ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

B. DUCOMET

Diffusion électromagnétique à basse fréquence par un réseau de cylindres diélectriques

Annales de l'I. H. P., section A, tome 57, nº 2 (1992), p. 183-208
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1992__57_2_183_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 57, n° 2, 1992, p. 183-208. *Physique théorique*

Diffusion électromagnétique à basse fréquence par un réseau de cylindres diélectriques

par

B. DUCOMET

Service de Physique et Techniques Nucléaires,
CEA-Centre d'Études de Bruyères-le-Châtel,
B. P. n° 12, 91680 Bruyères-le-Châtel, France

RÉSUMÉ. — On étudie théoriquement le problème de la diffraction d'une onde plane électromagnétique (ou acoustique) de grande longueur d'onde, par un réseau périodique de cylindres à bord assez régulier, au moyen d'un système d'équations intégrales au bord de l'obstacle élémentaire.

ABSTRACT. — We study the diffraction of a plane electro-magnetic (or acoustical) wave of large wavelength by a periodic array of cylinders with regular boundaries using a system of integral equations on the boundary of the elementary obstacle.

1. INTRODUCTION

Dans de nombreuses situations physiques [1], un système composite se comporte, vis-à-vis de la propagation des ondes, comme un milieu effectif, au moins pour des fréquences assez basses. Ce milieu peut alors être avantageusement caractérisé par un petit nombre de paramètres macroscopiques. En particulier, d'un point de vue numérique, la complexité des phénomènes de multi-diffusion est telle qu'on cherche à éviter un calcul direct extrêmement coûteux, et à simuler le milieu par cette approche macroscopique [2].

On s'intéresse ici à des conditions aux limites artificielles pour un système composite périodique simple (bidimensionnel), dans le cadre électromagnétique (ou acoustique). On évalue, dans cette première étude, un coefficient de réflexion monodimensionnel caractérisant complètement le système, à fréquence suffisamment basse.

2. DESCRIPTION DU PROBLÈME PHYSIQUE

Nous étudions la diffraction d'une onde plane électromagnétique par un réseau périodique de cylindres diélectriques homogènes identiques de caractéristiques ε_1 et μ_1.

On appelle Ω la section (supposée simplement connexe) du cylindre situé dans la cellule élémentaire $0 \leqq x \leqq d$.

Le système périodique est placé au-dessus d'un plan supposé parfaitement conducteur jouant le rôle de miroir, schématisant l'indépendance électrique des deux demi-espaces $z < -h$ et $z > -h$.

On considère alors l'excitation du système par une onde plane, parallèle aux génératrices des cylindres, $\vec{E}^i$, en mode TE (transverse électrique), ou $\vec{H}^i$, en mode TM (tranverse magnétique), suivant le cas de polarisation envisagé, cette polarisation étant toujours parallèle à l'axe d'invariance par translation du réseau (axe Oy).

On notera enfin d la période en x du réseau, et θ_i l'angle d'incidence de l'onde plane $\vec{E}^i$ (ou $\vec{H}^i$).

3. ÉQUATIONS DU PROBLÈME

Nous voulons résoudre les équations de Maxwell en régime harmonique, dans l'espace, avec les conditions aux limites adéquates [4].

Le problème étudié est bidimensionnel, grâce aux polarisations canoniques choisies (TE ou TM). Les équations de Maxwell se ramènent ainsi à une équation scalaire de Helmholtz, pour la seule composante non nulle du champ électrique ou magnétique, avec une « constante » de propagation $k(x, z)$ dépendant du point considéré.

On sait que le problème de « diffusion-transmission » électromagnétique par un obstacle de forme et de caractéristiques physiques « raisonnables », a une solution unique [5], [7]. Le cas des réseaux périodiques a été étudié

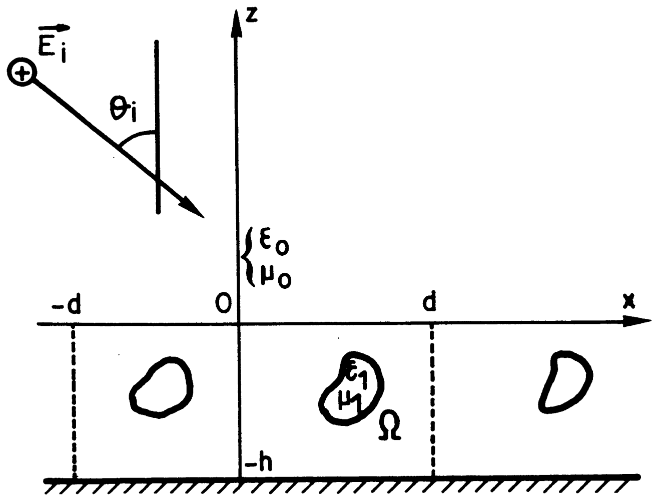

FIG. 1.

par Petit *et al.* [8], d'un point de vue physique et numérique, et, d'un point de vue plus mathématique, par Wilcox [9] pour les propriétés spectrales.

Notre point de vue étant macroscopique, nous nous intéressons ici au cas de la diffusion aux basses fréquences où la longueur d'onde du rayonnement incident est supérieure au pas du réseau, ce qui élimine les difficultés dues aux « seuils » [6].

Nous allons adapter au cas périodique, le formalisme pseudodifférentiel choisi par Costabel et Stephan [11], qui a l'avantage de s'appliquer même lorsqu'on ne suppose plus le bord $\partial\Omega$ régulier.

3.1. Équations bidimensionnelles et conditions aux limites

La situation bidimensionnelle apporte une simplification considérable : on n'a plus qu'une inconnue qui est la composante suivant Oy du champ considéré. Le système des équations de Maxwell se ramène alors à une équation de Helmholtz pour cette composante φ et la fonction de Green associée est scalaire, alors qu'elle serait tensorielle dans le cas général [4].

Les équations de Maxwell en régime harmonique et en l'absence de charges et de courants, s'écrivent :

$$\left.\begin{array}{c} \nabla \times \vec{E} + i\omega\mu . \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} - i\omega\varepsilon . \vec{D} = 0 \\ \nabla . \vec{D} = 0 \\ \nabla . \vec{B} = 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

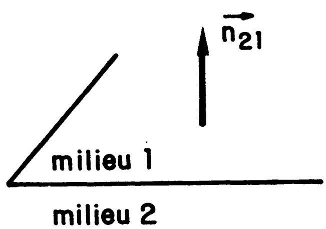

FIG. 2.

Dans (1), les paramètres ε et μ représentent respectivement la permittivité et la perméabilité magnétique locales au point (x, z) considéré, traduisant les relations constitutives linéaires entre les champs :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{D}=\varepsilon\vec{E}\\ \vec{B}=\mu\vec{H}\end{array}\right\} \tag{2}$$

On a inclus σ dans ε pour simplifier les écritures.

Si ω est la pulsation incidente, on notera $k=\frac{\omega}{c}$ le nombre d'onde associé; on écrira aussi dans la suite $k_j^2=k^2\varepsilon_j\mu_j$ pour chaque milieu indicé par j.

Aux différents interfaces, on a les conditions de « transmission » traduisant la continuité des composantes convenables des champs :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}_{12}\times[\vec{E}]=0\\ \vec{n}_{12}\times[\vec{H}]=0\end{array}\right\}$$

avec les notations de la figure 2, où $[E]=E_1-E_2$ et $[H]=H_1-H_2$.

Dans toute la suite, on notera φ le champ inconnu, et η un paramètre scalaire associé à ce champ, selon la polarisation choisie [$\eta=\mu$, dans le cas Transverse Électrique (TE); $\eta=\varepsilon$, dans le cas Transverse Magnétique (TM)]. La seule différence de traitement entre les deux cas sera la condition imposée sur l'interface inférieur M parfaitement conducteur, qui se traduit sur la composante φ, par :

1. Dans le cas Transverse Electrique (TE) :

$$\varphi|_M=0 \tag{3}$$

2. Dans le cas Transverse Magnétique (TM) :

$$\frac{\partial}{\partial n}\varphi|_M=0 \tag{3'}$$

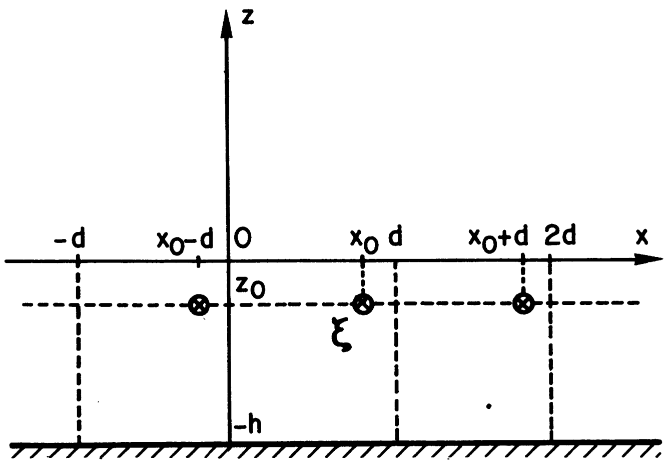

FIG. 3.

