ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

G. BURDET

M. PERRIN

Proposition de structures géométriques « amplifiées » pour le traitement des systèmes de points matériels

Annales de l'I. H. P., section A, tome 54, nº 1 (1991), p. 27-42

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1991__54_1_27_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 54, n° 1, 1991, p. 27-42. *Physique théorique*

Proposition de structures géométriques « amplifiées » pour le traitement des systèmes de points matériels

par

G. BURDET et M. PERRIN

Centre de Physique Théorique, C.N.R.S. Luminy Case 907,
13288 Marseille Cedex 09, France

RÉSUMÉ. — A partir de la considération de divers groupes de Lie matriciels généralisant les groupes standard de la mécanique classique et quantique, nous proposons des structures géométriques dites amplifiées susceptibles d'initier une façon nouvelle d'aborder l'étude des systèmes de points matériels.

ABSTRACT. — By considering miscellaneous Lie groups of matrices which generalize the standard groups of classical and quantum mechanics, we propose some geometrical structures called amplified which furnish a new geometric framework for the study of material point systems.

INTRODUCTION

Le but de cet article est de fournir des éléments pour la construction de structures géométriques susceptibles de décrire un système constitué de N points matériels en intéraction en tenant compte explicitement de sa constitution microscopique et en traitant de la même façon chacun des constituants.

Dans la formulation symplectique habituelle de la mécanique classique le mouvement d'un tel système isolé est régi par le principe de relativité Galiléenne qui fait jouer un rôle déterminant au groupe de Galilée invariant la forme de Lagrange. Ce groupe agissant sur l'espace des mouvements en tant que groupe dynamique on peut en déduire, sans utiliser la structure microscopique du système, les théorèmes généraux de la mécanique à savoir la conservation de l'impulsion, du moment cinétique et de l'énergie et montrer que tout mouvement du système peut se décomposer en un mouvement rectiligne uniforme pour le centre de gravité et un mouvement autour de celui-ci. De plus la cohomologie symplectique du groupe de Galilée est de dimension un et permet de donner un statut cohomologique à la masse totale du système corroborant ainsi l'oubli de la constitution microscopique du système dans cette approche.

En fait la forme de Lagrange est également invariante sous un plus gros groupe que nous avons appellé le groupe de Galilée « amplifié » et qui a une cohomologie très riche puisqu'elle permet d'introduire non seulement les masses individuelles de chacun des constituants mais aussi des coefficients d'influence mutuelle, de corrélation. Ces propriétés nous ont suggéré d'étudier ce groupe ainsi que tous ceux qui accompagnent le groupe de Galilée en mécanique classique et quantique : à savoir le groupe de Heisenberg, le groupe symplectique... qui seront ici sous une forme amplifiée. Notons qu'apparaîtront naturellement les groupes utilisés dans les modèles collectifs nucléaires.

Qui dit nouveaux groupes dit nouvelles structures géométriques, mais ici nous ne faisons qu'esquisser les structures géométriques nouvelles « amplifiées » que l'existence de ces divers groupes suggère. Il est bien évident que c'est l'étude systématique ultérieure de ces structures qui montrera si elles sont pertinentes pour formaliser la notion d'interaction mutuelle et apporter un éclairage nouveau pour aborder l'étude des systèmes relativistes en interaction.

Il est clair que le point de vue que nous développons ici ne s'inscrit pas dans le cadre habituel du problème à N ou à $(1+N)$ corps où l'un des constituants a une masse beaucoup plus petite ou beaucoup plus grande que celle des autres et, de par ce fait, est amené à subir un traitement particulier. Au contraire nous insistons sur le fait que chaque constituant du système se trouve plongé dans une structure géométrique dépendant de tous les autres constituants, mais qui est identique pour chacun d'entre eux.

L'article est organisé de la façon suivante :

I. Le groupe de Galilée amplifié et sa cohomologie.

II. Le groupe de Galilée amplifié étendu et ses orbites coadjointes.

III. Le groupe de Weyl-Heisenberg amplifié et la variété quantique d'un système de points matériels.

IV. Le groupe de Galilée amplifié sous-groupe du groupe symplectique.
V. Le groupe de Galilée homogène amplifié et l'espace de configuration-temps d'un ensemble de N points matériels.
VI. Vers une version amplifiée de la géométrie chronoprojective.

