation).

### Description mathématique du modèle

On note  $I = I(t, x, \Omega)$  la densité numérique de particules qui, à l'instant  $t$ , occupent la position  $x$  et sont animées de la vitesse  $c\Omega$ , où  $c$  désigne la norme commune aux vitesses des particules et  $\Omega \in S^{D-1}$ . L'équation satisfaite par  $I$  (équation de Liouville) s'écrit :

$$(1.1) \quad \partial_t I + c\Omega \cdot \nabla_x I = 0; \quad t > 0, \quad x \in O, \quad \Omega \in S^{D-1},$$

où l'on note  $O$  le domaine occupé par le milieu peu diffusif :

$$(1.2) \quad O = \mathbf{R}^D \setminus \bigcup_{k \in \mathbf{Z}^D} \bar{B}_r(ak).$$

où  $B_r(b)$  est la boule de centre  $b$  et de rayon  $r$ .

La condition aux limites correspondant à la réflexion des particules sur les grains suivant la loi de Descartes, s'écrit en notant  $\omega$  la normale extérieure à la surface du grain

$$(1.3) \quad \begin{aligned} I(t, ak + r\omega, \Omega) &= I(t, ak + r\omega, R(\omega) \cdot \Omega), \\ t > 0, \quad k \in \mathbf{Z}^D, \quad \Omega \in \mathbf{S}^{D-1}, \quad \omega \in \mathbf{S}^{D-1} \end{aligned}$$

où  $R(\omega)$  désigne la réflexion par rapport à  $(\mathbf{R}\omega)^\perp$  :

$$(1.4) \quad R(\omega) \cdot \Omega = \Omega - 2(\Omega \cdot \omega)\omega.$$

La façon intrinsèque d'écrire la condition aux limites, valable lorsque les grains ne sont pas supposés sphériques, est :

$$(1.5) \quad I(t, x, \Omega) = I(t, x, R(n_x) \cdot \Omega); \quad t > 0, \quad x \in \partial O, \quad \Omega \in \mathbf{S}^{D-1}.$$

Ici,  $n_x$  désigne la normale unitaire à  $\partial O$  au point  $x$  de  $\partial O$ , dirigée vers l'intérieur de  $O$ .

Enfin la condition initiale s'écrit :

$$(1.6) \quad I(0, x, \Omega) = \phi(x, \Omega); \quad x \in O, \quad \Omega \in \mathbf{S}^{D-1},$$

où  $\phi$  est une fonction régulière définie sur  $\mathbf{R}^D \times \mathbf{S}^{D-1}$ .

Ce modèle est associé naturellement au système dynamique appelé « billard de Sinai » ou « gaz de Lorentz » qui est défini comme le flot

hamiltonien brisé dans l'espace des phases  $O \times \mathbf{S}^{D-1}$  associé au système différentiel suivant :

$$(1.7) \quad \frac{dx}{dt} = c\Omega,$$

$$(1.7') \quad \begin{cases} \frac{d\Omega}{dt}(\tau) = 0, & \text{si } x(\tau) \in O \\ \Omega(\tau+0) = R(n_x(t)) \cdot \Omega(\tau-0), & \text{si } x(\tau) \in \partial O. \end{cases}$$

Définissons alors le flot associé à (1.7)-(1.7') :  $(x(t; x^*, \Omega^*), \Omega(t; x^*, \Omega^*))$  est la solution de (1.7)-(1.7') valant  $(x^*, \Omega^*)$  à l'instant  $t = 0$ . La solution de (1.1), (1.3), (1.6) est donnée par :

$$(1.8) \quad \begin{aligned} I(t, x^*, \Omega^*) &= \phi(x(-t; x^*, \Omega^*), \Omega(-t; x^*, \Omega^*)), \\ t > 0, \quad x^* \in O, \quad \Omega^* \in \mathbf{S}^{D-1}. \end{aligned}$$

Sinai, puis Bunimovitch et Chernov ont étudié le système dynamique (1.7)-(1.7') en temps grand: voir [12]. Voir également les travaux de Spohn [25] et de Boldighrini, Bunimovitch et Sinai [8] sur les gaz de Lorentz à répartition aléatoire (poissonienne) de grains et leur description par la théorie cinétique. Nous reviendrons plus loin sur ces résultats, et nous les comparerons à ceux du présent article.

## 2. LOIS D'ÉCHELLE

On se place ici dans le régime de l'homogénéisation, c'est-à-dire que l'on suppose les longueurs  $r$  et  $a$  petites devant la longueur moyenne de variation de  $\phi$  :

$$(2.1) \quad r \ll \frac{\phi}{|\nabla_x \phi|}, \quad a \ll \frac{\phi}{|\nabla_x \phi|}.$$

On introduit donc un petit paramètre  $\varepsilon > 0$  de telle sorte que :

$$\frac{a |\nabla_x \phi|}{\phi} = O(\varepsilon), \quad \frac{r |\nabla_x \phi|}{\phi} = O(\varepsilon^\gamma)$$

avec  $\gamma \geq 1$  (afin que les grains ne s'interpénètrent pas asymptotiquement lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Plus précisément, on introduit les longueurs d'ordre un  $\hat{a}$  et  $\hat{r}$ , de façon à ce que :

$$(2.2) \quad a = \hat{a} \varepsilon, \quad r = \hat{r} \varepsilon^\gamma$$

(ce qui correspond à effectuer un zoom sur le réseau et les grains). On réécrit donc le problème (1.1) (1.3) (1.6) avec le scaling défini par (2.2) :

$$(2.3) \quad \partial_t I_\varepsilon + c \Omega \cdot \nabla_x I_\varepsilon = 0; \quad t \geq 0, \quad x \in O_\varepsilon, \quad \Omega \in \mathbf{S}^{D-1};$$

$O_\varepsilon$  désigne l'espace occupé par le milieu non diffusif :

$$(2.4) \quad O_\varepsilon = \mathbb{R}^D \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^D} \bar{B}_{\varepsilon \hat{r}}(\hat{a} \varepsilon k).$$

La condition aux limites s'écrit :

$$(2.5) \quad I_\varepsilon(t, \varepsilon a k + \varepsilon^\gamma r \omega, \Omega) = I_\varepsilon(t, \varepsilon a k + \varepsilon^\gamma r \omega, R(\omega) \cdot \Omega);$$

$$t \geq 0, \quad k \in \mathbb{Z}^D, \quad \omega \quad \text{et} \quad \Omega \in S^{D-1};$$

et la condition initiale :

$$(2.6) \quad I_\varepsilon(0, x, \Omega) = \phi(x, \Omega); \quad x \in O_\varepsilon, \quad \Omega \in S^{D-1}.$$

Il est important de déterminer l'ordre de grandeur du libre parcours moyen entre deux collisions de particules avec les grains. Il est donné par :

$$(2.7) \quad \lambda_\varepsilon = \frac{1}{\mathcal{N}_\varepsilon \Sigma_\varepsilon}$$

où  $\mathcal{N}_\varepsilon$  désigne le nombre de grains par unité de volume et  $\Sigma_\varepsilon$  la surface des grains. Notant  $\Sigma(D)$  la surface de  $S^{D-1}$ , on trouve, avec le scaling (2.2), que :

$$(2.8) \quad \lambda_\varepsilon = \frac{a^D}{\sum(D) r^{D-1}} \varepsilon^{D-\gamma(D-1)} = \frac{a^D}{\sum(D) r^{D-1}} \varepsilon^{(\gamma_c - \gamma)(D-1)},$$

avec la définition de la valeur critique de  $\gamma$  :

$$(2.9) \quad \gamma_c = \frac{D}{D-1}.$$

Les mêmes méthodes de calcul s'appliqueraient facilement à des grains de forme convexe régulière par morceaux quelconque; toutefois, par souci de simplicité, nous nous limitons ici au cas des grains sphériques. En effet, ce cas est celui où les calculs explicites peuvent être poussés le plus loin possible.

On est donc en présence du comportement qualitatif suivant :

- lorsque  $\gamma > \gamma_c$ ,  $\lambda_\varepsilon \rightarrow +\infty$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on s'attend à ce que le gaz de particules suive un mouvement de vol libre;
- lorsque  $1 \leq \gamma < \gamma_c$ ,  $\lambda_\varepsilon \rightarrow 0$  avec  $\varepsilon$ ; on s'attend à ce que le gaz de particules évolue suivant une équation macroscopique de diffusion (limite hydrodynamique);
- lorsque  $\gamma = \gamma_c$ ,  $\lambda_\varepsilon = O(1)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on s'attend à ce que le gaz de particules évolue suivant une équation de transport linéaire, avec des termes d'absorption et de scattering, comme en Neutronique (limite de Boltzmann-Grad).

### 3. ÉQUATION DE LIOUVILLE

On reprend les équations (2.4), (2.5), (2.6) en prolongeant la densité à l'espace entier, c'est-à-dire en la fixant égale à zéro dans les grains.

