

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

G. HACHEM

Effet Zeeman pour un électron de Dirac

Annales de l'I. H. P., section A, tome 58, n° 1 (1993), p. 105-123

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1993__58_1_105_0

© Gauthier-Villars, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Effet Zeeman pour un électron de Dirac

par

G. HACHEM

Département de Mathématiques,
Institut Galilée, Université Paris-Nord,
avenue J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse

RÉSUMÉ. — On étudie la théorie spectrale de l'opérateur de Dirac avec un champ magnétique constant parallèle à l'axe des x_3 . On établit le Principe d'Absorption Limite pour cet opérateur et pour ses perturbations par des potentiels de courte portée. On déduit des estimations des états de diffusion pour ces opérateurs. Enfin, on donne un résultat illustrant l'effet Zeeman : la séparation des niveaux d'énergie d'un atome en présence d'un champ magnétique uniforme.

Mots clés : Opérateur de Dirac, Théorie de la Diffusion, Théorie Spectrale, Méthodes asymptotiques.

ABSTRACT. — We study the spectral theory of the Dirac operator with a constant magnetic field parallel to the x_3 axis. We prove the Limiting Absorption Principle for this operator and for his perturbations by short range potentials. We derive estimates for the decay of scattering states of these operators. Finally we give a proposition illustrating the Zeemann effect: the splitting of energy levels in an atom in presence of a uniform magnetic field.

L'équation de Dirac pour un électron dans un champ extérieur s'écrit :

$$\frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial t} = H u \quad (0.1)$$

Classification A.M.S. : 34 B, 34 C, 34 E, 47 A, 81 C 05.

L'opérateur de Dirac, H opère sur $L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^4)$ suivant :

$$H = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \left(\frac{1}{i} \partial_{x_j} + A_j \right) + m \alpha_4 + \Phi . I \quad (0.2)$$

Où les matrices $\{\alpha_j\}_{j=1}^4$ sont les matrices de Dirac : ce sont des matrices 4×4 hermitiennes vérifiant les relations d'anticommutation :

$$\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 2 \delta_{kj}, \quad j, k = 1, \dots, 4 \quad (0.3)$$

Dans la représentation standard [L-L], p. 93-100, ces matrices s'écrivent :

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, 3; \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (0.4)$$

où les matrices σ_i sont les matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (0.5)$$

qui à leur tour vérifient les relations

$$\left. \begin{aligned} \sigma_j \sigma_k + \sigma_k \sigma_j &= 2 \delta_{jk} \\ \sigma_j \sigma_k &= i \varepsilon_{jkl} \sigma_l + \delta_{jk} \end{aligned} \right\} \quad (0.6)$$

où ε_{jkl} est le tenseur anti-symétrique unité.

Les fonctions $(A_j)_{j=1}^3$ et Φ sont les composantes du potentiel magnétique et le potentiel électrique respectivement, $m > 0$ désigne la masse de l'électron.

Dans cet article on suppose que H est de la forme :

$$H = D + Q$$

où D, l'opérateur libre est de la forme (0.2) avec $\Phi = 0$ et $A_j = (0, \tau x_1, 0)$; Q est un opérateur de multiplication par une matrice $Q(\cdot)$, 4×4 , hermitienne représentant la perturbation de ce champ fondamental.

L'opérateur D représente un électron dans un champ magnétique constant d'intensité $\tau > 0$ parallèle à l'axe x_3 .

Notons par F la transformation de Fourier partielle en (x_2, x_3) et par $p = (p_2, p_3)$ la variable duale. Pour tout $p \in \mathbb{R}^2$, on considère dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^4)$ l'opérateur :

$$D(p) = \frac{\alpha_1}{i} \frac{d}{dx_1} + \alpha_2 (\tau x_1 + p_2) + K(p_3) \quad (0.7)$$

où $K(p_3) = \alpha_3 p_3 + m \alpha_4$.

Les opérateurs D et $D(p)$ sont essentiellement auto-adjoint, voir [Ch], on note toujours par D et $D(p)$ leurs extensions auto-adjointes, on a

alors :

$$\text{FDF}^* = \int_{\mathbb{R}^2}^{\oplus} \text{D}(p) dp \quad (0.8)$$

dans la décomposition canonique :

$$\text{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4) = \text{L}^2(\mathbb{R}^2, \text{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^4)).$$

Par la suite on note :

$$\text{X} = \text{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4), \quad \text{Y} = \text{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^4)$$

I. — THÉORIE SPECTRALE DE L'OPÉRATEUR DE $\text{D}(p)$

L'opérateur $\text{D}(p)$ est auto-adjoint dans Y .

LEMME 1.1. — On a :

$$\text{D}^2(p) = \text{A}_+(p) \oplus \text{A}_-(p) \oplus \text{A}_+(p) \oplus \text{A}_-(p)$$

où

$$\text{A}_{\pm}(p) = \frac{-d^2}{dx^2} + (\tau x + p_2)^2 \pm \tau + k^2(p) \quad (1.1)$$

est un opérateur dans $\text{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $k^2(p) = p_3^2 + m^2$.

Preuve. — D'après l'expression (0.7) de $\text{D}(p)$ et les relations (0.3) on a :

$$\text{D}^2(p) = \frac{-d^2}{dx_1^2} \text{I} + \frac{1}{i} \tau \alpha_1 \alpha_2 + (\tau x_1 + p_2)^2 \text{I} + k^2(p) \text{I}$$

Or

$$\frac{1}{i} \alpha_1 \alpha_2 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

d'après (0.4) et (0.5). Utilisant (0.6) on aboutit à la conclusion.

Remarque 1.2. — Dans la représentation choisie soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de \mathbb{C}^4 , un champ de spineur s'écrit

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3 + u_4 e_4$$

où les (u_i) sont dans $\text{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\|u_1\|^2$ (resp. $\|u_2\|^2$) est la probabilité de présence d'un électron de spin 1/2 (resp. -1/2), $\|u_3\|^2$ (resp. $\|u_4\|^2$) est la probabilité de présence d'un positron de spin 1/2 (resp. -1/2) dans le champ car la matrice $\frac{1}{i} \alpha_1 \alpha_2 = \Sigma$ où $\frac{1}{2} \Sigma$ est l'opérateur projection du spin sur x_3 ; [L-L] page 95. De cette façon les opérateurs $\text{A}_{\pm}(p)$ diffèrent par

l'action opposée qu'exerce le champ magnétique d'intensité τ sur les spin $\pm 1/2$.