I. LE GROUPE DE GALILÉE AMPLIFIÉ ET SA COHOMOLOGIE SYMPLECTIQUE

Considérons un système constitué de N points matériels de masses m_J, $J \in [1, N]$, dont l'espace d'évolution, est, *a priori*, un ouvert Y de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{3N} \times \mathbf{R}^{3N}$ muni de la forme de Lagrange σ [1], qui peut s'écrire

$$\sigma = \sum_{J=1}^{N} {}^t(m_J\, d\vec{V}_J - \vec{F}_J\, dt) \wedge (d\vec{X}_J - \vec{V}_J\, dt) \tag{I.1}$$

où $\vec{F}_J$ désigne la force appliquée au point de masse m_J, de position $\vec{X}_J \in \mathbf{R}^3$ et de vitesse $\vec{V}_J \in \mathbf{R}^3$ à l'instant $t \in \mathbf{R}$, le symbole ^{t} indiquant la transposition. La forme σ est une 2-forme de rang constant 6 N dont le noyau caractérise les équations du mouvement. Sa fermeture exprime le principe suivant lequel, localement, les forces dérivent d'un potentiel. L'espace d'évolution (Y, σ) se trouve alors être une variété présymplectique et la variété symplectique $(X \approx Y/\ker\sigma, \sigma_X)$ est appelée l'espace des mouvements du système.

Dans l'hypothèse de l'existence globale d'un potentiel $\mathscr{V}$ tel que:

$$\vec{F}_J = -\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial \vec{X}_J} \tag{I.2}$$

on déduit que la forme de Lagrange s'écrit comme la différentielle d'une 1-forme ϖ, dite forme de Cartan, donnée par

$$\varpi = \sum_{J=1}^{N} m_J\, {}^t\vec{V}_J\, d\vec{X}_J - H\, dt \tag{I.3}$$

où H est l'hamiltonien du système:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{J=1}^{N} m_J\, |\vec{V}_J|^2 + \mathscr{V}(t, \vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_N). \tag{I.4}$$

Appelons groupe de Galilée «amplifié» le groupe G_N produit semi-direct de $SO(3) \otimes \mathbf{R}$ par le produit direct de deux groupes abéliens $\mathbf{R}^{3 \times N}$. Il est représenté fidèlement par les matrices de Gl $(3 + 2N, \mathbf{R})$ de la forme

$$a = \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_N & e\,\mathbf{1}_N \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_N \end{pmatrix} \tag{I.5a}$$

où $A \in SO(3)$, $e \in \mathbf{R}$ et $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ sont les matrices rectangulaires à 3 lignes et N colonnes qu'on écrit aussi sous la forme $\mathbf{b} = (\vec{b}_1 \ldots \vec{b}_N)$ et $\mathbf{c} = (\vec{c}_1 \ldots \vec{c}_N)$ avec $\vec{b}_J$ et $\vec{c}_J \in \mathbf{R}^3$.

La loi de groupe de G_N et l'inverse d'un élément s'écrivent respectivement:

$$(\mathrm{I.5}\,b) \quad (A, \mathbf{b}, \mathbf{c}, e)(A', \mathbf{b}', \mathbf{c}', e') = (AA', \mathbf{b} + A\,\mathbf{b}', \mathbf{c} + A\,\mathbf{c}' + \mathbf{b}\,e', e + e')$$

$$(\mathrm{I.5}\,c) \quad (A, \mathbf{b}, \mathbf{c}, e)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}\mathbf{b}, -A^{-1}(\mathbf{c} - \mathbf{b}e), -e).$$

On fait agir G_N sur l'espace d'évolution de la façon suivante: soit y un point de Y repéré par $y = (t, \{\vec{X}_J\}, \{\vec{V}_J\}/J \in [1, N], t \in \mathbf{R}, \vec{X}_J$ et $\vec{V}_J \in \mathbf{R}^3)$ l'action $\underline{a}$ de $a \in G_N$ sur Y est donnée par:

$$(\mathrm{I.6}) \qquad \underline{a}(y) = (t', \{\vec{X}'_J\}, \{\vec{V}'_J\})$$

avec $t' = t + e$, $\vec{X}'_J = A\vec{X}_J + \vec{b}_J t + \vec{c}_J$ et $\vec{V}'_J = A\vec{V}_J + \vec{b}_J$.
Cette action se remonte sur les 1-formes selon

$$(\mathrm{I.7}) \qquad \begin{aligned} \underline{a}^*(d\vec{X}'_J) &= A\,d\vec{X}_J + \vec{b}_J\,dt \\ \underline{a}^*(d\vec{V}'_J) &= A\,d\vec{V}_J \\ \underline{a}^*(dt') &= dt. \end{aligned}$$

On vérifie alors que la forme de Lagrange reste invariante, c'est-à-dire que $\underline{a}^*(\sigma) = \sigma$ si $\underline{a}^*(\vec{F}'_J) = A\,\vec{F}_J$. Dans le cas où cette condition est satisfaite G_N est groupe d'automorphismes pour la structure présymplectique (Y, σ) et la théorie du moment peut être mise en œuvre.

