

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

BEKKAI MESSIRDI

Asymptotique de Born-Oppenheimer pour la prédissociation moléculaire (cas de potentiels réguliers)

Annales de l'I. H. P., section A, tome 61, n° 3 (1994), p. 255-292

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1994__61_3_255_0

© Gauthier-Villars, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Asymptotique de Born-Oppenheimer pour la prédissociation moléculaire (cas de potentiels réguliers)

par

Bekkai MESSIRDI

Université de Paris-Nord
Institut Galilée

Département de Mathématiques
av. J.-B.-Clément, 93340 Villetaneuse, France

RÉSUMÉ. – On étudie l'opérateur $P = -h^2 \Delta_x - \Delta_y + V(x, y)$ sur $\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_y^p$ lorsque h tend vers 0, et V est un potentiel régulier. On se place dans un cas où deux niveaux électroniques se croisent dans la zone classiquement interdite, et où des résonances de P apparaissent. On montre que ces résonances ont un développement asymptotique réel en $h^{1/2}$ et qu'elles ont une partie imaginaire exponentiellement petite quand h tend vers 0.

ABSTRACT. – We study the operator $P = -h^2 \Delta_x - \Delta_y + V(x, y)$ on $\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_y^p$ when h tends to zero, and V is a smooth potential. We consider a case where two electronic levels cross in the classical forbidden region, and where resonances of P appear. We prove that P has resonances with a real asymptotic expansion in $h^{1/2}$ and that their widths are exponentially small as h tends to zero.

INTRODUCTION

Dans ce travail, on étudie les propriétés spectrales de $P = -h^2 \Delta_x - \Delta_y + V(x, y) = -h^2 \Delta_x + Q(x)$ dans $\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_y^p$ lorsque h tend vers 0

près d'un niveau d'énergie E_0 fixé. Si $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$, $\lambda_3(x)$ désignent les trois premières valeurs propres de $Q(x)$, on se place dans la situation où λ_2 admet un minimum strict non dégénéré de valeur E_0 et croise λ_3 sur un compact K de \mathbf{R}_x^n , K étant disjoint du puits de potentiel créée par λ_2 , et λ_1 restant en dessous de E_0 .

En particulier λ_2 , λ_3 et leurs fonctions propres associées u_2 et u_3 perdent leurs régularités lorsqu'on s'approche de K . Pour palier à ce problème on construit une base de l'espace propre associé à $\{\lambda_2(x), \lambda_3(x)\}$ qui soit $C^\infty(\mathbf{R}_x^n)$ et qui coïncide avec $\{u_2(x, y), u_3(x, y)\}$ pour x à l'extérieur d'un voisinage de K assez petit. Pour cette nouvelle base on peut définir les résonances de P près du niveau d'énergie E_0 à partir d'une dilatation analytique U_θ en x . On montre que ces résonances admettent des développements asymptotiques réels en puissance de $h^{1/2}$, et en particulier la partie imaginaire de ces résonances est $\mathcal{O}(h^\infty)$.

Par la méthode de Feshbach on se ramène à un opérateur matriciel 3×3 qui permet de réduire le problème spectral initial à un problème dans $L^2(\mathbf{R}_x^n) \oplus L^2(\mathbf{R}_x^n) \oplus L^2(\mathbf{R}_x^n)$.

On met une condition de viriel sur λ_1 et λ_3 assurant que $-h^2 \Delta_x + \lambda_1(x)$ et $-h^2 \Delta_x + \lambda_3(x)$ ne créent pas de résonances près du niveau E_0 .

On se ramène ensuite à un opérateur 2×2 , H_E^θ sur $L^2(\mathbf{R}_x^n) \oplus L^2(\mathbf{R}_x^n)$ de terme principal $-e^{-2\theta} h^2 \Delta_x I + M(x, \theta)$, où $M(x, \theta)$ est une matrice multiplicative dont les valeurs propres sont les dilatées $\lambda_2^\theta(x)$ et $\lambda_3^\theta(x)$ de $\lambda_2(x)$ et $\lambda_3(x)$, et $M(x, \theta) = \begin{pmatrix} \lambda_2^\theta(x) & 0 \\ 0 & \lambda_3^\theta(x) \end{pmatrix}$ à l'extérieur d'un voisinage de K assez petit.

On étudie alors les propriétés spectrales de H_E^θ en utilisant les techniques de [8], ainsi que la dépendance non linéaire de H_E^θ par rapport au paramètre d'énergie E . On utilise finalement des constructions BKW pour obtenir les développements asymptotiques des résonances proches de E_0 . La deuxième partie de ce travail consiste à montrer que ces résonances ont une partie imaginaire $\mathcal{O}(e^{-C/h})$, $C > 0$. Par des inégalités d'Agmon on montre la décroissance exponentielle des fonctions propres de H_E^θ , et donc celles de P_θ , ensuite les résultats de [14], § 3 et 4, nous permettent de conclure.

Une telle situation correspond au cas physique appelé prédissociation moléculaire, et a déjà été étudiée par M. Klein dans [9]. Cependant, ce dernier supposait la réduction de Feshbach déjà faite, et travaillait avec une matrice 2×2 d'opérateurs différentiels semi-classiques, et de symbole principal diagonal. Bien que ce soit son article qui a motivé notre étude, celle-ci révèle néanmoins qu'en pratique, la matrice d'hamiltoniens effectifs

décrivant le phénomène est plus compliquée que celle qu'il a considérée dans [9].

Dans un futur travail, on généralisera ces résultats au cas physique des potentiels Coulombiens, du moins pour ce qui concerne les molécules diatomiques (cf. [15], [16]).

L'auteur remercie vivement A. Martinez pour ses encouragements et pour les nombreuses discussions qui ont contribué à l'élaboration de ce travail.

Le plan est le suivant :

1. Hypothèses, dilatation analytique et résultats.
2. Choix d'une base électronique.
3. Méthode de Feshbach par le problème de Grushin dilaté.
4. Réduction de l'opérateur de Feshbach.
5. Localisation des résonances. Constructions BKW.
6. Propriétés de l'opérateur H_E^θ .
7. Développements asymptotiques des résonances.
8. Largeur des résonances.

1. HYPOTHÈSES, DILATATION ANALYTIQUE ET RÉSULTATS

On étudie les propriétés spectrales de l'opérateur différentiel :

$$P = -h^2 \Delta_x - \Delta_y + V(x, y) = -h^2 \Delta_x + Q(x); \quad Q(x) = -\Delta_y + V(x, y)$$

dans $\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_y^p$, lorsque h tend vers 0.

Si $m = m(y)$ est une fonction continue sur \mathbf{R}_y^p avec $m(y) \geq 1$, on posera $mL^\infty(\mathbf{R}_y^p) = \{f \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}_y^p); m^{-1}(y)f \in L^\infty(\mathbf{R}_y^p)\}$. Pour $\delta > 0$, on note :

$$D_\delta = \{x \in \mathbf{C}^n; |\text{Im } x| \leq \delta \langle \text{Re } x \rangle\}$$

(avec la notation $\langle t \rangle = \sqrt{1+t^2}$), et $\mathcal{A}(\delta, m)$ l'espace des fonctions de D_δ dans $mL^\infty(\mathbf{R}_y^p)$ qui sont holomorphes et bornées en x dans D_δ .

HYPOTHÈSES.

(H1) Il existe $m(y) \geq 1$, continue sur \mathbf{R}_y^p , $V_1 \in \mathcal{A}(\delta, 1)$ et $V_2 \in \mathcal{A}(\delta, m)$ tels que $V = V_1 + V_2$, avec :

$$\begin{cases} \exists C > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathbf{R}^n, V_2(x, y) m^{-1}(y) \geq \frac{1}{C} \\ \text{et } |\nabla_y V_2| m^{-1}(y) \leq C \text{ presque partout sur } \mathbf{R}_y^p. \end{cases}$$

En particulier pour $V \in \mathcal{A}(\delta, 1)$ l'hypothèse (H1) est toujours satisfaite, et par les formules de Cauchy on a : $m^{-1}(y) \partial_x^\alpha V = \mathcal{O}(\langle x \rangle^{-|\alpha|})$ pour $x \in D_{\delta'}$, $\delta' < \delta$.

Les extensions de Friedrichs (cf. [17]), de P et $Q(x)$ (notées par les mêmes lettres) sont de domaines respectifs :

$$D_P = \{u \in H^2(\mathbf{R}^{n+p}); m(y)u \in L^2(\mathbf{R}^{n+p})\}$$

$$D_Q = \{v \in H^2(\mathbf{R}_y^p); m(y)v \in L^2(\mathbf{R}_y^p)\}$$

munis de leurs structures naturelles d'espaces de Hilbert. En particulier le domaine de $Q(x)$ est indépendant de x (cf. [12]).

(H2)

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \# \sigma_{pp}(Q(x)) \geq 3.$$

On désigne par $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$, $\lambda_3(x)$ les trois premières valeurs propres de $Q(x)$, dont l'indexation résultera des hypothèses suivantes.

A cause de l'hypothèse (H1), on en déduit que $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ et $\lambda_3(x)$ sont uniformément bornées par rapport à x .

(H3)

$$\lambda_2 \geq 0, \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \lambda_1(x) < 0; \liminf_{|x| \rightarrow \infty} \lambda_2(x) > 0$$

$$\lambda_2^{-1}(0) = \{0\}, \lambda_2''(0) > 0$$

$$\forall j, k \in \{1, 2, 3\}, j \neq k, \liminf_{|x| \rightarrow \infty} |\lambda_j(x) - \lambda_k(x)| > 0$$

$$\lambda_4(x) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{\sigma(Q(x)) \setminus \{\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x)\}\} > 0$$

$$\exists \varepsilon_0 > 0 / \forall x \in \mathbf{R}^n, \lambda_1(x) + \varepsilon_0 < \lambda_3(x).$$

On suppose aussi $\forall x \in \mathbf{R}^n, \forall \lambda \in \text{sp}(Q(x)) \setminus \{\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x)\} :$

$$\inf_{1 \leq j \leq 3} |\lambda - \lambda_j(x)| > 0$$

on note

$$K = \{x \in \mathbf{R}^n; \lambda_2(x) = \lambda_3(x)\}$$

on remarque que K est compact d'après (H3), et pour $\delta > 0$ on note aussi :

$$K_\delta = \{x \in \mathbf{R}^n; \text{dist}(x, K) \leq \delta\}$$

où dist désigne la distance euclidienne sur \mathbf{R}^n .

(H4) $\exists \delta_0 > \delta_1 > 0$ tel que les composantes connexes de $K_{\delta_0} \setminus K_{\delta_1}$ et celles de $\mathbf{R}^n \setminus K_{\delta_1}$ sont simplement connexes. K_{δ_0} ne contient pas 0.

Soit $d > 0$ assez petit tel que $\{x \in \mathbf{R}^n; \lambda_3(x) \geq 2d\} \supset K_{\delta_0}$, ainsi que Ω_1, Ω_2 deux ouverts de \mathbf{R}^n tels que $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \mathbf{R}^n$, $\Omega_1 \subset \left\{ x \in \mathbf{R}^n; \lambda_3(x) \geq \frac{d}{2} \right\}$ et $\Omega_2 \subset \{x \in \mathbf{R}^n; \lambda_3(x) \leq d\}$.

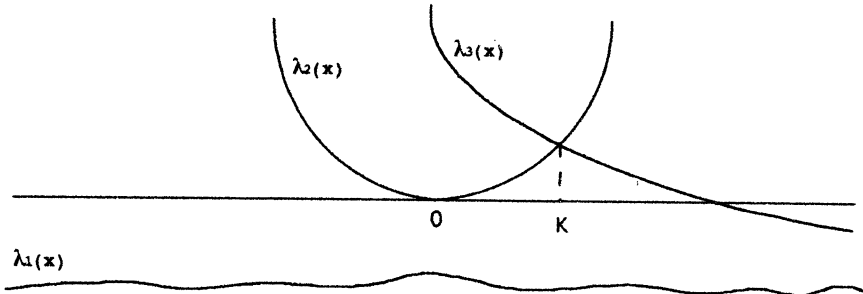
On suppose aussi que λ_1 et λ_3 ne créent pas de résonances près du niveau 0, plus précisément on met les conditions de viriel suivantes sur λ_1 et λ_3 :

(H5)

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^n} (2\lambda_1(x) + x \cdot \nabla \lambda_1(x)) < 0$$

$$\sup_{\{x \in \mathbf{R}^n / \lambda_3(x) \leq d\}} (2\lambda_3(x) + x \cdot \nabla \lambda_3(x)) < 0.$$

On considère donc la situation suivante :



On désigne par $u_j(x, y)$ la fonction propre de $Q(x)$, réelle et normalisée dans $L^2(\mathbf{R}_y^p)$, associée à $\lambda_j(x)$, $j \in \{1, 2, 3\}$. En particulier $u_1(x, y)$ et $\lambda_1(x)$ sont de classe C^∞ sur \mathbf{R}_x^n , $u_2(x, y)$, $u_3(x, y)$, $\lambda_2(x)$ et $\lambda_3(x)$ sont de classe C^∞ à l'extérieur d'un voisinage assez petit de K (cf. [13]), mais leur régularité sur K n'est pas garantie à cause de l'hypothèse de croisement.

En fait un modèle standard est donné par la matrice $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & -x_1 \end{pmatrix}$:

A est de classe C^∞ sur \mathbf{R}^2 admettant pour valeurs propres $\lambda^\pm = \pm(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$; λ^+ et λ^- coïncident en $x_1 = x_2 = 0$; de plus λ^\pm et les fonctions propres associées ne sont pas dérivables en 0. Pour palier à ce problème c'est la base construite au § 2 ci-dessous que nous utiliserons dans la réduction de Feshbach du dilaté analytique de P .

DILATATION ANALYTIQUE.

Notons U_θ l'opérateur de dilatation en x , défini pour θ réel assez petit par (cf. [1]) :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+p}), (U_\theta \varphi)(x, y) = e^{\frac{n\theta}{2}} \varphi(xe^\theta, y)$$

U_θ se prolonge en un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbf{R}^{n+p})$ puisque $U_\theta^* = U_{-\theta} = U_\theta^{-1}$, donc l'opérateur unitairement conjugué à P , $P_\theta = U_\theta P U_\theta^{-1}$ est auto-adjoint de domaine D_P .

$$P_\theta = -h^2 e^{-2\theta} \Delta_x - \Delta_y + V(xe^\theta, y) = -h^2 e^{-2\theta} \Delta_x + Q(xe^\theta)$$

grâce à (H1) $(Q(xe^\theta))_{|\theta| \text{ assez petit}}^{\theta \in \mathbf{R}}$, donc aussi $(P_\theta)_{|\theta| \text{ assez petit}}^{\theta \in \mathbf{R}}$ se prolongent en des familles analytiques en θ , pour $\theta \in \mathbf{C}$, $|\theta|$ assez petit. De plus on note pour tout x en dehors d'un voisinage assez petit de K et $y \in \mathbf{R}^p$, $u_j^\theta(x, y) = u_j(xe^\theta, y)$ une fonction propre de $Q(xe^\theta)$ associée à la valeur propre $\lambda_j^\theta(x) = \lambda_j(xe^\theta)$, $j \in \{1, 2, 3\}$. On définit les résonances de P comme étant les valeurs propres de P_θ , $\theta \in i]0, \delta[$, $\delta > 0$ assez petit, celles-ci ne dépendent pas du choix de θ et sont situées dans le demi-plan inférieur $\{z \in \mathbf{C}; \text{Im } z \leq 0\}$.

Remarque 1.1 (cf. [14]). – Pour $\theta \in \mathbf{C}$, $|\theta|$ assez petit, on a :

$$(i) \quad \text{Re} \langle Q(xe^\theta) \hat{\Pi}_\theta u, \hat{\Pi}_\theta u \rangle \geq \delta_2 \|\hat{\Pi}_\theta u\|^2$$

$$\text{Re } e^{-2\theta} \langle \nabla_x \hat{\Pi}_\theta u, \nabla_x \hat{\Pi}_{\bar{\theta}} \hat{\Pi}_\theta u \rangle \geq \frac{1}{C_1} \|\nabla_x \hat{\Pi}_\theta u\|^2 - \mu_1 \|\hat{\Pi}_\theta u\|^2$$

$$\forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+p}), \quad C_1 > 0, \quad 0 < \mu_1 < \delta_2$$

$\hat{\Pi}_\theta$ est la projection sur l'orthogonal de l'espace propre de $Q(xe^\theta)$ associé à $\{\lambda_1^\theta(x), \lambda_2^\theta(x), \lambda_3^\theta(x)\}$.