LEMME 1.3. — *L'opérateur $A_{\pm}(p)$ est positif, son spectre est discret et formé d'une suite de valeurs propres de multiplicité un, tendant vers l'infini.*

Toute fonction propre de l'opérateur $A_{\pm}(p)$ est C^{∞} à décroissance exponentielle i.e.: si v est une telle fonction propre il existe pour tout entier $k \geq 0$ des constantes $C_k, C'_k > 0$ telles que:

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} v(x, p) \right| \leq C'_k \exp(-C_k |x|) \quad (1.2)$$

Preuve. — L'opérateur $A_{\pm}(p)$ est à résolvante compacte. Cela prouve l'assertion sur le spectre. Soit λ une valeur propre de $A_{\pm}(p)$ et v la fonction propre associée, on a :

$$-v'' + ((\tau x + p_2)^2 \pm \tau + k^2(p_3) - \lambda)v = 0$$

Introduisons la variable $\xi = \tau^{1/2} x + \tau^{-1/2} p_2$, l'équation s'érit alors :

$$-v'' + \xi^2 v + (\tau^{-1}(k^2 - \lambda) \pm 1)v = 0$$

Nous reconnaissons l'équation aux valeurs propres de l'oscillateur harmonique, pour que v soit de carré intégrable il faut et il suffit que

$$\tau^{-1}(\lambda - k^2) \mp 1 = 2n + 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

à ce moment v est donnée par :

$$v(\xi) = H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}$$

où H_n est le polynôme de Hermite de degré n . La fonction v satisfait (1.2).

DÉFINITION 1.4. — *Pour tout $p \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose :*

$$\mu_n^2(p) = 2n\tau + k^2(p_3)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \sigma(A_+(p)) &= \{ \mu_n^2(p) \mid n = 1, 2, 3, \dots \} \\ \sigma(A_-(p)) &= \{ \mu_n^2(p) \mid n = 0, 1, 2, \dots \} \end{aligned}$$

LEMME 1.5. — *Le spectre de $D^2(p)$ est purement ponctuel et on a :*

$$\sigma(D^2(p)) = \{ \mu_n^2(p) \mid n = 0, 1, 2, \dots \}$$

(a) *Si $\mu^2(p) = \mu_0^2(p)$ son espace propre est de dimension 2 il est engendré par $v(\cdot)e_2$ et $v(\cdot)e_4$ où $v(\cdot) \in \ker(A_-(p) - \mu_0^2(p))$.*

(b) *Pour $n = 1, 2, \dots$, la valeur propre $\mu_n^2(p)$ est de multiplicité 4. Son espace propre est engendré par :*

$$v(\cdot)e_1, w(\cdot)e_2, v(\cdot)e_3, w(\cdot)e_4$$

avec $v \in \ker(A_+(p) - \mu_n^2(p))$ et $w \in \ker(A_-(p) - \mu_n^2(p))$

Preuve. — Évidente d'après la structure de $D^2(p)$ donnée dans le L 1.1.

Remarque 1.6. — Les vecteurs propres de $D^2(p)$ ne dépendent pas de p_3 .

LEMME 1.7. — Soit u un vecteur propre de $D^2(p)$ de valeur propre $\mu^2(p)$ on pose :

$$u_{\pm}(p, \cdot) = (D(p) \pm \mu(p))u(\cdot)$$

alors $u_{\pm}(p, \cdot) \in \text{Ker}(D(p) \mp \mu(p))$.

PROPOSITION 1.8. — L'opérateur $D(p)$ a un spectre purement ponctuel. En fait :

$$\sigma(D(p)) = \{ \mu_n(p), -\mu_n(p) \mid n \in \mathbb{N} \}$$

où $\mu_n^2(p)$ est donnée par définition 1.4. Les valeurs propres $\mu_0(p)$ et $-\mu_0(p)$ sont de multiplicité 1. Pour $n > 0$, $\mu_n(p)$ et $-\mu_n(p)$ sont de multiplicité 4.

Il existe une base orthonormée de Y formée de vecteurs propres de $D(p)$. Tout vecteur v de cette base est C^∞ en p, x ; pour tout entier $k \geq 0$ et compact $L \subset \mathbb{R}^2$ il existe des constantes $C, C' > 0$, telles que :

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial p_2^{m_2} \partial p_3^{m_3} \partial x^n} v(p, x) \right| \leq C' \exp(-C|x|) \quad (1.3)$$

où $m_2 + m_3 + n = k$ et $p \in L$. De plus l'application $p \mapsto v(p, \cdot)$ est C^∞ de \mathbb{R}^2 dans Y .

Preuve. — Soient $\{v_n(\cdot)\}; \{w_n(\cdot)\}$ deux bases orthonormées de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ formées de vecteurs propres de $A_+(p)$ et $A_-(p)$ respectivement. Les vecteurs :

$$\{v_n(\cdot)e_1\}; \{w_n(\cdot)e_1\}; \{v_n(\cdot)e_3\}; \{w_n(\cdot)e_4\}$$

forment une base de Y , qu'on notera $\{z_n(\cdot)\}$ dont chaque élément est vecteur propre de $D^2(p)$ d'après L 1.5. A chaque vecteur z_n on associe les vecteurs :

$$z_{n, \pm} = (D(p) \pm \mu_n(p))z_n.$$

Ce sont des vecteurs propres de $D(p)$ d'après L 1.7, et dépendent implicitement de p . Montrons que l'ensemble des $\{z_{n, \pm}\}$ est total. Soit h un élément de Y tels que :

$$\langle (D(p) \pm \mu_n(p))z_n, h \rangle = 0, \quad \forall n.$$

On en déduit que :

$$2\mu_n(p)\langle z_n, h \rangle = 0, \quad \forall n.$$

Comme $\mu_n(p) \neq 0$ et $\{z_n\}$ est total, on a $h = 0$.

Nous allons montrer qu'il est possible d'orthonormaliser la famille $\{z_{n, \pm}\}$ de façon à obtenir une base qui satisfait les propriétés énoncées. Il suffit d'opérer dans chaque espace propre.

Soient $\mu^2 = \mu_n(p)^2$ une valeur propre de $D^2(p)$ et z, t deux vecteurs propres de $D^2(p)$ tels que $\|z\| = \|t\| = 1$. On sait que $\Sigma z = \varepsilon z$ et $\Sigma t = \varepsilon t$, $\varepsilon = \pm 1$.

On a : $z_+ = (D(p) + \mu(p))z$ et $t_+ = (D(p) + \mu(p))t$.

Un calcul simple donne :

$$\langle z_+, t_+ \rangle = 2\mu \langle D(p)z, t \rangle + 2\mu^2 \langle z, t \rangle \quad (1.4)$$

(On omet d'indiquer la dépendance de μ de p et n).