Notons Z un élément de l'algèbre de Lie $\mathscr{L}(G_N)$ de G_N représenté par:

$$(\mathrm{I.8}) \qquad Z = (\vec{\omega}, \beta, \gamma, \varepsilon) = \begin{pmatrix} j(\vec{\omega}) & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \varepsilon\,\mathbf{1}_N \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

avec $\vec{\omega} \in \mathbf{R}^3$, $j(\vec{\omega})$ étant l'opérateur produit vectoriel par $\vec{\omega}$ dans $\mathbf{R}^3$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$ et β, γ matrices réelles à 3 lignes et N colonnes. Soit μ un élément du dual $\mathscr{L}^*(G_N)$ qui s'écrit sous la forme $\mu = (\vec{L}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, E)$ où $\vec{L} \in \mathbf{R}^3$, $E \in \mathbf{R}$ et $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ matrices réelles à 3 lignes et N colonnes; μ et Z satisfont la relation de dualité:

$$(\mathrm{I.9}) \qquad \mu \circ Z = {}^t\vec{L}.\vec{\omega} - E\,\varepsilon + \mathrm{Tr}({}^t\mathbf{P}\gamma - {}^t\mathbf{Q}\beta)$$

On note $\underline{Z}$ le champ de vecteurs fondamental défini sur Y par l'action infinitésimale de G_N. Les propriétés de fermeture et d'invariance de σ entraînent l'existence d'une application moment Ψ associée à l'action de G_N sur Y et définie en tout point $y \in Y$ par:

$$(\mathrm{I.10}) \qquad \sigma(\underline{Z}_y) = -d(\Psi(y) \circ Z)$$

En écrivant la dérivée de Lie de (I.10) pour un autre élément Z' de $\mathscr{L}(G_N)$, on constate que l'expression $\sigma(\underline{Z}_y, \underline{Z}'_y) + \Psi(y) \circ [Z, Z']$ ne dépend pas de y et définit la cohomologie symplectique du groupe de Galilée « amplifié ». Le calcul montre alors que la classe de cohomologie non triviale de $\mathscr{L}(G_N)$ est représentée par:

$$f(Z, Z') = \mathrm{Tr}\,(\mathscr{M}\,({}^t\beta\gamma' + {}^t\gamma'\,\beta) - ({}^t\beta'\,\gamma + {}^t\gamma\,\beta')) \tag{I.11}$$

où $\mathscr{M}$ est une matrice $N \times N$ symétrique, c'est-à-dire que l'espace de cohomologie symplectique de G_N est de dimension $\frac{N}{2}(N+1)$.

L'absence d'équivariance de l'application moment s'exprime à l'aide d'un cocycle symplectique associé $\alpha_{\mathscr{M}} \in \mathbf{H}^1(G_N, \mathscr{L}^*(G_N))$ pour l'action coadjointe [1], ce qui s'écrit:

$$\alpha_{\mathscr{M}}(a) = \Psi \circ a - \mathrm{Ad}_a^* \circ \Psi \tag{I.12}$$

où Ad_a^* désigne l'action coadjointe de G_N sur $\mathscr{L}^*(G_N)$ donnée par:

$$\mathrm{Ad}_a^*(\mu) = \Big\{ \mathrm{A}\vec{\mathrm{L}} + \sum_{J=1}^{N} \mathrm{A}\,(j(\vec{\mathrm{Q}}_J)\,\vec{b}_J - j(\vec{\mathrm{P}}_J)\,\vec{c}_J), \quad \mathrm{A}\,(\mathbf{Q} - e\,\mathbf{P}), \mathrm{A}\,\mathbf{P}, \mathrm{E} + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\mathbf{b}\,{}^t\mathbf{P}\,{}^t\mathrm{A} + \mathrm{A}\,\mathbf{P}\,{}^t\mathbf{b}) \Big\}. \tag{I.13}$$

où $\mu = \Psi(y)$.

Le calcul du moment global donne alors:

$$\alpha_{\mathscr{M}}(\mathbf{a}) = \Big\{ \sum_{J=1}^{N} j(\vec{c}_J)\,(\overrightarrow{\mathbf{b}\mathscr{M}})_J, (\mathbf{c} - e\,\mathbf{b})\,\mathscr{M}, \mathbf{b}\,\mathscr{M}, \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\mathbf{b}\,\mathscr{M}\,{}^t\mathbf{b}) \Big\} \tag{I.14}$$

et par dérivation de (I.14) en l'élément neutre de G_N on retrouve l'expression (I.11) du 2-cocycle symplectique.