Ce choix est physiquement réaliste en vertu de la très grande section efficace d'absorption des grains. On pose donc :

$$(3.1) \quad f_\varepsilon(t, x, \Omega) = \begin{cases} I_\varepsilon(t, x, \Omega) & \text{si } x \in O_\varepsilon, \\ 0 & \text{si } x \in \bar{O}_\varepsilon^c. \end{cases}$$

Notons  $\Gamma_\varepsilon = \partial O_\varepsilon$ , et, pour une fonction  $\psi = \psi(x)$ ,  $\psi|_{\Gamma_\varepsilon}$  la trace de  $\psi$  sur  $\Gamma_\varepsilon$  du côté de  $O_\varepsilon$  (si elle existe). Voir Bardos [4], Cessenat [13] et Agoshkov [1] pour cette notion. On note aussi  $\delta_{\Gamma_\varepsilon}$  la mesure surfacique concentrée sur  $\Gamma_\varepsilon$ , c'est-à-dire la distribution définie par :

$$(3.2) \quad \delta_{\Gamma_\varepsilon}(\varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^D} \int_{S^{D-1}} \varphi(\varepsilon \hat{a}k + \varepsilon^\gamma \hat{r} \omega) (\varepsilon^\gamma \hat{r})^{D-1} d\omega$$



pour  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^D)$ ;  $\delta_{\Gamma_\varepsilon}$  est donc une mesure positive non bornée. Alors (voir Schwartz [25]),

$$(3.3) \quad \nabla_x f_\varepsilon = \{\nabla_x f_\varepsilon\} + f_{\varepsilon|\Gamma_\varepsilon} \delta_{\Gamma_\varepsilon} n_x,$$

où on a noté le prolongement par zéro dans les grains :

$$(3.4) \quad \{F\}(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } x \in O_\varepsilon, \\ 0 & \text{si } x \in \bar{O}_\varepsilon^c. \end{cases}$$

L'équation vérifiée par  $f_\varepsilon$  s'écrit :

$$(3.5) \quad \begin{cases} \partial_t f_\varepsilon + c \Omega \cdot \nabla_x f_\varepsilon - c(\Omega \cdot n_x) f_{\varepsilon|\Gamma_\varepsilon} \delta_{\Gamma_\varepsilon} = 0; \\ t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^D, \quad \Omega \in S^{D-1}. \end{cases}$$

(Il faut noter que, bien que la fonction  $f_\varepsilon$  ne soit pas en général continue, le produit

$$(\Omega \cdot n_x) f_{\varepsilon|\Gamma_\varepsilon} \delta_{\Gamma_\varepsilon}$$

peut être défini au sens des traces, dès que  $\phi \in L_{\text{loc}}^1(dx d\Omega)$  : voir Cessenat [13], Agoshkov [1].) Ensuite, on décompose le terme de collision

$$(c \Omega \cdot n_x) f_{\varepsilon|\Gamma_\varepsilon} \delta_{\Gamma_\varepsilon}$$

en terme d'absorption et terme de réémission, à l'aide de la condition aux limites (2.5) :

$$(3.6) \quad \begin{aligned} & - (c \Omega \cdot n_x) f_{\varepsilon|\Gamma_\varepsilon} \delta_{\Gamma_\varepsilon} \\ & = (c \Omega \cdot n_x)_- f_{\varepsilon|\Gamma_\varepsilon} \delta_{\Gamma_\varepsilon} - (c \Omega \cdot n_x)_+ f_{\varepsilon|\Gamma_\varepsilon} \circ R(n_x) \delta_{\Gamma_\varepsilon}; \end{aligned}$$

en notant (par abus) :

$$f_{\varepsilon|\Gamma_\varepsilon} \circ R(n_x)(t, x, \Omega) = f_{\varepsilon|\Gamma_\varepsilon}(t, x, R(n_x) \cdot \Omega).$$

Si la fonction  $f_{\varepsilon|\Gamma_\varepsilon}$  était continue par rapport à la variable  $\Omega$ , on pourrait écrire :

$$(3.7) \quad f_{\varepsilon|\Gamma_\varepsilon} \circ R(n_x)(t, x, \Omega) = \int_{\mathbf{S}^{D-1}} \delta(\Omega' - R(n_x) \cdot \Omega) f_\varepsilon(t, x, \Omega') d\Omega'.$$

L'équation (3.5) se réécrit donc :

$$(3.8) \quad \begin{cases} \partial_t f_\varepsilon + c\Omega \cdot \nabla_x f_\varepsilon + (c\Omega \cdot n_x)_- f_{\varepsilon|\Gamma_\varepsilon} \delta_{\Gamma_\varepsilon} \\ \quad - (c\Omega \cdot n_x)_+ f_{\varepsilon|\Gamma_\varepsilon} \circ R(n_x) \delta_{\Gamma_\varepsilon} = 0; \\ \\ t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^D, \quad \Omega \in S^{D-1}; \end{cases}$$

avec la condition initiale :

$$(3.9) \quad f_\varepsilon(0, x, \Omega) = \begin{cases} \phi(x, \Omega) & \text{si } x \in O_\varepsilon, \\ O & \text{si } x \in \bar{O}_\varepsilon^c. \end{cases}$$

Avec la notation abusive (3.7), on remarque que l'équation (3.8) se met sous la forme :

$$\begin{aligned} & \partial_t f_\varepsilon + c\Omega \cdot \nabla_x f_\varepsilon + \sigma_\varepsilon(x, \Omega) f_\varepsilon \\ & - \int_{S^{D-1}} k_\varepsilon(x, \Omega, \Omega') f_\varepsilon(t, x, \Omega') d\Omega' = 0, \end{aligned}$$

qui est la forme classique des équations de la neutronique, à cela près que les sections efficaces d'absorption  $\sigma_\varepsilon$  et de scattering  $k_\varepsilon$  sont ici des mesures et non plus des fonctions. Cette remarque est fondamentale pour comprendre l'approche adoptée dans le présent travail.

#### 4. ÉNONCÉ DES PRINCIPAUX RÉSULTATS. CALCUL DES SECTIONS EFFICACES

Dans toute la suite, on va noter :

$$\langle F \rangle = \int_{\mathbb{R}^D} F(x) dx,$$

$$\langle\langle G \rangle\rangle = \int_{\mathbb{R}^D} \int_{S^{D-1}} G(x, \Omega) d\Omega,$$

(ainsi que leurs extensions naturelles au sens des distributions).

Le point fondamental de cet article est l'introduction de :

### L'opérateur de collision asymptotique

On définit l'opérateur de collision exact : pour  $\psi \in C_0^\circ(\mathbb{R}^D \times S^{D-1})$ ,

$$(4.1) \quad \Lambda_\varepsilon \psi = (c\Omega \cdot n_x)_- \psi|_{\Gamma_\varepsilon} \delta_{\Gamma_\varepsilon} - (c\Omega \cdot n_x)_+ \psi|_{\Gamma_\varepsilon} \circ R(n_x) \delta_{\Gamma_\varepsilon}.$$

Le résultat clé de ce travail est la proposition suivante :

PROPOSITION 1. — Soit  $\Lambda$  l'opérateur défini par :

$$(4.2) \quad \Lambda \psi(x, \Omega) = \frac{cr^{D-1}}{a^D} \left[ \frac{S(D)}{D-1} \psi(x, \Omega) - \int_{S^{D-1}} \psi(x, \Omega') \frac{d\Omega'}{4|\Omega - \Omega'|^{D-3}} \right]$$

où  $s(D) = |S^{D-2}|$  si  $D > 2$ , et  $S(2) = 2$ .

Alors, pour tout  $\psi \in L^\infty(S^{D-1}; C_0^\infty(\mathbb{R}^D))$ ,

$$(4.3) \quad \Lambda_\varepsilon \psi - \varepsilon^{(D-1)(\gamma-\gamma_c)} \Lambda \psi = O(\varepsilon^\infty)$$

pour la topologie de  $L^\infty(S^{D-1}; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^D))$ . Plus précisément pour tout  $\chi \in L^1(S^{D-1}; C_0^\infty(\mathbb{R}^D))$ ,

$$(4.4) \quad \left| \langle \chi(\Lambda_\varepsilon \psi - \varepsilon^{(D-1)(\gamma-\gamma_c)} \Lambda \psi) \rangle \right| \leq C_{D,q, \text{supp}(\psi\chi)} \varepsilon^q \cdot \sup_{\Omega, \Omega'} \|\nabla_x^\rho(\psi(\cdot, \Omega)\chi(\cdot, \Omega'))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D)},$$

où :

$$(4.5) \quad \rho(q) = 1 + \left[ \frac{q-D}{\gamma} - D \right]^+$$

[ $x$ ] représente ici la partie entière de  $x$ ).