(ii) $\exists C_2 > 0$ tel que :

$$\text{Im}(e^{2\theta} \lambda_3^\theta(x)) \leq -\frac{|\theta|}{C_2} \quad \text{sur } \Omega_2$$

(iii) $\exists \delta_3 > 0$ tel que, $\delta_3 |x|^2 \leq \text{Re}(e^{2\theta} \lambda_2^\theta(x)) \leq 2\delta_3 |x|^2$ dans un voisinage assez petit de 0 contenant $\{x \in \mathbf{R}^n; |x| < |\theta|\}$, et

$$0 < \delta_4 = \inf \text{dist}(\lambda_2^{\pm\theta}(x), \sigma(Q(xe^{\pm\theta})) \setminus \{\lambda_2^{\pm\theta}(x)\}).$$

RÉSULTATS. – Soit $C_0 > 0$ fixé en dehors du spectre de $H_0 = -\Delta_x + \frac{1}{2} \langle \lambda_2''(0)x, x \rangle$, notons $\{e_1, \dots, e_{N_0}\}$ les valeurs propres de H_0 dans $[0, C_0]$ on a alors le résultat suivant :

THÉORÈME 1.2. – *Sous les hypothèses (H1) à (H5) et pour $h > 0$ assez petit, P admet exactement N_0 résonances dans $[-\varepsilon, C_0 h] + i[-\varepsilon, \varepsilon]$ notées $\rho_1(h), \dots, \rho_{N_0}(h)$, et pour tout j , $\rho_j(h)$ admet un développement asymptotique réel du type :*

$$\rho_j(h) \sim e_j h + \sum_{k \geq 1} \alpha_{j,k} h^{1+k/2}, \quad (\alpha_{j,k} \in \mathbf{R}).$$

De plus $\exists \varepsilon_0 > 0 / |\operatorname{Im} \rho_j(h)| = \mathcal{O}(e^{-\varepsilon_0/h})$, uniformément pour $h > 0$ assez petit.

Remarque 1.3. – Pour vérifier si les $\rho_j(h)$ peuvent ou non être des valeurs propres prolongées de P , on renvoie le lecteur intéressé par cette question aux travaux de [17], Tome IV, Chapitre XIII.

2. CHOIX D'UNE BASE ÉLECTRONIQUE

Pour $\theta \in \mathbf{C}$, $|\theta|$ assez petit, notons $\Pi_{23}^\theta(x) = U_\theta \Pi_{23}(x) U_\theta^{-1}$ où $\Pi_{23}(x)$ est la projection sur l'espace propre de $Q(x)$ associé à $\{\lambda_2(x), \lambda_3(x)\}$. Pour construire une base adéquate C^∞ sur \mathbf{R}^n , de $\operatorname{Im} \Pi_{23}^\theta(x)$ nous avons d'abord le lemme suivant dont la preuve est analogue à celle de [13], lemme 2.1:

LEMME 2.1. – (i) *L'opérateur $(Q(xe^\theta) - Q(x))$ est borné de $L_m^2(\mathbf{R}^p) = \{u; m(y)u \in L^2 \mathbf{R}^p\}$ dans $L^2(\mathbf{R}^p)$ et vérifié $\|Q(xe^\theta) - Q(x)\|_{\mathcal{L}(L_m^2, L^2)} = \mathcal{O}(|\theta|)$, uniformément par rapport à x .*

(ii) $\|\Pi_{23}^\theta(x) - \Pi_{23}\|_{\mathcal{L}(L^2)} = \mathcal{O}(|\theta|)$, uniformément par rapport à x .

Remarque 2.2. – Grâce aux hypothèses (H3) (et notamment le fait que $d(\lambda_1, \{\lambda_2, \lambda_3\})$ reste minoré par une constante positive) et au lemme 2.1, il est facile de vérifier que $\Pi_{23}^\theta(x)$ dépend de manière C^∞ de x sur \mathbf{R}^n .

PROPOSITION 2.3. – *Pour $\theta \in \mathbf{C}$, θ fixé, $|\theta|$ assez petit, on peut trouver une base $\{w_2^\theta(x, y), w_3^\theta(x, y)\}$ de $\operatorname{Im} \Pi_{23}^\theta(x)$ telle que, pour $j, k \in \{2, 3\}$:*

$$w_j^\theta \in C^\infty(\mathbf{R}^n, D_Q), \quad \langle w_j^\theta, w_k^\theta \rangle_y = \delta_{j,k} \quad \text{sur } \mathbf{R}^n, \quad \text{et } \omega_j^\theta = u_j^\theta$$

à l'extérieur d'un voisinage assez petit de K . ($\langle \cdot, \cdot \rangle_y$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\mathbf{R}_y^p)$).

Preuve. – $\Pi_{23}(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathcal{L}(D_q, L^2(\mathbf{R}^p)))$, et définit un fibré vectoriel trivial puisque \mathbf{R}^n est contractible. Par conséquent il existe deux sections (que l'on peut prendre réelles) de classe $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ de ce fibré,

$v_2(x, y)$ et $v_3(x, y)$ telles que : $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $\{v_2(x, y), v_3(x, y)\}$ forme une base orthonormale de $\text{Im } \Pi_{23}(x)$. D'après (H4), il est facile de voir que l'on peut également prendre $u_j \in C^\infty(\mathbf{R}^n \setminus K_{\delta_1}, D_Q)$ pour $j \in \{2, 3\}$. En particulier pour tout $x \in \mathbf{R}^n \setminus K_{\delta_1}$, il existe une matrice 2×2 orthogonale $\mathcal{R}(x)$ régulière en x telle que $\forall y \in \mathbf{R}^p$, on ait :

$$\begin{pmatrix} v_2(x, y) \\ v_3(x, y) \end{pmatrix} = \mathcal{R}(x) \begin{pmatrix} u_2(x, y) \\ u_3(x, y) \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Quitte à changer l'ordre des sections $\{v_2, v_3\}$ on peut supposer que $\mathcal{R}(x) \in O^+(2)$, plus précisément on a :

$$\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}(x, \alpha(x)) = \begin{pmatrix} \cos \alpha(x) & -\sin \alpha(x) \\ \sin \alpha(x) & \cos \alpha(x) \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

où $\alpha(x)$ est l'angle, défini modulo 2π , de la rotation $\mathcal{R}(x)$. L'application :

$$\begin{aligned} K_{\delta_0} \setminus K_{\delta_1} &\rightarrow O^+(2) \simeq S^1 \\ x &\mapsto \mathcal{R}(x) \end{aligned}$$

est de classe C^∞ , et donc par (H4) et la propriété caractéristique des revêtements universels, elle se relève en une application C^∞ :

$$\begin{aligned} K_{\delta_0} \setminus K_{\delta_1} &\rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto \alpha(x) \end{aligned}$$

posons :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\alpha}(x) &= \chi(x) \alpha(x) \\ \tilde{\mathcal{R}}(x) &= \mathcal{R}(x, \tilde{\alpha}(x)) \end{aligned} \right\} \tag{2.3}$$

où $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $0 \leq \chi \leq 1$, $\text{supp } (\chi) \subset K_{\delta_0}$, et $\chi = 1$ près de K_{δ_1} . On définit ensuite les vecteurs \tilde{w}_2 et \tilde{w}_3 dans $\text{Im } \Pi_{23}(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}^n$, par :

$$\begin{pmatrix} \tilde{w}_2(x, y) \\ \tilde{w}_3(x, y) \end{pmatrix} = \tilde{\mathcal{R}}(x) \begin{pmatrix} u_2(x, y) \\ u_3(x, y) \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Par construction $\tilde{w}_j \in C^\infty(\mathbf{R}^n, D_Q)$, $\tilde{w}_j(x, y) = v_j(x, y)$ sur K_{δ_1} , $\tilde{w}_j(x, y) = u_j(x, y)$ sur $\mathbf{R}^n \setminus K_{\delta_0}$, $j \in \{2, 3\}$, et $\{\tilde{w}_2(x, y), \tilde{w}_3(x, y)\}$ forme une base de $\text{Im } \Pi_{23}(x)$. Posons ensuite pour $\theta \in \mathbf{C}$, $|\theta|$ assez petit,

$$\begin{cases} \tilde{w}_2^\theta(x, y) = \Pi_{23}^\theta(x) [\tilde{w}_2(x, y) - (1 - \chi(x)) \Pi_3^\theta(x) \tilde{w}_2(x, y)] \\ \tilde{w}_3^\theta(x, y) = \Pi_{23}^\theta(x) [\tilde{w}_3(x, y) - (1 - \chi(x)) \Pi_2^\theta(x) \tilde{w}_3(x, y)] \end{cases} \tag{2.5}$$

($\Pi_j^\theta(x) = U_\theta \Pi_j(x) U_\theta^{-1}$, où $\Pi_j(x)$ est la projection sur $u_j(x, y)$, $j \in \{2, 3\}$). Alors $\tilde{w}_j^\theta \in C^\infty(\mathbf{R}^n, D_Q)$, de plus si $\tilde{w}_j^0 = \tilde{w}_j^{\theta=0}$,

$j \in \{2, 3\}$, $\{\tilde{w}_2^0(x, y), \tilde{w}_3^0(x, y)\}$ forme une base orthonormée de $\text{Im } \Pi_{23}(x)$ (car $\tilde{w}_j^0 = \tilde{w}_j$), et du fait que $\tilde{w}_j^\theta = \tilde{w}_j + \mathcal{O}(|\theta|)$ on en déduit que $\{\tilde{w}_2^\theta(x, y), \tilde{w}_3^\theta(x, y)\}$ forme une base de $\text{Im } \Pi_{23}^\theta(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}^n$; (pour $|\theta|$ assez petit), il en est de même pour $\{\tilde{w}_2^\theta(x, y), \tilde{w}_3^\theta(x, y)\}$, où

$$\tilde{w}_j^\theta(x, y) = (1 - \tilde{\chi}(x)) u_j^\theta(x, y) + \tilde{\chi}(x) \tilde{w}_j^\theta(x, y) \quad (2.6)$$

$j \in \{2, 3\}$, et $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\text{supp}(\tilde{\chi}) \subset K_{2\delta_0}$, $\tilde{\chi} = 1$ sur K_{δ_0} .

On peut ainsi orthonormaliser cette dernière base en considérant :

$$w_2^\theta = \frac{\tilde{w}_2^\theta}{\sqrt{\langle \tilde{w}_2^\theta, \tilde{w}_2^\theta \rangle_y}}$$

$$w_3^\theta = \frac{\tilde{w}_3^\theta - \alpha_\theta(x) w_2^\theta}{\sqrt{\langle \tilde{w}_3^\theta - \alpha_\theta(x) w_2^\theta, \tilde{w}_3^\theta - \alpha_\theta(x) w_2^\theta \rangle_y}} \quad (2.7)$$

avec

$$\alpha_\theta(x) = \frac{\langle \tilde{w}_3^\theta, \tilde{w}_2^\theta \rangle_y}{\sqrt{\langle \tilde{w}_2^\theta, \tilde{w}_2^\theta \rangle_y}}$$

Alors $w_j^\theta \in C^\infty(\mathbf{R}^n, D_Q)$, $\langle w_j^\theta, w_k^\theta \rangle_y = \delta_{jk}$, de plus $\forall x \in \mathbf{R}^n \setminus K_{2\delta_0}$, $\omega_j^\theta = w_j^\theta$, $j, k \in \{2, 3\}$. \square

Remarque 2.4. – On pose $w_1^\theta = u_1^\theta$ et par le procédé « d'orthonormalisation » utilisé en (2.7), on obtient $\langle w_j^\theta, w_k^\theta \rangle_y = \delta_{j,k}$, $j, k \in \{1, 2, 3\}$.

Par construction w_2^θ et w_3^θ sont prolongeables analytiquement par rapport à θ , il en est de même pour w_1^θ (cf. [13]), en fait on a le résultat suivant :

LEMME 2.5 (cf. [13]). – (i) Pour $j \in \{2, 3\}$, λ_j (resp. λ_1) se prolonge holomorphiquement dans $D_{\delta'}$, ($\delta' > 0$ assez petit), vérifiant : $\lambda_j(xe^\theta) - \lambda_j(x) = \mathcal{O}(|\theta|)$, uniformément par rapport à x dans $\mathbf{R}^n \setminus K_{\delta_1}$ (resp. x dans \mathbf{R}^n), et $\theta \in \mathbf{C}$, $|\theta|$ assez petit.

(ii) $\forall \alpha \in \mathbf{N}^n$, $j \in \{1, 2, 3\}$, $\|\partial_x^\alpha w_j^\theta\|_y = \mathcal{O}(\langle x \rangle^{-|\alpha|})$

$$\|\partial_x^\alpha w_j^\theta - \partial_x^\alpha w_j\|_y = \mathcal{O}(|\theta| \langle x \rangle^{-|\alpha|})$$

uniformément pour $x \in \mathbf{R}^n$ et $\theta \in \mathbf{C}$, $|\theta|$ assez petit.

3. MÉTHODE DE FESHBACH PAR LE PROBLÈME DE GRUSHIN DILATÉ

On définit maintenant pour $\theta \in \mathbf{C}$, $|\theta|$ assez petit, le projecteur Π_θ sur $L^2(\mathbf{R}^{n+p})$, par :

$$\Pi_\theta u = \langle u, w_1^\theta \rangle_y w_1^\theta + \langle u, w_2^\theta \rangle_y w_2^\theta + \langle u, w_3^\theta \rangle_y w_3^\theta$$

où $\langle \cdot, w_j^\theta \rangle_y$ est l'adjoint de l'opérateur $L^2(\mathbf{R}^n) \ni v \mapsto vw_1^\theta \in L^2(\mathbf{R}^{n+p})$ (car $\langle w_j^\theta, w_k^\theta \rangle_y = \delta_{j,k}$, pour tout θ assez petit, par unicité du prolongement analytique), $\hat{\Pi}_\theta = 1 - \Pi_\theta$. Puisque P_θ et w_j^θ , $j \in \{1, 2, 3\}$, possèdent des extensions analytiques en θ , on définit alors le problème de Grushin dilaté (associé à P_θ , et w_j^θ , $j \in \{1, 2, 3\}$), pour $\theta \in \mathbf{C}$ et $h > 0$ assez petits, par :

$$A_E^\theta(h) = \begin{pmatrix} (P_\theta - E) & R_+^\theta \\ R_-^\theta & 0 \end{pmatrix} \text{ sur } D_P \oplus L^2(\mathbf{R}^n) \oplus L^2(\mathbf{R}^n) \oplus L^2(\mathbf{R}^n)$$

où $R_+^\theta = (w_1^\theta, w_2^\theta, w_3^\theta)$

$$R_-^\theta = (R_+^\theta)^* = {}^t(\langle \cdot, w_1^\theta \rangle_y, \langle \cdot, w_2^\theta \rangle_y, \langle \cdot, w_3^\theta \rangle_y) \tag{3.1}$$

tA dénote le transposé de l'opérateur A . Pour inverser l'opérateur matriciel $A_E^\theta(h)$ nous rappelons le résultat suivant de [13] :

LEMME 3.1 (cf. [13]). – *Il existe une constante C positive telle que pour θ complexe assez petit, $\forall u \in L^2(\mathbf{R}^{n+p})$ tel que $\hat{\Pi}_\theta u \in D_P$, on ait :*

$$\text{Re} \langle \hat{\Pi}_\theta (P_\theta - E) \hat{\Pi}_\theta u, \hat{\Pi}_\theta u \rangle \geq \frac{1}{C} \|\hat{\Pi}_\theta u\|^2. \quad \square \tag{3.2}$$

En particulier ce résultat montre l'existence d'un inverse borné $(P'_\theta - E)^{-1}$ de la restriction de $\hat{\Pi}_\theta (P_\theta - E)$ à $\{u \in D_P; \hat{\Pi}_\theta u = u\}$. Il est alors élémentaire de vérifier que l'opérateur $A_E^\theta(h)$ est inversible sur $D_P \oplus L^2(\mathbf{R}^n) \oplus L^2(\mathbf{R}^n) \oplus L^2(\mathbf{R}^n)$. Si on note pour $|\theta|$, $|E|$ et $h > 0$ assez petits,

$$A_E^\theta(h)^{-1} = \begin{pmatrix} X_\theta(E) & a_+^\theta(E) \\ a_-^\theta(E) & a_{-+}^\theta(E) \end{pmatrix}$$

alors :

$$\begin{aligned} X_\theta(E) &= X_\theta = (P'_\theta - E)^{-1} \hat{\Pi}_\theta \\ a_+^\theta(E) &= (\omega_j^\theta - X_\theta P_\theta(\cdot w_j^\theta))_{j \in \{1, 2, 3\}} \\ a_-^\theta(E) &= {}^t(\langle (1 - P_\theta X_\theta)(\cdot), w_j^\theta \rangle_y)_{j \in \{1, 2, 3\}} \\ a_{-+}^\theta(E) &= E - F_E^\theta \end{aligned} \tag{3.3}$$

avec

$$F_E^\theta = (\langle G_\theta(\cdot w_j^\theta), w_i^{\bar{\theta}} \rangle_y)_{j,i \in \{1,2,3\}}$$

$$G_\theta = G_\theta(E) = P_\theta - P_\theta X_\theta(E) P_\theta.$$

F_E^θ est appelé opérateur de Feshbach, il permet de ramener le problème spectral initial à un problème dans $L^2(\mathbf{R}_x^n) \oplus L^2(\mathbf{R}_x^n) \oplus L^2(\mathbf{R}_x^n)$, et il servira aussi par la suite pour déterminer les résonances de P (cf. [3]).