On a :

$$\Sigma D(p) = -D(p)\Sigma + 2K(p_3)\Sigma \quad (1.5)$$

comme Σ est de plus unitaire, on a :

$$\begin{aligned} \langle D(p)z, t \rangle &= \langle \Sigma D(p)z, \Sigma t \rangle \\ &= \langle -D(p)z, t \rangle + 2 \langle K(p_3)z, t \rangle \end{aligned}$$

où on a utilisé (1.5) et le fait que z et t sont des vecteurs propres de Σ , d'où :

$$\langle D(p)z, t \rangle = \langle K(p_3)z, t \rangle$$

La relation (1.4) s'écrit alors :

$$\langle z_+, t_+ \rangle = 2\mu(p_3 \langle \alpha_3 z, t \rangle + m \langle \alpha_4 z, t \rangle) + 2\mu^2 \langle z, t \rangle \quad (1.6)$$

Soient $u = v(\cdot)e_1$, $w = v(\cdot)e_3$ [resp. $u = v(\cdot)e_2$, $w = v(\cdot)e_4$] deux vecteurs propres de $D^2(p)$. Dans ce cas $\varepsilon = 1$ (resp. -1) et v est une fonction propre de $A_+(p)$ [resp. $A_-(p)$] de valeur propre $\mu_n^2 = 2n\tau + k^2$, $n > 0$ (resp. $n \geq 0$). Comme $\alpha_3 e_1 = e_3$ et $\alpha_3 e_2 = -e_4$. Par application de (1.6) à (u, u) ; (w, w) ; (u, w) on obtient :

$$\begin{aligned} \langle u_+, u_+ \rangle &= 2\mu(p)(\mu(p) + m) \\ \langle w_+, w_+ \rangle &= 2\mu(p)(\mu(p) - m) \\ \langle u_+, w_+ \rangle &= 2\varepsilon\mu(p) \cdot p_3 \end{aligned}$$

Dans les deux cas le déterminant de Gramm de (u_+, w_+) est :

$$G(p) = 4\mu_n^2(p)[\mu_n^2(p) - m^2 - p_3^2].$$

Lorsque $n = 0$. Les deux vecteurs u_+, w_+ engendrent un sous espace de dimension 1, μ_0 est de multiplicité 1. Pour $n \neq 0$, le déterminant G ne s'annule pas, on a donc pour une constante $\gamma > 0$:

$$\|u_+(p, \cdot)\| \geq \gamma; \|w_+(p, \cdot)\| \geq \gamma; G(p) \geq \gamma \quad (1.7)$$

On en déduit que : $u_+ \neq 0$, $w_+ \neq 0$. De plus comme $u(\cdot)$; $w(\cdot)$ sont C^∞ en x et satisfont les estimations 1.2, on en déduit que $u_+(p, \cdot)$ et $w_+(p, \cdot)$ sont C^∞ en x, p et satisfont aux estimations 1.3. Posons $\xi(p) = \|u_+(p, \cdot)\|$ et $\varphi(p) = \langle u_+(p, \cdot); w_+(p, \cdot) \rangle$, grâce à (1.7) les vecteurs :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_+(p, \cdot) &= \xi^{-1}(p)u_+(p, \cdot) \\ \tilde{w}_+(p, \cdot) &= [G(p)]^{-1/2} \cdot (\xi(p)w_+(p, \cdot) - \varphi(p)\xi^{-1}(p)u_+(p, \cdot)) \end{aligned}$$

obtenus par orthonormalisation de Gramm-Schmidt sont C^∞ en p , x et continuent de vérifier l'estimation 1.3.

Considérons la valeur propre μ_n^2 , $n \neq 0$ et :

$$f_1 = v(\cdot)e_1, \quad f_2 = w(\cdot)e_2, \quad f_3 = w(\cdot)e_3, \quad f_4 = v(\cdot)e_4.$$

les vecteurs propres de $D^2(p)$ qui lui sont associés (L 1.5). Les vecteurs propres f_1, f_3 (resp. f_2, f_4) sont dans les espaces propres $+1$ (resp. -1) de Σ et chacun de ces sous-espaces est invariant par α_3 et α_4 . Nous allons montrer que: l'espace engendré par $f_{1,+}, f_{3,+}$ est orthogonal à celui engendré par $f_{2,+}, f_{4,+}$ [avec les notations $f_+ = (D + \mu)f$]. En effet soit f (resp. g) un vecteur de l'espace engendré par f_1, f_3 (resp. f_2, f_4) on a :

$$\begin{aligned} \langle (D - \mu)f, (D - \mu)g \rangle &= -2\mu \langle Df, g \rangle \\ \langle Df, g \rangle &= \langle \Sigma Df, \Sigma g \rangle \end{aligned}$$

En utilisant encore une fois (1.5):

$$\langle Df, g \rangle = \langle -Df, g \rangle + 2p_3 \langle \alpha_3 f, g \rangle + 2m \langle \alpha_4 f, g \rangle$$

Les deux derniers termes s'annulent. D'où:

$$\langle Df, g \rangle = 0 \quad i. e. \quad \langle f_+, g_+ \rangle = 0$$

Dans chacun des espaces engendrés par $f_{1,+}, f_{3,+}$ et $f_{2,+}, f_{4,+}$ on procède par Gramm-Schmidt comme plus haut.

La dernière assertion est une conséquence de notre construction.

II. – PROPRIÉTÉS SPECTRALES DE L'OPÉRATEUR D

L'opérateur D est auto-adjoint dans X et on a :

$$FDF^* = \int_{\mathbb{R}^2}^{\oplus} D(p) dp \quad (2.1)$$

on a donc :

$$\sigma(D) = \bigcup_{p \in \mathbb{R}^2} \sigma(D(p)).$$

Soit T l'opérateur unitaire dans X dont l'action est définie par :

$$(Tf)(x_1, x_2, x_3) = \alpha_3 f(x_1, x_2, -x_3)$$

Il est facile de voir que :

$$D = -T^*DT \quad (2.2)$$

Cela explique la symétrie du spectre de $D(p)$ et de D par rapport à l'origine et implique que :

$$R(\lambda, D) = -T^*R(-\lambda, D)T \quad (2.3)$$

DÉFINITION 2.1. — Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose :

$$K_t = \{f | f: \mathbb{R}^2 \rightarrow Y \text{ mesurable telle que } \rho^t f \in L^2\}$$

où $\rho(x) = (1 + \|x'\|^2)^{1/2}$, $x' = (x_2, x_3)$ est la variable dans \mathbb{R}^2 .

On a :

$$F_0 K_t = H^t(\mathbb{R}^2, Y) \quad (F_0 \text{ la Transformation de Fourier})$$

où H^t est l'espace de Sobolev habituel. Si U est un ouvert de \mathbb{R} , k un entier, $0 < \alpha < 1$, on note par $C_{\text{loc}}^{k, \alpha}(U, E)$ l'espace des applications f de U dans l'espace de Banach E qui sont k fois dérivables et telle que $f^{(k)}$ soit localement holderienne d'exposant α . Si B et B' sont deux espaces de Banach, $\mathcal{L}(B, B')$ désigne l'espace de Banach des opérateurs bornés de B dans B' .

Remarquons que l'espace X s'identifie à l'espace $L^2(\mathbb{R}^2, Y)$ à ce moment la transformation de Fourier partielle par rapport à (x_2, x_3) est simplement la Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^2, Y)$. On a $K_t \subset L^2(\mathbb{R}^2, Y)$ pour tout $t \geq 0$. Rappelons que $p = (p_2, p_3)$.