II. LE GROUPE DE GALILÉE AMPLIFIÉ ÉTENDU ET SES ORBITES COADJOINTES

L'existence d'une cohomologie non triviale pour le groupe de Galilée amplifié permet d'introduire l'extension centrale correspondante et de définir ainsi le groupe de Galilée amplifié étendu noté $\tilde{G}_N$, par la suite exacte:

$$\{0\} \to S \to \tilde{G}_N \to G_N \to \{1\}$$

où S représente le groupe abélien additif des matrices $N \times N$ symétriques. Les éléments de $\tilde{G}_N$ notés (a, k), avec $a \in G_N$ et k matrice symétrique $N \times N$, vérifient la loi de groupe:

$$(a, k)(a', k') = \Big(a'', k + k' + \frac{1}{2}\{ {}^t\mathbf{c}'\,{}^t\mathrm{A}\mathbf{b} + {}^t\mathbf{b}\,\mathrm{A}\,\mathbf{c}' - {}^t\mathbf{b}'\,{}^t\mathrm{A}\,\mathbf{c} - {}^t\mathbf{c}\,\mathrm{A}\,\mathbf{b}' - e'\,({}^t\mathbf{b}\,\mathrm{A}\,\mathbf{b}' + {}^t\mathbf{b}'\,{}^t\mathrm{A}\,\mathbf{b}) \}\Big) \tag{II.1}$$

où $a''=a\,a'$ est donné par (I.5 *b*).

Notons $\tilde{Z}=(Z,\kappa)$ un élément de l'algèbre de Lie $\mathscr{L}(\tilde{G}_N)$ et $\tilde{\mu}=(\mu,\mathscr{M})$ un élément de $\mathscr{L}^*(G_N)$, la dualité s'exprime à travers la relation

$$\tilde{\mu}\circ\tilde{Z}=\mu\circ Z-\mathrm{Tr}(\mathscr{M}\kappa) \tag{II.2}$$

[avec $\mu\circ Z$ défini en (I.9)].

L'action coadjointe d'un élément $\tilde{a}$ de $\tilde{G}_N$ sur $\tilde{\mu}$ s'écrit :

$$\mathrm{Ad}^*_{\tilde{a}}(\tilde{\mu})=(\mathrm{Ad}^*_a(\mu)+\alpha_{\mathscr{M}}(a),\mathscr{M}) \tag{II.3}$$

montrant que $\mathscr{M}$ est un invariant de la représentation coadjointe que nous noterons I_1. Sous l'hypothèse de l'existence d'un inverse de $\mathscr{M}$, deux invariants supplémentaires sont donnés par

$$I_2=E-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mathbf{P}\mathscr{M}^{-1}\,{}^t\mathbf{P}) \tag{II.4a}$$

$$I_3=\mathrm{Tr}\{[L-(\mathbf{Q}\mathscr{M}^{-1}\,{}^t\mathbf{P}-\mathbf{P}\mathscr{M}^{-1}\,{}^t\mathbf{Q})^2]^2\} \tag{II.4b}$$

qui correspondent respectivement à l'énergie interne et au moment angulaire interne du système.

Dans ce cas pour décrire les orbites coadjointes on peut choisir $\tilde{\mu}_0=(L_0,0,0,E_0,\mathscr{M})$ comme représentant dans $\mathscr{L}(\tilde{G}_N)$, les composantes du moment s'écrivent alors :

$$\vec{L}=A\vec{L}_0+\sum_{J=1}^{N}j(\vec{c}_J)(\overrightarrow{\mathbf{b}\mathscr{M}})_J \tag{II.5a}$$

$$\mathbf{P}=\mathbf{b}\mathscr{M} \tag{II.5b}$$

$$\mathbf{Q}=(\mathbf{c}-\mathbf{b}\,e)\mathscr{M} \tag{II.5c}$$

$$E=E_0+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mathbf{b}\mathscr{M}\,{}^t\mathbf{b}) \tag{II.5d}$$

Si $\vec{L}_0=0$, le stabilisateur de μ_0 est isomorphe à $SO(3)\otimes\mathbf{R}\otimes S$ et l'orbite est difféomorphe à $\mathbf{R}^{3N}\times\mathbf{R}^{3N}$. On vérifie que la forme de Lagrange associée à cette orbite est donnée par $d\left(\frac{1}{2}\tilde{\mu}_0\circ\tilde{\Theta}\right)$ où $\tilde{\Theta}$ désigne la forme de Maurer-Cartan de $\tilde{G}_N$. Par restriction à l'orbite on obtient la forme symplectique :

$$\sigma_0=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{\mathscr{M}[{}^td\mathbf{b}\wedge d\mathbf{c}-{}^td\mathbf{c}\wedge d\mathbf{b}]\} \tag{II.6}$$

et on posera $\sigma_0=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mathscr{M}\tilde{\eta})$ où $\tilde{\eta}$ est une matrice symétrique de 2-formes fermées. Sur la diagonale de $\tilde{\eta}$ sont installées les formes symplectiques canoniques correspondant à chaque constituant $\mathbf{R}^6$ du système et hors de la diagonale se trouvent des 2-formes faisant de chaque produit $\mathbf{R}^6\times\mathbf{R}^6$ une variété symplectique. La matrice η est non dégénérée en ce sens que contractée avec un vecteur quelconque de $\mathbf{R}^{6\times N}$ il existe toujours un autre vecteur tel que la matrice des valeurs soit non nulle.