**L'asymptotique pour  $\varepsilon \rightarrow 0$**

Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la solution  $f_\varepsilon$  de (3.8) (3.9) définie par (3.1) admet les comportements asymptotiques suivants, selon la valeur du paramètre  $\gamma$  (par rapport au paramètre critique  $\gamma_c$ ).

**THÉORÈME 2.** - (Cas sous critique,  $\gamma > \gamma_c$ ). - *Supposons que  $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^D \times S^{D-1})$ , et que  $\gamma > \gamma_c$ . Alors, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $f_\varepsilon \rightarrow f$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^D \times S^{D-1})$  faible \*, où  $f$  est la solution du problème de vol libre :*

$$(4.6) \quad \partial_t f + c\Omega \cdot \nabla_x f = 0; \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^D, \quad \Omega \in S^{D-1};$$

$$(4.7) \quad f(0, x, \Omega) = \phi(x, \Omega); \quad x \in \mathbb{R}^D, \quad \Omega \in S^{D-1}.$$

**THÉORÈME 3.** - (Cas critique,  $\gamma = \gamma_c$ ). - *Supposons que  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^D \times S^{D-1})$  et que  $\gamma = \gamma_c$ . Soit  $f \equiv f(t, x, \Omega)$  la solution de :*

$$(4.8) \quad \partial_t f + c\Omega \cdot \nabla_x f + \wedge f = 0; \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^D, \quad \Omega \in S^{D-1};$$

$$(4.9) \quad f(0, x, \Omega) = \phi(x, \Omega); \quad x \in \mathbb{R}^D, \quad \Omega \in S^{D-1}.$$

Posons alors  $R_\varepsilon = f_\varepsilon - \mathbf{1}_{O_\varepsilon} f$  (on note  $\mathbf{1}_A$  la fonction caractéristique de l'ensemble  $A$ ). On a alors :

$$(4.10) \quad \partial_t R_\varepsilon + c\Omega \cdot \nabla_x R_\varepsilon + \wedge_\varepsilon R_\varepsilon = O(\varepsilon^\infty)_{\mathcal{D}'} + O(\varepsilon)_{L^\infty}$$

uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R}^{+*}$ ;

$$(4.11) \quad R_\varepsilon(0, x, \Omega) = O(\varepsilon) \quad \text{dans } L^\infty(\mathbb{R}^D \times S^{D-1}),$$

où l'ordre de grandeur  $O(\varepsilon^\infty)_{\mathcal{D}'}$  est pris au sens de la proposition 1.

Pour énoncer le résultat dans le cas sous-critique  $1 \leq \gamma < \gamma_c$  (qui conduit à une diffusion) il faut d'abord introduire l'échelle de temps adaptée à cette diffusion. Posons  $\eta = \varepsilon^{(D-1)(\gamma_c-\gamma)}$ , et définissons  $\tau = \eta t$ . Définissons ensuite  $F_\varepsilon \equiv F_\varepsilon(\tau, x, \Omega)$  par :

$$(4.12) \quad F_\varepsilon(\tau, x, \Omega) = f_\varepsilon(\tau/\eta, x, \Omega).$$

Le problème dont  $F_\varepsilon$  est la solution s'écrit alors :

$$(4.13) \quad \eta \partial_\tau F_\varepsilon + c \Omega \cdot \nabla_x F_\varepsilon + \wedge_\varepsilon F_\varepsilon = 0; \quad \tau \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^D, \quad \Omega \in S^{D-1};$$

$$(4.14) \quad F_\varepsilon(0, x, \Omega) = \phi(x) \mathbf{1}_{O_\varepsilon}(x); \quad x \in \mathbb{R}^D, \quad \Omega \in S^{D-1}.$$

On suppose que  $\phi$  ne dépend pas de  $\Omega$  afin d'éviter les difficultés de la couche initiale : cf. Larsen, Pomraning, Badham [2]. Introduisons quelques notations. On définit :

$$(4.15) \quad \theta_\gamma = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma > 1 \\ 1 - \left(\frac{r}{a}\right)^D |B^D| & \text{si } \gamma = 1, \end{cases}$$

où  $B^D = \{x \in \mathbb{R}^D \mid |x| \leq 1\}$  et  $|B^D|$  est le volume de  $B^D$ .

Soit  $\beta(\Omega)$  le vecteur dépendant de  $\Omega$  dont les composantes sont définies comme suit :

$$(4.16) \quad \wedge \beta_j(\Omega) = \Omega_j, \quad \int_{S^{D-1}} \beta_j(\Omega) d\Omega = 0.$$

Cette définition de  $\beta$  appelle le :

LEMME 4. —  $\wedge$  est un opérateur de Fredholm auto-adjoint sur  $L^2(S^{D-1})$ , de noyau  $N(\wedge) = \mathbb{R} \mathbf{1}$ . De plus,

$$\beta(\Omega) = \frac{a^D}{cr^{D-1}} \frac{1}{s(D)} \frac{D^2 - 1}{4} \Omega.$$

Voici le résultat d'approximation de  $F_\varepsilon$  dans le cas sur-critique.

THÉORÈME 5. — (Cas sur-critique,  $1 \leq \gamma < \gamma_c$ )

On suppose que  $F_\varepsilon$  résout (4.13), (4.14) avec  $1 \leq \gamma < \gamma_c$  et  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^D)$  avec  $\nabla^4 \phi \in L^\infty(\mathbb{R}^D)$ . Définissons alors  $F_0 \equiv F_0(t, x)$  comme la solution de l'équation de diffusion suivante :

$$(4.17) \quad \partial_t F_0 - \frac{K^2}{2} \Delta_x F_0 = 0; \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^D;$$

$$(4.18) \quad F_0(0, x) = \phi(x); \quad x \in \mathbb{R}^D;$$

où le coefficient de diffusion  $K$  est donné par :

$$(4.19) \quad K^2 = \frac{2}{D} C^2 \theta_\gamma \int_{S^{D-1}} \text{tr}(\Omega \otimes \beta(\Omega)) \frac{d\Omega}{|S^{D-1}|}$$

$$= \theta_\gamma \frac{D^2 - 1}{2 D_s(D)} \frac{ca^D}{r^{D-1}}$$

Posons :

$$(4.20) \quad F_1 = -c \theta_\gamma \beta(\Omega) \cdot \nabla_x F_0$$

$$(4.21) \quad F_2 = \frac{1}{2} \mu(\Omega) : \nabla_x^2 F_0$$

où  $\mu(\Omega)$  est l'unique tenseur tel que :

$$(4.22) \quad \wedge \mu_{ij}(\Omega) = \theta_\gamma^2 c^2 [\Omega_i \beta_j(\Omega) + \Omega_j \beta_i(\Omega)] - \theta_\gamma K^2 \delta_{ij},$$

$$\int_{S^{D-1}} \mu_{ij}(\Omega) d\Omega = 0.$$

Définissons :

$$R_\epsilon = F_\epsilon - \mathbf{1}_{O_\epsilon} (F_0 + \eta F_1 + \eta^2 F_2).$$

Alors :

$$(4.23) \quad \partial_t R_\epsilon + \frac{1}{\eta} c \Omega \cdot \nabla_x R_\epsilon + \frac{1}{\eta} \wedge_\epsilon R_\epsilon = O(\eta)_{L^\infty(\mathbb{R}^D \times S^{D-1})} + O(\epsilon^\infty)_{\mathcal{D}'}$$

uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R}^{+*}$  ;

$$(4.24) \quad R_\epsilon(0, x, \Omega) = O(\eta) \text{ (dans } L^\infty(\mathbb{R}^D \times S^{D-1})),$$

où  $O(\epsilon^\infty)$  est pris au sens de la proposition 1.

Les résultats des théorèmes 2, 3 et 5 peuvent se résumer dans le tableau suivant :

Rayon des grains : $r \varepsilon^\gamma$ distance entre 2 grains voisins : $a \varepsilon$	$\gamma > \gamma_c$	$\gamma = \gamma_c$	$1 < \gamma < \gamma_c$	$\gamma = 1$
Section efficace d'absorption	$O$	$\frac{cr^{D-1}}{a^D} \frac{s(D)}{D-1}$	Régime diffusif	Régime diffusif
Section efficace de scattering	$O$	$\frac{cr^{D-1}}{a^D} \frac{1}{4 \Omega - \Omega' ^{D-3}}$	$\frac{ca^D K^2}{r^{D-1}} \frac{\bar{\bar{D}} - 1}{2Ds(D)}$	$ B^D  cr \frac{K^2 \bar{\bar{D}} - 1}{2Ds(D)}$

*Remarques 1.* – Une autre façon d'écrire les résultats (4.10) et (4.23) consiste à dire que  $1_{O_\varepsilon} f$  et  $1_{O_\varepsilon} (F_0 + \eta F_1 + \eta^2 F_2)$  sont des solutions approchées de (3.8) et (4.13) respectivement puisque (4.10) équivaut à  $(\partial_t + c\Omega \cdot \nabla_x + \wedge_\varepsilon) 1_{O_\varepsilon} f = O(\varepsilon)_{L^\infty} + O(\varepsilon^\infty)_{\mathcal{D}'}$ , et (4.23) à :

$$\left( \partial_\gamma + \frac{1}{\eta} c\Omega \cdot \nabla_x + \frac{1}{\eta^2} \wedge_\varepsilon \right) (1_{O_\varepsilon} (F_0 + \eta F_1 + \eta^2 F_2)) \\ = O(\eta)_{L^\infty} (\mathbb{R}^D \times S^{D-1}) + O(\varepsilon^\infty)_{\mathcal{D}'}$$

En d'autres termes,  $1_{O_\varepsilon} f$  et  $1_{O_\varepsilon} (F_0 + \eta F_1 + \eta^2 F_2)$  sont des approximations de  $f_\varepsilon$  et  $F_\varepsilon$  respectivement, au sens de la consistance faible. (C'est le résultat classique des méthodes de type Chapman-Enskog; voir Bardos [28], Bardos-Golse-Levermore [29]).