Nous ferons usage du théorème des traces suivant (voir [L-M]).

THÉORÈME. — Pour $q \in \mathbb{R}$ soit $T_q: C_0^\infty(\mathbb{R}^2, Y) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, Y)$ défini par :

$$(T_q) f(p) = f(p, q).$$

Alors T_q admet un prolongement en une application continue de $H^t(\mathbb{R}^2, Y)$ dans $L^2(\mathbb{R}, Y)$ pour tout $t > 1/2$.

Soit $l \geq 0$ un entier et soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $l + \frac{1}{2} < t \leq l + \frac{3}{2}$ alors la famille d'opérateurs $\{T_q | q \in \mathbb{R}\}$ est uniformément bornée et est dans $C_{\text{loc}}^{1, \alpha}(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathcal{L}(H^t(\mathbb{R}^2, Y); L^2(\mathbb{R}, Y))$, avec $0 < \alpha < t - l - \frac{1}{2}$.

DÉFINITION 2.2. — Ordonnons les valeurs propres positives de $D(p)$:

$$m \leq \mu_0(p) < \dots < \mu_n(p) < \dots$$

Les valeurs propres négatives étant ordonnées par symétrie. On appelle seuils les points: $s_k = \mu_k(0)$ et $-s_k$ pour $k = 0, 1, \dots$. L'ensemble des seuils est noté \mathcal{S} :

$$\mathcal{S} = \{ \dots < -s_n < \dots < -s_0 < s_0 < \dots < s_n < \dots \}$$

Chaque seuil possède une multiplicité 1 ou 4: c'est la multiplicité de la valeur propre $\mu_k(0)$ (elle est 4 sauf pour $-s_0$ et s_0). On a: $s_0 = m$.

LEMME 2.3. — Il existe une suite de fonctions :

$$\pi_k: [s_k, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+, \quad k = 0, 1, \dots$$

ayant les propriétés suivantes :

- (1) π_k est strictement croissante, $\pi_k(s_k) = 0$.
- (2) π_k est C^∞ sur $]s_k, +\infty[$ et dans $C_{\text{loc}}^{0,1/2}$ sur $]s_k, +\infty[$.
- (3) $\lambda \in]s_k, s_{k+1}[$ est valeur propre de $D(p)$ si et seulement si $|p_3| = \pi_i(\lambda)$ pour $i = 0, \dots, k$, la multiplicité de cette valeur propre est alors celle du seuil s_i .

Preuve. — Remarquons que $\mu_i(p) = \mu_i(|p_3|) = (s_i^2 + |p_3|^2)^{1/2}$.

Posons $\pi_i(\lambda) = \mu_i^{-1}(\lambda)$, cette fonction étant définie sur $]s_i, +\infty[$, π_i satisfait (1) et (2). La propriété (3) est vérifiée d'après la description du spectre de $D(p)$ donnée dans la proposition 1.8.

LEMME 2.4. — Il existe pour tout $k \geq 0$ des applications :

$$W_{k,\delta}^i :]s_k, +\infty[\rightarrow L^2(\mathbb{R}, Y), \quad i = 1, \dots, m(k); \quad \delta = \pm 1$$

$m(k)$ étant la multiplicité de s_k , telles que :

(1) $W_{k,\delta}^i$ est C^∞ sur $]s_k, +\infty[$, $C_{\text{loc}}^{0,1/2}$ sur $]s_k, +\infty[$, et $W_{k,\delta}^i(\lambda) \in C^\infty(\mathbb{R}, Y)$.

(2) Si $\lambda \in]s_k, s_{k+1}[$ est valeur propre de $D(p)$, i. e. si $|p_3| = \pi_i(\lambda)$ pour un $i \in \{0, \dots, k\}$ alors $\{W_{i,\delta}^j(\lambda)(p_2, \cdot) \mid j = 1, \dots, m(i)\}$ où $\delta = \text{sgn}(p_3)$ sont les fonctions propres.

Preuve. — D'après les propriétés des fonctions propres données dans la proposition 1.8 on sait que $p \mapsto v(p, \cdot)$ est $C^\infty(\mathbb{R}^2, Y)$. il suffit alors de poser :

$$W_{k,\delta}(\lambda)(p_2, \cdot) = v(p_2, \delta \pi_k(\lambda); \cdot)$$

Nous allons dans ce qui suit établir le Principe d'Absorption Limite : pour l'opérateur D . Suivant l'approche abstraite de [B.A-D] un premier pas est de calculer la dérivée de la famille spectrale de D . Soit $E(\lambda)$ [resp. $E(\lambda, p)$] la famille spectrale de D [resp. $D(p)$]. On a d'après (2.1) :

$$\langle E(\lambda)f, g \rangle_X = \int_{\mathbb{R}^2} \langle E(\lambda, p)\hat{f}(p); \hat{g}(p) \rangle_Y dp \quad (2.4)$$

pour tout $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, Y)$ (\hat{f} est la transformée de Fourier de f par rapport à x_2, x_3). Par ailleurs si $\lambda > 0$:

$$E(\lambda, p) - E(0, p) = E(]0, \lambda]; p)$$

Ce qui nous donne :

$$\langle E(\lambda, p)\hat{f}(p); \hat{g}(p) \rangle_Y = \langle E(]0, \lambda]; p)\hat{f}(p); \hat{g}(p) \rangle_Y + J(p, f, g)$$

$J(p, f, g)$ est le terme correspondant à $E(0, p)$ et ne dépend pas de λ . L'opérateur $D(p)$ a un spectre ponctuel dans $]0, \lambda]$:

$$\langle E(]0, \lambda]; p)\hat{f}(p); \hat{g}(p) \rangle_Y = \sum_{i=0}^{N(\lambda)} \langle P_i(p)\hat{f}(p, \cdot); \hat{g}(p, \cdot) \rangle_Y$$

où on a posé $P_i(p) = E(\{\mu_i(p)\}, p)$ pour le projecteur spectral de $D(p)$ sur l'espace propre de $\mu_i(p)$, $N(\lambda)$ étant le nombre des seuils positifs $\leq \lambda$.

Posons

$$\begin{aligned} B_i(f, g)(p) &= \langle P_i(p)\hat{f}(p); \hat{g}(p) \rangle_Y & (2.5) \\ \langle E(\lambda), f, g \rangle_X &= \sum_{i=0}^{N(\lambda)} \int_{\mathbb{R}^2} B_i(f, g)(p) dp + \int_{\mathbb{R}^2} J(p, f, g) dp \\ &= \sum_{i=0}^{N(\lambda)} \int_{|p_3| \leq \pi_i(\lambda)} B_i(f, g)(p) dp + \int_{\mathbb{R}^2} J(p, f, g) dp. \end{aligned}$$

Puisque $\text{Supp } B_i(f, g) \subset \{|p_3| \leq \pi_i(\lambda)\}$ lorsque $i \leq N(\lambda)$.