Les conditions de transmission (3) s'écrivent, en terme de φ, à un interface 1, 2 :

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi_2 \\ \frac{1}{\eta_1}\frac{\partial}{\partial n}\varphi_1 &= \frac{1}{\eta_2}\frac{\partial}{\partial n}\varphi_2\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

L'équation en φ est alors l'équation de Helmholtz :

$$\Delta\varphi + k_j^2\,\varphi = 0 \tag{5}$$

où :

1. $k_0^2 = \omega^2\,\varepsilon_0\,\mu_0$, ω étant la pulsation du rayonnement incident,
2. $k_1^2 = \omega^2\,\varepsilon_1\,\mu_1$, dans les obstacles.

Les équations (3) (4) (5) définissent alors un problème bien posé, à condition de leur adjoindre une condition de rayonnement à l'infini.

Dans le cas périodique, cette condition est un peu particulière, et nous utiliserons les résultats de [12].

3.2. Fonctions de Green périodiques adaptées au réseau

On note (*fig.* 3) ζ, le point générique (x, z) et on considère la fonction de Green **G**, solution dans le demi-espace $z > -h$, de l'équation :

$$(\Delta_\zeta + k_0^2)\,\mathbf{G}(\xi, \zeta) = -e^{-i\alpha(x-x_0)} \sum_{\mathbf{Z}} \delta(x - x_0 - nd)\,\delta(z - z_0) \tag{6}$$

où $\xi = (x_0, z_0)$.

On considère l'une des deux conditions sur le plan conducteur inférieur :

1. En mode TE :

$$\mathbf{G}(\xi, \zeta)\big|_{z=-h}=0 \tag{7}$$

2. En mode TM :

$$\frac{\partial}{\partial n}\mathbf{G}(\xi, \zeta)\big|_{z=-h}=0 \tag{7'}$$

où on a posé $\alpha=k_0 \sin \theta_i$.

Cette fonction de Green correspond à une distribution périodique de sources ponctuelles aux points $(x_0+d\mathbf{Z}, z_0)$. Le préfacteur exponentiel est simplement un déphasage adapté à l'onde incidente.

Le calcul de cette fonction de Green [relations (A5) et (A6) de l'annexe] conduit à :

$$\mathbf{G}(\xi, \zeta)=\frac{e^{-i\alpha(x-x_0)}}{2\,id}\sum_{\mathbf{Z}} e^{2ni\pi((x-x_0)/d)}\,\mathrm{S}_n(z, z_0) \tag{8}$$

Pour déterminer le champ en tout point, et notamment à l'intérieur des obstacles, il est naturel d'introduire, parallèlement à $\mathbf{G}$, une fonction de Green interne $\mathbf{G}^1$, correspondant au matériel de l'obstacle, solution du problème :

$$(\Delta_\zeta+k_1^2)\,\mathbf{G}^1(\xi, \zeta)=-e^{-i\alpha(x-x_0)}\sum_{\mathbf{Z}}\delta(x-x_0=nd)\,\delta(z-z_0)$$

avec les mêmes conditions de rayonnement à l'infini. On notera, par analogie, $\mathbf{G}^0$ la fonction de Green externe solution de (6).

Grâce à ce choix de fonctions de Green, nous allons montrer que le problème (3) (3') (4) (5) peut se ramener à la résolution d'un système d'équations intégrales posé sur le bord de l'obstacle situé dans la maille élémentaire.

4. SYSTÈME D'ÉQUATIONS INTÉGRALES AU BORD DE L'OBSTACLE « ÉLÉMENTAIRE »

On va définir un certain nombre d'opérateurs intégraux agissant sur des fonctions définies sur des contours polygonaux. Auparavant on va introduire, d'après [11], [14], des espaces fonctionnels adaptés au problème « polygonal-périodique ».

On utilisera les notations géométriques suivantes :

- Le demi-espace physique :

$$\mathscr{E}_p=\{(x, z);\ x\in\mathbf{R},\ z>-h\}$$

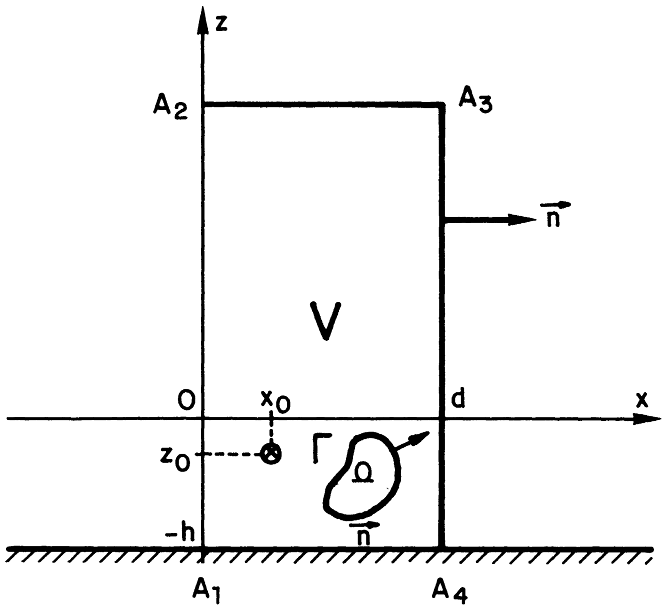

FIG. 4.

- Le miroir :

$$\mathcal{M} = \{ (x, -h);\ x \in \mathbf{R} \}$$

- Le réseau **S**, constitué de l'ensemble des obstacles :

$$\mathbf{S} = \Omega + d\mathbf{Z}\,\vec{e}_x,$$

où $\vec{e}_x$ est le vecteur unitaire de $x'x$, définissant le réseau.

- Le bord de **S** :

$$\partial\mathbf{S} = \partial\Omega + d\mathbf{Z}\,\vec{e}_x,$$

- Le demi-espace physique externe :

$$\mathcal{E}_e = \mathcal{E}_p \setminus \mathbf{S}.$$

Si on considère la cellule élémentaire : $\mathbf{T} = \{ (x, z);\ 0 < x < d,\ z > -h \}$, on peut alors définir les quantités « locales » associées à cette cellule.

- $\Omega_0 = \mathcal{E}_e \cap \mathbf{T}$,
- $\Omega_1 = \Omega$,
- $\mathcal{S}_h = \{ (x, -h);\ 0 < x < d \}$,
- La section de Ω_0 à l'altitude ζ :

$$\Sigma_\zeta = \{ (x, z);\ 0 \leqq x \leqq d,\ z = \zeta \}$$

• Le complémentaire « tronqué » de Ω_0 à l'altitude ζ :

$$\Omega_{0,\zeta}=\{(x, z)\in\Omega_0;\ z\leqq\zeta\}$$

où on suppose que $\zeta\geqq\max\{z:(x, z)\in\Omega_1\}$. □

La théorie classique montre ([8], [9]) que toute solution quasi-périodique suffisamment régulière de (5), peut s'écrire sous la forme du développement de Rayleigh-Bloch

$$\Phi(x, z)=e^{i\alpha x}\sum_{\mathbf{Z}} e^{i\beta_n x} v_n(z) \tag{9}$$

où $\beta_n=(2n\pi/d)+\alpha$.

On sait que ce développement converge dans $\Omega_0\diagdown\Omega_{0,\,\mathrm{R}}$, pour R assez grand [12]. Cette décomposition va nous permettre d'énoncer la condition de rayonnement dans le cas 1-périodique, en terme de v_n.