2. – Il manque toutefois un résultat de stabilité pour les équations de type (3.8), ce qui fait qu'on ne peut conclure que  $f_\varepsilon \rightarrow f$  où  $F_\varepsilon \rightarrow \theta_\gamma F_0$  en quelque sens que ce soit. Dans le cas où  $\gamma = 1$  (et pour un modèle de billard légèrement différent, dit à « horizon fini ») Bunimovitch-Sinaï ont démontré la convergence faible du processus des positions vers un mouvement brownien [11]. C'est évidemment un résultat formellement similaire au Théorème 5; toutefois, il n'est pas clair que le coefficient de diffusion trouvé par Bunimovitch-Sinaï [11] soit égal à celui que fournirait la méthode exposée dans ce travail pour leur modèle : voir chapitre 6.

Cela est en partie dû au fait que Bunimovitch et Sinaï ont établi leur résultat par des méthodes de théorie ergodique (partitions de Markov et

dynamique symbolique) qui paraissent pour l'instant sans rapport avec les méthodes du présent article. Il convient également de remarquer que la solution  $f_\varepsilon$  de (3.8) ou (3.5) n'est pas une solution renormalisée au sens de DiPerna-Lions [14] : elle n'est pas définie à partir du flot associé à l'opérateur  $\Omega \cdot \nabla_x$  dans l'espace  $\mathbb{R}^D$ . Donc, il n'est pas clair que le résultat du Théorème 5 ait quelque chose à voir avec la convergence du processus des positions des particules vers un mouvement brownien. D'un autre côté, il n'est pas clair non plus que le théorème de convergence de Bunimovitch-Sinaï fournisse une approximation consistante au sens du Théorème 5 au problème (4.13)-(4.14).

La démonstration du Théorème 2 est un corollaire direct de la preuve de la Proposition 1 et sera laissée au lecteur. Nous allons donner les preuves des Théorèmes 3 et 5 en admettant la Proposition 1 et le Lemme 4 dont les preuves, plus techniques, feront l'objet de deux appendices.

### 5. DÉMONSTRATIONS DE LA CONSISTANCE DES DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

*Preuve du Théorème 3.* – Soit  $f$  la solution de (4.8)-(4.9); il est clair que  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^D \times S^{D-1})$ . On observe alors que :

$$(5.1) \quad \Lambda_\varepsilon(\mathbf{1}_{O_\varepsilon} f) = \Lambda_\varepsilon f,$$

si bien que

$$\begin{aligned} (\partial_t + c\Omega \cdot \nabla_x + \Lambda_\varepsilon) R_\varepsilon &= (\partial_t + c\Omega \cdot \nabla_x)(\mathbf{1}_{O_\varepsilon} f) + \Lambda_\varepsilon f \\ &= (\partial_t + c\Omega \cdot \nabla_x + \Lambda) f + (\Lambda_\varepsilon - \Lambda) f + f c\Omega \cdot \nabla_x \mathbf{1}_{O_\varepsilon} \\ &= O(\varepsilon^\infty)_{\mathcal{D}'} \end{aligned}$$

par choix de  $f$ , d'après la Proposition 1 et le fait que  $1 - \mathbf{1}_{O_\varepsilon} = O(\varepsilon^\infty)$  au sens des distributions (théorème de la phase non stationnaire, cf. Hörmander [20]). Enfin, la condition (4.11) a lieu par construction.

*Preuve du Théorème 5.* – Soit  $F_0$  la solution de (4.17)-(4.18); on sait que  $F_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^D)$  et on déduit des formules (4.20) et (4.21) que  $F_1$  et  $F_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^D \times S^{D-1})$ . (On notera que la définition du tenseur  $\mu(\Omega)$  découle du Lemme 4.) On observe alors comme dans (5.1) que :

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \Lambda_\varepsilon \mathbf{1}_{O_\varepsilon} [F_0 + \eta F_1 + \eta^2 F_2] &= \Lambda_\varepsilon (F_0 + \eta F_1 + \eta^2 F_2) \\ &= \Lambda (F_0 + \eta F_1 + \eta^2 F_2) + O(\eta^\infty)_{\mathcal{D}'} \end{aligned}$$



d'après la Proposition 1.

On effectue alors le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
 (5.3) \quad & \left( \partial_\tau + \frac{1}{\eta} c \Omega \cdot \nabla_x + \frac{1}{\eta} \wedge_\varepsilon \right) R_\varepsilon \\
 &= - \left( \partial_\tau + \frac{1}{\eta} c \Omega \cdot \nabla_x + \frac{1}{\eta} \wedge_\varepsilon \right) (\mathbf{1}_{O_\varepsilon} [F_0 + \eta F_1 + \eta^2 F_2]) \\
 &= - \left( \partial_\tau + \frac{1}{\eta} c \Omega \cdot \nabla_x \right) (\mathbf{1}_{O_\varepsilon} [F_0 + \eta F_1 + \eta^2 F_2]) \\
 &\quad - \frac{1}{\eta} \wedge_\varepsilon (F_0 + \eta F_1 + \eta^2 F_2) \\
 &= - \left( \theta_\gamma \partial_\tau + \frac{1}{\eta} \theta_\gamma c \Omega \cdot \nabla_x + \frac{1}{\eta^2} \wedge \right) (F_0 + \eta F_1 + \eta^2 F_2) \\
 &\quad + \left( \frac{1}{\eta^2} \wedge - \frac{1}{\eta} \wedge_\varepsilon \right) (F_0 + \eta F_1 + \eta^2 F_2) \\
 &\quad + \frac{1}{\eta} (F_0 + \eta F_1 + \eta^2 F_2) c \Omega \cdot \nabla_x \mathbf{1}_{O_\varepsilon}
 \end{aligned}$$

D'après la Proposition 1 :

$$(5.4) \quad \left( \frac{1}{\eta^2} \wedge - \frac{1}{\eta} \wedge_\varepsilon \right) (F_0 + \eta F_1 + \eta^2 F_2) = 0 (\eta^\infty)_{\mathcal{D}'}.$$

D'après le théorème de la phase non stationnaire :

$$(5.5) \quad \frac{1}{\eta} (F_0 + \eta F_1 + \eta^2 F_2) c \Omega \cdot \nabla_x \mathbf{1}_{O_\varepsilon} = O(\varepsilon^\infty)_{\mathcal{D}'}.$$

Enfin, d'après les définitions (4.20) et (4.21) de  $F_1$  et  $F_2$ , et suivant un calcul effectué dans Bardos-Santos-Sentis [6].

$$\begin{aligned}
 (5.6) \quad & \left( \theta_\gamma \partial_\tau + \frac{1}{\eta} \theta_\gamma c \Omega \cdot \nabla_x + \frac{1}{\eta^2} \wedge \right) (F_0 + \eta F_1 + \eta^2 F_2) \\
 &= \theta_\gamma \{ \eta c \Omega \cdot \nabla_x F_2 + \eta \partial_\tau F_1 + \eta^2 \partial_\gamma F_2 \} \\
 &= O(\eta)_L^\infty (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^D \times S^D)
 \end{aligned}$$

d'après le principe du maximum pour (4.17)-(4.18) et le fait que  $\nabla^4 \phi \in L^\infty(\mathbb{R}^D)$ . En rassemblant (5.4), (5.5) et (5.6), on arrive à la conclusion annoncée.