On voit alors que lorsque $\lambda \in]s_k, s_{k+1}[$, $N(\lambda) = k$ et

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \langle E(\lambda)f, g \rangle_X &= \sum_{i=0}^k \pi'_i(\lambda) \int_{\mathbb{R}} [B_i(f, g)(p_2, \pi_i(\lambda)) - B_i(f, g)(p_2, -\pi_i(\lambda))] dp_2 & (2.6) \end{aligned}$$

Observons que (2.6) est C^∞ sur $]s_k, s_{k+1}[$ d'après L 2.3 et L 2.4 voir 2.8, 2.9; de même les termes d'indices $i=0, \dots, k-1$ sont C^∞ au voisinage de $\lambda = s_k$.

Étudions le terme d'indice k au point s_k . On a en utilisant la formule de Taylor :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} [B_k(f, g)(p_2, \pi_k(\lambda)) - B_k(f, g)(p_2, -\pi_k(\lambda))] dp_2 \\ = 2\pi_k(\lambda)[a_k(f, g) + O(\pi_k(\lambda))] \end{aligned}$$

où

$$a_k(f, g) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial p_3} B_k(f, g)(p_2, 0) dp_2$$

est généralement non nul voir 2.8, 2.9. Cela montre que :

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow s_k^+} \pi'_k(\lambda) \int_{\mathbb{R}} [B_k(f, g)(p_2, \pi_k(\lambda)) - B_k(f, g)(p_2, -\pi_k(\lambda))] dp_2 \\ = 2s_k a_k(f, g). & (2.7) \end{aligned}$$

D'autre part sur $]s_{k-1}, s_k[$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \langle E(\lambda)f, g \rangle_X \\ = \sum_{i=0}^{k-1} \pi'_i(\lambda) \int_{\mathbb{R}} [B_i(f, g)(p_2, \pi_i(\lambda)) - B_i(f, g)(p_2, -\pi_i(\lambda))] dp_2 \end{aligned}$$

Ce dernier terme est à remplacer car 0 si $k=0$. Cela montre que $\langle E(\cdot)f, g \rangle$ n'est pas dérivable aux points de \mathcal{S} , l'expression (2.7)

exprime la différence entre la dérivée à droite et la dérivée à gauche au point s_k . Par ailleurs $\langle E(\cdot) f, g \rangle$ est C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \mathcal{S}$ pour tout $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, Y)$.

PROPOSITION 2.5. — Soient $l \geq 0$ un entier et $t \in \mathbb{R}$ tels que $l + \frac{1}{2} < t \leq l + \frac{3}{2}$. La famille spectrale de D considérée comme application de \mathbb{R} dans $\mathcal{L}(K_t, K_{-t})$ est faiblement dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathcal{S}$. Notons $\lambda \mapsto A(\lambda)$ l'application dérivée; $A(\cdot)$ est dans $C_{loc}^{l,\alpha}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(K_t, K_{-t})$ où $0 < \alpha < t - l - \frac{1}{2}$.

Preuve. — En effet considérons pour $i=0, \dots, k$ les formes sesquili-néaires

$$A_i(\lambda)(f, g) = \sum_{\delta = \pm 1} \int_{\mathbb{R}} (\delta B_i(f, g)(p_2, \delta \pi_i(\lambda))) dp_2, \quad f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, Y). \quad (2.8)$$

D'après (2.5) on a :

$$B_i(f, g)(p_2, \delta \pi_i(\lambda)) = \sum_{j=1}^{m(i)} \langle \hat{f}(p_2, \delta \pi_i(\lambda)); W_{i,\delta}^j(\lambda)(p_2) \rangle_Y \langle W_{i,\delta}^j(\lambda)(p_2); \hat{g}(p_2, \delta \pi_i(\lambda)) \rangle_Y \quad (2.9)$$

D'après le L-2.4, les fonctions propres $\lambda \mapsto W_{i,\delta}^j(\lambda)$ sont C^∞ de $\mathbb{R} \setminus \mathcal{S}$ à valeur dans $L^2(\mathbb{R}, Y)$. Comme $f \in K_t$ on a : $\hat{f} \in H^l(\mathbb{R}^2, Y)$ et $\hat{f}(\cdot, p_3) = (T_{p_3} \hat{f})(\cdot)$ appartient à $L^2(\mathbb{R}, Y)$. De plus $p_3 \rightarrow (T_{p_3} \hat{f})(\cdot)$ est $C_{loc}^{l,\alpha}$ sur \mathbb{R} , d'après le Théorème des Traces. Il en résulte que :

$$b_{i,\delta}(f)(\lambda)(\cdot) = \langle (T_{\delta \pi_i(\lambda)} \hat{f})(\cdot); W_{i,\delta}^j(\lambda)(\cdot) \rangle_Y \in L^1(\mathbb{R})$$

et que $\lambda \rightarrow b_{i,\delta}(f)(\lambda)$ est $C_{loc}^{l,\alpha}$ (car π_i sont C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \mathcal{S}$). Si $L \subset \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}$ est un compact on a par le théorème des traces

$$|(T_{\delta \pi_i(\lambda)} \hat{f})(\cdot)|_{l,\alpha,L} \leq C \|\hat{f}\|_{H^l(\mathbb{R}^2, Y)} = C \|f\|_{K_t}$$

norme prise dans $C^{l,\alpha}(L, L^2(\mathbb{R}, Y))$. D'où

$$|b_{i,\delta}(f)(\cdot)|_{l,\alpha,L} \leq C' \|f\|_{K_t}$$

normes dans $C^{l,\alpha}(L, L^1(\mathbb{R}))$, en remarquant que le crochet contenant g admet les mêmes estimations nous obtenons :

$$|B_i(f, g)(\cdot, \pi_i(\lambda))|_{l,\alpha,L} \leq C'' \|f\|_{K_t} \|g\|_{K_t}$$

norme dans $C^{l,\alpha}(L, L^1(\mathbb{R}))$. D'où

$$|A_i(\lambda)(f, g)|_{l,\alpha,L} \leq C \|f\|_{K_t} \|g\|_{K_t} \quad (2.10)$$

Il en résulte que les formes sesquilineaires $A_i(\lambda)$ se prolongent par continuité à $K_t \times K_t$ et définissent alors des opérateurs continus de K_t dans K_{-t} qu'on note par $A_i(\lambda)$. L'estimation (2.10) montre que $\lambda \mapsto A_i(\lambda)$ sont $C_{\text{loc}}^{l,\alpha}$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathcal{S}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(K_t, K_{-t})$. D'après (2.6) l'opérateur :

$$A(\lambda) = \sum_{i=0}^k A_i(\lambda)$$

est la dérivée faible de $E(\cdot)$ sur $]s_k, s_{k+1}[$ et vérifie les propriétés énoncées.