CONDITION $\mathscr{R}$(Alber) [12] :

1. Pour $n\in\mathbf{Z}$ et $\beta_n^2\leqq k_0^2$, lorsque $z\to+\infty$:

$$\frac{dv_n}{dz}=i(k_0^2-\beta_n^2)^{1/2}v_n+o\left(\frac{1}{z}\right)$$

2. Pour $n\in\mathbf{Z}$ et $\beta_n^2\geqq k_0^2$, lorsque $z\to+\infty$:

$$v_n=0\left(\frac{1}{z}\right)$$

Ces conditions ont une interprétation physique claire : elles traduisent simplement la différence de comportement entre les modes évanescents ($\beta_n^2>k_0^2$), correspondant aux « basses fréquences », où l'effet du réseau se manifeste seulement par une modification du coefficient de réflexion de la couche composite, et les modes de propagation « effectifs » ($\beta_n^2<k_0^2$), correspondant aux « hautes fréquences », à qui la condition de rayonnement impose d'être sortants à l'infini « positif ».

Cette condition va nous permettre de poser correctement le problème de diffusion.

Il sera commode d'utiliser la notation suivante, pour la solution « libre » :

$$\varphi^l=\mathrm{E}^i-\mathrm{R}_0\,.\,\mathrm{E}^r,$$

où $\mathrm{E}^i=e^{i(\alpha x+\beta_z)}$ est l'onde plane incidente, $\mathrm{E}^r=e^{i(\alpha x-\beta_z)}$ est l'onde plane réfléchie, en l'absence du réseau, et R_0 est le coefficient de réflexion, également en l'absence du réseau.

On notera de même :

$$\varphi^d=\varphi^e-\varphi^l,$$

le champ diffracté par le réseau.

On considère alors le :

PROBLÈME $\mathscr{P}_0$:
« Trouver les fonctions $\varphi^d = \varphi^e - \varphi^l$, φ^i vérifiant :

$$(\Delta + k_0^2)\,\varphi^d = 0 \quad dans\ \mathscr{E}_e$$
$$(\Delta + k_1^2)\,\varphi^i = 0 \quad dans\ \mathbf{S}$$

ainsi que :
1. Les conditions de transmission (4) aux interfaces S.
2. La condition de miroir sur $\mathscr{M}$.
3. La condition $\mathscr{R}$ d'Alber, à l'infini $z > 0$. »

Pour lever l'ambiguïté apparente de la formulation, due à la multiple connexité de S, on va exploiter la quasi-périodicité.

4.1. Espaces fonctionnels « quasi-périodiques »

On introduit, d'après [12], [14], [11], des généralisations naturelles d'espaces fonctionnels au cas quasi périodique.

• On supposera réalisée dans toute la suite, l'hypothèse géométrique de « non-contact » suivante, entre le réseau et les interfaces :

CONDITION $\mathscr{C}$:
« $\exists\, \rho > 0$:

$$d(\partial\Omega_1, \mathscr{M}) > \rho \text{ »}$$

où d est la distance euclidienne dans $\mathbf{R}^2$ ».

• On considère l'ensemble des fonctions test quasi-périodiques :

$$C_\alpha^\infty(\Omega) = \{ u \in C^\infty(\Omega),\ \operatorname{supp}(u)\ \textit{compact en la variable}\ x, \text{ et } u(x+d, z) = e^{i\alpha d} u(x, z) \}$$

où Ω est un ouvert régulier de $\mathscr{E}_p$.

On notera alors $H_\alpha^1(\Omega)$, la fermeture de $C_\alpha^\infty(\Omega)$, dans l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$.

On peut alors donner un sens précis au développement de Rayleigh-Bloch (9), en munissant $H_\alpha^1(\Omega_{0,\zeta})$ d'une norme appropriée (*voir* [14]).

Soit :

$$\varphi(x, z) = \sum_{\mathbf{Z}} e^{i\beta_n x}\, \varphi_n(z)$$

Alors :

$$\|\varphi\|_{1,\Omega_{0,\zeta}}^2 = |\varphi|_{0,\Omega_{0,\zeta}}^2 + |\varphi|_{1,\Omega_{0,\zeta}}^2$$

où :

$$|\varphi|^2_{0,\Omega_{0,\zeta}} = d \sum_{p \in \mathbf{Z}} \int_0^\rho |\varphi_p(z)|^2 \, dz$$

$$|\varphi|^2_{1,\Omega_{0,\zeta}} = d \sum_{p \in \mathbf{Z}} \left(\int_0^\rho (1+\beta_p^2) |\varphi_p(z)|^2 \, dz + \int_0^\rho \left| \frac{d\varphi_p(z)}{dz} \right|^2 dz \right)$$

On définit la trace sur une section de $\Omega_{0,\zeta}$, $\gamma_0 \varphi \in H^{1/2}(\Sigma_\zeta)$ par :

$$\gamma_0 \varphi(\zeta) = \sum_{p \in \mathbf{Z}} \varphi_p(\zeta) e^{i\beta_n x}$$

De même, $\gamma_1 \varphi \in H^{-1/2}(\Sigma_\zeta)$ est défini par :

$$\gamma_1 \varphi(\zeta) = \sum_{p \in \mathbf{Z}} \frac{d\varphi_p}{dz}(\zeta) e^{i\beta_n x}$$

On associe à $H^1_\alpha(\Omega)$, l'espace :

$$H^1_\Delta(\Omega) = \{ u \in H_1(\Omega);\ \Delta u \in L^2(\Omega) \}$$

Si on définit le prolongement quasi périodique de $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega_0)$ par $\widetilde{u}^{(\alpha)}$, tel que :

$$\widetilde{u}^{(\alpha)}(x+d) = e^{i\alpha x} \widetilde{u}^{(\alpha)}(x)$$

Alors, on dira que u appartient à l'espace de Sobolev « quasi-périodique » $H^1_{\Delta,\alpha}(\Omega)$, si $u \in H^1_\alpha(\Omega) \cap H^1_\Delta(\Omega)$ et si $\widetilde{u}^{(\alpha)} \in H^1_{\Delta,\mathrm{loc}}(\mathscr{E}_p)$.

On introduit enfin, en suivant [11], les espaces fonctionnels « extérieur », et « intérieur » suivants :

$$\mathscr{L}^0 = \left\{ \varphi \in H^1_{\Delta,\alpha,\mathrm{loc}}(\Omega_0) : (\Delta + k_0^2)\varphi = 0; \right.$$

$$\varphi|_{\mathscr{I}_h} = 0 \left(\textit{resp. } \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\mathscr{I}_h} = 0 \right) (\mathrm{TE})\,[\textit{resp. } (\mathrm{TM})];$$

$$\left. \varphi \textit{ satisfaisant la condition } \mathscr{R} \textit{ à l'infini} \right\}$$

$$\mathscr{L}^1 = \{ \varphi \in H^1_{\Delta,\alpha}(\Omega_1) : (\Delta + k_1^2)\varphi = 0 \}.$$

Ces espaces vont nous permettre de résoudre le problème dans la cellule élémentaire. □

On fera la convention suivante sur l'orientation des normales :

« sur Γ, la normale pointe de Ω_1 vers Ω_0 ».

On a tout d'abord le théorème de trace suivant :

LEMME 1. — *On peut définir, pour* $j=0, 1$, *la trace* $u|_\Gamma$ *de tout élément* u *de* $\mathscr{L}^j$ *dans* $H^{1/2}(\Gamma)$. *De plus,* $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ *est défini dans* $H^{-1/2}(\Gamma)$ *pour tout*

$u \in \mathrm{H}^1(\Omega_j)$, à support compact, par :

$$\int_{\Omega_j} v\,\Delta u\,dx + \int_{\Omega_j} \nabla u \nabla v\,dx = (-1)^j \left\langle \frac{\partial u}{\partial n}, v \right\rangle \Big|_{\Gamma},$$

où $\langle\ ,\ \rangle|_\Gamma$ est le crochet de dualité $(\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma), \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma))$.

La preuve de ce résultat est une application de [16], dans le cas Γ régulier, et de [15], dans le cas où Γ est polygonal.

Avec ces définitions, le problème $\mathscr{P}_0$ se reformule comme suit :

Problème $\mathscr{P}$:

« Trouver :

1. $\varphi_0^d \in \mathrm{H}^1_{\alpha,\,\mathrm{loc}}(\mathscr{E}_e) \cap \mathrm{H}^1_{\Delta,\,\mathrm{loc}}(\mathscr{E}_e)$, vérifiant :

$$(\Delta + k_0^2)\,\varphi_0^d = 0 \quad dans\ \mathscr{E}_e,$$

2. $\varphi_1 \in \mathrm{H}^1_\alpha(\mathrm{S}) \cap \mathrm{H}^1_\Delta(\mathrm{S})$, vérifiant :

$$(\Delta + k_1^2)\,\varphi_1 = 0 \quad dans\ \mathrm{S},$$

satisfaisant aux conditions aux limites suivantes :

• Conditions de transmission $\mathscr{T}$ à l'interface $\partial\mathrm{S}$:

$$\varphi_0^d + \varphi' = \varphi_1$$

$$\frac{1}{\eta_0}\frac{\partial}{\partial n}(\varphi_0^d + \varphi^l) = \frac{1}{\eta_1}\frac{\partial}{\partial n}\varphi_1$$

• Condition de conducteur parfait, à l'interface $\mathscr{M}$:

$$\varphi_0|_{\mathscr{I}_h} = 0\,(\mathrm{TE}) \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial n}\Big|_{\mathscr{I}_h} = 0\,(\mathrm{TM}) \right)$$

• Condition de rayonnement $\mathscr{R}$ d'Alber. »

Remarque. — Bien que S soit multiplement connexe, les équations précédentes sont bien valides, au sens quasi-périodique.