Ces propriétés nous suggèrent de désigner $(\mathbf{R}^{6\times N}, \tilde{\eta})$ sous le nom de variété symplectique amplifiée, les dimensions de $\tilde{\eta}$ mémorisant le fait que $\mathbf{R}^{6\times N}$ a été obtenue à partir de la juxtaposition de N copies de $\mathbf{R}^6$. Elle va jouer le rôle d'espace des mouvements amplifié pour le système.

Si $\vec{L}_0 \neq 0$, le stabilisateur de μ_0 est isomorphe à $O(2) \otimes \mathbf{R} \otimes S$, et l'orbite correspondante difféomorphe à $S^2 \times \mathbf{R}^{6N}$ où S^2 est la sphère dans deux dimensions qui s'interprète comme l'espace des mouvements d'un moment angulaire interne. Ceci se traduit par l'addition à la forme de Lagrange donnée par (II.6) d'un terme proportionnel au volume de S^2, à savoir $\mathrm{Tr}[j({}^t\vec{L}_0)\, A^{-1}\, dA \wedge (A^{-1}\, dA)]$.

Revenant au cas de l'orbite sans moment angulaire interne, on peut comparer l'expression (II.6) de la forme de Lagrange qui lui est associée avec la forme de Lagrange (I.1) d'un système de points matériels introduite au départ, on en déduit:

(i) que demander l'invariance sous $\tilde{G}_N$ ne permet de décrire que des systèmes de points matériels libres *i.e.* la forme de Lagrange associée à l'orbite s'identifie avec (I.1) dans laquelle tous les termes de force sont nuls.

(ii) Toute matrice $N \times N$ symétrique peut se décomposer sous la forme $\mathscr{M} = O\, M\, {}^tO$ où $O \in O(N)$ et M est une matrice diagonale, ce faisant et en identifiant $y = (t, X, V)$ avec $(e, \mathbf{c}O, \mathbf{b}\,O)$ on constate que (II.6) donne exactement les termes indépendants des forces dans la forme de Lagrange initiale (I.1) si les éléments (diagonaux) de la matrice M sont interprétés comme étant les masses des constituants du système, les éléments de O s'interprètent alors comme des coefficients d'influence ou de corrélation entre les diverses paires de constituants.

Si certains constituants sont de masse nulle on est amené à étudier le cas où la matrice $\mathscr{M}$ n'est pas inversible. Physiquement cela correspond à des systèmes pour le moins exotiques qui font apparaître plusieurs types d'orbites qui ne seront pas décrites ici, on notera seulement que les invariants font uniquement intervenir les constituants du système qui sont de masse nulle. Par exemple si le système comporte K constituants de masse nulle indexés par $I \in [1, K]$, on a

$$I'_1 = \mathscr{M} \tag{II.7 a}$$

$$I'_2 = \sum_{I=1}^{K} ({}^t\vec{P}_I)\,.\,\vec{P}_I \tag{II.7 b}$$

$$I'_3 = \sum_{I=1}^{K} \{j(\vec{Q}_I)\,\vec{P}_I\}^2. \tag{II.7 c}$$

Dans ce cas on ne peut pas inverser la relation (II.5 *b*) reliant les vitesses aux impulsions.

III. LE GROUPE DE WEYL-HEISENBERG AMPLIFIÉ ET LA VARIÉTÉ QUANTIQUE D'UN SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS

Intéressons nous maintenant au sous groupe W_N de $\tilde{G}_N$ qu'on appellera groupe de Weyl-Heisenberg amplifié, c'est une extension centrale de $\mathbf{R}^{6\times N}$ par le groupe additif S des matrices symétriques:

$$\{0\} \to S \to W_N \to \mathbf{R}^{6\times N} \to \{1\}.$$

Soit $w(V_0, V)$ un élément de W_N où $V_0 \in S$ et $V \in \mathbf{R}^{6N}$ est vu comme une matrice rectangulaire de 6 lignes et N colonnes.

La loi de groupe s'écrit:

$$\text{(III.1)} \quad w(V_0, V)\, w(V'_0, V') = w\left(V_0 + V'_0 + \frac{1}{2}({}^tV' JV - {}^tVJ V'), V + V'\right).$$

et une représentation dans $Gl(6+2N, \mathbf{R})$ est donnée par les matrices de la forme:

$$\text{(III.2)} \qquad w(V_0, V) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_N & -{}^tVJ & X \\ 0 & \mathbf{1}_6 & V \\ 0 & 0 & \mathbf{1}_N \end{pmatrix}$$

où $J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_3 \\ -\mathbf{1}_3 & 0 \end{pmatrix}$ et $X = V_0 - (1/2)\,{}^tVJV$.