DÉFINITION 2.6. — Pour $t \in \mathbb{R}$ on note par W_t le complété de $C_0^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$ pour la norme :

$$N_t(u) = \|Du\|_t + \|u\|_t$$

$\|\cdot\|_t$ désigne la norme dans K_t . Notons par B_t l'espace $\mathcal{L}(K_t, W_{-t})$

THÉORÈME 2.7. — L'opérateur D est absolument continu

$$\sigma(D) = \sigma_{\text{ac}}(D) =]-\infty, -m] \cup [m, +\infty[.$$

Soient $l \geq 0$ un entier et t un réel tels que $l + \frac{1}{2} < t \leq l + \frac{3}{2}$, les limites suivantes :

$$R(\mu \pm i0, D) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R(\mu + i\varepsilon, D) \quad (2.11)$$

existent dans B_t pour tout $\mu \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}$. Les applications $\mu \mapsto R(\mu \pm i0, D)$ appartiennent à $C_{\text{loc}}^{l,\alpha}(\mathbb{R} \setminus \mathcal{S}; B_t)$ pour $0 < \alpha < t - l - \frac{1}{2}$, et la convergence dans (2.11) a lieu dans $C_{\text{loc}}^{l,\alpha}$.

Preuve. — La démonstration de ce résultat est classique, nous nous contenterons de l'esquisser, on a :

$$\langle R(z, D) f, g \rangle = \int \frac{d \langle E(\lambda) f, g \rangle}{\lambda - z} \quad (2.12)$$

qui s'écrit compte tenu de la Proposition 2.5 :

$$\langle R(z, D) f, g \rangle = \int \frac{\langle A(\lambda) f, g \rangle}{\lambda - z} d\lambda$$

c'est une intégrale de Cauchy. On conclut alors à l'existence des limites (2.11) dans l'espace $C_{\text{loc}}^{l,\alpha}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(K_t, K_{-t})$, voir [G]. On passe à $\mathcal{L}(K_t, K_{-t})$ en remarquant que :

$$DR(z, D) = I + zR(z, D).$$

L'opérateur D est absolument continue car la dérivée de $\langle E(\lambda), f, g \rangle$ dans \mathcal{D}' est bornée donc localement intégrable.

III. — L'OPÉRATEUR PERTURBÉ $H = D + Q$

DÉFINITION 3.1. — Soit Q l'opérateur de multiplication dans X par une fonction matricielle $Q(\cdot)$ à valeurs hermitiennes. Étant donné le réel $\eta > \frac{1}{2}$ nous dirons que Q vérifie la condition $CP(\eta)$ (CP pour courte portée) si l'opérateur $\rho^{2\eta}QR(i, D)$ se prolonge en un opérateur compact dans X .

Si Q est dans L_{loc}^q pour $q > 3$ et si $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \rho^{2\eta}Q = 0$ alors Q vérifie $CP(\eta)$. La preuve de ce fait est longue, elle utilise l'expression du noyau de Green de l'opérateur $\frac{\alpha}{i}\nabla + m\beta$, voir [H] pour les détails.

LEMME 3.2. — Q vérifie la condition $CP(\eta)$ si et seulement si Q est un opérateur compact de $W_{-\eta}$ dans K_η .

Preuve. — Remarquons que $R(i, D)$ est un isomorphisme de $X = K_0$ sur W_0 et que ρ^η est un isomorphisme de K_η sur K_0 . De plus ρ^η (comme opérateur de multiplication) est un isomorphisme de W_0 sur $W_{-\eta}$. (voir définition 2.6). En effet :

$$N_{-\eta}(\rho^t u) = \|D\rho^t u\|_{-\eta} + \|\rho^t \cdot u\|_{-\eta}$$

or

$$D\rho^t = \rho^t D + \rho^t \varphi \quad \text{où } \varphi \in L^\infty$$

d'où

$$\begin{aligned} \|D\rho^t u\|_{-\eta} &\leq C(\|Du\|_{t-\eta} + \|u\|_{t-\eta}) \\ N_{-\eta}(\rho^t u) &\leq C' N_{t-\eta}(u) \end{aligned}$$

cette inégalité est vraie pour tout $t, \eta \in \mathbb{R}$; on en déduit :

$$N_{-\eta}(\rho^\eta u) \leq C' N_0(u)$$

et

$$N_0(\rho^{-\eta} u) \leq C'' N_{-\eta}(u).$$

D'où l'assertion. Le lemme résulte de ces remarques.

Ce lemme nous montre qu'on est en mesure d'appliquer tous les résultats de [B-A] à l'opérateur $H = D + Q$.

PROPOSITION 3.2. — On suppose que Q est $CP(\eta)$, alors H est essentiellement auto-adjoint et :

$$\sigma_{\text{ess}}(H) =]-\infty, -m] \cup [m, +\infty[.$$

De plus le spectre de H contenu dans $]-m, m[$ est formé de valeurs propres de multiplicités finies pouvant s'accumuler uniquement au point m ou $-m$.

Preuve. — Résulte du fait que Q est en particulier D -compact.

THÉORÈME 3.3. — On suppose que Q est $CP(\eta)$, $\eta > \frac{1}{2}$. Il existe un ensemble fermé de mesure nulle \mathcal{S}' , $\mathcal{S}' \subset]-\infty, -m] \cup [m, +\infty[$ tel que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R(\mu \pm i\varepsilon, H) = R(\mu \pm io, H) \tag{3.1}$$

existent dans B_t pour $\mu \in \sigma_{\text{ess}}(H) \setminus \mathcal{S}'$, $t > \frac{1}{2}$. On a :

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{S}' \quad \text{et} \quad \sigma_{\text{ess}}(H) \cap \sigma_p(H) \subset \mathcal{S}'.$$

Lorsque $\eta > l + \frac{1}{2}$, l étant un entier, pour $t > l + \frac{1}{2}$ et $0 < \alpha < t - l - \frac{1}{2}$, les applications $R(\cdot, \pm io, H)$ appartiennent à $C_{\text{loc}}^{l, \alpha}(\sigma_{\text{ess}}(H) \setminus \mathcal{S}'; B_t)$ et la convergence (3.1) a lieu dans cet espace.

Preuve. — La première partie résulte de [B-A, D], § 3, moyennant le L 3.3 et T 2.7. La différentiabilité résulte aussi de P 2.7 en remarquant qu'il est possible de dériver l'équation de la résolvante.

THÉORÈME 3.4. — Si $Q \in CP(\eta)$ avec $\eta > \frac{3}{2}$ alors : le spectre ponctuel de H dans $\sigma_{\text{ess}}(H) \setminus \mathcal{S}$ est discret et chaque valeur propre est de multiplicité finie. On a :

$$\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cup (\sigma_p(H) \cap \sigma_{\text{ess}}(H))$$

Preuve. — Comme $Q \in CP(\eta)$ avec $\eta > \frac{3}{2}$, l'application

$$\lambda \mapsto QR(\lambda \pm io, D)$$

prend ses valeurs dans $\mathcal{L}(K_t, K_\eta)$ pour $t \geq \eta$. De plus si $t > \frac{3}{2}$, $A(\cdot)$ est dans $C_{\text{loc}}^{1, \alpha}$ sur $\sigma_{\text{ess}}(H) \setminus \mathcal{S}$ à valeur dans $\mathcal{L}(K_t, K_{-})$ par P.2.5. On voit alors que les conditions du lemme 3.3 de [B-A, D] sont réalisées, il s'en suit que la condition (3.8) l'est par conséquent, le théorème découle alors du théorème 3.7 et la proposition 3.8 de cette même référence.