Le problème $\mathscr{P}$ est alors lui-même équivalent au suivant, posé dans la cellule élémentaire :

Problème $\mathscr{P}'$: « Trouver $\varphi_0^d \in \mathscr{L}^0$, $\varphi_2 \in \mathscr{L}^1$, vérifiant les conditions de transmission $\mathscr{T}$ à travers l'interface Γ. »

En effet, si le couple $\Phi = (\varphi_0^d, \varphi_1)$ est solution de $(\mathscr{P}')$, son prolongement quasi périodique $\tilde{\Phi}$ est solution de $(\mathscr{P})$.Réciproquement, toute restriction à **T** de la solution de $(\mathscr{P})$, est solution de $(\mathscr{P}')$.

4.2. Unicité de la solution de $\mathscr{P}'$

On fera dans la suite les hypothèses physiques raisonnables suivantes :

1. Les parties réelles des nombres ε_j et μ_j sont positives.
2. $\Im m\,\varepsilon_0$ et $\Im m\,\mu_0$ sont nulles.

On se propose de montrer la :

PROPOSITION 2. — *Si les constantes* μ_1 *et* ε_1, *vérifient la condition suivante :*

$$\Im m\left(\frac{1}{\mu_1}\right)-\frac{1}{\lambda_N}\Im m(\varepsilon_1)\leqq 0,$$

où λ_N *est la première valeur propre non nulle du problème de Neumann associé au Laplacien dans* $L^2(\Omega_1)$ *alors le problème homogène* $\mathscr{P}'$ *admet la seule solution triviale.*

Preuve. — Posons $\Omega_R=\Omega_{0,R}$, pour R assez grand.
Appliquons la formule de Green dans Ω_R à φ_0 et φ_{θ} :

$$\int_{\Sigma_R}\overline{\varphi_0}\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}d\Sigma_R=\int_{\Gamma_0}\overline{\varphi_0}\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}d\Gamma_0+\int_{\Omega_R}|\nabla\varphi_0|^2\,dx-k_0^2\int_{\Omega_R}|\varphi_0|^2\,dx=0 \tag{10}$$

Appliquons la même formule dans Ω_1, à φ_1 :

$$\int_{\Gamma}\overline{\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}d\Gamma=\int_{\Omega_1}|\nabla\varphi_1|^2\,dx-k_1^2\int_{\Omega_1}|\varphi_1|^2\,dx=0 \tag{11}$$

Les conditions de transmission à travers Γ donnent :

$$\frac{\mu_0}{\mu_1}\int_{\Gamma}\overline{\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}d\Gamma=\int_{\Gamma}\overline{\varphi_0}\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}d\Gamma$$

En portant dans (11), on obtient enfin :

$$\frac{1}{\mu_0}\int_{\Sigma_R}\overline{\varphi_0}\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}d\Sigma_R=\frac{1}{\mu_0}\int_{\Omega_R}|\nabla\varphi_0|^2\,dx+\frac{1}{\mu_1}\int_{\Omega_1}|\nabla\varphi_1|^2\,dx$$
$$-\frac{k_0^2}{\mu_0}\int_{\Omega_R}|\varphi_0|^2\,dx-\frac{k_1^2}{\mu_1}\int_{\Omega_1}|\varphi_1|^2\,dx \tag{12}$$

Prenons la partie imaginaire des deux membres, en faisant tendre R vers l'infini :

$$\Im m\left(\frac{1}{\mu_1}\right)\int_{\Omega_1}|\nabla\varphi_1|^2\,dx-\Im m(\varepsilon_1)\int_{\Omega_1}|\varphi_1|^2\,dx=0 \tag{13}$$

Posons $D=\Im m\left(\frac{1}{\mu_1}\right)$ et $C=\Im m(\varepsilon_1)$.
Alors (13) s'écrit :

$$D\,|\nabla\varphi_1|_{0,\Omega_1}^2-C\,|\varphi_1|_{0,\Omega_1}^2=0 \tag{14}$$

L'inégalité de Poincaré [17] s'écrit, pour $\varphi_1 \in H^1(\Omega_1)$:

$$|\varphi_1|^2_{0,\Omega_1} \leqq P(\Omega_1)|\nabla \varphi_1|^2_{0,\Omega_1} + \frac{1}{\mathrm{Mes}(\Omega_1)}\left|\int_{\Omega_1} \varphi_1^2\,dx\right|^2$$

où $P(\Omega_1)$ est la constante de Poincaré.

En portant dans (14), et en posant $E^2 = \frac{1}{\mathrm{Mes}(\Omega_1)}\left|\int_{\Omega_1} \varphi_1^2\,dx\right|^2$, on obtient :

$$(D - CP(\Omega_1))|\nabla \varphi_1|^2_{0,\Omega_1} \leqq E^2$$

Le résultat annoncé s'ensuit alors, en prenant pour $P(\Omega_1)$ la meilleure constante de Poincaré, qui est précisément $\frac{1}{\lambda_N}$ (*voir* [17], p. 926). □

4.3. Formule de représentation et potentiels de surface

On introduit les potentiels définis sur le bord $\Gamma = \partial\Omega_1$, pour tout $\varphi \in C^\infty(\Gamma)$, par : $\forall \xi \in \Omega_\alpha$, $\alpha = 0, 1$:

$$V_{\Omega_\alpha}\varphi(\xi) := -2\int_\Gamma G^\alpha(\xi, \zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\Gamma(\zeta)$$

$$K_{\Omega_\alpha}\varphi(\xi) := -2\int_\Gamma \frac{\partial G^\alpha}{\partial n_\zeta}(\xi, \zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\Gamma(\zeta)$$

On a alors le résultat de représentation suivant :

LEMME 3. — 1. $\forall \varphi_0 \in \mathscr{L}^0$ *et* $\forall \xi \in \Omega_0$, on a :

$$\varphi_0(\xi) = \frac{1}{2}(V_{\Omega_0}\psi^0(\xi) - K_{\Omega_0} v^0(\xi)) \tag{15}$$

où $v^0 = \varphi_0|_\Gamma$ *et* $\psi^0 = \left.\frac{\partial \varphi_0}{\partial n}\right|_\Gamma$.

2. $\forall \varphi_1 \in \mathscr{L}^1$ *et* $\forall \xi \in \Omega_1$, *on a :*

$$\varphi_1(\xi) = \frac{1}{2}(K_{\Omega_1} v^1(\xi)) - V_{\Omega_1}\psi^1(\xi)) \tag{16}$$

où $v^1 = \varphi_1|_\Gamma$ *et* $\psi^1 = \left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right|_\Gamma$.

Preuve. — Le point 2 étant une conséquence directe de la formule de Green (*voir* [16], ou [15] dans le cas polygonal), il suffit de montrer 1.

Supposons donc que $\xi \in \Omega_{0,R}$, où $R > 0$, et appliquons la formule de Green dans $\Omega_{0,R}$, au couple (G^0, φ_0^d).

ν étant la normale externe à Ω_0, on a :

$$\int_{\partial\Omega_{0,R}} d\Gamma(\zeta)\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\mathbf{G}^0(\zeta,\zeta)\varphi(\zeta)\right]-\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\varphi\right)(\zeta)\,\mathbf{G}^0(\xi,\zeta)]=\varphi(\xi) \quad (17)$$

Examinons les diverses contributions de l'intégrale (17) dans la décomposition du bord du domaine d'intégration [*fig.* (4)] :

$$\partial\Omega_{0,R}=A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_3A_4\cup A_4A_1\cup\Gamma$$

1. Sur A_1A_2 et A_3A_4, les normales sont opposées, et les propriétés de quasi-périodicité de $\mathbf{G}^0$ et φ entraînent une compensation exacte des deux contributions.