COROLLAIRE 3.2.

$$E \in \text{sp}(P_\theta) \Leftrightarrow 0 \in \text{sp}(a_{-+}^\theta(E)).$$

De plus si $0 \notin \text{sp}(a_{-+}^\theta(E))$, alors :

$$(P_\theta - E)^{-1} = X_\theta - a_{-+}^\theta(E) (a_{-+}^\theta(E))^{-1} a_{-}^\theta(E). \quad (3.4)$$

Réciproquement si $E \notin \text{sp}(P_\theta)$, alors :

$$(a_{-+}^\theta(E))^{-1} = (-\langle (P_\theta - E)^{-1}(\cdot w_i^\theta), w_j^{\bar{\theta}} \rangle_y)_{j,i \in \{1,2,3\}}. \quad \square \quad (3.5)$$

4. RÉDUCTION DE L'OPÉRATEUR DE FESHBACH

On a d'après [13] :

• $\forall m \in \mathbf{Z}, \forall j \in \{0, 1, 2\}$, $X_\theta(z)$ est $\mathcal{O}(h^{-j})$ de \mathcal{H}^m dans \mathcal{H}^{m+j} uniformément par rapport à $h > 0$, $z \in \mathbf{C}$, $\theta \in \mathbf{C}$, tous trois assez petits, où on a noté $\mathcal{H}^m = H^m(\mathbf{R}_x^n, L^2(\mathbf{R}_y^n))$.

•• $[\Delta_x, \hat{\Pi}_\theta]$ est $\mathcal{O}(1)$ de \mathcal{H}^m dans \mathcal{H}^{m-1} pour tout $m \in \mathbf{Z}$.

Notons $G_\theta^1(E) = G_\theta^1 = \langle G_\theta(\cdot w_1^\theta), w_1^{\bar{\theta}} \rangle_y$, $\text{Im } \theta > 0$. A l'aide de l'hypothèse de viriel sur λ_1 , on peut facilement montrer, pour $|E|, |\theta|$ et $h > 0$ assez petits, que l'opérateur $(G_\theta^1(E) - E)$ est inversible de \mathcal{H}^2 dans L^2 , son inverse se prolonge de \mathcal{H}^m dans \mathcal{H}^{m+j} pour tout $m \in \mathbf{Z}$, et $j \in \{0, 1, 2\}$, et

$$\|(G_\theta^1(E) - E)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^m, \mathcal{H}^{m+i})} \leq \frac{C(m)}{h^j (\text{Im } \theta)} \quad (4.1)$$

où $C(m) > 0$ est indépendant de E, θ et h .

Soit maintenant $\alpha = \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_3$ une solution de l'équation :

$$F_E^\theta \alpha = E \alpha \quad (4.2)$$

En utilisant la forme explicite de F_E^θ et (4.1), on voit que (4.2) équivaut à :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -(G_\theta^1(E) - E)^{-1} \sum_{j=2}^3 \langle G_\theta(\alpha_j w_j^\theta), w_1^{\bar{\theta}} \rangle_y \\ &\stackrel{\text{def}}{=} (Z_\theta^2(E) \oplus Z_\theta^3(E))(\alpha_2 \oplus \alpha_3) \\ H_E^\theta(\alpha_2 \oplus \alpha_3) &= E(\alpha_2 \oplus \alpha_3) \end{aligned} \tag{4.3}$$

où

$$Z_\theta^j(E) \alpha_j = -(G_\theta^1(E) - E)^{-1} \{ \langle G_\theta(\alpha_j w_j^\theta), w_1^{\bar{\theta}} \rangle_y \}, \quad j \in \{2, 3\}$$

et

$$H_E^\theta = (\langle G_\theta \{ (\cdot w_i^\theta) + Z_\theta^j(E) (\cdot) w_1^{\bar{\theta}} \}, w_1^{\bar{\theta}} \rangle_y)_{i,j \in \{2,3\}} \tag{4.4}$$

Par conséquent l'étude spectrale de P_θ se ramène ainsi à celle de H_E^θ sur $L^2(\mathbf{R}^n) \oplus L^2(\mathbf{R}^n)$. La partie principale de l'opérateur réduit H_E^θ est donnée par :

PROPOSITION 4.1. – Pour $\theta \in \mathbf{C}$ fixé, $|\theta|$ assez petit on a :

$$H_E^\theta = [-h^2 e^{-2\theta} \Delta_x I + M(x, \theta)] + R^\theta(E, h)$$

avec

$$\| R^\theta(E, h) \|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^m \oplus \mathcal{H}^m, \mathcal{H}^{m-1} \oplus \mathcal{H}^{m-1})} = \mathcal{O}(h^2), \quad \forall m \in \mathbf{Z}$$

uniformément pour $h > 0$ assez petit, $E \in \mathbf{C}$, $|E|$ assez petit. I est la matrice identité 2×2 , $M(x, \theta) = \begin{pmatrix} \lambda_2^\theta(x) & 0 \\ 0 & \lambda_3^\theta(x) \end{pmatrix}$, $\forall x \in \mathbf{R}^n \setminus K_{2\delta_0}$. $M(x, \theta)$ admet pour valeurs propres $\lambda_2^\theta(x)$ et $\lambda_3^\theta(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}^n$.

Preuve. – Puisque $[Q(xe^\theta), \hat{\Pi}_\theta] = 0$, on a pour $i, j \in \{2, 3\}$:

$$\begin{aligned} \langle G_\theta(\cdot w_j^\theta), w_i^{\bar{\theta}} \rangle_y &= -h^2 e^{-2\theta} \Delta_x \delta_{ij} + \langle Q(xe^\theta) w_j^\theta, w_i^{\bar{\theta}} \rangle_y \\ &\quad - 2h^2 e^{-2\theta} \langle \nabla_x w_j^\theta, w_i^{\bar{\theta}} \rangle_y \nabla_x - h^2 e^{-2\theta} \langle \Delta_x w_j^\theta, w_i^{\bar{\theta}} \rangle_y \\ &\quad - h^4 e^{-4\theta} \langle \Delta_x X_\theta \Delta_x (\cdot w_j^\theta), w_i^{\bar{\theta}} \rangle_y \end{aligned}$$

alors

$$M(x, \theta) = (\langle Q(xe^\theta) w_j^\theta, w_i^{\bar{\theta}} \rangle_y)_{i,j \in \{2,3\}} \tag{4.5}$$

A l'extérieur de $K_{2\delta_0}$, $M(x, \theta)$ est la matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} \lambda_2^\theta(x) & 0 \\ 0 & \lambda_3^\theta(x) \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned}
 R_\theta(E, h) = & (-h^2 e^{-2\theta} \langle \Delta_x w_j^\theta, w_i^{\bar{\theta}} \rangle_y - 2h^2 e^{-2\theta} \langle \nabla_x w_j^\theta, w_i^{\bar{\theta}} \rangle_y \nabla_x \\
 & - h^4 e^{-4\theta} \langle \Delta_x X_\theta \Delta_x (\cdot w_j^\theta), w_i^{\bar{\theta}} \rangle_y \\
 & + \langle G_\theta ((Z_\theta^j(E)(\cdot)) \omega_1^\theta, w_i^{\bar{\theta}})_y)_{i, j \in \{2, 3\}} \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

• $\langle \nabla_x w_j^\theta, w_i^{\bar{\theta}} \rangle_y = 0$ puisque $\langle w_j^\theta, w_j^{\bar{\theta}} \rangle_y = 1$, de plus $\langle \nabla_x w_j^\theta, w_i^{\bar{\theta}} \rangle_y \nabla_x$ est borné uniformément par rapport à h de \mathcal{H}^m dans \mathcal{H}^{m-1} .

•• $X_\theta = \hat{\Pi}_\theta X_\theta \hat{\Pi}_\theta$, alors :

$$\langle \Delta_x X_\theta \Delta_x (\cdot w_j^\theta), w_i^{\bar{\theta}} \rangle_y = \langle [\Delta_x, \hat{\Pi}_\theta] X_\theta [\hat{\Pi}_\theta, \Delta_x] (\cdot w_j^\theta), w_i^{\bar{\theta}} \rangle_y$$

est $\mathcal{O}(h^{-j})$ de \mathcal{H}^m dans \mathcal{H}^{m-2+j} , pour $j \in \{0, 1, 2\}$.

••• $\langle \Delta_x w_j^\theta, w_i^{\bar{\theta}} \rangle_y$ est $\mathcal{O}(1)$ de \mathcal{H}^m dans \mathcal{H}^m .

Il suffit alors d'étudier pour $i, j \in \{2, 3\}$, les opérateurs :

$$\tilde{Z}_\theta^{i, j}(E) = \langle G_\theta ((Z_\theta^j(E)(\cdot)) \omega_1^\theta), w_i^{\bar{\theta}} \rangle_y \quad (4.7)$$

D'une part, les opérateurs :

$$G_\theta^{1, i}(E) = \langle G_\theta (\cdot \omega_1^\theta), w_i^{\bar{\theta}} \rangle_y$$

et

$$G_\theta^{j, 1}(E) = \langle G_\theta (\cdot w_j^\theta), w_1^{\bar{\theta}} \rangle_y$$

sont $\mathcal{O}(h^2)$ de \mathcal{H}^m dans \mathcal{H}^{m-1} .

D'autre part, les opérateurs $Z_\theta^j(E) = -(G_\theta^1(E) - E)^{-1} G_\theta^{j, 1}(E)$ sont $\mathcal{O}(1)$ de \mathcal{H}^m dans \mathcal{H}^{m+1} . Puisque $\tilde{Z}_\theta^{i, j}(E) = G_\theta^{1, i}(E) Z_\theta^j(E)$, on a alors $\|\tilde{Z}_\theta^{i, j}(E)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^m, \mathcal{H}^m)} = \mathcal{O}(h^2)$ et *a fortiori* $\tilde{Z}_\theta^{i, j}(E)$ est $\mathcal{O}(h^2)$ de \mathcal{H}^m dans \mathcal{H}^{m-1} . \square

Remarquons qu'on peut aussi écrire $R^\theta(E, h)$ sous la forme :

$$\begin{aligned}
 R^\theta(E, h) = & \hat{R}^\theta(E, h) \\
 & + \begin{pmatrix} 0 & -2h^2 e^{-2\theta} \langle \nabla_x w_3^\theta, w_2^{\bar{\theta}} \rangle_y \nabla_x \\ -2h^2 e^{-2\theta} \langle \nabla_x w_2^\theta, w_3^{\bar{\theta}} \rangle_y \nabla_x & 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

où $\|\hat{R}^\theta(E, h)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^m \oplus \mathcal{H}^m)} = \mathcal{O}(h^2)$.

5. LOCALISATION DES RÉSONANCES, CONSTRUCTION BKW

Dans ce paragraphe de la même manière que dans [13] on montre que l'on dispose d'une bonne théorie des résonances pour P près du niveau 0 (cf. [5], [13]), et plus précisément on a :

PROPOSITION 5.1 (cf. [13]). – *Sous les hypothèses (H1) à (H5) le spectre de P_θ ($\theta \in \mathbf{C}$, $0 < \text{Im } \theta < \delta'_0$, $0 < \delta'_0$ assez petit) est discret près de 0 inclus dans $\{z \in \mathbf{C}; \text{Im } z \leq 0\}$ et est indépendant de θ (θ assez voisin d'un θ_0 fixé). De plus si \mathcal{A}_δ désigne l'ensemble des fonctions entières φ sur \mathbf{C}^{n+p} , telles que :*

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ |\arg(z)| < \delta}} (e^{\varepsilon z^2} \varphi(z)) = 0.$$

Alors pour tout φ, ψ dans \mathcal{A}_δ , la fonction $z \rightarrow \langle (P - z)^{-1} \varphi, \psi \rangle_{L^2}$ se prolonge méromorphiquement en z près de 0, à partir de $\text{Im } z > 0$, et

$$\begin{aligned} \Gamma_\theta &= \text{sp}(P_\theta) \cap (] - \varepsilon', \varepsilon' [+i] - \varepsilon', \varepsilon' [) \\ &= \bigcup_{\varphi, \psi \in \mathcal{A}_\delta} \{ \text{pôles de } \langle (P - z)^{-1} \varphi, \psi \rangle \} \cap (] - \varepsilon', \varepsilon' [+i] - \varepsilon', \varepsilon' [) \end{aligned}$$

pour $\varepsilon' > 0$, assez petit. \square

Constructions BKW (cf. [6], [11], [12], [13]) :

Soit Ω_0 un voisinage assez petit de 0 à bord régulier, tel que $\bar{\Omega}_0 \cap K_{4\delta_0} = \emptyset$ (en particulier dans Ω_0 , $w_2 = u_2$, $w_3 = u_3$), les constructions BKW pour P dans Ω_0 sont données par :

PROPOSITION 5.2. – *Sous les hypothèses (H1) à (H4), on peut trouver pour tout $j \in \{1, \dots, N_0\}$ des séries formelles :*

$$E_j(h) = e_j h + \sum_{k \geq 1} \alpha_{j,k} h^{1+k/2}; \quad \alpha_{j,k} \in \mathbf{R}$$

$$b_j(x, y, h) = h^{-m_j} \sum_{k \geq 0} b_{j,k}(x, y) h^{k/2}$$

avec $b_{j,k} \in C^\infty(\Omega_0, D_Q)$, telle que l'on ait formellement :

$$P(e^{-\psi(x)/h} b_j(x, y, h)) = E_j(h) e^{-\psi(x)/h} b_j(x, y, h)$$

où les m_j sont choisis de telle sorte que $\|e^{-\psi(x)/h} b_j\|_{L^2(\Omega_0 \times \mathbf{R}^p)} = 1$, $\psi(x)$ est la distance d'Agmon de x à 0 associé à la métrique dégénéré $\lambda_2(x) dx^2$,

et $\{e_1, \dots, e_{N_0}\}$ sont les valeurs propres de $-\Delta_x + \frac{1}{2} \langle \lambda_2''(0) x, x \rangle$ dans $[0, C_0]$.

Preuve. – On considère l'opérateur matriciel :

$$A_E(h) = \begin{pmatrix} (P - E) & u_2 \\ \langle \cdot, u_2 \rangle_y & 0 \end{pmatrix}$$

qui est un opérateur pseudo-différentiel formel à symbole opérateur (cf. [2]) :

$$q_E(x, \xi) = \begin{pmatrix} (\xi^2 + Q(x) - E) & u_2 \\ \langle \cdot, u_2 \rangle_y & 0 \end{pmatrix}$$

agissant sur l'espace, $e^{-\psi(x)/h} S^m(\Omega_0, D_Q \oplus \mathbf{C})$, des séries formelles de type :

$$e^{-\psi(x)/h} \sum_{j \geq 0} h^{-m+j/2} S_j(x) \quad (5.1)$$

où $S_j \in C^\infty(\Omega_0, D_Q \oplus \mathbf{C})$, et $\psi(x)$ est la distance d'Agmon de x à 0 associée à $\lambda_2(x) dx^2$ (en particulier $\psi \in C^\infty(\Omega_0)$ (cf. [6])), cette action formelle est définie comme dans [12].

Il est alors élémentaire de vérifier, pour $|E|$ assez petit, que $q_E(x, \xi)$ est inversible de $D_Q \oplus \mathbf{C}$ dans $L^2(\mathbf{R}^p) \oplus \mathbf{C}$, $\forall (x, \xi) \in \Omega_0^*$, où $\Omega_0^* = \{(x, \xi) \in \Omega_0 \times \mathbf{C}^n; (\xi - i \nabla \psi(x)) \in \nu\}$, ν voisinage de 0 dans \mathbf{R}^n , et

$$q_E(x, \xi)^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{\Pi}_2 [\xi^2 + \hat{\Pi}_2 Q(x) \hat{\Pi}_2 - E]^{-1} \hat{\Pi}_2 & u_2(x, y) \\ \langle \cdot, u_2(x, y) \rangle_y & E - \xi^2 - \lambda_2(x) \end{pmatrix}$$

$$(\hat{\Pi}_2 = 1 - \Pi_2, \text{ et } \Pi_2 = \langle \cdot, u_2 \rangle_y u_2)$$

Ce qui nous permet aussi d'inverser l'opérateur $A_E(h)$:

$$(A_E(h))^{-1} = \begin{pmatrix} a(E) & a_+(E) \\ a_-(E) & a_{-+}(E) \end{pmatrix}$$

où $a_{-+}(E)$ a pour symbole principal $(E - \xi^2 - \lambda_2(x))$, l'opérateur de Feshbach associé $F(E) = E - a_{-+}(E)$ est donc un pseudo-différentiel formel de symbole principal $\lambda_2(x) + \xi^2$.