## 6. CONCLUSIONS – EXTENSIONS POSSIBLES

### A. Comparaison avec les résultats de Sinai et coll. et de Spohn

a) L'approximation du Théorème 3 est connue sous le nom générique de limite de Boltzmann-Grad. Dans le cas où la répartition de grains est non plus périodique mais aléatoire poissonnienne, cette limite a été démontrée par Boldighrini-Bunimovitch-Sinai [8] par des techniques probabilistes. Dans le cas où les grains sont remplacés par des potentiels répulsifs centraux, toujours répartis suivant une loi poissonnienne, l'énoncé analogue a été démontré par Spohn [25]. Dans ces deux cas, l'hypothèse de distribution aléatoire aide à démontrer la stabilité de l'équation de Louville : les masses de Dirac portées par les bords des obstacles y sont remplacées par des fonctions. Ce point est fondamental pour établir la convergence de  $f_\varepsilon$  vers la solution de (4.8)-(4.9).

b) L'approximation du Théorème 5 est traitée par Bunimovitch-Sinai [11] dans le cas où  $\gamma = 1$  et sous l'hypothèse d'horizon fini. Rappelons ce qu'est l'hypothèse d'horizon fini : elle consiste à supposer que le rapport du libre parcours des particules au diamètre d'une période du billard est uniformément majoré par une constante. Il est clair que la géométrie envisagée dans ce travail n'est pas d'horizon fini, puisque les particules situées aux points de la forme  $ak + a(1/2; \dots; 1/2)$  avec  $k \in \mathbb{Z}^D$  et animées de vitesses parallèles aux axes de coordonnées ont un libre parcours infini. Voici l'exemple le plus simple de billard à horizon fini en dimension  $D = 2$ . On considère un pavage régulier du plan par des triangles équilatéraux de côté  $a$ ; on dispose aux sommets de chaque triangle un disque de rayon  $r$ . Le billard ainsi constitué est d'horizon fini si et seulement si  $\sqrt{3}/4 < r/a < 1/2$ . En effet, il est aisé de voir qu'aucune particule ne peut traverser un seul triangle sans percuter un grain. Bunimovitch-Sinai démontrent que le processus des positions des particules converge vers un mouvement brownien dont le coefficient de diffusion est donné par la formule d'Einstein-Kubo [11] :

$$(6.1) \quad \kappa' = 2c^2 E(\tau(x_0, \Omega_0)^2 \Omega_0 \otimes \Omega_0) + \sum_{k=0}^{\infty} c^2 E(\tau(x_0, \Omega_0) \cdot \tau(x_k, \Omega_k) \Omega_0 \otimes \Omega_0)$$

où  $(x_k, \Omega_k)$  est le couple formé par la position et la direction de la vitesse de la particule après l'impact numéro  $k$ , sachant que la valeur de ce couple à  $t = 0$  est  $(x_0, \Omega_0)$ . On a noté  $\tau(x_k, \Omega_k)$  la distance parcourue entre

le  $k$ -ième et le  $k + 1$ -ième point d'impact, et  $E$  l'espérance prise sous la mesure de probabilité proportionnelle à  $\Omega_0 \cdot n_{x_0} d\Omega_0 dx_0$  définie sur :

$$(\partial O \times S^1)_- = \{(x_0, \Omega_0) \in r S^1 \times S^1 / \Omega_0 \cdot n_{x_0} > 0\}.$$

Les méthodes de Bunimovitch-Sinaï sont basées sur l'étude de la dynamique symbolique basée sur la construction, fort compliquée dans la cas du billard, d'une partition de Markov ([10], [12]). C'est méthodes ne permettent pas un calcul effectif de  $\kappa'$  autre que celui donné par la série d'Einstein-Kubo, dont elles démontrent la convergence.

Ces résultats ont été étendus par Bunimovitch au cas de billards d'horizon infini (donc en particulier à celui étudié ici). Curieusement, il semble que  $\kappa' \neq \kappa$ , où  $\kappa$  est le coefficient de diffusion trouvé au Théorème 5. Ceci n'est pas *a priori* invraisemblable :  $\kappa'$  représente la limite en temps grand du déplacement carré moyen divisé par le temps, alors que  $\kappa$  est défini au moyen d'une équation cinétique intermédiaire. Il serait possible d'affirmer que ces deux coefficients de diffusion sont égaux si l'on savait que le développement asymptotique construit dans le théorème 5 converge. Par exemple, lorsque  $r = a/2$ , les particules sont piégées dans les cellules de diamètre  $\varepsilon a$ ; le déplacement carré moyen divisé par le temps est donc de l'ordre de  $(\varepsilon a)^2 / \varepsilon = O(\varepsilon)$  si bien que  $\kappa' = 0$  alors que  $\kappa \neq 0$ . Une autre façon de voir cela est de constater que dans le cas où  $r = a/2$ , la densité de particules peut rester à support compact uniformément en  $\varepsilon$  puisque les cellules ne communiquent pas entre elles : la solution  $F_\varepsilon$  de (4.13)-(4.14) ne peut donc en aucun cas converger vers la solution d'une équation de la chaleur, ce qui signifie que le développement asymptotique du Théorème 5 ne converge pas au sens des distributions.

Il est possible d'avancer une explication pour éclairer ce point. Dans la preuve de la Proposition 1, il n'est pas plus naturel d'approcher  $\psi(a\varepsilon k + r\varepsilon^\gamma \omega, \Omega)$  par  $\psi(a\varepsilon k, \Omega)$  dans le cas où  $\gamma = 1$  que par  $\psi(0)$  (par exemple). Cette approximation devient en revanche tout à fait naturelle si  $\gamma > 1$ . Dans ce cas, la fraction volumique des grains tend vers zéro. Il semble plus naturel de conjecturer que  $\kappa' = \kappa$  lorsque  $\gamma > 1$ . Mais alors, la valeur de  $\kappa$  ne cadre pas avec l'asymptotique de faible densité pour  $\kappa'$  (c'est-à-dire quand  $r \rightarrow 0$ ) dûe à Bunimovitch [9]. On doit alors tenir compte de deux faits : premièrement, comparer la valeur de  $\kappa$  pour  $\gamma > 1$  et la limite de  $\kappa'$  pour les faibles densités consiste en une intervention de limites qui n'est pas justifiée mathématiquement; deuxièmement, l'argument de Bunimovitch ne repose pas sur une preuve rigoureuse et complète.

### B. Extensions possibles de la méthode

a) La période du réseau peut-être arbitraire : réseau formé de triangles équilatéraux au lieu de carrés en dimension  $D = 2$ , etc... De même, la méthode présentée ici s'applique à tous les cas possibles de répartition des grains à l'intérieur de chaque période.

b) Il serait également possible de traiter le cas où les obstacles sont convexes de forme quelconque et non plus nécessairement sphériques; toutefois, les calculs d'intégrales dans l'Appendice C seraient beaucoup moins explicites.

c) Il est également possible de traiter le cas de lois de réflexions différentes de la loi de Descartes. Un premier exemple est celui de la réflexion complètement diffuse, où la condition aux limites (1.5) est remplacée par :

$$(6.2) \quad I(t, x, \Omega) = \alpha \int_{\Omega' \cdot n_x < 0} I(t, x, \Omega') |\Omega' \cdot n_x| d\Omega', \quad \text{pour } \Omega \cdot n_x > 0,$$

où

$$1/\alpha = \int_{\Omega' \cdot n_x < 0} |\Omega' \cdot n_x| d\Omega'.$$

Un second exemple est celui de la loi de réflexion de Maxwell :

$$(6.3) \quad I(t, x, \Omega) = (1-\theta) I(t, x, R(n_x) \cdot \Omega) + \theta \alpha \int_{\Omega' \cdot n_x < 0} I(t, x, \Omega') |\Omega' \cdot n_x| d\Omega',$$

pour  $\Omega \cdot n_x > 0$ , où  $0 < \theta \leq 1$ .

Il est également possible de traiter des lois de réflexions de la forme :

$$(6.4) \quad I(t, x, \Omega) = \alpha \int_{\Omega' \cdot n_x < 0} I(t, x, \Omega') k(\Omega, \Omega') |\Omega' \cdot n_x| d\Omega',$$

pour  $\Omega \cdot n_x > 0$ .

où  $k$  est une fonction assez régulière.

d) Le cas de lois de réflexion de type (6.2)-(6.3)-(6.4) est notablement plus simple que celui de la réflexion de Descartes envisagé dans ce travail. En effet, on peut alors démontrer l'approximation par la diffusion

dans le cas d'horizon fini; voir Bardos-Dumas-Golse [5]. La méthode repose sur les développements asymptotiques « à la Bensoussan-Lions-Papanicolaou » [7]. La simplification apportée par des lois de réflexion de type (6.2)-(5.3)-(6.4) réside dans le fait suivant.