2. Sur A_1A_4, la condition de miroir annule la contribution.

3. Sur le segment $\Sigma_R=A_2A_3$, on va décrire la condition de rayonnement $\mathcal{R}$ en passant en série de Fourier à partir de (8), ce qui est légitime pour R assez grand.

En effet, la contribution de Σ_R à (17) s'écrit, ν_R étant la normale externe à Σ_R :

$$J=\int_{\Sigma_R} d\Sigma_R(\zeta)\left[\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)(\zeta)\,\mathbf{G}^0(\xi,\zeta)-\frac{\partial}{\partial\nu}\mathbf{G}^0(\xi,\zeta)\varphi(\zeta)\right] \quad (18)$$

En écrivant explicitement les séries de Fourier correspondant à φ et $\mathbf{G}^0$, on a, en posant $\beta_n=\dfrac{2n\pi}{d}$, pour presque tout $\zeta=(x,z)$:

$$\varphi(\zeta)=e^{i\alpha x}\sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{i\beta_n x}\varphi(z)$$

$$\mathbf{G}^0(\xi,\zeta)=e^{-i\alpha x}\sum_{n\in\mathbf{Z}} g_n(\xi)\,e^{i\beta_n x}e^{i\gamma_n z}$$

Le membre de gauche de (18) s'écrit alors :

$$\int_{\Sigma_R} dx\sum_{n\in\mathbf{Z}} g_n(\xi)\,e^{i\gamma_n R}\left(\frac{d\varphi_n(z)}{dz}-i\gamma_n\varphi_n(z)\right)\Bigg|_{z=R}$$

La condition $\mathcal{R}$ implique alors que cette expression tend vers zéro, lorsque R tend vers $+\infty$. La relation (15) en découle immédiatement, d'après l'orientation choisie sur Γ. □

Les équations (15), (16), (17) expriment les champs φ_j en tout point de $\Omega_0\cup\Omega_1$, en fonction de leur valeur et de celle de leur dérivée normale, à l'interface Γ.

Pour trouver ces fonctions inconnues, on va se ramener à un système d'équations intégrales, valable que le bord Γ soit régulier ou polygonal. Pour cela, on introduit d'abord les potentiels de simple et double couche, ainsi que leurs dérivées, relatifs à Γ :

Pour tout $\varphi \in C^\infty(\Gamma)$, tout $\xi \in \Gamma$, et $\alpha = 0, 1$:

$$V_\alpha \varphi(\xi) := -2 \int_\Gamma \mathbf{G}^\alpha(\xi, \zeta)\, \varphi(\zeta)\, d\Gamma(\zeta) \tag{19}$$

$$K_\alpha \varphi(\xi) := -2 \int_\Gamma \frac{\partial \mathbf{G}^\alpha}{\partial n_\zeta}(\xi, \zeta)\, \varphi(\zeta)\, d\Gamma(\zeta) \tag{20}$$

$$K'_\alpha \varphi(\xi) := -2 \int_\Gamma \frac{\partial \mathbf{G}^\alpha}{\partial n_\xi}(\xi, \zeta)\, \varphi(\zeta)\, d\Gamma(\zeta) \tag{21}$$

$$D_\alpha \varphi(\xi) := -\frac{\partial}{\partial n_\xi} K_{\Omega_\alpha} \varphi(\xi) \tag{22}$$

Les propriétés de ces potentiels sont résumées dans le :

LEMME 4. — *Si* $(v, \psi) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, *alors les potentiels* $V_{\Omega_\alpha} \psi$ *et* $K_{\Omega_\alpha} v$ *sont dans* $\mathscr{L}^\alpha$, *pour* $\alpha = 0, 1$, *et on a :*

$$K_{\Omega_\alpha} v|_\Gamma = (K_\alpha - (-1)^\alpha)\, v$$
$$V_{\Omega_\alpha} \psi|_\Gamma = V_\alpha \psi$$
$$\frac{\partial}{\partial n} K_{\Omega_\alpha} v|_\Gamma = -D_\alpha v$$
$$\frac{\partial}{\partial n} V_{\Omega_\alpha} v|_\Gamma = (K'_\alpha + (-1)^\alpha)\, \psi$$

Preuve. — La preuve de [11] s'applique sans modification, aux deux types de potentiels (*voir* aussi Annexe A). □

On a alors les formules de dualité suivantes :

LEMME 5. — *Soient* $(v, w) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ *et* $(\varphi, \psi) \in H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, *pour* $j = 0, 1$:

Alors :

1. *On peut écrire les formules de dualité* :

$$\langle V_\alpha \varphi, \psi \rangle_\Gamma = \langle \varphi, V_\alpha \psi \rangle_\Gamma$$
$$\langle K_\alpha v, \psi \rangle_\Gamma = \langle v, K'_\alpha \psi \rangle_\Gamma$$
$$\langle D_\alpha v, w \rangle_\Gamma = \langle v, D_\alpha w \rangle_\Gamma$$

2. *Les opérateurs* :

$$V_\alpha: \; H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma)$$
$$K'_\alpha: \; H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma)$$
$$K_\alpha: \; H^{1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma)$$
$$D_\alpha: \; H^{1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma)$$

sont continus.

Preuve. — *Voir* [11]. □

On définit maintenant les opérateurs matriciels relatifs à l'interface Γ :

$$\bullet \ \mathscr{A}_\alpha = \begin{pmatrix} -\mathrm{K}_\alpha & \mathrm{V}_\alpha \\ \mathrm{D}_\alpha & \mathrm{K}'_\alpha \end{pmatrix}, \qquad \textit{pour} \quad \alpha = 0, 1 \tag{23}$$

Il est clair, d'après ce qui précède, que : $\mathscr{A}_\alpha$ est continu de $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$ dans lui-même, pour $\alpha = 0, 1$. □

En suivant toujours [11], on montre alors le :

THÉORÈME 6. — *Soit* $(v, \psi) \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$. *Les trois propositions suivantes sont équivalentes* :

1. $\exists\, u \in \mathscr{L}^\alpha$ *tel que* v *et* ψ *sont les valeurs au bord de* u *sur* Γ.
2. $(1 - (-1)^\alpha \mathscr{A}_\alpha) \begin{pmatrix} v \\ \psi \end{pmatrix} = 0.$
3. $\exists\, (g, h) \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$ *tel que* :

$$\begin{pmatrix} v \\ \psi \end{pmatrix} = \mathscr{C}_\alpha \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$$

où les $\mathscr{C}_\alpha = 1/2\,(1 + (-1)^\alpha \mathscr{A}_\alpha)$, $\alpha = 0, 1$, *sont les opérateurs de Calderon correspondant à l'interface* Γ ([19], [7]). □

Ce résultat permet d'écrire le système d'équations intégrales cherché, sous la forme : « Trouver (v_0, ψ_0) et (v_1, ψ_1), valeurs au bord sur Γ respectives dans $\mathscr{L}^0$ et $\mathscr{L}^1$, satisfaisant le système :

$$(1 - \mathscr{A}_0) \begin{pmatrix} v_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} = 0 \tag{24}$$

$$(1 + \mathscr{A}_1) \begin{pmatrix} v_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = 0 \tag{25}$$

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} = \mathrm{M} \begin{pmatrix} v_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v^l \\ \psi^l \end{pmatrix} \tag{26}$$

où M est la matrice de transmission :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{\eta_0}{\eta_1} \end{pmatrix}$$

et où v_l et ψ_l sont les valeurs du champ libre φ_l et de sa dérivée normale sur Γ ».

Pour simplifier l'écriture du système, on va utiliser le résultat suivant concernant les valeurs « au bord » v^l et ψ^l du champ libre φ^l.