L'extension centrale qui définit W_N peut être construite en deux temps de la façon suivante: pour chaque $\mathbf{R}^6$ constituant on réalise l'extension centrale habituelle par $\mathbf{R}$ qui conduit au groupe de Weyl W_1 de dimension 7 (ou plus exactement à son revêtement universel). Ensuite on effectue une extension centrale du produit direct des N copies du groupe de Weyl W_1 attachées à chacun des constituants par un groupe Abélien additif de dimension $\frac{N}{2}(N-1)$ (matrices symétriques avec des zéros sur la diagonale).

Ceci nous suggère de considérer que W_N est construit à partir de N exemplaires de $W_1 \times \mathbf{R}^{N-1}$ où $\mathbf{R}^{N-1}$ sera appelée la « variété de valences » du constituant concerné au sein du système global. On reconstitue alors W_N en identifiant chaque dimension de la « variété de valences » $\mathbf{R}^{N-1}$, relative à un point matériel au sein du système, avec une dimension de valence de l'un de ses $N-1$ partenaires et en saturant ce procédé d'identification par paires de façon à obtenir une variété de dimension $6N + \frac{N}{2}(N+1)$, *i.e.* W_N.

Notons ϑ_0 la composante centrale de la forme de Maurer-Cartan du groupe de Weyl-Heisenberg amplifié

$$\vartheta_0 = dV_0 + \frac{1}{2}\{{}^t\mathrm{V J}\, d\mathrm{V} - {}^t d\mathrm{V J V}\} \tag{III.3}$$

C'est une matrice symétrique de 1-formes qui peuvent être considérées comme les contactisées des formes symplectiques composant la matrice $\tilde{\eta}$; c'est-à-dire que sur la diagonale se trouvent les formes de contact correspondant à chaque groupe de Weyl W_1 et hors de la diagonale des formes de contact bâties sur $(\mathbf{R}^6)\times(\mathbf{R}^6)\times\mathbf{R}_{\mathrm{val}}$ où $\mathbf{R}_{\mathrm{val}}$ désigne la valence connectant les deux constituants $\mathbf{R}^6$ impliqués.

Par construction ϑ_0 est une forme de connexion pour W_N vu comme le fibré principal $\Pi: W_N \to \mathbf{R}^{6N}$.

On remarque que $d\vartheta_0 = \Pi^*({}^t d\mathrm{V} \wedge \mathrm{J}\, d\mathrm{V})$ et on reconnaît dans ${}^t d\mathrm{V} \wedge \mathrm{J}\, d\mathrm{V}$ la 2-forme matricielle $\tilde{\eta}$ définie à partir de (II.6), c'est-à-dire que

$$d\vartheta_0 = \Pi^* \tilde{\eta}. \tag{III.4}$$

On a donc une généralisation naturelle du cas $N=1$ et nous dirons que (W_N, ϑ_0) est la « contactisée de la variété symplectique amplifiée $(\mathbf{R}^{6\times N}, \tilde{\eta})$ ». C'est un revêtement de la version amplifiée de la variété quantique que l'on peut associer au système des N points matériels.

Ce groupe de Weyl-Heisenberg amplifié W_N étant ainsi appelé à jouer un rôle dans la description quantique de ce système nous donnons ses représentations unitaires sur $L^2(\mathbf{R}^{3N})$. La représentation correspondant à $(0, \mathscr{M}) \in \mathscr{L}^*(W_N)$ construite par la méthode des orbites coadjointes à partir de la sous-algèbre abélienne $\mathscr{L}(S) \oplus \mathbf{R}^{3N}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}(U_{\mathscr{M}}(V_0, V)f)(x) &\\ &= \exp\left(i\,\mathrm{Tr}\left\{\mathscr{M}\left(V_0 + {}^t\left(x - \frac{1}{2}V_q\right).V_p\right)\right\}\right) f(x - V_q)\end{aligned} \tag{III.5}$$

où V_p et $V_q \in \mathbf{R}^{3\times N}$ de sorte que $V = \begin{pmatrix} V_p \\ V_q \end{pmatrix}$.

C'est la généralisation de la représentation de Schrödinger du cas $N=1$ et comme dans le cas $N=1$, la présence de la phase montre que c'est improprement que nous avons désigné W_N sous le nom de groupe de Weyl-Heisenberg. En fait W_N est un revêtement du « vrai » groupe de Weyl-Heisenberg amplifié qui, lui, doit faire intervenir des extensions par des cercles des N constituants $\mathbf{R}^6$.