Considérons par exemple le cas du réseau triangulaire décrit dans *A*. La période de ce billard peut être considérée comme la variété à bord compacte suivante :

$$Y = (\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z} e_1 \oplus \mathbb{Z} e_2} \bar{B}_r(ak)) / \mathbb{Z} e_1 \oplus \mathbb{Z} e_2,$$

où

$$e_1 = (1/2; \sqrt{3}/2), \quad e_2 = (1/2; -\sqrt{3}/2).$$

Soit alors le problème réduit dans  $Y$  :

$$(6.5) \quad \Omega \cdot \nabla_y \chi = g, \quad y \in Y, \quad \Omega \in S^1,$$

$\chi|_{\partial Y}$  satisfait (6.2) ou (6.3) ou (6.4);

Il est alors possible de démontrer pour (6.5) l'alternative de Fredholm : soit  $g$  une fonction bornée; le problème (6.5) admet une solution  $\chi$  bornée si et seulement si  $\int \int_{Y \times S^1} g(y, v) dy d\Omega = 0$ . Évidemment, il n'existe aucun énoncé analogue dans le cas de la loi de réflexion de Descartes. C'est précisément l'existence de l'alternative de Fredholm ci-dessus qui permet de conclure à la convergence des développements asymptotiques à la Bensoussan-Lions-Papanicolaou [7] dans le cas du billard avec réflexions diffuses : voir [5].

Toutefois, cette approche fournit une formule d'Einstein-Kubo analogue à (6.1) pour le calcul du coefficient de diffusion. Il n'est pas évident qu'elle coïncide avec la formule que donnerait sur le même problème de billard la méthode du Théorème 5. Dans le cas des réflexions diffuses, la formule d'Einstein-Kubo se prête bien à un calcul de type Monte-Carlo; dans un travail ultérieur [18], nous discuterons la validité de l'approximation fournie par la méthode du Théorème 5 en la comparant avec un calcul numérique de la formule d'Einstein-Kubo pour les réflexions diffuses.

**APPENDICE A**

**Un analogue multidimensionnel de la formule d'Euler-McLaurin**

Commençons par rappeler la formule d'Euler-McLaurin classique. Soit  $g \in C_0^\infty ]0, 1[$ ,  $n \geq 2$  et  $q \geq 0$ ; on a alors [26] :

$$(A.1) \quad \int_0^1 g(y) dy = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{(-1)^{q+1}}{q!} \frac{1}{n^{q+1}} \int_0^1 B_{q+1}(ny - [ny]) g^{(q+1)}(y) dy,$$

où  $B_q(x)$  désigne la suite des polynômes de Bernoulli, définie comme suit :

$$B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2},$$

$$\begin{cases} B_{n+1}(x) = n B_n(x) & \text{pour } n \geq 1, \\ B_{n+1}(0) = B_{n+1}(1) = \beta_n. \end{cases}$$

(Les nombres  $\beta_n$  sont appelés nombres de Bernoulli.)

Nous allons donner ici un analogue multidimensionnel de cette formule. Ceci nous servira à prouver la Proposition 1.

On raisonne maintenant dans  $]0, 1[^D$ , dont le point courant est noté  $x = (x_1, \dots, x_D)$ . On note également  $J_k$  et  $R_k^{q,n}$  les opérateurs suivants, agissant sur les fonctions de la variable  $x_k$  :

$$(A.2) \quad \begin{cases} J_k \psi = \int_0^1 \psi(x_k) dx_k, \\ R_k^{q,n} \psi = \frac{(-1)^q}{q!} \frac{1}{n^{q+1}} \\ \quad \times \int_0^1 B_{q+1}(nx_k - [nx_k]) \partial_{x_k}^{q+1} \psi(x_k) dx_k \end{cases}$$

où  $\psi \in C_0^\infty ]0, 1[$ . On observe alors que (A.1) s'écrit :

$$(A.3) \quad \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n-1} \delta_{l/n} = J_k + R_k^{q,n}$$

au sens des formes linéaires sur  $C_0^\infty ]0, 1[$ . Élevons (A.3) à la  $D$ -ième puissance tensorielle :

$$\frac{1}{n^D} \sum_{\substack{1 \leq l_k \leq n-1 \\ \text{pour } 1 \leq k \leq D}} \delta\left(\frac{l_1}{n}, \dots, \frac{l_D}{n}\right) = j_1 \otimes \dots \otimes j_D$$

$$+ \sum_{\substack{H_k \in \{J_k, R_k^{q_k, n_k}\} \\ H_1 \otimes \dots \otimes H_D \neq j_1 \otimes \dots \otimes j_D}} H_1 \otimes \dots \otimes H_D$$

Cette formule s'applique évidemment à des fonctions de la forme  $\psi(x) = \psi_1(x_1) \dots \psi_D(x_D)$ . Un argument classique de densité permet de l'écrire pour toutes les fonctions  $\psi \in C_0^\infty ]0, 1[^D$ , sous la forme suivante :

$$(A.4) \quad \frac{1}{n^D} \sum_{l \in \mathbb{Z}^D} \psi\left(\frac{l}{n}\right) = \int_{\mathbb{R}^D} \psi(x) dx$$

$$+ \sum_{p=1}^p \sum_{\substack{\{k_1, \dots, k_p\} \\ \subset \{1, \dots, D\}}} \frac{(-1)^{q_{k_1} + \dots + q_{k_p}}}{q_{k_1}! \dots q_{k_p}!} \cdot \frac{1}{n^{q_{k_1} + \dots + q_{k_p} + p}}$$

$$\int_{]0, 1[^D} \prod_{j=1}^p B_{q_{k_j} + 1}(nx_{k_j} - [nx_{k_j}]) \partial_{x_{k_1}}^{q_{k_1} + 1} \dots \partial_{x_{k_p}}^{q_{k_p} + 1} \psi(x) dx.$$

On peut considérer cette formule (A.4) comme une généralisation de la formule d'Euler-McLaurin en  $D$  dimensions. Voici une majoration simple (mais grossière) de l'erreur :

$$(A.5) \quad \left| \frac{1}{n^D} \sum_{l \in \mathbb{Z}^D} \psi\left(\frac{l}{n}\right) - \int_{\mathbb{R}^D} \psi(x) dx \right|$$

$$\leq C_{D, q} \frac{1}{n^{q+1}} \|\partial_{x_1}^{q+1} \dots \partial_{x_D}^{q+1} \psi\|_{L^\infty}$$

lorsqu'on choisit tous les  $q_k$  égaux (ainsi que tous les  $n_k$ ). Il est évidemment possible d'après (A.4) d'obtenir des estimations plus précises du reste. Toutefois, elles sont beaucoup plus techniques et n'apportent aucune amélioration de fond à cet article.

## APPENDICE B

## L'opérateur de collision asymptotique

(Preuves de la Proposition 1 et du Lemme 4)

(1) *Preuve de la Proposition 1*On sépare  $\Lambda_\varepsilon$  en deux termes : le terme d'absorption

$$(B.1) \quad \mathcal{A}_\varepsilon \psi = (c \Omega \cdot n_x)_- \psi |_{\Gamma_\varepsilon} \delta_{\Gamma_\varepsilon},$$

et le terme de réémission.

$$(B.2) \quad \mathcal{S}_\varepsilon \psi = (c \Omega \cdot n_x)_+ \psi |_{\Gamma_\varepsilon} \circ R(nx) \delta_{\Gamma_\varepsilon}.$$

On note  $\psi$  et  $\chi$  deux fonctions de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^D \times S^{D-1})$ .On note également  $\langle\langle \cdot \rangle\rangle$  l'intégration en  $x$  et  $\Omega$ , qui se prolonge au sens des distributions à support compact :

$$(B.3) \quad \langle\langle \psi \rangle\rangle = \int_{\mathbb{R}^D} \int_{S^{D-1}} \psi(x, \Omega) dx d\Omega$$

## Calcul du terme d'absorption asymptotique

On calcule d'abord :

$$(B.4) \quad \langle\langle (\mathcal{A}_\varepsilon \psi) \chi \rangle\rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}^D} \int_{S^{D-1}} (c \Omega \cdot \omega)_- (\varepsilon^\gamma r)^{D-1} d\omega \int_{S^{D-1}} \psi \chi(\varepsilon ak + \varepsilon^\gamma r \omega, \Omega) d\Omega.$$

On effectue ensuite le développement de Taylor de  $\psi \chi$  au point  $\chi = \varepsilon ak$  :

$$(B.5) \quad \begin{aligned} & \langle\langle (\mathcal{A}_\varepsilon \psi) \chi \rangle\rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^D} \int_{S^{D-1}} (c \Omega \cdot \omega)_- (\varepsilon^\gamma r)^{D-1} d\omega \\ & \quad \times \left\{ \int_{S^{D-1}} \psi \chi(\varepsilon ak, \Omega) d\Omega \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \int_{S^{D-1}} \sum_{m=1}^M \frac{1}{m!} \nabla_x^m (\psi \chi) (\varepsilon a k, \Omega) \cdot (\varepsilon^\gamma r \omega)^m d\Omega \\
& + \int_{S^{D-1}} \int_0^1 \frac{(1-t)^M}{M!} \nabla_x^{M+1} (\psi \chi) \\
& \times (\varepsilon a k + t \varepsilon^\gamma r \omega, \Omega) \cdot (\varepsilon^\gamma r \omega)^{M+1} d\Omega dt \Big\}.
\end{aligned}$$