LEMME 7. — *On a la relation* :

$$(1 + \mathscr{A}_0) \begin{pmatrix} v^l \\ \psi^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

Preuve. – Il suffit d'appliquer la formule de Green à φ^l, dans $\Omega_{0,\,R}$, dans les mêmes conditions que celles du lemme 3, pour obtenir l'égalité :

$$\int_{\partial\Omega_{0,\,R}} d\Gamma(\zeta)\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\mathbf{G}^0(\xi,\zeta)\,v^l(\zeta)\right] - \psi^l(\zeta)\,\mathbf{G}^0(\xi,\zeta)] = \varphi^l(\xi) \tag{28}$$

En décomposant le premier membre de (28) en :

$$\int_\Gamma + \int_{\Sigma_R},$$

on voit que, dans la première intégrale qui fait apparaître la série de Fourier de $\mathbf{G}^0$, ne subsiste que la contribution du terme constant. D'autre part, en exploitant les expressions de φ^l et de $S_0(z, z_0)$, on trouve :

$$\varphi^l(\xi) = \int_{\Sigma_R} d\Gamma(\zeta)\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\mathbf{G}^0(\xi,\zeta)\,v^l(\zeta) - \psi^l(\zeta)\,\mathbf{G}^0(\xi,\zeta)\right]$$

En reportant dans (28) :

$$\int_\Gamma d\Gamma(\zeta)\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\mathbf{G}^0(\xi,\zeta)\,v^l(\zeta) - \psi^l(\zeta)\,\mathbf{G}^0(\xi,\zeta)\right] = 0$$

Ce qui s'écrit :

$$V_{\Omega_0}\,\psi^l(\xi) - K_{\Omega_0}\,v^l(\xi) = 0$$

Il suffit d'exploiter les formules du lemme 4, pour obtenir (27). □

L'élimination de deux des quatre inconnues dans les relations (24), (25), (26), (27) conduit alors au système d'équations intégrales de Fredholm de première espèce :

« Trouver (v, ψ) solution de :

$$\mathscr{H}\begin{pmatrix} v \\ \psi \end{pmatrix} = -\mathrm{M}^{-1}\begin{pmatrix} v^l \\ \psi^l \end{pmatrix} \text{»} \tag{29}$$

où :

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}(\mathscr{A}_1 + \mathrm{M}^{-1}\mathscr{A}_0\,\mathrm{M})$$

Explicitement :

$$\mathscr{H} = 1/2\begin{pmatrix} -(K_0 + K_1) & V_1 + \dfrac{\eta_0}{\eta_1}V_0 \\ D_1 + \dfrac{\eta_1}{\eta_0} & K'_0 + K'_1 \end{pmatrix}$$

Une vérification immédiate montre alors l'équivalence des deux systèmes :

LEMME 8. — 1. *Si* $\begin{pmatrix} v_j \\ \psi_j \end{pmatrix} \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ *vérifie* (24) (25) (26), *alors* $\begin{pmatrix} v \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix}$ *vérifie* (29).

2. *Si* $\begin{pmatrix} v \\ \psi \end{pmatrix}$ *vérifie* (29), *alors les quantités* :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = 1/2\,(1 - \mathscr{A}_1) \begin{pmatrix} v \\ \psi \end{pmatrix}$$

et :

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} = 1/2\,(1 + \mathscr{A}_0) \left(\mathrm{M} \begin{pmatrix} v \\ \psi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v^l \\ \psi^l \end{pmatrix} \right)$$

vérifient les relations (24) (25) (26).

4.4. Un résultat d'existence et d'unicité

Pour résoudre le système (29), on introduit une forme bilinéaire associée à $\mathscr{H}$ (*voir* [11]).

Soient $\begin{pmatrix} v \\ \psi \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} w \\ \varphi \end{pmatrix}$ deux éléments de $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$.

On définit la forme bilinéaire **a** :

$$\mathbf{a}\left(\left(\begin{pmatrix} v \\ \psi \end{pmatrix} \right), \left(\begin{pmatrix} w \\ \varphi \end{pmatrix} \right) \right) = \left\langle \mathscr{H}' \begin{pmatrix} v \\ \psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ \varphi \end{pmatrix} \right\rangle \Big|_{\Gamma}$$

où, pour respecter la dualité, on introduit :

$$\mathscr{H}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathscr{H}$$

On voit que $\mathscr{H}'$ est continu de $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$. On a donc la majoration :

$$\left| \mathbf{a}\left(\left(\begin{pmatrix} v \\ \psi \end{pmatrix} \right), \begin{pmatrix} w \\ \varphi \end{pmatrix} \right) \right| \leqq C\left(|v|_{1/2} + |\psi|_{-1/2} \right)\left(|w|_{1/2} + |\varphi|_{-1/2} \right)$$

On décompose $\mathscr{H}'$ en :

$$\mathscr{H}' = \mathscr{H}'_1 + \mathscr{C}_1$$

où :

$$\mathcal{H}'_1 = \begin{pmatrix} 1/2\left(1+\frac{1}{\nu}\right)D_0 & 0 \\ 0 & 1/2(1+\nu)V_0 \end{pmatrix}$$

où $\nu = \frac{\eta_1}{\eta_0}$.

Alors on vérifie que $\mathcal{C}_1$ est compact, et que $\mathcal{H}'_1$ est un opérateur pseudo-différentiel elliptique au sens d'Agmon-Douglis-Nirenberg sur $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ (*voir* [19]), d'ordre $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Grâce au lemme 1 de l'appendice, son symbole principal est :

$$\sigma(\mathcal{H}'_1)(\omega) = \begin{pmatrix} 1/2\left(1+\frac{1}{\nu}\right)|\omega| & 0 \\ 0 & 1/2(1+\nu)\frac{1}{|\omega|} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{H}'$ est donc fortement elliptique, et on a une inégalité de *Gårding* sur $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$:

$$\left| \mathbf{a}\left(\begin{pmatrix} v \\ \psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{v} \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}\right) \left\langle \mathcal{C}'\begin{pmatrix} v \\ \psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{v} \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} \right\rangle_\Gamma \right| \geqq \gamma(|v|^2_{1/2} + |\psi|^2_{-1/2})$$

où γ est une constante positive, et $\mathcal{C}'$ un opérateur compact de $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$.

On en tire donc l'estimation *a priori* suivante pour $\mathcal{H}$:

$$(|v|^2_{1/2} + |\psi|^2_{-1/2})^{1/2} \leqq 1/2\left(\left\| \mathcal{H}\begin{pmatrix} v \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{H^{1/2} \times H^{-1/2}} + \left\| \begin{pmatrix} v \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{H^{-1/2} \times H^{1/2}} \right)$$

La forme bilinéaire $\mathbf{a}$ est donc continue et coercive sur $V = H^{1/2} \times H^{-1/2}$.

Pour tout $\begin{pmatrix} v_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} \in V'$, il existe $\begin{pmatrix} v \\ \psi \end{pmatrix}$ unique, tel que :

$$\mathbf{a}\left(\begin{pmatrix} \bar{v} \\ \psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{w} \\ \varphi \end{pmatrix}\right) = \left\langle \begin{pmatrix} v_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ \varphi \end{pmatrix} \right\rangle,$$

pour tout $\begin{pmatrix} w \\ \varphi \end{pmatrix} \in V$.

On déduit alors de ce qui précède que $\mathcal{H} - \lambda J$ (J étant le plongement canonique de V dans V'), est un isomorphisme topologique entre V et V', pour tout λ qui n'est pas dans le spectre de $\mathcal{H}$. Compte tenu de la relation

$\mathcal{H}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{H}$ et des résultats standard de régularité (*voir* [19]), on obtient en définitive :

THÉORÈME 9. — *Sous la condition d'unicité de la proposition* 2, *l'équation* $\mathcal{H} u = v$ *a une unique solution, et si* $v \in \mathrm{H}^s \times \mathrm{H}^{s-1}$, *il en est de même pour* u.

5. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE ET COEFFICIENT DE REFLEXION

Le comportement asymptotique, en champ lointain, du système est donné par la :

PROPOSITION 10. — *Il existe, pour* $kd < 2\pi$, *un nombre complexe* $\mathrm{R}(k)$ *unique, tel que le champ total* $\bar{\varphi}_0$ *vérifie la condition asymptotique suivant :*

$$\lim_{z_0 \to +\infty} (\bar{\varphi}_0(\xi) - \mathrm{E}^i(\xi) + (\mathrm{R}_0(k) - \mathrm{R}(k))\,\mathrm{E}^r(\xi)) = 0$$

où $\xi = (x_0, z_0)$, E^i *et* E^r *sont les champs libres définis dans la section* 3, *et* $\mathrm{R}_0(k) = e^{-2i\beta h}$ *est le coefficient de réflexion du plan conducteur supposé seul.*

Preuve. — Grâce à la formule de représentation externe du champ [*voir* équation (15)], on a, pour presque tout $\xi \in \Omega_0$ (en réalité, le théorème 8 permet de donner une version continue de ce résultat) :

$$\varphi_0(\xi) = \int_\Gamma \frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial n_\zeta}(\xi, \zeta)\, v^0(\zeta)\, d\Gamma(\zeta) - \int_\Gamma \mathbf{G}^0(\xi, \zeta)\, \psi^0(\zeta)\, d\Gamma(\zeta)$$

On peut alors utiliser le comportement asymptotique de $\mathbf{G}^0$ (lemme 2 de l'annexe).