Comme dans [11], les constructions faites dans [6] nous permettent d'obtenir $\forall j \in \{1, \dots, N_0\}$ des séries formelles : $E_j(h) = e_j h + \sum_{k \geq 1} \alpha_{j,k} h^{1+k/2}$, ($\alpha_{j,k} \in \mathbf{R}$), et $a_j(x, h) \in S^{m_j}(\Omega_0, \mathbf{C})$, telles que :

$$a_{-+}(E_j(h)) \{e^{-\psi(x)/h} a_j(x, h)\} = 0. \quad (5.2)$$

En posant ensuite,

$$b_j(x, y, h) = e^{\psi(x)/h} a_+(E_j(h)) \{e^{-\psi(x)/h} a_j(x, h)\} \quad (5.3)$$

on a :

$$(P - E_j(h)) \{e^{-\psi(x)/h} b_j(x, y, h)\} = 0 \quad (5.4)$$

D'après (H1), les b_j ainsi construites se prolongent holomorphiquement en x dans un voisinage complexe de 0. Les réels, m_j sont choisis de telle sorte que l'on ait formellement :

$$\|e^{-\psi(x)/h} b_j\|_{L^2(\Omega_0 \times \mathbb{R}^p)} = 1. \quad \square \quad (5.5)$$

Remarque 5.3. – On vient de construire N_0 valeurs propres formelles de P , nous allons prouver dans les paragraphes suivants que ces valeurs propres donnent une bonne approximation des résonances de P près du niveau 0 et que tous les développements asymptotiques $E_j(h)$ sont atteints par Γ_θ . On a besoin alors d'étudier les propriétés spectrales de l'Opérateur de Feshbach réduit H_E^θ .

6. PROPRIÉTÉS DE L'OPÉRATEUR H_E^θ

Dans ce paragraphe on étudie le spectre de l'opérateur H_E^θ modulo $\mathcal{O}(h^{3/2})$ pour $|E|$ fixé assez petit, ainsi que la dépendance par rapport à E de H_E^θ .

Notons $\hat{H}^\theta = H_E^\theta - \hat{R}^\theta(E, h)$, où $\hat{R}^\theta(E, h)$ est défini dans (4.8), et $\hat{H}^0 = \hat{H}^{\theta=0}$ (de sorte que \hat{H}^θ et \hat{H}^0 ne font pas intervenir de résolvante et sont donc des opérateurs différentiels). P_2^0 (resp. P_3^0) désigne la réalisation autoadjointe de $-h^2 \Delta_x + \lambda_2(x)$, (resp. $-h^2 \Delta_x + \lambda_3(x)$), et $\hat{H}^{0,0}$ celle de \hat{H}^0 sur Ω_0 , avec conditions de Dirichlet au bord. Aussi

$$P_2^{\theta,0} = U_\theta P_2^0 U_\theta^{-1}; \quad P_3^{\theta,0} = U_\theta P_3^0 U_\theta^{-1}. \quad (6.1)$$

Puisque sur Ω_0 , la matrice $M(x, \theta)$ est diagonale, alors :

$$\hat{H}^{\theta,0} = \begin{pmatrix} P_2^{\theta,0} & -2h^2 e^{-2\theta} \langle \nabla_x u_3^\theta, u_2^{\bar{\theta}} \rangle_y \nabla_x \\ -2h^2 e^{-2\theta} \langle \nabla_x u_2^\theta, u_3^{\bar{\theta}} \rangle_y \nabla_x & P_3^{\theta,0} \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

En particulier le spectre de $P_2^{\theta,0} = -h^2 e^{-2\theta} \Delta_x + \lambda_2^\theta$ dans $]-\varepsilon, \varepsilon[+ i] - \varepsilon, \varepsilon[$ est discret indépendant de θ , et inclu dans $[0, \varepsilon[$. De plus on a aussi d'après un résultat classique (cf. [6], [18]) :

$$\text{sp}(P_2^{\theta,0}) \cap [0, C_0 h] = \{E_1(h), \dots, E_{N_0}(h)\} \quad (6.3)$$

avec pour tout $j \in \{1, \dots, N_0\}$, $E_j(h) \sim e_j h + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{j,k} h^{1+k/2}$,
 ($\alpha_{j,k} \in \mathbf{R}$), où les e_j sont les valeurs propres de $-\Delta_x + \frac{1}{2} \langle \lambda_2''(0) x, x \rangle$
 dans $[0, C_0]$. γ_j désigne pour $j \in \{1, \dots, N_0\}$ le cercle complexe de
 centre $e_j h$ et de rayon $\delta' h$, où $\delta' > 0$ est choisi assez petit pour que
 les $e_k h$ vérifiant $e_k \neq e_j$ restent à l'extérieur de γ_j . On commence par
 montrer le lemme suivant :

LEMME 6.1. — Pour $\varepsilon > 0$, assez petit, et $z \in [-\varepsilon, C_0 h] + i[-\varepsilon, C_0 h]$ à
 l'extérieur de tous les γ_j , $(\hat{H}^{\theta,0} - z)$ est inversible de $(H^2(\Omega_0) \cap H_0^1(\Omega_0)) \oplus$
 $(H^2(\Omega_0) \cap H_0^1(\Omega_0))$ dans $L^2(\Omega_0) \oplus L^2(\Omega_0)$, d'inverse borné vérifiant :

$$\|(\hat{H}^{\theta,0} - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_0) \oplus L^2(\Omega_0))} = \mathcal{O}(h^{-1})$$

uniformément pour z , θ , et h assez petits.

Preuve. — $\operatorname{Re} \langle e^{2\theta} P_3^{\theta,0} u, u \rangle \geq \frac{1}{C} \|u\|^2$, $C > 0$, $\forall u \in H^2(\Omega_0) \cap$
 $H_0^1(\Omega_0)$, alors $(P_3^{\theta,0} - z)$ est inversible, et $\|(P_3^{\theta,0} - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^m, H^{m+j})} =$
 $\mathcal{O}(h^{-j})$, $m \in \mathbf{Z}$ et $j \in \{0, 1, 2\}$. De plus $\|(P_2^{\theta,0} - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_0))} =$
 $\mathcal{O}(h^{-1})$ uniformément pour $z \in [-\varepsilon, C_0 h] + i[-\varepsilon, C_0 h]$, z à l'extérieur
 de tous les γ_j , ε , θ et $h > 0$ tous trois assez petits. A partir de l'équation
 $(\hat{H}^{\theta,0} - z)(\alpha_1 \oplus \alpha_2) = \beta_1 \oplus \beta_2 \in L^2(\Omega_0) \oplus L^2(\Omega_0)$, il est facile d'exprimer
 α_1 , α_2 en fonction de β_1 et β_2 , et d'établir :

$$(\hat{H}^{\theta,0} - z)^{-1} = \begin{pmatrix} (P_2^{\theta,0} - A^\theta - z)^{-1} & -(P_2^{\theta,0} - A^\theta - z)^{-1} B^\theta \\ -C^\theta (P_2^{\theta,0} - A^\theta - z)^{-1} & (P_3^{\theta,0} - z)^{-1} + C^\theta (P_2^{\theta,0} - A^\theta - z)^{-1} B^\theta \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

A^θ , B^θ et C^θ sont des opérateurs analytiques en z (z à l'extérieur
 de tous les γ_j et $|z|$ assez petit), vérifiant $\|A^\theta\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_0))} = \mathcal{O}(h^2)$,
 $\|B^\theta\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_0))} = \mathcal{O}(h)$ et $\|C^\theta\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_0))} = \mathcal{O}(h)$. En particulier,

$$\|(\hat{H}^{\theta,0} - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_0) \oplus L^2(\Omega_0))} = \mathcal{O}(h^{-1})$$

uniformément par rapport à z à l'extérieur des γ_j , ε , θ , et h tous trois
 assez petits. \square

De plus pour pouvoir estimer l'inverse de l'opérateur $(H_E^\theta - z)$, où $z \in \mathbf{C}$,
 $|z|$ assez petit, et z est à l'extérieur de tous les γ_j , $j \in \{1, \dots, N_0\}$, on
 a besoin des résultats suivants :

PROPOSITION 6.2. — Pour tout $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{\Omega}_0 \times \overset{\circ}{\Omega}_0$ et $\eta > 0$, il existe \mathcal{V}_{x_0} (resp. \mathcal{V}_{y_0}) voisinage de x_0 dans Ω_0 (resp. voisinage de y_0 dans Ω_0) et $C_\eta > 0$ tels que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $|z|$ assez petit, et z à l'extérieur de tous les γ_j on a :

$$\begin{aligned} & \| (\hat{H}^{\theta, 0} - z)^{-1} u \|_{H^2(\mathcal{V}_{x_0}) \oplus H^2(\mathcal{V}_{y_0})} \\ & \leq C_\eta e^{-(d_\theta(x_0, y_0) - \eta)/h} \| u \|_{L^2(\mathcal{V}_{y_0}) \oplus L^2(\mathcal{V}_{x_0})} \end{aligned}$$

$\forall u \in C_0^\infty(\mathcal{V}_{y_0}) \oplus C_0^\infty(\mathcal{V}_{x_0})$, où d_θ est la distance d'Agmon associée à la métrique dégénérée $\text{Min}(\text{Re}(e^{2\theta} \lambda_2^\theta(x)), \text{Re}(e^{2\theta} \lambda_3^\theta(x)))_+ dx^2$.

La preuve de cette proposition découle des trois lemmes suivants :

LEMME 6.3. — Soit $\psi(x) = d_\theta(x, 0)$, $z \in \mathbf{C}$, z à l'extérieur de tous les γ_j et $|z|$ assez petit, alors $\forall \eta > 0$, $\exists C_\eta > 0$ tel que, $\forall u \in L^2(\Omega_0)$,

$$\| e^{\psi(x)/h} (P_2^{\theta, 0} - z)^{-1} e^{-\psi(x)/h} u \|_{H^1(\Omega_0)} \leq C_\eta e^{\eta/h} \| u \|_{L^2(\Omega_0)}$$

Preuve. — Posons $v = (e^{2\theta} P_2^{\theta, 0} - z)^{-1} u$, donc $(e^{2\theta} P_2^{\theta, 0} - z)v = u$, et $v|_{\partial\Omega_0} = 0$; $\psi_\eta(x) = (1 - \eta)\psi(x)$.

$$\begin{aligned} & \text{Re} \langle e^{\psi_\eta(x)/h} (e^{2\theta} P_2^{\theta, 0} - z)v, e^{\psi_\eta(x)/h} v \rangle_{L^2(\Omega_0)} \\ & \geq \| h \nabla (e^{\psi_\eta(x)/h} v) \|_{L^2(\Omega_0)}^2 \\ & + \text{Re} \langle [(e^{2\theta} \lambda_2^\theta(x)) - (\nabla \psi_\eta)^2 - z] (e^{\psi_\eta(x)/h} v), (e^{\psi_\eta(x)/h} v) \rangle_{L^2(\Omega_0)} \end{aligned}$$

Posons $\Omega_{0, \eta} = \{x \in \Omega_0; \text{Re}(e^{2\theta} \lambda_2^\theta(x)) \geq \eta\}$, donc $\psi(x)|_{\Omega_0 \setminus \Omega_{0, \eta}} = \mathcal{O}(\sqrt{\eta})$. On en déduit alors :

$$\begin{aligned} & \text{Re} \langle e^{\psi_\eta(x)/h} (e^{2\theta} P_2^{\theta, 0} - z)v, e^{\psi_\eta(x)/h} v \rangle_{L^2(\Omega_0)} \\ & \geq \| h \nabla (e^{\psi_\eta(x)/h} v) \|_{L^2(\Omega_0)}^2 \\ & + \text{Re} \langle [(e^{2\theta} \lambda_2^\theta(x)) - (\nabla \psi_\eta)^2 - z] (e^{\psi_\eta(x)/h} v), (e^{\psi_\eta(x)/h} v) \rangle_{L^2(\Omega_{0, \eta})} \\ & - C e^{\sqrt{\eta}C/h} \| v \|_{L^2(\Omega_0 \setminus \Omega_{0, \eta})}^2, \quad C > 0. \end{aligned}$$

D'autre part, sur $\Omega_{0, \eta}$ on a $[\text{Re}(e^{2\theta} \lambda_2^\theta(x)) - (\nabla \psi_\eta)^2] \geq \eta^2$ pour η assez petit, d'où :

$$\| e^{\psi_\eta(x)/h} v \|_{H^1(\Omega_0)} \leq C_\eta e^{C\sqrt{\eta}/h} \| e^{\psi_\eta(x)/h} u \|_{L^2(\Omega_0)}$$

ainsi pour $\eta > 0$ assez petit on a le résultat. \square

Remarque 6.4. – De la même manière on montre aussi :

$$\| e^{\psi(x)/h} (P_3^{\theta,0} - z)^{-1} e^{-\psi(x)/h} u \|_{H^1(\Omega_0)} \leq C_\eta e^{\eta/h} \| u \|_{L^2(\Omega_0)}$$

pour z à l'extérieur de tous les γ_j et $|z|$ assez petit.

– En particulier un calcul analogue à celui utilisé précédemment nous permet de montrer que les fonctions propres de $P_2^{\theta,0}$ et $P_3^{\theta,0}$ sont exponentiellement petites en dehors du puits de potentiel.

On reprend maintenant une idée de [7] consistant à boucher dans un premier temps le puits de potentiel. Pour cela on considère une fonction $W \in C_0^\infty(d_\theta(x, 0) < \eta)$, telle que $W \geq 0$ et $W(0) > 0$ et posons

$$\tilde{P}_2^{\theta,0} = \tilde{P}_2^{\theta,0} + W(x). \quad (6.5)$$

Donc $\tilde{P}_2^{\theta,0}$ est inversible et sa résolvante est liée à celle de $P_2^{\theta,0}$ par :

LEMME 6.5. – $\forall z \in \mathbf{C}$, $|z|$ assez petit et z à l'extérieur de tous les γ_j on a :

$$\begin{aligned} (P_2^{\theta,0} - z)^{-1} &= (1 - \chi_1)(\tilde{P}_2^{\theta,0} - z)^{-1}(1 - \chi_2) + (P_2^{\theta,0} - z)^{-1}\chi_2 \\ &\quad + (P_2^{\theta,0} - z)^{-1}\chi_2[P_2^{\theta,0}, \chi_1](\tilde{P}_2^{\theta,0} - z)^{-1}(1 - \chi_2) \end{aligned}$$

où

$$\chi_1 \in C_0^\infty(d_\theta(x, 0) < 3\eta), \quad \chi_2 \in C_0^\infty(d_\theta(x, 0) < 5\eta)$$

avec

$$\begin{aligned} \chi_1(x) &= 1 \quad \text{si } d_\theta(x, 0) \leq 2\eta \\ \chi_2(x) &= 1 \quad \text{si } d_\theta(x, 0) \leq 4\eta \end{aligned}$$

$\eta > 0$ est choisi assez petit pour que $\{x; d_\theta(x, 0) \leq 5\eta\} \subset \Omega_0$.

Preuve. – En effet, en appliquant $(P_2^{\theta,0} - z)$ à droite de l'égalité précédente on obtient le résultat en remarquant que $\chi_2 = 1$ sur $\text{supp } \chi_1$, $[P_2^{\theta,0}, \chi_1] = \chi_2[P_2^{\theta,0}, \chi_1]$ et $(1 - \chi_1)W = 0$. \square

A partir des lemmes 6.3 et 6.5, on montre aussi :

LEMME 6.6. – Pour tout $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{\Omega}_0 \times \overset{\circ}{\Omega}_0$, et $\eta > 0$, il existe \mathcal{V}_{x_0} voisinage de x_0 , \mathcal{V}_{y_0} voisinage de y_0 dans Ω_0 et $C_\eta > 0$ tels que $\forall u \in C_0^\infty(\mathcal{V}_{y_0})$, $\forall z \in \mathbf{C}$, $|z|$ assez petit et z à l'extérieur de tous les γ_j , on a :

$$\| (P_2^{\theta,0} - z)^{-1} u \|_{H^2(\mathcal{V}_{x_0})} \leq C_\eta e^{-(d_\theta(x_0, y_0) - \eta)/h} \| u \|_{L^2(\mathcal{V}_{y_0})}$$

Preuve. – Par un argument analogue à celui du lemme 6.3 appliqué avec $\tilde{P}_2^{\theta,0}$ et $\psi(x) = d_\theta(x, y_0)$, on a :

$$\| e^{\psi(x)/h} (\tilde{P}_2^{\theta,0} - z)^{-1} u \|_{H^1(\Omega_0)} \leq C_\eta e^{\eta/h} \| e^{\psi(x)/h} u \|_{L^2(\Omega_0)}$$

\mathcal{V}_{x_0} (resp. \mathcal{V}_{y_0}) est un voisinage très petit de x_0 (resp. de y_0), donc $\psi(x)|_{\mathcal{V}_{x_0}} = d_\theta(x_0, y_0) + o(1)$, $\psi(x)|_{\mathcal{V}_{y_0}} = o(1)$ et $e^{d_\theta(x_0, y_0)/h} \| (\tilde{P}_2^{\theta,0} - z)^{-1} u \|_{H^1(\mathcal{V}_{x_0})} \leq C_\eta e^{\alpha(\eta)/h} \| u \|_{L^2(\mathcal{V}_{y_0})}$ avec $\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \alpha(\eta) = 0$. De plus,

$$e^{-2\theta} \Delta (\tilde{P}_2^{\theta,0} - z)^{-1} u = -\frac{1}{h^2} u + \frac{1}{h^2} (\lambda_2^\theta(x) + W - z) (\tilde{P}_2^{\theta,0} - z)^{-1} u$$

donc

$$\begin{aligned} & \| e^{-2\theta} \Delta (\tilde{P}_2^{\theta,0} - z)^{-1} u \|_{L^2(\mathcal{V}_{x_0})} \\ & \leq h^{-2} \| u \|_{L^2(\mathcal{V}_{x_0})} + C_\eta e^{-(d_\theta(x_0, y_0) - \tilde{\alpha}(\eta))/h} \| u \|_{L^2(\mathcal{V}_{x_0})} \end{aligned}$$

avec $\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \tilde{\alpha}(\eta) = 0$.