COROLLAIRE 3.5. — Si $Q \in CP(\eta)$, $\eta > \frac{3}{2}$, H est absolument continue sur $\mathbb{R} \setminus \sigma_p(H)$.

Preuve. — A priori H est absolument continu sur $\sigma_{\text{ess}}(H) \setminus \mathcal{S}'$ d'après T3.3 et la formule de Stone, mais comme \mathcal{S}' est discret par le théorème précédent, H est absolument sur $\mathbb{R} \setminus \sigma_p(H)$.

COROLLAIRE 3.6. — Si $Q \in CP(\eta)$, $\eta > \frac{1}{2}$; soit $l = \left[\eta - \frac{1}{2} \right]$ (partie entière), pour toute fonction $\varphi \in C_0^l(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\text{Supp } \varphi \subset \sigma_{\text{ess}}(H) \setminus \mathcal{S}'$

et $0 \leq \sigma \leq \eta$ on a :

$$\|\varphi(\mathbf{H}) e^{it\mathbf{H}} u\|_{-\sigma} \leq C \langle t \rangle^{-\tau(\sigma)} \|u\|_{\sigma}$$

où $\tau(\sigma) = \sigma l \eta^{-1}$.

Preuve. — Comme $\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{H}) \setminus \mathcal{S}'$ ne contient pas de valeur propre de \mathbf{H} la Formule de Stone s'écrit lorsque $[a, b] \subset \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{H}) \setminus \mathcal{S}'$:

$$\langle E([a, b]) f; g \rangle = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_a^b \langle (\mathbf{R}(\mu + i\varepsilon) - \mathbf{R}(\mu - i\varepsilon)) f; g \rangle d\mu \quad (3.2)$$

où E et \mathbf{R} sont la mesure spectrale et la résolvante de \mathbf{H} . Si $f, g \in K_t$ on passe à la limite dans (3.2) par T 3.3 :

$$\langle E([a, b]) f; g \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \langle (\mathbf{R}(\mu + i0) - \mathbf{R}(\mu - i0)) f; g \rangle d\mu \quad (3.3)$$

Cette relation montre que l'opérateur :

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mu) = (2\pi i)^{-1} (\mathbf{R}(\mu + i0) - \mathbf{R}(\mu - i0))$$

de K_t dans W_{-t} est la dérivée de la mesure spectrale de \mathbf{H} par rapport à la mesure de Lebesgue; autrement dit : $\mu \mapsto E(\mu) \in \mathcal{L}(K_t, W_{-t})$ est faiblement dérivable et sa dérivée est $\tilde{\mathbf{A}}(\mu)$.

Maintenant comme $\eta > l + \frac{1}{2}$; $\tilde{\mathbf{A}}(\cdot) \in C_{\text{loc}}^{l, \alpha}(\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{H}) \setminus \mathcal{S}', B_t)$ par T 3.3,

pour tout $t > l + \frac{1}{2}$. Par ailleurs on a la formule :

$$\langle e^{it\mathbf{H}} \varphi(\mathbf{H}) f, g \rangle = \int e^{it\lambda} \varphi(\lambda) d\langle E(\lambda) f, g \rangle$$

ce qui donne :

$$\langle e^{it\mathbf{H}} \varphi(\mathbf{H}) f, g \rangle = \int e^{it\lambda} \varphi(\lambda) \langle \tilde{\mathbf{A}}(\lambda) f, g \rangle d\lambda. \quad (3.4)$$

On a pour $r=0, 1, \dots, l$

$$\left| \frac{d^r}{d\lambda^r} \varphi(\lambda) \langle \tilde{\mathbf{A}}(\lambda) f, g \rangle \right| \leq C(\varphi) \|f\|_{\eta} \|g\|_{\eta}$$

en intégrant (3.4) par partie l fois on obtient :

$$|\langle e^{it\mathbf{H}} \varphi(\mathbf{H}) f, g \rangle| \leq C \langle t \rangle^{-l} \|f\|_{\eta} \|g\|_{\eta}$$

Comme

$$|\langle e^{it\mathbf{H}} \varphi(\mathbf{H}) f, g \rangle| \leq C \|f\|_0 \|g\|_0$$

On conclut en interpolant.

Remarque 3.7. — Soit $0 < \delta < \inf\left(1, \eta - \frac{1}{2}\right)$ et $\varphi \in C^{0, \delta}(\mathbb{R})$ à support compact dans $\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{H}) \setminus \mathcal{S}'$. On peut montrer par un argument légèrement

modifié que pour tout $0 \leq \sigma \leq \eta$

$$\|\varphi(H) e^{-tH} u\|_{-\sigma} \leq C \langle t \rangle^{-\tau(\sigma)} \|u\|_{\sigma}$$

$$\tau(\sigma) = \sigma \delta \eta^{-1}.$$

IV. — L'EFFET ZEEMAN

On suppose dans ce paragraphe que Q est scalaire et radial $Q \in L^q_{\text{loc}} \cap L^1$, $q > 3$ et $\lim_{|x| \rightarrow \infty} Q = 0$. On considère la famille d'opérateurs

$$H(\tau) = \frac{\alpha}{i} \nabla + m \beta + Q + \tau \alpha_2 x_1, \quad \tau \in \mathbb{R}^+.$$
 (4.1)

Le champ magnétique a pour intensité τ , et amène une perturbation à l'opérateur :

$$H(0) = \frac{\alpha}{i} \nabla + m \beta + Q.$$
 (4.2)

Dans les conditions imposées les opérateurs (4.1) et (4.2) sont essentiellement auto-ajoints, voir la définition 3.1. On a :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} H(\tau) u = H(0) u, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4).$$

Il en résulte que lorsque $\tau \rightarrow 0$, $H(\tau) \rightarrow H(0)$ au sens fort généralisé voir [K], VIII, Th 1.5.

L'opérateur Q est compact relativement à $\frac{\alpha}{i} \nabla + m \beta$ ainsi le spectre de $H(0)$ dans l'intervalle $]-m, m[$ est constitué de valeurs propres de multiplicités finies, chaque valeur propre est isolée. On a vu au paragraphe précédent que l'opérateur $H(\tau)$ a cette même propriété. Notons par A l'opérateur $\alpha_2 x_1$.