Posons :

$$\Delta(\xi) = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_\zeta}(\mathbf{G}^0(\xi, \zeta) - \mathbf{G}^0_{as}(\xi, \zeta))\, v^0(\zeta)\, d\Gamma(\zeta) - \int_\Gamma (\mathbf{G}^0(\xi, \zeta) - \mathbf{G}^0_{as}(\xi, \zeta))\, \psi^0(\zeta)\, d\Gamma(\zeta)$$

où :

$$\mathbf{G}^0_{as}(\xi, \zeta) = \frac{e^{-i\alpha(x - x_0)}}{2id} \mathrm{S}_0(z, z_0)$$

Alors, d'après (A10) et (A11), on peut trouver une constante positive C_3, telle que :

$$|\Delta(\xi)| \leqq \mathrm{C}_3 e^{-\mathrm{C} z_0}(|v^0|_{\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)} + |\psi^0|_{\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)}$$

Le comportement asymptotique cherché s'en suit. □

Les propriétés de scattering du système périodique sont ainsi complètement caractérisées par un seul coefficient, qui joue le rôle d'amplitude de diffusion, et on peut donner, pour terminer, une formule explicite liée à ce coefficient, qui se lit immédiatement sur le résultat précédent :

DÉFINITION 11. — *On appelle coefficient de réflexion du système périodique* (Ω_0, Ω_1), *la fonction* $\mathfrak{R}$, *à valeurs complexes, définie par* :

$$\mathfrak{R}(k)=\mathrm{R}_0(k)-\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_\zeta}\mathrm{E}(\zeta)\, v^0(\zeta)\, d\Gamma(\zeta)+\int_\Gamma \mathrm{E}(\zeta)\,\psi^0(\zeta)\, d\Gamma(\zeta),$$

où (v^0, ψ^0) *est la solution du problème* $\mathscr{P}'$, *et* :

$$\mathrm{E}(\zeta)=\frac{e^{-i\alpha x}}{2i\beta d}\left(e^{i\beta z}-e^{-i\beta(z+2h)}\right)$$

6. CONCLUSION

Nous avons donné un résultat précis d'existence et d'unicité pour le problème de scattering par un réseau périodique de cylindres diélectriques placés au-dessus d'un plan conducteur, sous forme d'un système d'équations intégrales de Fredholm de première espèce. Nous étudierons par ailleurs [21] numériquement ce problème.

Le système d'équations proposé a l'avantage numérique de ne nécessiter que la discrétisation du bord de l'obstacle élémentaire. Le prix à payer est l'approximation d'opérateurs singuliers, qui peut s'avérer délicate [21].

La formulation classique en système de Fredholm de seconde espèce [20], agréable du point de vue « physique perturbative », conduirait à une discrétisation de l'intérieur de l'obstacle, avec des potentiels moins singuliers. Mais, compte tenu du caractère non-local des opérateurs intégraux, les matrices associées sont pleines, et le compromis entre les deux points de vue n'est pas clair.

Précisons pour terminer que la méthode utilisée s'étend directement au cas d'une cellule élémentaire plus complexe (plusieurs obstacles dans la cellule, obstacles placés dans un substrat, etc.). Dans ce cas, l'interface est multiconnexe, et on doit faire intervenir, pour chaque composante connexe, un opérateur du type $\mathscr{A}$, ainsi que des opérateurs mixtes, couplant les différentes composantes connexes deux à deux, et traduisant les effets de multidiffusion.

Dans un prochain travail ([22]), nous examinerons les propriétés analytiques de la fonction $\mathfrak{R}$, qui peuvent donner des renseignements intéressants sur des phénomènes de résonance éventuels (*voir* [6], [12]).

REMERCIEMENTS

Des conversations avec M. Cessenat et M. Artola sur ce travail m'ont permis d'éclaircir plusieurs points de rigueur, et je les en remercie vivement.

APPENDICE

Calcul et propriétés de la Fonction de Green périodique $\mathbf{G}(\xi, \zeta)$

On considère la situation de la figure 3.

Les sources ponctuelles sont situées aux points $\xi + (d, 0)\mathbf{Z}$, où $\xi = (x_0, z_0)$.

La fonction de Green considérée est la solution « sortante » de l'équation :

$$(\Delta_\zeta + k^2)\,\mathbf{G}(\xi, \zeta) = -e^{-i\alpha(x-x_0)} \sum_{\mathbf{Z}} \delta(x - x_0 - nd)\,\delta(z - z_0) \qquad \text{(A1)}$$

où $\zeta = (x, z)$, $\alpha = k_0 \sin \theta_i$, et où on suppose remplie la condition de conducteur parfait à l'interface « miroir » $z = -h$.

La périodicité permet, avec les arguments standard, de développer $\mathbf{G}(\xi, \zeta)$ en série de Fourier :

$$\mathbf{G}(\xi, \zeta) = e^{-i\alpha(x-x_0)} \sum_{\mathbf{Z}} e^{2ni\pi(x-x_0)/d}\, w_n(z, z_0) \qquad \text{(A2)}$$

On obtient w_n, en reportant dans (A1), ce qui donne, tous calculs faits :

$$\sum_{\mathbf{Z}} e^{2ni\pi x/d} \left[\frac{d^2 w_n}{dz^2} + \left(k^2 - \left(\frac{2ni\pi}{d} - \alpha \right)^2 \right) w_n \right] = -e^{-i\alpha(x-x_0)} \sum_{\mathbf{Z}} \delta(x - x_0 - nd)\,\delta(z - z_0) \qquad \text{(A3)}$$

En utilisant l'identité :

$$\sum_{\mathbf{Z}} \delta(x - x_0 - nd) = \frac{1}{d} \sum_{\mathbf{Z}} e^{2ni\pi((x-x_0)/d)}$$

on identifie les deux membres de (A3), et on obtient l'équation suivante pour w_n :

$$\left[\frac{d^2 w_n}{dz^2} + \left(k^2 - \left(\frac{2ni\pi}{d} - \alpha \right)^2 \right) w_n \right] = -\frac{1}{d} e^{2ni\pi((x-x_0)/d)}\,\delta(z - z_0). \qquad \text{(A4)}$$

Pour tenir compte des conditions aux limites, on écrit, au sens des distributions :

$$\frac{d^2 w_n}{dz^2} = \left\{ \frac{d^2 w_n}{dz^2} \right\} + \sigma_0\,\delta + \sigma_1\,\delta'$$

où { } est la dérivée usuelle, σ_0 est le saut de w_n et σ_1 est le saut de sa dérivée, en $z=0$, ou en $z=z_0$.

On obtient ainsi les relations suivantes, en indiçant par + (resp. −) la valeur au bord supérieur (resp. inférieure) de w_n.

1. En $z=z_0$:

$$w_+=w_-$$
$$\left.\frac{dw}{dz}\right|_+-\left.\frac{dw}{dz}\right|_-=-\frac{1}{d}e^{2\,ni\pi((x-x_0)/d)}$$

2. En $z=-h$:

$$w=0\,(\mathrm{TE})$$
$$\frac{dw}{dz}=0\,(\mathrm{TM})$$

On pose de plus :

$$\gamma_n^2=k^2-\left(\frac{2n\pi}{d}-\alpha\right)^2$$

On écrit la solution dans les deux régions :

1. Pour $z\geqq z_0$:

$$w_n=A_n^e e^{i\gamma_n z}+B_n^e e^{-i\gamma_n z}$$

2. Pour $-h\leqq z\leqq z_0$:

$$w_n=A_n^b e^{i\gamma_n z}+B_n^b e^{-i\gamma_n z}$$

Supposer les ondes sortantes à l'infini revient à faire $A_n^e=0$. La prise en compte des conditions aux limites précédentes conduit aux valeurs des coefficients, et on trouve :

Pour $-h\leqq z$:

$$\mathbf{G}(\xi,\zeta)=\frac{e^{-i\alpha(x-x_0)}}{2id}\sum_{\mathbf{Z}}e^{2\,ni\pi((x-x_0)/d)}\,\mathrm{S}_n(z,z_0)\tag{A5}$$

où :

$$\mathrm{S}_n(z,z_0)=\frac{1}{\gamma_n}\left(e^{-i\gamma_n|z-z_0|}-e^{-i\gamma_n(2h-|z+z_0|)}\right)(\mathrm{TE})\tag{A6}$$

$$\mathrm{S}_n(z,z_0)=\frac{1}{\gamma_n}\left(e^{-i\gamma_n|z-z_0|}+e^{-i\gamma_n(2h-|z+z_0|)}\right)(\mathrm{TM})\tag{A6'}$$