Si $x_0 \neq y_0$, $\| u \|_{L^2(\mathcal{V}_{x_0})} = 0$, $\forall u \in C_0^\infty(\mathcal{V}_{y_0})$.

Si $x_0 = y_0$, $\| u \|_{L^2(\mathcal{V}_{x_0})} \leq C_\eta e^{\tilde{\alpha}(\eta)/h} \| u \|_{L^2(\mathcal{V}_{x_0})}$. Finalement on a :

$$\| (\tilde{P}_2^{\theta,0} - z)^{-1} u \|_{H^2(\mathcal{V}_{x_0})} \leq C_\eta e^{\tilde{\alpha}(\eta)/h} e^{-d_\theta(x_0, y_0)/h} \| u \|_{L^2(\mathcal{V}_{y_0})}$$

Si nous appliquons le lemme 6.3, on obtient pour tout $u \in C_0^\infty(\mathcal{V}_{y_0})$:

$$\| e^{d_\theta(x, 0)/h} (P_2^{\theta,0} - z)^{-1} \chi_2 u \|_{H^1(\mathcal{V}_{x_0})} \leq C_\eta e^{\eta/h} \| e^{d_\theta(x, 0)/h} \chi_2 u \|_{L^2(\mathcal{V}_{y_0})}$$

or $d_\theta(x, 0) \sim d_\theta(x_0, 0)$ sur \mathcal{V}_{x_0} et $d_\theta(x, 0) \sim 0$ sur $\text{Supp } \chi_2$, alors comme précédemment :

$$\| (P_2^{\theta,0} - z)^{-1} \chi_2 u \|_{H^2(\mathcal{V}_{x_0})} \leq C_\eta e^{\alpha(\eta)/h} e^{-d_\theta(x_0, 0)/h} \| u \|_{L^2(\mathcal{V}_{y_0})}.$$

D'après le lemme 6.5, on en déduit pour tout $u \in C_0^\infty(\mathcal{V}_{y_0})$:

$$\begin{aligned} & \| (P_2^{\theta,0} - z)^{-1} u \|_{H^2(\mathcal{V}_{x_0})} \leq C_\eta e^{\eta/h} \{ e^{-d_\theta(x_0, y_0)/h} \\ & + e^{-d_\theta(x_0, 0)/h} \mathbf{1}_{y_0 \in \{\text{supp } \chi_2\}} + e^{-(d_\theta(x_0, 0) + d_\theta(y_0, 0))/h} \} \| u \|_{L^2(\mathcal{V}_{y_0})} \end{aligned}$$

Le résultat découle de cette dernière estimation. \square

Remarque 6.7. – En utilisant les notations de [8], si K désigne le noyau distribution dans $D'(\mathbf{R}^{2n})$, alors $\forall (x_0, y_0) \in \overset{\circ}{\Omega}_0 \times \overset{\circ}{\Omega}_0$, $K_{(P_2^{\theta, 0-z})^{-1}}(x_0, y_0) = \check{O}(e^{-d_{\theta}(x_0, y_0)/h})$ (lemme 6.6). De la même manière on démontre que $K_{(P_3^{\theta, 0-z})^{-1}}(x_0, y_0) = \check{O}(e^{-d_{\theta}(x_0, y_0)/h})$. Par conséquent $K_{(\hat{H}^{\theta, 0-z})^{-1}}(x_0, y_0) = \check{O}(e^{-d_{\theta}(x_0, y_0)/h})$. Aussi les fonctions propres de $\hat{H}^{\theta, 0}$ d'énergie proche de 0 sont exponentiellement petites en dehors du puits de potentiel.

On note par la suite $v = \check{O}(t)$ si $\|v\| \leq C_{\eta} e^{\alpha(\eta)/h} \cdot t$ avec C_{η} , $t \geq 0$, et $\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \alpha(\eta) = 0$.

Posons maintenant $\tilde{W}(x) = \begin{pmatrix} W(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et considérons pour $\theta \in \mathbf{C}$, $|\theta|$ assez petit l'opérateur :

$$\tilde{H}^{\theta} = \hat{H}^{\theta} + \tilde{W}(x) \quad (6.6)$$

PROPOSITION. – *Pour tout $z \in \mathbf{C}$, $|z|$ assez petit, z à l'extérieur de tous les γ_j et $\text{Im } \theta \neq 0$, $(\tilde{H}^{\theta} - z) : H^2(\mathbf{R}^n) \oplus H^2(\mathbf{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbf{R}^n) \oplus L^2(\mathbf{R}^n)$ est inversible d'inverse borné.*

Preuve. – Soient :

$\chi_1, \chi_2 \in C^{\infty}(\mathbf{R}^n)$, $0 \leq \chi_1 \leq 1$, $0 \leq \chi_2 \leq 1$, $\text{supp } (\chi_1) \subset \Omega_1$, $\text{supp } (\chi_2) \subset \Omega_2$ et $\{x \in \mathbf{R}^n; \chi_1(x) = 1\} \cup \{x \in \mathbf{R}^n; \chi_2(x) = 1\} = \mathbf{R}^n$. En particulier, $\text{Re}\{e^{2\theta}(M(x, \theta) + \tilde{W}(x))\}$ est définie positive sur $\text{supp } \chi_1$, $\text{Re}(e^{2\theta} \lambda_2^{\theta}(x)) > 0$ et $\text{Im}(e^{2\theta} \lambda_3^{\theta}(x)) \leq -C'(\text{Im } \theta)$, ($C' > 0$), sur $\text{supp } \chi_2$. Soit $v \in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n) \oplus C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n)$, $v = (v_1, v_2)$, et $\varepsilon_0 > 0$. Posons

$$A_2^{\theta} = \text{Re} \langle \chi_2 \tilde{H}^{\theta}(v_1, v_2), \chi_2(v_1, (\varepsilon_0 - i)v_2) \rangle.$$

Alors :

$$A_2^{\theta} = \text{Re} \{ \langle \tilde{H}^{\theta} \chi_2(v_1, v_2), \chi_2(v_1, (\varepsilon_0 - i)v_2) \rangle + \langle [\chi_2, \tilde{H}^{\theta}](v_1, v_2), \chi_2(v_1, (\varepsilon_0 - i)v_2) \rangle \}$$

or sur $\text{supp } \chi_2$,

$$\tilde{H}^{\theta} = \begin{pmatrix} -h^2 e^{-2\theta} \Delta_x + \lambda_2^{\theta}(x) & -2h^2 e^{-2\theta} \langle \nabla_x u_3^{\theta}, u_2^{\theta} \rangle_y \nabla_x \\ -2h^2 e^{-2\theta} \langle \nabla_x u_2^{\theta}, u_3^{\theta} \rangle_y \nabla_x & -h^2 e^{-2\theta} \Delta_x + \lambda_3^{\theta}(x) \end{pmatrix}$$

donc $\operatorname{Re} \langle [\chi_2, \tilde{H}^\theta](v_1, v_2), \chi_2(v_1, (\varepsilon_0 - i)v_2) \rangle = \mathcal{O}(\{h^{1/2} \|v\| + h^{3/2} \|\nabla_x v\|^2\})$, et pour $\varepsilon_0 > 0$ assez petit on a :

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \langle e^{2\theta} \tilde{H}^\theta \chi_2(v_1, v_2), \chi_2(v_1, (\varepsilon_0 - i)v_2) \rangle \\ & \geq \|h \nabla_x (\chi_2 v_1)\|^2 + \varepsilon_0 \|h \nabla_x (\chi_2 v_2)\|^2 + \frac{1}{C_1} \|\chi_2 v_1\|^2 \\ & + \frac{\operatorname{Im} \theta}{C_1} \|\chi_2 v_2\|^2 - C_1 \{h (\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2) \\ & + h^3 (\|\nabla_x v_1\|^2 + \|\nabla_x v_2\|^2)\} \end{aligned}$$

finalement on obtient pour $h > 0$, et ε_0 assez petits :

$$\begin{aligned} A_2^\theta & \geq \frac{(\operatorname{Im} \theta)}{C_2} [\|\chi_2 v\|^2 + \|h \nabla_x (\chi_2 v)\|^2] \\ & - C_2 [h^{1/2} \|v\| + h^{3/2} \|\nabla_x v\|^2] \end{aligned} \quad (6.7)$$

(ici les normes sont calculées dans $L^2(\mathbf{R}^n) \oplus L^2(\mathbf{R}^n)$), $C_1, C_2 > 0$. D'autre part, posons :

$$A_1^\theta = \operatorname{Re} \langle \chi_1 \tilde{H}^\theta v, \chi_1 v \rangle.$$

De la même manière il existe $C_3 > 0$, tel que :

$$\begin{aligned} A_1^\theta & \geq \delta_0 [\|\chi_1 v\|^2 + \|h \nabla_x (\chi_1 v)\|^2] \\ & - C_3 (h^{1/2} \|v\| + h^{3/2} \|\nabla_x v\|^2) \end{aligned} \quad (6.8)$$

$|\theta|$ et $h > 0$ assez petits. Ainsi

$$|A_1^\theta| + |A_2^\theta| \geq \frac{|\operatorname{Im} \theta|}{C_4} [h^2 \|\nabla_x v\|^2 + \|v\|^2], \quad C_4 > 0. \quad (6.9)$$

En utilisant le fait que

$$\|\chi_j v\| \leq \|v\|, \quad j \in \{1, 2\} \quad \text{et} \quad \|v\| \leq \|\chi_1 v\| + \|\chi_2 v\|,$$

on a :

$$\|(\tilde{H}^\theta - z)v\| \geq \frac{|\operatorname{Im} \theta|}{C} \|v\|, \quad C > 0 \quad (6.10)$$

$z \in \mathbf{C}$, $|z|$ assez petit, z est à l'extérieur de tous les γ_j . Donc $(\tilde{H}^\theta - z)$ est inversible et $\|(\tilde{H}^\theta - z)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\operatorname{Im} \theta|}$.

Remarque 6.9. – Par la même méthode et avec des estimations d'Agmon on a aussi :

$$\| e^{\psi(x)/h} (\tilde{H}^\theta - z) u \| \geq \frac{|\operatorname{Im} \theta|}{C_\eta} e^{-\eta/h} \| e^{\psi(x)/h} u \|$$

qui découle de l'inégalité plus générale : $v = (v_1, v_2)$

$$\begin{aligned} & | \langle e^{\psi(x)/h} \chi_1 (\tilde{H}^\theta - z) v, \chi_1 v \rangle | \\ & + | \langle e^{\psi(x)/h} \chi_2 (\tilde{H}^\theta - z) v, \chi_2 (v_1, (\varepsilon_0 - i), v_2) \rangle | \\ & \geq \frac{|\operatorname{Im} \theta|}{C_\eta} e^{-\eta/h} \{ \| e^{\psi(x)/h} v \|^2 + \| h \nabla_x (e^{\psi(x)/h} v) \|^2 \}. \end{aligned}$$

On démontre aussi que :

$$K_{(\tilde{H}^\theta - z)^{-1}}(x, y) = \check{O}(e^{-\tilde{d}_\theta(x, y)/h})$$

où

$$\tilde{d}_\theta(x, y) = \operatorname{Min}(d_\theta(x, y), d_\theta(x, \partial\Omega_0) + d_\theta(y, \partial\Omega_0)) \quad (6.11)$$

PROPOSITION 6.10. – Pour tout $x_0, y_0 \in \overset{\circ}{\Omega}_0, z \in \mathbf{C}, |z|$ assez petit, z à l'extérieur de tous les γ_j et $\theta \in \mathbf{C}, \operatorname{Im} \theta > 0, |\theta|$ assez petit :

$$K_{(\tilde{H}^\theta - z)^{-1}} = \check{O}(e^{-d_\theta(x_0, y_0)/h}).$$

Preuve. – Il faut montrer pour tout $v \in C_0^\infty(\mathcal{V}_{y_0}) \oplus C_0^\infty(\mathcal{V}_{y_0})$:

$$\begin{aligned} & \| (\tilde{H}^\theta - z)^{-1} v \|_{H^2(\mathcal{V}_{x_0}) \oplus H^2(\mathcal{V}_{x_0})} \\ & \leq C_\eta e^{-(d_\theta(x_0, y_0) - \eta)/h} \| v \|_{L^2(\mathcal{V}_{y_0}) \oplus L^2(\mathcal{V}_{y_0})} \end{aligned}$$

$\mathcal{V}_{x_0}, \mathcal{V}_{y_0}$ voisinages assez petits respectivement de x_0 et $y_0, \eta > 0$ et $C_\eta > 0$. Posons $u = (\tilde{H}^\theta - z)^{-1} v$, soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega_0)$ telle que : $\chi(x) = 1$ sur $\{x; d_\theta(x, \partial\Omega_0) \geq \eta\}$, η est choisi assez petit pour que $d_\theta(x_0, \partial\Omega_0) \geq \eta$ et $d_\theta(y_0, \partial\Omega_0) \geq \eta$. On a alors :

$$u = \chi (\hat{H}^{\theta, 0} - z)^{-1} v - (\tilde{H}^\theta - z)^{-1} [\tilde{H}^\theta, \chi] (\tilde{H}^{\theta, 0} - z)^{-1} v$$

où $\tilde{H}^{\theta, 0} = \hat{H}^{\theta, 0} + \tilde{W}(x)$. A l'aide de la proposition 6.2, on obtient :

$$\begin{aligned} & \| u \|_{L^2(\mathcal{V}_{x_0}) \oplus L^2(\mathcal{V}_{x_0})} \\ & = \check{O}(e^{-d_\theta(x_0, y_0)/h}) \| v \|_{L^2(\mathcal{V}_{y_0}) \oplus L^2(\mathcal{V}_{y_0})} + \| w \|_{L^2(\mathcal{V}_{x_0}) \oplus L^2(\mathcal{V}_{x_0})} \end{aligned}$$

où $w = (\tilde{H}^\theta - z)^{-1} [\tilde{H}^\theta, \chi] (\tilde{H}^{\theta,0} - z)^{-1} v$. Par une inégalité d'Agmon appliquée avec $\psi(x) = d_\theta(x, \partial\Omega_0)$, et à l'aide de la remarque 6.9, on a aussi :

$$\|w\|_{L^2(\mathcal{V}_{x_0}) \oplus L^2(\mathcal{V}_{x_0})} = \tilde{\mathcal{O}}(e^{-(d_\theta(x_0, \partial\Omega_0) + d_\theta(y_0, \partial\Omega_0))/h}).$$

Une estimation analogue est alors obtenue en norme $H^2(\mathcal{V}_{x_0}) \oplus H^2(\mathcal{V}_{x_0})$ comme au lemme 6.6. On en déduit finalement :

$$\|u\|_{H^2(\mathcal{V}_{x_0}) \oplus H^2(\mathcal{V}_{x_0})} = \tilde{\mathcal{O}}(e^{-d_\theta(x_0, y_0)/h}). \quad \square$$

A partir de ces résultats nous allons construire un inverse de H_E^θ .