IV. LE GROUPE DE GALILÉE AMPLIFIÉ SOUS-GROUPE DU GROUPE SYMPLECTIQUE

Soit $\mathrm{Sp}(2k, \mathbf{R}) = \{ g \in \mathrm{Gl}(2k, \mathbf{R}) \mid {}^t g \mathscr{I} g = \mathscr{I} \}$ où $\mathscr{I}$ est une matrice $2k \times 2k$, antisymétrique de carré égal à $-\mathbf{1}_{2k}$. Choisissons

$$\mathscr{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{1}_\mathrm{N} \\ \mathbf{0} & \mathrm{J} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1}_\mathrm{N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

On vérifie alors que la matrice $w(\mathrm{V}_0, \mathrm{V})$ représentant un élément du groupe de Weyl-Heisenberg amplifié est aussi une matrice symplectique au sens ci-dessus *i.e.* que $w(\mathrm{V}_0, \mathrm{V}) \in \mathrm{Sp}(2(3+\mathrm{N}), \mathbf{R})$, démontrant que W_N est un sous-groupe de $\mathrm{Sp}(2(3+\mathrm{N}), \mathbf{R})$. Par ailleurs un ouvert de $\mathrm{Sp}(2(3+\mathrm{N}), \mathbf{R})$ est obtenu par la décomposition symétrique suivante :

$$\mathrm{W}_N \times (\mathrm{Gl}(\mathrm{N}, \mathbf{R}) \otimes \mathrm{Sp}(2 \times 3, \mathbf{R})) \times \mathrm{W}_\mathrm{N}^* \subset \mathrm{Sp}(2(3+\mathrm{N}), \mathbf{R})$$

définie par le produit des trois matrices symplectiques :

$$w(\mathrm{V}_0, \mathrm{V}) \begin{pmatrix} {}^t\mathrm{L}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{S} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{L} \end{pmatrix} w^*(\mathrm{U}_0, \mathrm{U}) \tag{IV.1}$$

où $\mathrm{L} \in \mathrm{Gl}(\mathrm{N}, \mathbf{R})$, $\mathrm{S} \in \mathrm{Sp}(6, \mathbf{R})$, et $w^*(\mathrm{U}_0, \mathrm{U}) = \mathscr{I} w(\mathrm{U}_0, -{}^t\mathrm{U}) \mathscr{I}^{-1} \in \mathrm{W}_\mathrm{N}^*$ qui est une seconde copie du groupe de Weyl-Heisenberg amplifié.

Pour apprécier le rôle du groupe symplectique $\mathrm{Sp}(2(3+\mathrm{N}), \mathbf{R})$ par rapport aux structures considérées introduisons le produit semi-direct $\mathrm{W}_\mathrm{N}^\# = \mathrm{W}_\mathrm{N} \underline{\times} \mathrm{Gl}(\mathrm{N}, \mathbf{R})$.

Si on remarque que $\mathrm{Gl}(\mathrm{N}, \mathbf{R})$ peut être vu comme un ouvert dans N copies de $\mathbf{R}^\mathrm{N}$ et en se souvenant que W_N est lui-même construit à partir de N copies de $\mathrm{W}_1 \times \mathbf{R}^{\mathrm{N}-1}$ à travers le procédé d'identification des dimensions de valence défini dans le chapitre III, on peut considérer que $\mathrm{W}_\mathrm{N}^\#$ est en fait construit à partir de N copies de $\mathrm{W}_1 \times \mathbf{R}^{\mathrm{N}-1} \times \mathbf{R}^\mathrm{N}$ de dimension paire égale à $2(3+\mathrm{N})$.

Notons $\vartheta^\#$ la composante centrale dans W_N de la forme de Maurer-Cartan de $\mathrm{W}_\mathrm{N}^\#$. Avec les notations introduites ci-dessus on trouve $\vartheta^\# = {}^t\mathrm{L}\, \vartheta_0\, \mathrm{L}$ où ϑ_0 a été définie en (III.3); c'est une matrice symétrique $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ de 1-formes.

Soit $d\vartheta^\#$ sa dérivée extérieure :

$$d\vartheta^\# = {}^t d\mathrm{L} \wedge \vartheta_0 \mathrm{L} + {}^t\mathrm{L}\, \vartheta_0 \wedge d\mathrm{L} + {}^t\mathrm{L}\, d\vartheta_0 \mathrm{L}. \tag{IV.2}$$

C'est une matrice symétrique de 2-formes qui ne peut être décrite aussi simplement que $\tilde{\eta}$ car la présence de $\mathrm{GL}(\mathrm{N}, \mathbf{R})$ fait que chaque 2-forme composante est construite à partir des N constituants du système. Néanmoins on peut quand même penser à $(\mathrm{W}_\mathrm{N}^\#, d\vartheta^\#)$ comme à une variété symplectique amplifiée car dans le cas $\mathrm{N}=1$ $(\mathrm{W}_1^\#, d\vartheta^\#)$ est une bonne variété symplectique qui est la symplectisée [2] de la variété de contact

(W_1, ϑ_0). De ce fait nous désignerons $(W_N^{\#}, d\vartheta^{\#})$ comme la symplectisée de la variété quantique amplifiée $(W_N, \tilde{\eta})$ définie au chapitre III.