Il est utile de faire une décomposition de **G**, en parties régulière et singulière :

LEMME 1. — *On a la décomposition* :

$$\mathbf{G}=\mathbf{G}^{\mathrm{reg}}+\mathbf{G}^{\mathrm{sing}}$$

Où :

$$\mathbf{G}^{\text{reg}}(\xi, \zeta) = \frac{e^{-i\alpha(x-x_0)}}{2id} S_0(z, z_0) + \frac{e^{-i\alpha(x-x_0)}}{2id} \sum_{\mathbf{Z}^*} e^{2ni\pi((x-x_0)/d)}$$
$$\times \left[\frac{1}{\gamma_n} (e^{-i\gamma_n |z-z_0|} - e^{-i\gamma_n (2h+z+z_0)}) - \frac{d}{2i\pi} \frac{e^{-2\pi \frac{n}{d} |z-z_0|}}{|n|} \right] \tag{A7}$$

et :

$$\mathbf{G}^{\text{sing}}(\xi, \zeta) = -\frac{1}{4\pi} e^{-i\alpha(x-x_0)}$$
$$\times \operatorname{Log}\left(1 - 2e^{(2\pi/d)|z-z_0|} \cos\left(\frac{2\pi}{d}(x-x_0)\right) + e^{-(4\pi/d)|z-z_0|}\right) \tag{A8}$$

De plus, lorsque $|\xi - \zeta| \sim 0$:

$$\mathbf{G}^{\text{sing}}(\xi, \zeta) \sim -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Log}|\xi - \zeta| \tag{A9}$$

L'autre régime asymptotique est décrit par le :

LEMME 2. – *Si* $kd < 2\pi$, *il existe quatre constantes positives*, R, C, C_1, *et* C_2, *telles que* :

1. *Pour* $|\xi - \zeta| > R$:

$$\left| \mathbf{G}(\xi, \zeta) - \frac{e^{-i\alpha(x-x_0)}}{2id} S_0(z, z_0) \right| \leqq C_1 e^{-(C/d) z_0} \tag{A10}$$

2. *De plus, si* $\zeta \in \Gamma$:

$$\left| \frac{\partial}{\partial n_\zeta} (\mathbf{G}(\xi, \zeta) - \frac{e^{-i\alpha(x-x_0)}}{2id} S_0(z, z_0)) \right| \leqq C_2 e^{-C/d) z_0} \tag{A11}$$

Preuve : Précisons que la limitation $kdl < 2\pi$ n'est pas essentielle. Si on la relâche, on a encore des estimations du même type, au prix d'une modification éventuelle des constanes C_1 et C_2, et en remplaçant la fonction S_0 par une combinaison convenable de $S_j(z, z_0)$.

Pour prouver les estimations précédentes, on remarque que, pour $|n| \to \infty$, $\gamma_n = -i\left(\left(\frac{2n\pi}{d} - \alpha\right)^2 - k^2\right)^{1/2}$.

D'autre part, pour $z > z_0$:

$$S_n(z, z_0) = \frac{e^{-i\gamma_n z_0}}{\gamma_n} (e^{i\gamma_n z} - e^{-i\gamma_n (2h+z)})$$

Par conséquent, pour $-h < z < 0$, et $n \neq 0$:

$$|e^{i\gamma_n z}| = e^{-\mathrm{Re}(i\gamma_n)|z|} < 1$$

D'où :

$$|S_n(z, z_0)| \leqq 2 \frac{e^{-(((2n\pi/d)-\alpha)^2 - k^2)^{1/2} \cdot z_0}}{(((2n\pi/d)-\alpha)^2 - k^2)^{1/2}}$$

Mais :

$$\left(\left(\frac{2n\pi}{d} - \alpha\right)^2 - k^2\right)^{1/2} = \frac{2\pi|n|}{d}\left(\left(1 - \frac{\alpha d}{2n\pi}\right)^2 - \left(\frac{kd^2}{2n\pi}\right)^{1/2}\right.$$

et il existe $C > 0$, tel que :

$$0 < \left(\left(1 - \frac{\alpha d}{2n\pi}\right)^2 - \left(\frac{kd}{2n\pi}\right)^2\right)^{1/2} < C$$

où C est une fonction de θ et du paramètre $\frac{kd}{2\pi}$.

On en tire alors :

$$|S_n(z, z_0)| \leqq \frac{d}{2\pi|n|C} e^{-(2\pi|n|C/d)z_0}$$

D'où l'estimation :

$$\left| G(\xi, \zeta) - \frac{e^{-i\alpha(x-x_0)}}{2id} S_0(z, z_0) \right| \leqq \frac{1}{d} \sum_{\mathbf{Z}*} |S_n(z, z_0)|$$

En sommant la série, on trouve $\mathrm{Log}\left|1 - e^{-(2\pi C/d) z_0}\right|$, d'où (A10), pour une constante C_1 convenable.

L'estimation (A11) se prouve de la même façon. □

On a enfin la propriété :

LEMME 3. — *Si* $\mathrm{Im}\left(k^2 - \left(\frac{2n\pi}{d} - \alpha\right)^2\right)^{1/2} > 0$, $\forall n \in \mathbf{Z}$, *l'opérateur de noyau* **G** *est borné de* $L^2(\mathbf{T})$ *dans* $H^2(\mathbf{T})$.

La preuve est une adaptation directe de [6].

RÉFÉRENCES

[1] ETOPIM 1, Electrical Transport and Optical Properties of Inhomogeneous Media, *A.I.P. Conference proceedings*, vol. **2**, 1978.

[2] A. BAMBERGER, G. COHEN, L. HALPERN, P. JOLY éd., *Journées Aspects Mathématiques et numériques des phénomènes de propagation d'ondes*, I.N.R.I.A., Nice, 1988.

[3] R. KITTAPA et R. E. KLEINMANN, Accoustic Scattering by Penetrable Homogeneous Objects, *J. Math. Phys.*, vol. **16**, 1975, p. 421.

[4] J. A. STRATTON, *Electromagnetic theory*, McGraw-Hill, 1941.

[5] D. COLTON et R. KRESS, *Integral Equation Methods in Scattering Theory*, Wiley, 1983.

[6] C. GÉRARD, Resonance Theory in Atom-Surface Scattering, *Commun. in Math. Phys.*, vol. **126**, 1989, p. 263.
[7] M. CESSENAT, *Résolution de problèmes de Maxwell harmoniques par des méthodes intégrales*, Rapport interne C.E.A., 1987.
[8] R. PETIT éd., *Electromagnetic Theory of Gratings*, Springer Verlag, 1980.
[9] C. WILCOX, *Scattering Theory for Diffraction Gratings*, Springer Verlag, 1980.
[10] B. DUCOMET, En préparation.
[11] M. COSTABEL et E. STEPHAN, A Direct Boundary Integral Equation Method for Transmission Problems, *J. Math. Anal. Appl.*, **106**, 1985, p. 367.
[12] H. D. ALBER, A Quasi-Periodic Boundary Value Problem for the Laplacian and the Continuation of its Resolvent, *Proc. of the Royal Soc. of Edinb.*, **92A**, 1979, p. 251.
[13] B. DUCOMET et D. COGNY, *Un modèle simple pour la diffusion d'ondes électromagnétiques par un milieu hétérogène*, Rapport interne C.E.A., 1987.
[14] Z. BENJELLOUN TOUIMI EL-DABAGHI, Diffraction par un réseau 1-périodique de R^3, *Thèse*, Université Paris-XIII, 1988.
[15] P. GRISVARD, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman Publishing Inc., 1985.
[16] J.-L. LIONS et E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, 1968.
[17] R. DAUTRAY et J.-L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson, 1984.
[18] D. MAYSTRE et M. CADILHAC, Singularities of the Continuation of Fields and Validity of Rayleigh's Hypothesis, *J. Math. Phys.*, **26**, 1985, p. 2201.
[19] J. CHAZARAIN et A. PIRIOU, *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*, Gauthier-Villars, 1981.
[20] E. SANCHEZ-PALANCIA, *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, Springer-Verlag, 1980.
[21] B. DUCOMET et D. HA QUANG, En préparation.
[22] B. DUCOMET, En préparation.

(*Manuscrit reçu le* 18 *janvier* 1991.)