PROPOSITION 6.11. – *Posons pour $z \in \mathbf{C}$, z à l'extérieur de tous les γ_j , $|z|$, et h assez petits :*

$$\mathcal{F}^\theta(z) = \chi_1 (\hat{H}^{\theta,0} - z)^{-1} \chi_2 + (1 - \chi_1) (\tilde{H}^\theta - z)^{-1}$$

où χ_1 et χ_2 sont définis au lemme 6.5. Alors :

$$\mathcal{F}^\theta(z) (\hat{H}^\theta - z) = 1 + \mathcal{K}_\theta(z)$$

avec

$$\mathcal{K}_\theta(z) = \tilde{\mathcal{O}}(e^{-\delta'/h}), \quad \delta' > 0.$$

Preuve. – En effet, en calculant le produit $\mathcal{F}^\theta(z) (\hat{H}^\theta - z)$, on a :

$$\mathcal{K}_\theta(z) = \chi_1 (\hat{H}^{\theta,0} - z)^{-1} [\chi_2, \tilde{H}^\theta] - (1 - \chi_1) (\tilde{H}^\theta - z)^{-1} \tilde{W}(x)$$

$\chi_1 (\hat{H}^{\theta,0} - z)^{-1} [\chi_2, \tilde{H}^\theta]$ est $\tilde{\mathcal{O}}(e^{-\delta'/h})$ car χ_1 est supportée dans Ω_0 , $[\chi_2, \tilde{H}^\theta]$ est supporté près de $\partial\Omega_0$ et $(\hat{H}^{\theta,0} - z)^{-1}$ est $\tilde{\mathcal{O}}(e^{-d_\theta(x, y)/h})$. Posons $S^\theta(z) = (1 - \chi_1) (\tilde{H}^\theta - z)^{-1} \tilde{W}(x)$, alors :

$$S^\theta(z) = (1 - \chi_1) (\tilde{H}^\theta - z)^{-1} [\psi, \tilde{H}^\theta] (\tilde{H}^\theta - z)^{-1} \tilde{W}(x)$$

où

$$\psi \in C_0^\infty(\Omega_0), \quad \psi = 1 \text{ près de } \text{supp}(W)$$

$$\chi_1 = 1 \text{ près de } \text{supp}(\psi)$$

Donc $S^\theta(z)$ est aussi $\tilde{\mathcal{O}}(e^{-\delta'/h})$, car $(1 - \chi_1) (\tilde{H}^\theta - z)^{-1}$ est $\mathcal{O}(1)$, $[\psi, \tilde{H}^\theta]$ est localisé près de $\partial\Omega_0$, \tilde{W} est localisée près de 0 et $(\tilde{H}^\theta - z)^{-1}$ est $\tilde{\mathcal{O}}(e^{-d_\theta(x, y)/h})$, d'après la proposition 6.10. \square

En conséquence la série de Neumann $\sum_{j=0}^{\infty} [-\mathcal{K}_{\theta}(z)]^j$ est absolument convergente dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^n) \oplus L^2(\mathbf{R}^n))$ pour $h > 0$, $|\theta|$ et $|z|$ assez petits, z à l'extérieur de tous les γ_j .

$$\mathcal{E}_{\theta}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} [-\mathcal{K}_{\theta}(z)]^j \mathcal{F}^{\theta}(z) \quad (6.12)$$

constitue un inverse à gauche de $(\hat{H}^{\theta} - z)$, vérifiant :

$$\|(\hat{H}^{\theta} - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^n) \oplus L^2(\mathbf{R}^n))} = \mathcal{O}(h^{-1}).$$

De la même manière on peut aussi construire un inverse à droite de $(\hat{H}^{\theta} - z)$. D'où pour $\varepsilon > 0$ fixé assez petit, et $z \in [-\varepsilon, C_0 h] + i[-\varepsilon, C_0 h]$, z à l'extérieur de tous les γ_j :

$$(H_E^{\theta} - z) = (\hat{H}^{\theta} - z) [1 + (\hat{H}^{\theta} - z)^{-1} \hat{R}^{\theta}(E, h)] \quad (6.13)$$

$$\|(\hat{H}^{\theta} - z)^{-1} \hat{R}^{\theta}(E, h)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^n) \oplus L^2(\mathbf{R}^n))} = \mathcal{O}(h).$$

On en déduit que $\text{sp}(H_E^{\theta}) \cap ([-\varepsilon, C_0 h] + i[-\varepsilon, C_0 h])$ est inclus dans l'union des intérieurs des γ_j et les projecteurs spectraux correspondants s'écrivent :

$$\Pi_j^{\theta} = \oint_{\gamma_j} (z - H_E^{\theta})^{-1} dz = - \oint_{\gamma_j} \mathcal{F}^{\theta}(z) dz + \mathcal{O}(h) \quad (6.14)$$

Puisque $(z - \hat{H}^{\theta})^{-1}$ est analytique en z à l'intérieur et sur tous les γ_j , on obtient en posant $\hat{\Pi}_j^{\theta} = \oint_{\gamma_j} (z - \hat{H}^{\theta,0})^{-1} dz$:

$$\Pi_j^{\theta} = \chi_1 \hat{\Pi}_j^{\theta} \chi_2 + \mathcal{O}(h) \quad (6.15)$$

Notons aussi $\Pi_j^{\theta,0} = \oint_{\gamma_j} (z - P_2^{\theta,0})^{-1} dz$ le projecteur spectral associé à $P_2^{\theta,0}$ et γ_j .

LEMME 6.12. - Pour $h > 0$ assez petit, $\text{rg} \Pi_j^{\theta} = \text{rg} \hat{\Pi}_j^{\theta} = \text{rg} \Pi_j^{\theta,0}$, ($j \in \{1, \dots, N_0\}$).

Preuve. - En effet, l'égalité (6.15) donne, pour h assez petit $\text{rg} \Pi_j^{\theta} = \text{rg} \hat{\Pi}_j^{\theta}$. $(z - P_3^{\theta,0})^{-1}$ est analytique en z , à l'intérieur et sur tous les γ_j . D'après (6.4), $\hat{\Pi}_j^{\theta}$ s'écrit :

$$\hat{\Pi}_j^{\theta} = \oint_{\gamma_j} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ C^{\theta}(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (z - P_2^{\theta,0})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & B^{\theta}(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dz + \mathcal{O}(h).$$

Les pôles de la résolvante $(z - P_2^{\theta,0})^{-1}$ à l'intérieur de γ_j sont dans $\sigma_{\text{disc}}(P_2^{\theta,0}) \cap \text{int } \gamma_j$. Notons alors $\gamma_{j,k}$ un contour fermé inclus dans $\text{int } \gamma_j$, entourant un seul pôle $\lambda_{j,k}$ de multiplicité $m_{j,k}$. De plus à l'aide du caractère autoadjoint de $P_2^{\theta,0}$ pour $\theta \in \mathbf{R}$, θ assez petit, et de l'unicité du prolongement analytique, on a :

$$(z - P_2^{\theta,0})^{-1} = \frac{A_{j,k}^{\theta}}{(z - \lambda_{j,k})} + F_{j,k}^{\theta}(z), \quad \forall z \in \text{int } \gamma_{j,k} \quad (6.16)$$

où $F_{j,k}$ est analytique à l'intérieur et sur $\gamma_{j,k}$, et $A_{j,k}^{\theta}$ est un opérateur borné de rang $m_{j,k}$, en fait $A_{j,k}^{\theta} = \oint_{\gamma_{j,k}} (z - P_2^{\theta,0})^{-1} dz$. En utilisant aussi l'analyticité de $C^{\theta}(z)$ et $B^{\theta}(z)$, on obtient :

$$\hat{\Pi}_j^{\theta} = \sum_k \begin{pmatrix} A_{j,k}^{\theta} & -A_{j,k}^{\theta} B^{\theta}(\lambda_{j,k}) \\ -C^{\theta}(\lambda_{j,k}) A_{j,k}^{\theta} & C^{\theta}(\lambda_{j,k}) A_{j,k}^{\theta} B^{\theta}(\lambda_{j,k}) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(h) \quad (6.17)$$

Si $\varphi_{j,k}^{\theta}$ est une fonction propre de $P_2^{\theta,0}$ associée à $\lambda_{j,k}$ on a alors d'après (6.17) :

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_j^{\theta} \begin{pmatrix} \varphi_{j,k}^{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} &= \sum_l \begin{pmatrix} A_{j,l}^{\theta} \varphi_{j,k}^{\theta} \\ -C^{\theta}(\lambda_{j,k}) A_{j,l}^{\theta} \varphi_{j,k}^{\theta} \end{pmatrix} \\ &+ \mathcal{O}(h) = \begin{pmatrix} \varphi_{j,k}^{\theta} \\ C^{\theta}(\lambda_{j,k}) \varphi_{j,k}^{\theta} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(h) \end{aligned}$$

Si $h > 0$ est assez petit, on en déduit que $\text{rg } \hat{\Pi}_j^{\theta} \geq \text{rg } \Pi_j^{\theta,0}$.

Réciproquement, on a :

$$\begin{aligned} \text{rg } \hat{\Pi}_j^{\theta} &\leq \sum_k \text{rg} \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ C^{\theta}(\lambda_{j,k}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{j,k}^{\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & B^{\theta}(\lambda_{j,k}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &\leq \sum_k \text{rg } A_{j,k}^{\theta} \leq \text{rg } \Pi_j^{\theta,0}. \quad \square \end{aligned}$$

Pour pouvoir étudier modulo $\mathcal{O}(h^{3/2})$ le spectre de H_E^{θ} on a aussi besoin du lemme suivant :

LEMME 6.13. — Si φ_0 est une fonction propre de $P_2^{\theta,0}$ normalisée dans $L^2(\Omega_0)$, et associée à la valeur propre λ_0 , alors $(H_E^{\theta} - \lambda_0)\varphi = \mathcal{O}(h^2)$, uniformément pour $|E|$, $|\theta|$ et $h > 0$ assez petits, avec

$$\varphi = \begin{pmatrix} \chi_1 \varphi_0 \\ -\chi_1 (P_3^{\theta,0} - \lambda_0)^{-1} \chi_2 R_0^{\theta} \varphi_0 \end{pmatrix}$$

où χ_1 et χ_2 sont définis au lemme 6.5, et $R_0^\theta = -2h^2 e^{-2\theta} \langle \nabla_x u_2^\theta, u_3^\theta \rangle_y \nabla_x$.

Preuve. – Puisque $\text{supp}(\varphi) \subset \Omega_0$, alors $(H_E^\theta - \lambda_0)\varphi = (\hat{H}^{\theta,0} - \lambda_0)\varphi + \mathcal{O}(h^2)$ et en utilisant la remarque 6.4, on a aussi $(\hat{H}^{\theta,0} - \lambda_0)\varphi = \mathcal{O}(h^2)$. \square

Par le lemme 6.12, on sait que :

$$\#(\text{sp } H_E^\theta) \cap ([-\varepsilon, C_0 h] + i[-\varepsilon, \varepsilon]) = N_0$$

($|E|$, $|\theta|$, h , ε assez petits). On a en plus :

PROPOSITION 6.14. – Pour $\theta \in \mathbf{C}$, fixé, $|\theta|$ assez petit,

$$(\text{sp } H_E^\theta) \cap ([-\varepsilon, C_0 h] + i[-\varepsilon, \varepsilon]) = \{\lambda_1^\theta(E, h), \dots, \lambda_{N_0}^\theta(E, h)\}$$

avec pour tout j , $\lambda_j^\theta(E, h) = e_j h + \mathcal{O}(h^{3/2})$, uniformément pour $|E|$ et h assez petits.

Preuve. – $\varphi_1, \dots, \varphi_{N_0}$ désignent les fonctions propres de P_2^0 , normalisées dans $L^2(\Omega_0)$ et associées à $E_1(h), \dots, E_{N_0}(h)$, et $\varphi_j^\theta, j \in \{1, \dots, N_0\}$, désignent leurs dilatées. Notons :

$$\tilde{\varphi}_j^\theta = \frac{\varphi_j^\theta}{\|\varphi_j^\theta\|_{L^2(\Omega_0)}} \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}_j^\theta = \frac{\psi_j^\theta}{\|\psi_j^\theta\|_{L^2(\Omega_0) \oplus L^2(\Omega_0)}}$$

avec

$$\psi_j^\theta = \begin{pmatrix} \chi_1 \tilde{\varphi}_j^\theta \\ -\chi_1 (P_3^{\theta,0} - E_j(h))^{-1} \chi_2 R_0^\theta \tilde{\varphi}_j^\theta \end{pmatrix}$$

alors

$$\left. \begin{aligned} P_2^{\theta,0} \tilde{\varphi}_j^\theta &= E_j(h) \tilde{\varphi}_j^\theta \\ \|\tilde{\varphi}_j^\theta\|_{L^2(\Omega_0)} &= 1 \end{aligned} \right\}$$

et

$$\left. \begin{aligned} H_E^\theta \tilde{\psi}_j^\theta &= E_j(h) \tilde{\psi}_j^\theta + \mathcal{O}(h^2) \\ \|\tilde{\psi}_j^\theta\|_{L^2(\Omega_0) \oplus L^2(\Omega_0)} &= 1 \\ \langle \tilde{\psi}_j^\theta, \tilde{\psi}_k^\theta \rangle &= \delta_{j,k} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

De plus d'après l'égalité (6.15) et le lemme 6.13, on a :

$$\Pi_j^\theta \tilde{\psi}_k^\theta = \tilde{\psi}_k^\theta + \mathcal{O}(h) \quad \text{pour } k \in J_j = \{k; e_k = e_j\}$$

Ainsi $\{\Pi_j^\theta \tilde{\psi}_k^\theta\}_{k \in J_j}$ forme une base de $\text{Im } \Pi_j^\theta$, et la matrice de $H_E^\theta|_{\text{Im } \Pi_j^\theta}$ dans cette base s'écrit d'après (6.18) :

$$\mathcal{M}_j = \text{diag}(E_k(h))_{k \in J_j} + \mathcal{O}(h^2)$$

et *a fortiori*

$$\mathcal{M}_j = \text{diag}(e_j h, \dots, e_j h) + \mathcal{O}(h^{3/2}).$$

Comme dans [13] § 6, on en déduit que $\text{sp } \mathcal{M}_j \subset \{e_j h\} + \mathcal{O}(h^{3/2})$. \square

A l'aide des résultats du § 4, il est facile de montrer la proposition suivante concernant la dépendance de H_E^θ par rapport au paramètre d'énergie E :

PROPOSITION 6.15. – $\theta \in \mathbf{C}$, fixé, $|\theta|$ assez petit, on a :

(i)

$$H_E^\theta - H_{E'}^\theta = (E - E') S_\theta(E, E', h),$$

avec

$$\|S_\theta(E, E', h)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^m \oplus \mathcal{H}^m)} = \mathcal{O}(h^2)$$

pour tout $m \in \mathbf{Z}$, et uniformément pour $|E|, |E'|$, et h assez petits.

(ii) Pour $k \in \{0, 1, 2\}$, $j \in \{1, \dots, N_0\}$ et $m \in \mathbf{Z}$

$$\|(H_E^\theta - z)^{-1} - (H_{E'}^\theta - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^m \oplus \mathcal{H}^m, \mathcal{H}^{m+k} \oplus \mathcal{H}^{m+k})} = \mathcal{O}(h^{-k} |E - E'|)$$

uniformément pour $z \in \gamma_j$; $|E|, |E'|$, et h assez petits.

7. DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DES RÉSONANCES.

Pour $\theta \in \mathbf{C}$ fixé, $|\theta|$ assez petit et $j \in \{1, \dots, N_0\}$, notons $\mu_j = \mu_j(h)$ une somme asymptotique de $E_j(h)$ (proposition 5.2), et $\hat{b}_j^\theta(x, y, h)$ celle de la série formelle $b_j(xe^\theta, y, h)$, définie par (5.3) et (5.4). Soit aussi $\chi \in C_0^\infty(\Omega_0)$, $\chi = 1$ près de 0. Posons :

$$v_j^\theta(x, y, h) = \chi(x) \hat{b}_j^\theta(x, y, h) e^{-\psi(xe^\theta)/h}$$

$$(P_\theta - \mu_j) v_j^\theta = \hat{w}^\theta(x, y, h)$$

On a par construction :

$$\forall m \in \mathbf{N}, \quad \|\hat{w}^\theta(x, y, h)\|_{\mathcal{H}^m} = \mathcal{O}(h^\infty) \tag{7.1}$$

et

$$A_{\mu_j}^\theta(h) (v_j^\theta \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0) = (\hat{w}^\theta \oplus \beta_{j,1}^\theta \oplus \beta_{j,2}^\theta \oplus \beta_{j,3}^\theta)$$

où

$$\beta_{j,k}^\theta = \langle v_j^\theta, u_k^\theta \rangle_y, \quad k \in \{1, 2, 3\}$$

donc

$$\left. \begin{aligned} X_\theta(\mu_j) \hat{w}^\theta + a_+^\theta(\mu_j) [\beta_{j,1}^\theta \oplus \beta_{j,2}^\theta \oplus \beta_{j,3}^\theta] &= v_j^\theta \\ (F_{\mu_i}^\theta - \mu_j) (\beta_{j,1}^\theta \oplus \beta_{j,2}^\theta \oplus \beta_{j,3}^\theta) &= a_-^\theta(\mu_j) \hat{w}^\theta \end{aligned} \right\}$$

En particulier d'après (3.3), et (7.1) :

$$(F_{\mu_j}^\theta - \mu_j) (\beta_{j,1}^\theta \oplus \beta_{j,2}^\theta \oplus \beta_{j,3}^\theta) = \mathcal{O}(h^\infty)$$

dans $\mathcal{H}^m \oplus \mathcal{H}^m \oplus \mathcal{H}^m$, $\forall m \in \mathbf{Z}$. Utilisant ensuite (4.1), on obtient dans $\mathcal{H}^m \oplus \mathcal{H}^m$, $\forall m \in \mathbf{Z}$:

$$r_j \stackrel{\text{def}}{=} (H_{\mu_j}^\theta - \mu_j) (\beta_{j,2}^\theta \oplus \beta_{j,3}^\theta) = \mathcal{O}(h^\infty) \quad (7.2)$$

Soit maintenant λ une valeur propre de P_θ dans $[-\varepsilon, C_0 h] + i[-\varepsilon, 0]$, associée à une fonction propre w^θ normalisée. Alors le calcul précédent appliqué à λ et w^θ donne :

$$(H_\lambda^\theta - \lambda) [\langle w^\theta, u_2^\theta \rangle_y \oplus \langle w^\theta, u_3^\theta \rangle_y] = 0 \quad (7.3)$$

et, d'après la proposition 6.14, il existe $j \in \{1, \dots, N_0\}$ tel que :

$$\lambda = e_j h + \mathcal{O}(h^{3/2}) \quad (7.4)$$

Il découle alors de la proposition 6.15, que pour $z \in \gamma_j$, $p \in \{0, 1, 2\}$, on a :

$$\| (H_\lambda^\theta - z)^{-1} (H_{\mu_j}^\theta - z)^{-1} \|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^m \oplus \mathcal{H}^m, \mathcal{H}^{m+p} \oplus \mathcal{H}^{m+p})} = \mathcal{O}(h^{3/2-p}) \quad (7.5)$$

D'après (7.2), on a aussi :

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_j} (z - H_{\mu_j}^\theta)^{-1} (\beta_{j,2}^\theta \oplus \beta_{j,3}^\theta) dz &= \oint_{\gamma_j} (z - H_{\mu_j}^\theta)^{-1} (H_{\mu_j}^\theta - \mu_j)^{-1} r_j dz \\ &= (\beta_{j,2}^\theta \oplus \beta_{j,3}^\theta) + \mathcal{O}(h^\infty) \end{aligned}$$

On en déduit pour tout $l \in J_j$:

$$\oint_{\gamma_j} (z - H_\lambda^\theta)^{-1} (\beta_{l,2}^\theta \oplus \beta_{l,3}^\theta) dz = (\beta_{l,2}^\theta \oplus \beta_{l,3}^\theta) + r_l \quad (7.6)$$

avec $\|r_l\|_{\mathcal{H}^m \oplus \mathcal{H}^m} = \mathcal{O}(h^{5/2-m})$, pour tout $m \geq 0$.

Notons $\Pi_\lambda = \oint_{\gamma_j} (z - H_\lambda^\theta)^{-1} dz$, on obtient à partir de (7.6) :

$$H_\lambda^\theta [\Pi_\lambda (\beta_{l,2}^\theta \oplus \beta_{l,3}^\theta)] = \mu_l \Pi_\lambda (\beta_{l,2}^\theta \oplus \beta_{l,3}^\theta) + r'_l \quad (7.7)$$

avec $\|r'_l\|_{L^2 \oplus L^2} = \mathcal{O}(h^{5/2})$. Par suite $\{\Pi_\lambda (\beta_{l,2}^\theta \oplus \beta_{l,3}^\theta)\}_{l \in J_j}$ forme une base de $\text{Im } \Pi_\lambda$, et la matrice de H_λ^θ dans cette base s'écrit :

$$\mathcal{M}_\lambda = \text{diag}(\mu_l)_{l \in J_j} + \mathcal{O}(h^{5/2}).$$

Le calcul du spectre de \mathcal{M}_λ donne, $\lambda = e_j h + \alpha_{l_1,1} h^{3/2} + \mathcal{O}(h^{5/2})$, $\alpha_{l_1,1} \in \mathbf{R}$. Posons ensuite $A_1 = \{l \in J_j; \alpha_{l,1} = \alpha_{l_1,1}\}$, on a de même pour $l \in A_1$:

$$H_\lambda^\theta \Pi_\lambda (\beta_{l,2}^\theta + \beta_{l,3}^\theta) = \mu_l (\beta_{l,2}^\theta + \beta_{l,3}^\theta) + \mathcal{O}(h^3) \quad \text{dans } L^2(\mathbf{R}^n) \oplus L^2(\mathbf{R}^n).$$

Il existe alors $l_2 \in A_1$, tel que $\lambda = \mu_{l_2}(h) + \mathcal{O}(h^3)$.

En itérant ce procédé comme dans [13], on obtient finalement que les développements asymptotiques réels $E_j(h)$ approximent bien les résonances de P .

Il reste à démontrer que P_θ admet exactement N_0 valeurs propres dans $[-\varepsilon, C_0 h] + i[-\varepsilon, 0]$. En effet, par les constructions approchées du paragraphe 5, on en déduit que :

$$\#\text{sp}(P_\theta) \cap ([-\varepsilon, C_0 h] + i[-\varepsilon, 0]) \geq N_0$$

puisque les valeurs propres de P_θ dans $[-\varepsilon, C_0 h] + i[-\varepsilon, 0]$ sont dans l'union des intérieurs des γ_j .

D'autre part, il est facile de montrer, par un calcul simple analogue à celui des paragraphes 3 et 4, que l'on a :

$$(P_\theta - z)^{-1} = \mathcal{A}(z) + \mathcal{B}_1(z)(H_z^\theta - z)^{-1} \mathcal{B}_2(z) \tag{7.8}$$

($\mathcal{A}(z)$ opérateur scalaire, $\mathcal{B}_1(z)$ opérateur matriciel (1, 2) et $\mathcal{B}_2(z)$, (2, 1)). $\mathcal{A}(z)$, $\mathcal{B}_1(z)$ et $\mathcal{B}_2(z)$ sont analytiques en z près de 0, et uniformément bornés par rapport à h . D'où pour $j \in \{1, \dots, N_0\}$,

$$\oint_{\gamma_j} (z - P_\theta)^{-1} dz = \oint_{\gamma_j} \mathcal{B}_1(z)(z - H_z^\theta)^{-1} \mathcal{B}_2(z) dz$$

et donc, d'après la proposition 6.11 :

$$\oint_{\gamma_j} (z - P_\theta)^{-1} dz = \mathcal{B}_1(e_j h) \chi_1 \hat{\Pi}_j^\theta \chi_2 \mathcal{B}_2(e_j h) + \mathcal{O}(h) \tag{7.9}$$

A fortiori on a pour $h > 0$ assez petit $\text{rg} \oint_{\gamma_j} (z - P_\theta)^{-1} dz \leq N_j$, donc :

$$\#\text{sp}(P_\theta) \cap ([-\varepsilon, C_0 h] + i[-\varepsilon, 0]) \leq N_0. \quad \square$$

Remarque 7.1. – Il est aussi simple de montrer que tous les développements asymptotiques réels $E_j(h)$ du paragraphe 5 sont atteints par $\text{sp}(P_\theta)$ (cf. [13]).

8. LARGEUR DES RÉSONANCES

Pour $\theta \in \mathbf{C}$, $|\theta|$ assez petit, on commence tout d'abord par établir des inégalités d'Agmon sur les fonctions propres de H_E^θ , donc sur celles de F_E^θ et celles de P_θ , ce qui donne leur décroissance exponentielle en dehors du puits. Cette décroissance est ensuite étendue au domaine complexe (cf. [14]) à l'aide d'une formule de représentation des opérateurs intégraux de Fourier à phase complexe.

Soit Φ une fonction réelle et lipschitzienne sur \mathbf{R}^n , alors comme dans [14] on a :

LEMME 8.1. — $\forall m \in \mathbf{R}$, il existe une constante C positive telle que :

$$(i) \quad \| e^{\Phi(x)/h} [\hat{\Pi}_\theta, \Delta_x] e^{-\Phi(x)/h} \|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^m, \mathcal{H}^{m-1})} \leq C (1 + h^{-1} \|\nabla \Phi\|_{L^\infty})$$

uniformément pour $h > 0$ assez petit.

$$(ii) \quad \| e^{\Phi(x)/h} X_\theta e^{-\Phi(x)/h} \|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^m, \mathcal{H}^{m+j})} \leq \frac{C}{h^j}, \quad j \in \{0, 1, 2\}$$

uniformément pour $h > 0$ assez petit et $\|\nabla \Phi\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{C}$. \square

Avec les mêmes notations du § 4, on a aussi :

PROPOSITION 8.2. — $\forall m \in \mathbf{R}$, il existe une constante C positive telle que :

$$e^{\Phi(x)/h} R^\theta(E, h) e^{-\Phi(x)/h} = R_1^\theta + R_2^\theta$$

avec

$$\| R_1^\theta \|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^m \oplus \mathcal{H}^m)} \leq C (h^2 + h \|\nabla \Phi\|_{L^\infty})$$

et

$$\| R_2^\theta \|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^m \oplus \mathcal{H}^m, \mathcal{H}^{m-1} \oplus \mathcal{H}^{m-1})} \leq C h^2$$

uniformément pour $h > 0$ assez petit et $\|\nabla \Phi\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{C}$.

Preuve. — D'après (4.6), on a $R^\theta(E, h) = (R_{ij}^\theta(E, h))_{i,j \in \{2,3\}}$, et

$$\begin{aligned} & e^{\Phi(x)/h} R_{ij}^\theta(E, h) e^{-\Phi(x)/h} \\ &= -h^2 e^{-2\theta} \langle \Delta_x w_j^\theta, w_i^{\bar{\theta}} \rangle_y - 2 e^{-2\theta} \langle \nabla_x w_j^\theta, w_i^{\bar{\theta}} \rangle_y [h^2 \nabla_x - h(\nabla \Phi)] \\ & \quad - h^4 e^{-4\theta} \langle A_{j,\theta}, w_i^{\bar{\theta}} \rangle_y + \langle e^{\Phi(x)/h} G_\theta [(Z_\theta^j(E) e^{-\Phi(x)/h}(\cdot)) w_1^\theta], w_i^{\bar{\theta}} \rangle_y \end{aligned}$$

avec

$$A_{j,\theta} = (e^{\Phi(x)/h} [\Delta_x, \hat{\Pi}_\theta] e^{-\Phi(x)/h}) (e^{\Phi(x)/h} X_\theta e^{-\Phi(x)/h}) \\ \times (e^{\Phi(x)/h} [\hat{\Pi}_\theta, \Delta_x] e^{-\Phi(x)/h}) (\cdot w_j^\theta).$$

D'après le lemme 8.1, et la forme explicite de $R_{i,j}^\theta(E, h)$, il ne reste plus qu'à étudier les opérateurs :

$$\tilde{Z}_{\theta,\Phi}^{i,j}(E) = \langle G_{\theta,\Phi} [(Z_{\theta,\Phi}^j(E)(\cdot)) w_1^\theta], w_i^\theta \rangle_y$$

où

$$G_{\theta,\Phi} = e^{\Phi(x)/h} G_\theta e^{-\Phi(x)/h}$$

et

$$Z_{\theta,\Phi}^j(E) = e^{\Phi(x)/h} Z_\theta^j(E) e^{-\Phi(x)/h}$$

En effet, $\forall i, j \in \{2, 3\}$, $\tilde{Z}_{\theta,\Phi}^{i,j}(E)$ est $\mathcal{O}(h^2 + h \|\nabla \Phi\|_{L^\infty})$ de \mathcal{H}^m dans \mathcal{H}^m , $\forall m \in \mathbf{R}$, en procédant de la même manière que dans la proposition 4.1. \square

Établissons maintenant des estimations d'Agmon sur la partie principale de H_E^θ . Soient χ_1 et χ_2 les fonctions définies dans la preuve de la proposition 6.8, et $\varepsilon_0 > 0$. Posons pour tout $v = (v_1, v_2) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \oplus C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$:

$$A_{1,\Phi}^\theta = \text{Re} \langle \chi_1 e^{\Phi(x)/h} [-h^2 e^{-2\theta} \Delta_x I + M(x, \theta)] v, e^{\Phi(x)/h} \chi_1 v \rangle$$

$$A_{2,\Phi}^\theta = \text{Re} \langle \chi_2 e^{\Phi(x)/h} [-h^2 e^{-2\theta} \Delta_x I + M(x, \theta)] v, \\ e^{\Phi(x)/h} \chi_2 (v_1, (\varepsilon_0 - i) v_2) \rangle \tag{8.1}$$

Si $\|\nabla \Phi\|_{L^\infty} \leq \frac{|\theta|}{2C_2}$, où C_2 est une constante positive, on démontre alors :

PROPOSITION 8.3. – *Il existe une constante $C' > 0$ telle que pour tout $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \oplus C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$,*

$$\begin{aligned}
|A_{1,\Phi}^\theta| + |A_{2,\Phi}^\theta| &\geq \frac{1}{C'} \{ \|\chi_1 h \nabla_x (e^{\Phi(x)/h} v)\|^2 \\
&\quad + \|\chi_2 h \nabla_x (e^{\Phi(x)/h} v)\|^2 \} \\
&\quad + \langle [\operatorname{Re}(e^{2\theta} M(x, \theta)) - (\nabla \Phi)^2 I] \\
&\quad \times (e^{\Phi(x)/h} \chi_1 v), (e^{\Phi(x)/h} \chi_1 v) \rangle \\
&\quad + \langle [\operatorname{Re}(e^{2\theta} M(x, \theta)) - (\nabla \Phi)^2 I] \\
&\quad \times (e^{\Phi(x)/h} \chi_2 v), (e^{\Phi(x)/h} \chi_2 v) \rangle \\
&\quad - C' [h \|\nabla_x (e^{\Phi(x)/h} v)\|^2 \\
&\quad + [h^2 + (h + h \|\nabla \Phi\|_{L^\infty})] \|e^{\Phi(x)/h} v\|^2]
\end{aligned}$$

uniformément pour $\|\nabla \Phi\|_{L^\infty}$ et $h > 0$ assez petits.