Le point clef de cette preuve est l'observation suivante :

$$\begin{aligned}
\text{(B.6)} \quad & |(a\varepsilon)^D \sum_{k \in \mathbb{Z}^D} \nabla_x^m (\psi \chi) (\varepsilon a k, \Omega)| \\
& \leq C_{D,q} (a\varepsilon)^{q+1} \|\partial_{x_1}^{q+1} \dots \partial_{x_D}^{q+1} \nabla_x^m (\psi \chi)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D \times S^{D-1})}
\end{aligned}$$

qui découle de la formule d'Euler-McLaurin (A.5) : en effet,

$$\int_{\mathbb{R}^D} \nabla_x^m (\psi \chi) (x, \Omega) dx = 0,$$

puisque les fonctions  $\psi$  et  $\chi$  sont à support compact. On remarque ensuite que :

$$\begin{aligned}
\text{(B.7)} \quad & \left| (a\varepsilon)^D \sum_{k \in \mathbb{Z}^D} \int_{S^{D-1}} (c\Omega \cdot \omega)_- (\varepsilon^\gamma r)^{D-1} d\omega \right. \\
& \times \int_{S^{D-1}} \int_0^1 \frac{(1-t)^M}{M!} \nabla_x^{M+1} (\psi \chi) (\varepsilon a k + t \varepsilon^\gamma r \omega, \Omega) \\
& \times (\varepsilon^\gamma r \omega)^{M+1} d\Omega dt \Big| \\
& \leq C_{M,D, \text{supp}(\psi \chi)} \varepsilon^{\gamma(M+D)} \|\nabla_x^{M+1} (\psi \chi)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D \times S^{D-1})}
\end{aligned}$$

où  $C_{M,D, \text{supp}(\psi \chi)}$  est une constante positive dépendant de  $M$ ,  $D$  et de la taille du support de  $\psi \chi$ . Calculons enfin :

$$\begin{aligned}
\text{(B.8)} \quad & (a\varepsilon)^D \sum_{k \in \mathbb{Z}^D} \int_{S^{D-1}} (c\Omega \cdot \omega)_- (\varepsilon^\gamma r)^{D-1} d\omega \\
& \times \int_{S^{D-1}} \psi \chi (\varepsilon a k, \Omega) d\Omega \\
& = c(\varepsilon^\gamma r)^{D-1} I_1(D) \langle\langle \psi \chi \rangle\rangle + R_\varepsilon,
\end{aligned}$$

où le reste  $R_\varepsilon$  vérifie la majoration :

$$(B.9) \quad |R_\varepsilon| \leq C_{D,q,\text{supp}(\psi\chi)} \varepsilon^{\gamma(D-1)+q+1} \times \|\partial_{x_1}^{q+1} \dots \partial_{x_D}^{q+1}(\psi\chi)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D \times S^{D-1})}.$$

d'après la formule d'Euler-McLaurin (A.5), et où :

$$(B.10) \quad I_1(D) = \int_{S^{D-1}} (\Omega \cdot \omega)_- d\omega$$

sera calculée dans l'Appendice C.

En rassemblant les résultats (B.5) (B.6) (B.7) (B.8) (B.9), on voit que :

$$(B.11) \quad \left| \langle\langle (\mathcal{A}_\varepsilon \psi) \chi \rangle\rangle - \varepsilon^{(D-1)(\gamma-\gamma_c)} \frac{cr^{D-1}}{a^D} I_1(D) \langle\langle \psi \chi \rangle\rangle \right| \leq \sum_{m=1}^M C_{D,q,\text{supp}(\psi\chi)} \varepsilon^{q+1-D} \|\partial_{x_1}^{q+1} \dots \partial_{x_D}^{q+1} \nabla_x^m(\psi\chi)\|_{L^\infty} + C_{M,D,\text{supp}(\psi\chi)} \varepsilon^{\gamma(M+D)-D} \|\nabla_x^{M+1}(\psi\chi)\|_{L^\infty} + C_{D,q,\text{supp}(\psi\chi)} \varepsilon^{\gamma(D-1)+q+1-D} \times \|\partial_{x_1}^{q+1} \dots \partial_{x_D}^{q+1}(\psi\chi)\|_{L^\infty}$$

de sorte qu'une majoration grossière de l'erreur est :

$$(B.12) \quad \left| \langle\langle (\mathcal{A}_\varepsilon \psi) \chi \rangle\rangle - \varepsilon^{(D-1)(\gamma-\gamma_c)} \frac{cr^{D-1}}{a^D} I_1(D) \langle\langle \psi \chi \rangle\rangle \right| \leq C_{D,q,\text{supp}(\psi\chi)} \varepsilon^q \|\nabla_x^\rho(\psi\chi)\|_{L^\infty},$$

où  $\rho(q) = 1 + \left[ \frac{q+D}{\gamma} - D \right]^+$ .

**Calcul du terme de réémission asymptotique**

On procède pour ce calcul suivant les mêmes étapes que lors du calcul de l'absorption asymptotique. Il vient alors :

$$(B.13) \quad \left| \langle\langle (\mathcal{S}_\varepsilon \psi) \chi \rangle\rangle - \varepsilon^{(D-1)(\gamma-\gamma_c)} \frac{cr^{D-1}}{a^D} \langle\langle I_2(D_1 \psi) \chi \rangle\rangle \right| \leq C_{D,q,\text{supp}(\psi\chi)} \varepsilon^q \cdot \sup_{\Omega, \Omega'} \|\nabla_x^{\rho(q)}(\psi(\cdot, \Omega) \chi(\cdot, \Omega'))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D)},$$

où l'on a posé :

$$(B.14) \quad I_2(D, \psi) = \int_{S^{D-1}} (\Omega \cdot \omega)_+ \psi(x, R(\omega) \cdot \Omega) d\omega,$$

intégrale qui est calculée dans l'Appendice C.

En utilisant alors les calculs de l'Appendice C, on voit que la Proposition 1 est démontrée.

### Preuve du Lemme 4

Commençons par établir la compacité sur  $L^2(S^{D-1})$  de l'opérateur :

$$(B.15) \quad \psi \mapsto \int_{S^{D-1}} \frac{d\Omega'}{|\Omega - \Omega'|^{D-3}} \psi(\Omega')$$

Il suffit de remarquer que cet opérateur est de Hilbert-Schmidt :

$$\begin{aligned} & \int_{S^{D-1}} d\Omega \int_{S^{D-1}} \frac{d\Omega'}{|\Omega - \Omega'|^{2(D-3)}} \\ &= \int_{S^{D-1}} d\Omega \int_{S^{D-1}} \frac{d\Omega'}{|2 - 2\Omega' \cdot \Omega|^{D-3}} \\ &= |S^{D-1}| s(D) \int_0^\pi \frac{\sin^{D-1} \theta}{(2 - 2 \cos \theta)^{D-3}} d\theta < \infty \end{aligned}$$

lorsque  $D < 6$ . En fait l'opérateur ci-dessus est encore compact bien que non Hilbert-Schmidt lorsque  $D \geq 6$ ; nous laissons la démonstration au lecteur puisque  $D < 6$  épuise les cas physiquement intéressants  $D = 2$  ou  $3$ .

Comme le noyau de scattering de  $\wedge$  est isotrope (c'est une fonction de  $\Omega \cdot \Omega'$  seulement), il est classique de chercher  $\beta(\Omega)$  sous la forme :

$$\beta(\Omega) = \frac{a^D}{cr^{D-1}} \lambda \Omega$$

où  $\lambda$  est un scalaire indépendant de  $\Omega$ . Ce choix assure que :

$$\int_{S^{D-1}} \beta(\Omega) d\Omega = 0.$$

La relation (4.16) devient alors :

$$\frac{s(D)}{D-1} \lambda \Omega - \int_{S^{D-1}} \lambda \Omega' \frac{d\Omega'}{2|\Omega - \Omega'|^{D-3}} = \Omega,$$

ce qui, par projection sur le vecteur  $\Omega$ , donne :

$$\lambda \left( \frac{s(D)}{D-1} - \int_{S^{D-1}} \frac{\Omega' \cdot \Omega d\Omega'}{2|2 - 2\Omega' \cdot \Omega|^{(D-3)/2}} \right) = 1,$$

soit :

$$(B.17) \quad \lambda = \left( \frac{s(D)}{D-1} - I_3(D) \right)^{-1}$$

où la valeur de :

$$I_3(D) = \int_{S^{D-1}} \frac{\Omega \cdot \Omega' d\Omega'}{4|2 - 2\Omega \cdot \Omega'|^{(D-3)/2}}$$

est calculée dans l'Appendice C. Ceci démontre le Lemme 4.