LEMME 4.1. — Si u est une fonction propre de $H(0)$ de valeur propre $\mu \in]-m, m[$ on a :

$$|u(x)| \leq c |x|^{-1} \exp(-\sqrt{m^2 - \mu^2} |x|)$$

pour $|x|$ assez grand.

THÉORÈME 4.2. — Soient $\mu \in]-m, m[$ une valeur propre de $H(0)$; et P le projecteur sur l'espace propre associé, l'opérateur PAP est alors bien défini. Soient μ_1, \dots, μ_m ses valeurs propres répétées avec leur multiplicité.

Alors pour $j = 1, \dots, m$. On a :

$$\text{dist}(\mu + \tau \mu_j, \sigma(H(\tau))) = o(\tau)$$
 (4.3)

en d'autres termes il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \sigma_p(H(\tau))$ tels que

$$\lambda_j = \mu + \tau\mu_j + o(\tau), \quad j = 1, \dots, m.$$

C'est l'effet Zeemann.

Preuve. — D'après le lemme précédent toute fonction propre de $H(0)$ est dans le domaine de l'opérateur A , on peut appliquer alors le théorème 5.4 de [K] Ch. VIII, et construire des pseudo-vecteurs propres pour $H(\tau)$. Soit (φ_j) une base orthonormée de PX formée de vecteurs propres de PAP , il existe alors une famille de vecteurs :

$$\varphi_j(\tau) = \varphi_j + \tau\varphi_j^{(1)}(\tau); \quad \|\varphi_j^{(1)}(\tau)\| \leq M$$

tels que pour $\tau \rightarrow 0$

$$\|(H(\tau) - \lambda - \tau\mu_j)\varphi_j(\tau)\| = o(\tau)$$

cela implique que $\text{dist}(\lambda + \tau\mu_j, \sigma(H(\tau))) = o(\tau)$ car $\|\varphi_j(\tau)\| \geq M'$.

Il nous reste à prouver le lemme 4.1.

Soit u une fonction propre de $H(0)$, de valeur propre $\mu \in]-m, m[$, on a $u \in H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$. Comme Q est radial l'équation :

$$\frac{\alpha}{i} \nabla u + m\beta u + Qu - \mu u = 0 \quad (4.4)$$

admet une séparation des variables en coordonnées sphériques r, ω , voir [L-L], p. 156. Une solution de (4.4) s'écrit

$$u = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

avec $\varphi = r^{-1}v(r)\Omega(\omega)$; $\psi = r^{-1}w(r)\Omega'(\omega)$ où $\Omega(\cdot)$ et $\Omega'(\cdot)$ sont des éléments de \mathbb{C}^2 et s'expriment à l'aide des harmoniques sphériques, les fonctions v, w sont solutions du système :

$$\left. \begin{aligned} v' + \frac{c}{r}v - (\mu + m - Q(r))w &= 0 \\ w' - \frac{c}{r}w + (\mu - m - Q(r))v &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

c étant une constante, écrivons (4.5) sous la forme :

$$U' = A(r)U + B(r)U; \quad U = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

où

$$A(r) = \begin{pmatrix} -q(r) & m + \mu \\ m - \mu & q(r) \end{pmatrix}; \quad q(r) = \frac{c}{r}; \quad B(r) = \begin{pmatrix} 0 & -Q \\ Q & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $A(r)$ est diagonalisable et on a :

$$P(r)A(r)P^{-1}(r) = \lambda(r)J, \quad \lambda(r) = \sqrt{q^2 + m^2 - \mu^2}$$

où

$$P(r) = \begin{pmatrix} m - \mu & \lambda + q \\ -(\lambda + q) & m + \mu \end{pmatrix}, \quad P^{-1}(r) = \frac{1}{2(\lambda + q)\lambda} \begin{pmatrix} m + \mu & -(\lambda + q) \\ \lambda + q & m - \mu \end{pmatrix}$$

$J = \text{diag}(I, -I)$, I étant la matrice unité 2×2 , les scalaires dans les matrices sont des blocs 2×2 , on a omis de faire apparaître I par commodité. En posant : $V = PU$, V vérifie

$$V' = \lambda(r)JV + T(r)V \quad (4.7)$$

où $T(r) = (P'P^{-1} + PB P^{-1})$. Compte tenu de nos hypothèses on a $T(\cdot) \in L^1$.

D'après le théorème de Levinson, [F] page 59, (4.7) admet une matrice fondamentale de la forme :

$$V(r) = [I + V_1(r)] \begin{pmatrix} e^{\Lambda(r)} & 0 \\ 0 & e^{-\Lambda(r)} \end{pmatrix}$$

où $\lim_{r \rightarrow \infty} \|V_1(r)\| = 0$ et $\Lambda(r) = \int_{r_0}^r \lambda(\tau) d\tau$. D'après ce qui précède : $u \in L^2$ si et seulement si $r^{-1}U \in L^2$ et pour cela on doit avoir :

$$V(r) = [I + V_1(r)] \begin{pmatrix} e^{\Lambda(r)} & 0 \\ 0 & e^{-\Lambda(r)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas

$$|U(r)| \leq ce^{-\Lambda(r)}$$

or il est clair qu'il existe une constante Λ_0 telle que :

$$\Lambda(r) = \sqrt{m^2 - \mu^2} r + \Lambda_0 + O(r^{-1})$$

On a donc démontrer que pour r assez grand :

$$|u(r)| \leq cr^{-1} \exp(-\sqrt{m^2 - \mu^2} r).$$

RÉFÉRENCES

- [B-A; D] M. BEN-ARTZI et A. DEVINATZ, Limiting Absorption Principle for Partial Differential Operators, *Memoirs A.M.S.*, vol. 66, 1987, p. 364.
 [C] P. R. CHERNOFF, Schrödinger and Dirac Operators with singular potentials and hyperbolic equations, *Pacific J. Math.*, vol. 72, 1977, p. 361-382.
 [F] M. FEDORIOUK, *Méthodes asymptotiques pour les équations différentielles ordinaires linéaires*, Mir, Moscou, 1987.

- [G] F. D. GAKHOV, *Boundary Value Problems*, Pergamon Press, London, 1966.
- [H] H. HACHEM, Théorie Spectrale de l'Opérateur de Dirac avec un potentiel électromagnétique à croissance linéaire à l'infini, *Thèse*, Université Paris-Nord, 1988.
- [H1] G. HACHEM, Spectral theory for Dirac operators with a Stark potential, *J. Math. Pures et Appliquées*, vol. **71**, 1992, p. 293-329.
- [He] B. HELFER, J. NOURRIGAT et X. P. WANG, Sur le spectre de l'équation de Dirac avec champ magnétique, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* vol. **22**, 1989, p. 515-533.
- [K] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Springer, Berlin, 1966.
- [L-L] L. LANDAU et E. LIFCHITZ, *Théorie quantique relativiste, 1^{re} partie*, Mir, Moscou, 1972.
- [L-M] J. J. LIONS et E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes*, Dunod, Paris, 1966.

(Manuscrit reçu le 14 mars 1991.)