Preuve. – Posons $\mathcal{P}_\theta = -h^2 e^{-2\theta} \Delta_x I + M(x, \theta)$.

$$\begin{aligned}
A_{2,\Phi}^\theta &= \operatorname{Re} \langle e^{\Phi(x)/h} \mathcal{P}_\theta (\chi_2 v), e^{\Phi(x)/h} \chi_2 (v_1, (\varepsilon_0 - i) v_2) \rangle \\
&\quad + \operatorname{Re} \langle e^{\Phi(x)/h} [\chi_2, \mathcal{P}_\theta] v, e^{\Phi(x)/h} \chi_2 (v_1, (\varepsilon_0 - i) v_2) \rangle
\end{aligned}$$

comme

$$M(x, \theta)|_{\operatorname{supp} \chi_2} = \begin{pmatrix} \lambda_2^\theta(x) & 0 \\ 0 & \lambda_3^\theta(x) \end{pmatrix}$$

en utilisant alors l'hypothèse (H5) et la remarque 1.1, on a pour $v = (v_1, v_2)$:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re} \langle e^{2\theta} e^{\Phi(x)/h} \mathcal{P}_\theta (\chi_2 v), e^{\Phi(x)/h} \chi_2 (v_1, (\varepsilon_0 - i) v_2) \rangle \\
&\geq \|h \nabla_x (e^{\Phi(x)/h} \chi_2 v_1)\|^2 + (\varepsilon_0 - 1) \|h \nabla_x (e^{\Phi(x)/h} \chi_2 v_2)\|^2 \\
&\quad + \operatorname{Re} \langle [(e^{2\theta} \lambda_2^\theta(x)) - (\nabla \Phi)^2] (e^{\Phi(x)/h} \chi_2 v_1), (e^{\Phi(x)/h} \chi_2 v_1) \rangle \\
&\quad + \varepsilon_0 \operatorname{Re} \langle [(e^{2\theta} \lambda_3^\theta(x)) - (\nabla \Phi)^2] (e^{\Phi(x)/h} \chi_2 v_2), (e^{\Phi(x)/h} \chi_2 v_2) \rangle \\
&\quad + \left(\frac{|\theta|}{C_2} - \|\nabla \Phi\|_{L^\infty}^2 \right) \|e^{\Phi(x)/h} \chi_2 v_2\|^2 \\
&\geq \frac{1}{C_3} \|h \nabla_x (e^{\Phi(x)/h} \chi_2 v)\|^2 + \operatorname{Re} \langle [e^{2\theta} M(x, \theta) - (\nabla \Phi)^2 I] \\
&\quad \times (e^{\Phi(x)/h} \chi_2 v), (e^{\Phi(x)/h} \chi_2 v) \rangle
\end{aligned}$$

avec $C_3 > 0$. De même,

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \langle e^{2\theta} e^{\Phi(x)/h} [\chi_2, \mathcal{P}_\theta] v, e^{\Phi(x)/h} \chi_2 (v_1, (\varepsilon_0 - i) v_2) \rangle \\ &= \operatorname{Re} \langle h^2 e^{\Phi(x)/h} [(\Delta \chi_2) + 2(\nabla \chi_2) \nabla_x] I v, e^{\Phi(x)/h} \chi_2 (v_1, (\varepsilon_0 - i) v_2) \rangle \\ &= \mathcal{O}(h \|h \nabla_x (e^{\Phi(x)/h} v)\|^2 + h^2 \|e^{\Phi(x)/h} v\|^2 \\ &+ (h + h \|\nabla \Phi\|_{L^\infty}) \|e^{\Phi(x)/h} v\|^2) \end{aligned}$$

Ainsi, il existe $C_4 > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} |A_{2,\Phi}^\theta| &\geq \frac{1}{C_4} \|h \nabla_x (e^{\Phi(x)/h} \chi_2 v)\|^2 \\ &+ \operatorname{Re} \langle [(e^{2\theta} M(x, \theta)) - (\nabla \Phi)^2 I] (e^{\Phi(x)/h} \chi_2 v), (e^{\Phi(x)/h} \chi_2 v) \rangle \\ &- C_4 [h \|h \nabla_x (e^{\Phi(x)/h} v)\|^2 + h^2 \|e^{\Phi(x)/h} v\|^2 \\ &+ (h + h \|\nabla \Phi\|_{L^\infty}) \|e^{\Phi(x)/h} v\|^2] \end{aligned}$$

De la même manière pour $A_{1,\Phi}^\theta$, il existe $C_5 > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} |A_{1,\Phi}^\theta| &\geq \|h \nabla (e^{\Phi(x)/h} v)\|^2 + \langle [\operatorname{Re}(e^{2\theta} M(x, \theta)) - (\nabla \Phi)^2 I] \\ &\times (e^{\Phi(x)/h} \chi_1 v), (e^{\Phi(x)/h} \chi_1 v) \rangle \\ &- C_5 [h \|h \nabla_x (e^{\Phi(x)/h} v)\|^2 + h^2 \|e^{\Phi(x)/h} v\|^2 \\ &+ (h + h \|\nabla \Phi\|_{L^\infty}) \|e^{\Phi(x)/h} v\|^2]. \end{aligned}$$

En regroupant finalement $|A_{1,\Phi}^\theta|$ et $|A_{2,\Phi}^\theta|$, on obtient l'inégalité demandée. \square

$M(x, \theta)$ est une matrice dont les valeurs propres sont $\lambda_2^\theta(x)$ et $\lambda_3^\theta(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}^n$, alors $\operatorname{Re}(e^{2\theta} M(x, \theta))$ est définie positive sur Ω_2 et sur $(\mathbf{R}^n \setminus \{x \in \mathbf{R}^n; |x| < |\theta|\}) \cap \Omega_1$. D'après la remarque 1.1, il existe $C_6 > 0$ tel que l'on ait pour tout $v \in C_0^\infty(\Omega_1) \oplus C_0^\infty(\Omega_1)$:

$$\langle \operatorname{Re}(e^{2\theta} M(x, \theta)) v, v \rangle \geq \frac{1}{C_6} \|\operatorname{Min}(1, |x|) v\|^2. \quad (8.2)$$

De plus en utilisant le fait que $\|\chi_1 u\| \leq \|u\|$, $\|\chi_2 u\| \leq \|u\|$ et $\|\chi_1 u\| + \|\chi_2 u\| \geq \|u\|$, pour tout $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \oplus C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$; et les propositions 8.2 et 8.3, on en déduit le résultat :

PROPOSITION 8.4. – *Il existe une constante $C > 0$, telle que pour tout $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \oplus C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, on, a :*

$$\begin{aligned} \| e^{\Phi(x)/h} H_E^\theta v \| \| e^{\Phi(x)/h} v \| &\geq \frac{1}{C} \| h \nabla_x (e^{\Phi(x)/h} v) \|^2 \\ &+ \langle [\operatorname{Re}(e^{2\theta} M(x, \theta)) - (\nabla \Phi)^2 I](e^{\Phi(x)/h} v), e^{\Phi(x)/h} v \rangle \\ &- C [h^2 (h + h \|\nabla \Phi\|_{L^\infty})] \| e^{\Phi(x)/h} v \|^2 \end{aligned}$$

uniformément pour $\|\nabla \Phi\|_{L^\infty} \leq \frac{|\theta|}{2C}$ et $h > 0$ assez petit.

En particulier on peut exploiter cette dernière inégalité pour démontrer la décroissance exponentielle des fonctions propres de H_E^θ en dehors du puits. Pour cela considérons $\Phi_\theta(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ telle que :

$$\left. \begin{array}{l} \text{si} \\ \Phi_\theta(x) = \frac{1}{2} d_\theta(x, 0) \\ \operatorname{Min}(\operatorname{Re}(e^{2\theta} \lambda_2^\theta(x)), \operatorname{Re}(e^{2\theta} \lambda_3^\theta(x))) \leq \frac{|\theta|}{4C^2}; \\ \Phi_\theta(x) = \text{Cte} \\ \text{si} \\ \operatorname{Min}(\operatorname{Re}(e^{2\theta} \lambda_2^\theta(x)), \operatorname{Re}(e^{2\theta} \lambda_3^\theta(x))) \geq \frac{|\theta|^2}{2C^2}; \\ \|\nabla \Phi\|_{L^\infty} \leq \frac{|\theta|}{2C} \end{array} \right\} \quad (8.3)$$

En appliquant la proposition 8.4, avec $\Phi(x) = (1 - \varepsilon) \Phi_\theta(x)$, $\varepsilon > 0$, et u une fonction propre de H_E^θ , on obtient comme au lemme 6.3,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \| e^{\Phi_\theta(x)/h} u \|_{\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^n) \oplus \mathcal{H}^1(\mathbf{R}^n)} = \mathcal{O}_\varepsilon(e^{\varepsilon/h}) \quad (8.4)$$

Soit maintenant ρ une résonance de P dans $[0, C_0 h] + i[-\varepsilon, 0]$ et w_θ une fonction propre normalisée de P_θ associée à ρ . D'après le corollaire 3.2, on peut alors associer à w_θ une fonction $(\alpha_1^\theta \oplus \alpha_2^\theta \oplus \alpha_3^\theta) \in L^2(\mathbf{R}^n) \oplus L^2(\mathbf{R}^n) \oplus L^2(\mathbf{R}^n)$, normalisée telle que :

$$(F_\rho^\theta - \rho)(\alpha_1^\theta \oplus \alpha_2^\theta \oplus \alpha_3^\theta) = 0 \quad (8.5)$$

d'après (4.3), on a aussi :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 = (Z_2^\theta(\rho) \oplus Z_3^\theta(\rho))(\alpha_2^\theta \oplus \alpha_3^\theta) \\ (H_\rho^\theta - \rho)(\alpha_2^\theta \oplus \alpha_3^\theta) = 0 \end{array} \right\} \quad (8.6)$$

A l'aide de la proposition 4.1, (8.4) et (8.6) on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \| e^{\Phi_\theta(x)/h} (\alpha_1^\theta \oplus \alpha_2^\theta \oplus \alpha_3^\theta) \|_{\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^n) \oplus \mathcal{H}^1(\mathbf{R}^n) \oplus \mathcal{H}^1(\mathbf{R}^n)} = \mathcal{O}_\varepsilon(e^{\varepsilon/h}) \quad (8.7)$$

en utilisant ensuite les notations du paragraphe 3, on pose :

$$\tilde{w}_\theta = a_+^\theta(\rho) (\alpha_1^\theta \oplus \alpha_2^\theta \oplus \alpha_3^\theta). \quad (8.8)$$

Alors d'après (3.3) et le fait que $X_\theta(\rho)$ est $\mathcal{O}(h^{-j})$ de \mathcal{H}^m dans \mathcal{H}^{m+j} , $\forall m \in \mathbf{Z}$, $j \in \{0, 1, 2\}$, on en déduit que :

$$\| \tilde{w}_\theta \|_{L^2(\mathbf{R}^{n+p})} = 1 + \mathcal{O}(h)$$

comme de plus $(P_\theta - \rho)\tilde{w}_\theta = 0$, on peut en fait prendre :

$$w_\theta = C(h) \tilde{w}_\theta \quad (8.9)$$

où $C(h) = (1 + \mathcal{O}(h))$ est une constante. Il résulte alors du lemme 8.1 de (8.8) et de (8.9) que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \| e^{\Phi_\theta(x)/h} w_\theta \|_{\mathcal{H}^1} = \mathcal{O}_\varepsilon(e^{\varepsilon/h}) \quad (8.10)$$

A l'aide de cette dernière estimation on trouve une décroissance exponentielle des fonctions résonantes de $P : (U_{-\theta} w_\theta)$. Ensuite les mêmes calculs pseudo-différentiels analytiques et estimations dans le complexe, donnés dans [14], permettent d'établir que les résonances de P ont une partie imaginaire $\mathcal{O}(e^{-\varepsilon_0/h})$, $\varepsilon_0 > 0$. En effet,

$$w_\theta \in H_{-\text{Re } \Phi_\theta(x) + \varepsilon | \text{Im } x|}(\Omega_\theta, L^2(\mathbf{R}^p)), \quad \forall \varepsilon > 0$$

avec $\Omega_\theta = \left\{ x \in \mathbf{C}^n; |x| < \frac{|\theta|}{C} \right\}$, $C > 0$, et où $H_\varphi(\Omega_\theta, L^2(\mathbf{R}^p))$ désigne l'espace des fonctions $w(x, h)$ qui sont holomorphes en x dans un voisinage de $\bar{\Omega}_\theta$ à valeurs dans $L^2(\mathbf{R}^p)$, et vérifiant :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists C_\varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall x \in \Omega_\theta, \quad \| w(x, h) \|_{L^2(\mathbf{R}^p)} \leq C_\varepsilon e^{(\varphi(x) + \varepsilon)/h},$$

φ étant une fonction continue et réelle sur Ω_θ .

De plus d'après l'estimation (8.10), et avec

$$W = \left\{ x \in \mathbf{R}^n; |x| \leq \frac{|\theta|}{2C} \right\},$$

on a :

$$\| w_\theta \|_{L^2(W \times \mathbf{R}^p)} \geq 1 - K_1 e^{-\varepsilon_1/h} \quad (8.11)$$

pour $h > 0$ assez petit, avec $K_1 > 0$ et $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \inf_{\mathbf{R}^n \setminus W} (\operatorname{Re} \Phi_\theta(x)) > 0$. D'autre part si l'on pose $w = U_{-\theta} w_\theta$, w est holomorphe en x dans Ω_θ à valeurs dans $L^2(\mathbf{R}^p)$ et vérifie $(P - \rho)w = 0$. On a aussi par la formule de Green :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \rho \|w\|_{L^2(W \times \mathbf{R}^p)}^2 &= \operatorname{Im} \langle Pw, w \rangle_{L^2(W \times \mathbf{R}^p)} \\ &= -h^2 \int_{\partial W \times \mathbf{R}^p} \bar{w} \frac{\partial w}{\partial \gamma} ds \end{aligned} \quad (8.12)$$

γ étant la normale extérieure de ∂W , et ds sa mesure de surface, alors pour $\varepsilon > 0$ assez petit on en déduit :

$$|\operatorname{Im} \rho| \leq \|w\|_{L^2(W \times \mathbf{R}^p)}^{-2} \cdot K_2 e^{-\varepsilon_1/h} \quad (8.13)$$

où $K_2 > 0$. A l'aide de la formule de représentation Fourier intégrale à phase complexe :

$$\begin{aligned} \langle w_\theta(x), \varphi \rangle_y &= (2\pi)^{-n} \int_{|\xi| \leq \frac{\varepsilon}{h}} e^{i(x-x')\xi - |\xi|(x-x')^2/2} \\ &\quad \times a(x-x', \xi) \langle w_\theta(x'), \varphi \rangle_y \chi(x') dx' d\xi + \tau_\varepsilon(x, h) \end{aligned} \quad (8.14)$$

où

$$\sup_{x \in \Omega_\theta} |\tau_\varepsilon(x, h)| \leq e^{-\varepsilon'/h}$$

avec $\varepsilon' > 0$, et uniformément par rapport à $\varphi \in L^2(\mathbf{R}^p)$, $\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^p)} = 1$, et $h > 0$ assez petit, $\chi \in C_0^\infty\left(|x'| \leq \frac{|\theta|}{C}\right)$. On obtient (cf. [14]) : $\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0$, tel que :

$$\|w\|_{L^2(W \times \mathbf{R}^p)} \geq \frac{1}{C_\varepsilon} e^{-\varepsilon/h}.$$

Cette dernière estimation ainsi que (8.14), donnent :

$$|\operatorname{Im} \rho| \leq K_\varepsilon e^{-\varepsilon_1/h} \leq K_\varepsilon e^{-|\theta|^2/C' h}$$

puisque

$$\inf_{\partial W} (\operatorname{Re} \Phi_\theta(x)) \geq \frac{1}{C'} |\theta|^2, \quad C' > 0. \quad \square$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. AGUILAR et J. M. COMBES, A class of analytic perturbations for one-body schrödinger Hamiltonians. *Comm. Math. Phys.*, vol. **22**, 1971, p. 269-279.
- [2] A. BALAZARD-KONLEIN, Calcul fonctionnel pour les opérateurs h -admissibles à symboles opérérateurs and applications. Thèse de 3^e cycle, Université de Nantes, 1985.
- [3] J. M. COMBES, P. DUCLOS et R. SEILER, The Born-Oppenheimer approximation, in rigorous atomic and molecular physics. Eds-G. Velo, A. Wightman, p. 185-212, New York, plenum 1981.
- [4] B. HELFFER, Semi-classical analysis for the schrödinger operators and applications. *Lectures Notes in Math.*, 1336.
- [5] B. HELFFER et A. MARTINEZ, Comparaison entre les diverses notions de résonances. *Helv. Phys. Acta*, vol. **60**, 1987, p. 992-1003.
- [6] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND, Multiple wells in the semi-classical limit I. *Comm. Part. Diff. Equ.* vol. **9** (4), 1984, p. 337-408.
- [7] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND, Puits multiples en limite semi-classique II. Interaction moléculaire, symétries, perturbations, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. **42**, 2, 1985, p. 127-212.
- [8] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND, Résonances en limite semi-classique. *Memoires de la S.M.F.* 3, **114**, 1986.
- [9] M. KLEIN, On the mathematical theory of predissociation. *Ann. Phys.*, vol. **178**, 1987, p. 48-73.
- [10] M. KLEIN, A. MARTINEZ, R. SEILER et X. P. WANG, On the Born-Oppenheimer expansion for polyatomic molecules. *Commun. Math. Phys.*, 1992, p. 607-639.
- [11] A. MARTINEZ, Estimations de l'effet tunnel pour le double puits I, *J. Math Pures et Appl.* vol. **66**, 1987, p. 195-215. Estimations de l'effet tunnel pour le double puits II, états hautement excités. *Bull SMF*, 1988.
- [12] A. MARTINEZ, Développements asymptotiques et effet tunnel dans l'approximation de Born-Oppenheimer. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. **49**, 1989, p. 239-257.
- [13] A. MARTINEZ, Résonances dans l'approximation de Born-Oppenheimer I. *Journal of diff. Equ.*, vol. **91**, 2, 1991, p. 204-234.
- [14] A. MARTINEZ, Résonances dans l'approximation de Born-Oppenheimer II, largeur des résonances. *Comm. in Math. Phys.*, vol. **135**, 1991, p. 517-530.
- [15] A. MARTINEZ et B. MESSIRDI, Resonances of Diatomic Molecules in the Born-Oppenheimer Approximation. *Comm. Part. Diff. Eq.*, vol. **19**, 7 & 8, 1994, p. 1139-1162.
- [16] B. MESSIRDI, Asymptotique de Born-Oppenheimer pour la prédissociation moléculaire : cas de la molécule diatomique. (In preparation.)
- [17] M. REED et B. SIMON, Methods of modern mathematical physics. *Academic Press* 1978.
- [18] B. SIMON, Semiclassical limit on low lying eigenvalues I, non degenerate minima, asymptotic expansions. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. **38**, 3, 1983, p. 295-307.

(Manuscrit reçu le 3 novembre 1992;
version révisée reçue le 25 octobre 1993.)