## APPENDICE C

### Calcul de certaines intégrales

$$(C.1) \quad I_1(D) = \int_{S^{D-1}} (\Omega \cdot \omega)_- d\omega = \int_{S^{D-1}} (\Omega \cdot \omega)_+ d\omega = I_2(D, 1)$$

On pose alors :

$$(C.2) \quad I_2(D, \psi) = \int_{S^{D-1}} (\Omega \cdot \omega)_+ \psi(R(\omega) \cdot \Omega) d\omega$$

et on effectue le changement de variables

$$\omega \mapsto (\theta, \omega'), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad |\omega'| = 1, \quad \Omega \cdot \omega' = 0,$$

où  $\omega$  est donné par :

$$(C.3) \quad \omega = \cos \theta \Omega + \sin \theta \omega',$$

ce qui revient à dire que :

$$(C.4) \quad \theta = \text{Arc cos} (\Omega, \omega).$$

Le calcul de  $I_1$  s'ensuit immédiatement :

$$(C.5) \quad I_1(D) = \int_{S^{D-1}} (\Omega \cdot \omega)_+ d\omega = s(D) \int_0^{\pi/2} \cos \theta (\sin \theta)^{D-2} d\theta = \frac{s(D)}{D-1},$$

où  $s(D) = 2$  si  $D = 2$ ,  $s(D) = |S^{D-2}|$  si  $D > 2$ .

Pour calculer  $I_2(D, \psi)$ , il faut calculer l'image de la mesure  $d\omega$  par l'application  $\omega \mapsto R(\omega) \cdot \Omega$  (observer que  $(\Omega \cdot \omega)_+ = 1/2 |\Omega - R(\omega) \cdot \Omega|$ ). On pose donc  $R(\omega) \cdot \Omega = \Omega'$ , de sorte que :

$$(C.6) \quad \Omega' = \cos(2\theta) \Omega + \sin(2\theta) \omega'.$$

Alors

$$(C.7) \quad d\omega = d\theta (\sin \theta)^{D-2} d\omega'$$

et

$$(C.8) \quad d\Omega' = 2 d\theta (\sin(2\theta))^{D-2} d\omega'$$

Le jacobien du changement de variable

$$(C.9) \quad \left| \frac{D\Omega'}{D\omega} \right| = 2(2 \cos \theta)^{D-2} = 2 |\Omega - \Omega'|^{D-2}.$$

Si bien que :

$$(C.10) \quad I_2(D, \psi) = \int_{S^{D-1}} \psi(\Omega') \frac{d\Omega'}{4 |\Omega - \Omega'|^{D-3}}.$$

Le calcul de  $I_3(D)$  s'effectue alors facilement :

$$\begin{aligned}
\text{(C.11)} \quad I_3(D) &= \int_{S^{D-1}} \frac{\Omega \cdot \Omega' d\Omega'}{4 |\Omega - \Omega'|^{D-3}} \\
&= \int_{S^{D-1}} \frac{\Omega \cdot \Omega' d\Omega'}{4 |2 - 2\Omega \cdot \Omega'|^{(D-3)/2}} \\
&= s(D) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2\theta) (\sin 2\theta)^{D-2} d\theta}{2 |2 - 2\cos 2\theta|^{(D-3)/2}} \\
&= s(D) \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta \frac{(2 \sin \theta \cos \theta)^{D-2} d\theta}{2 (4 \sin^2 \theta)^{(D-3)/2}} \\
&= s(D) \int_0^{\pi/2} (2 \cos^2 \theta - 1) (\cos \theta)^{D-2} \sin \theta d\theta \\
&= s(D) \int_0^1 (2y^D - y^{D-2}) dy = s(D) \left( \frac{2}{D+1} - \frac{1}{D-1} \right).
\end{aligned}$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. AGOSHKOV, Nekotorye voprocyy teorii i priblizhennogo resheniya zadach o perenocе chastitz, Moscou, 1984 (en russe).
- [2] M. ARTOLA, Homogénéisation d'un problème relatif à l'équation de la chaleur non linéaire, Note CEA (CELV 15/09/83).
- [3] H. ATTOUCH, Homogénéisation; Séminaire Bourbaki, exposé 686, Novembre 1987.
- [4] C. BARDOS, Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, vol. **4**, 1969, p. 125-233.
- [5] C. BARDOS, L. DUMAS et F. GOLSE, Diffusion de particules par un réseau d'obstacles circulaires, *C. R. Acad. Sci. Série II*, vol. **315**, 1992, p. 1433.
- [6] C. BARDOS, R. SANTOS et R. SENTIS, Diffusion Approximation and Computation of the Critical Size, *Trans. of the AMS*, vol. **284**, 1984, p. 617-649.
- [7] A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS et G. PAPANICOLAOU, *Asymptotic Study of Periodic Structures*, North Holland.
- [8] C. BOLDIGHRINI, L. BUNIMOVITCH et Ya SINAI, On the Boltzmann Equation for the Lorentz Gas, vol. **32**, 1983, p. 477-502.
- [9] L. BUNIMOVITCH, On Decrease of Correlations in Dynamical Systems with Chaotic Behavior, *JETP*, vol. **89**, 1985, p. 1452-1470.
- [10] L. BUNIMOVITCH et Ya SINAI, Markov Partitions of Dispersed Billiards, *Commun. Math. Phys.* vol. **73**, 1980, p. 247-280.
- [11] L. BUNIMOVITCH et Ya SINAI, Statistical Properties of the Lorentz Gas with Periodic Configuration of Scatterers, *Commun. Math. Phys.*, vol. **78**, 1981, p. 479-497.
- [12] L. BUNIMOVITCH, Ya SINAI et N. CHERNOV, Markov Partitions for Two-Dimensional Hyperbolic Billiards, *Russian Math. Surveys*, vol. **45**, 1990, p. 105-152.
- [13] M. CESSENAT, Théorèmes de trace  $L^p$  pour les espaces de fonctions de la neutronique, *C.R. Acad. Sci.*, vol. **300**, 1985, p. 89-92.

- [14] R. DiPERNA et P. L. LIONS, Ordinary Differential Equations; Transport Theory and Sobolev Spaces, *Inv. Math.*, vol. **98**, 1989, p. 511.
- [15] F. GOLSE, Remarques sur l'homogénéisation des équations de transport, *C.R. Acad. Sci.*, vol. **305**, 1987, p. 801-804.
- [16] F. GOLSE, Particle Transport in Nonhomogeneous Media; in *Mathematical Aspects of Fluid and Plasma Physics*, et G. TOSCANI, V. BOFFI et S. RIONERO ed., *Lecture Notes in Math.* 1460, Springer Verlag.
- [17] F. GOLSE, Transmission d'énergie radiative à un grain opaque, notes manuscrites.
- [18] F. GOLSE, Travail en préparation.
- [19] F. GOLSE et R. SENTIS, Radiative Transfer in Nonhomogeneous Media, en préparation.
- [20] L. HORMANDER, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Springer-verlag.
- [21] E. LARSEN, G. POMRANING et V. BADHAM, Asymptotic Analysis of Radiative Transfer Problems, *J. of Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer.*, vol. **29**, 1983, p. 285-310.
- [22] C. LEVERMORE, G. POMRANING, D. SANZO et J. WONG, Linear Transport Theory in a Random Medium, *J. of Math. Phys.*, vol. **27**, 1987, p. 2526-2536.
- [23] C. LEVERMORE, G. POMRANING, D. SANZO et J. WONG, Renewal Theory for Transport Processes in Binary Statistical Mixtures, *J. of Math. Phys.*, vol. **29**, 1988, p. 995-1004.
- [24] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann.
- [25] H. SPOHN, The Lorentz Flight Process Converges to a Random Flight Process, *Commun. Math. Phys.*, vol. **60**, 1978, p. 277.
- [26] G. VALIRON, *Théorie des fonctions*, Gauthier-Villars.
- [27] D. VANDERHAEGEN, Radiative Transfer in Statistically Heterogeneous Mixtures, *J. of Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer.*, vol. **36**, 1986, p. 557.
- [28] C. BARDOS, Une interprétation des relations existant entre les équations de Boltzmann, de Navier-Stokes et d'Euler à l'aide de l'entropie, *Matematica Aplicada e Computacional*, vol. **6**, 1987, p. 97-117.
- [29] C. BARDOS, F. GOLSE et D. LEVERMORE, Macroscopic Limits of Kinetic Equations, in *Multidimensional Hyperbolic Problems and Computations*, J. Glimm & Majda eds., IMA, vol. **29**, 1991, p. 1-12, Springer Verlag, New York.
- [30] D. LEVERMORE et G. ZIMMERMAN, Modeling Charged Particle Loss in a Fuel-Shell Mixture, soumis à *J. of Math. Phys.*
- [31] R. RICHTMEYER, *Comm. on Pure and Applied Math.*, vol. **13**, 1960, p. 297.
- [32] E. MESHKOV, *Izv. Akad. Nauk SSSR*, (Mekh. Zhidk. Gaz), vol. **5**, 1969, p. 151.
- [33] R. McCRORY, L. MONTIERTH, R. MORSE et C. VERDON, *Phys. Review Letters*, vol. **46**, 1981, p. 336.

(Manuscrit reçu le 9 décembre 1993.)