Définissons une action linéaire fractionnelle $\underline{a}$ sur $W_N^{\#}$ de $a \in \mathrm{Sp}(2(3+N), \mathbf{R})$ paramétré par $(V'_0, V', L', S', U'_0, U')$ de la façon suivante:

$$\underline{a}:\quad w^{\#}(V_0, V, L) \to w^{\#}(\hat{V}_0, \hat{V}, \hat{L}) \in W_N^{\#}$$

avec $\hat{V}_0$, $\hat{V}$, $\hat{L}$ définis par

$$\hat{V}_0 = V'_0 + \frac{1}{2}\{[{}^tL'^{-1}X - {}^tV' JS'(J\,{}^tU'X + V)]D^{-1} + \text{transposé}\} \tag{IV.3 a}$$

$$\hat{V} = V' + S'(J\,{}^tU'X + V)D^{-1} \tag{IV.3 b}$$

$$\hat{L} = DL \tag{IV.3 c}$$

où

$$D = L'(Y'X + U'V + \mathbf{1}_N) \qquad \text{et} \qquad Y' = U'_0 + \frac{1}{2}\,{}^tU' JU'.$$

On en déduit une action du même type sur W_N donnée par

$$\underline{a}: w(V_0, V) \to w(\hat{V}_0, \hat{V}) \in W_N.$$

A partir de (IV.3) il est facile de vérifier que seul un sous-groupe de $\mathrm{Sp}(2(3+N), \mathbf{R})$ va être groupe d'automorphismes pour $\vartheta^{\#}$: c'est le sous-groupe $W_N \underline{\times} (\mathrm{Gl}(N, \mathbf{R}) \otimes \mathrm{Sp}(6, \mathbf{R}))$ engendré par les éléments $a_0 = (V_0', V', L', S', 0, 0)$ pour lesquels $\underline{a}_0^*(\vartheta^{\#}) = \vartheta^{\#}$.

Au niveau de W_N on constate que l'action sur la forme quantique ϑ_0 s'écrit:

$$\underline{a}_0^*(\vartheta_0) = {}^tL'^{-1}\,\vartheta_0\,L'^{-1}.$$

A travers les relations (IV.3) il est clair que ce n'est pas le groupe $W_N \underline{\times} (\mathrm{Gl}(N, \mathbf{R}) \otimes \mathrm{Sp}(6, \mathbf{R}))$ qui va agir au niveau de la variété symplectique amplifiée $(\mathbf{R}^{6N}, \tilde{\eta})$ mais seulement la contraction correspondant au produit semi-direct $\mathbf{R}^{6N} \underline{\times} (\mathrm{Gl}(N, \mathbf{R}) \otimes \mathrm{Sp}(6, \mathbf{R}))$ qui agit de la façon suivante sur $\mathbf{R}^{6N}$:

$$\underline{a}_c(V) = V' + S'VL'^{-1}$$

et selon

$$\underline{a}_c^*(\tilde{\eta}) = {}^tL'^{-1}\,\tilde{\eta}\,L'^{-1}$$

sur la forme symplectique. On a donc une généralisation de la notion de transformation symplecto-conforme où la dilatation est remplacée par le groupe $\mathrm{Gl}(N, \mathbf{R})$, les éléments L' ne dépendant évidemment pas du point concerné de $\tilde{\eta}$.

Remarques:

– Le groupe $\mathrm{Sp}(6, \mathbf{R})$ qui apparaît ici est celui qui est utilisé dans les modèles nucléaires collectifs [3].

— Le groupe $\mathbf{R}^{6N} \underline{\times} (\mathrm{Gl}(N, \mathbf{R}) \otimes \mathrm{Sp}(6, \mathbf{R}))$ apparaît aussi dans la littérature en tant que groupe structurel du fibré des repères sur une variété de Poisson de dimension $N+6$ et de rang constant égal à 6.

V. LE GROUPE DE GALILÉE HOMOGÈNE AMPLIFIÉ ET L'ESPACE DE CONFIGURATION-TEMPS D'UN ENSEMBLE DE N POINTS MATÉRIELS

Un sous-groupe de G_N qui va jouer un rôle essentiel dans la construction de l'espace de configuration-temps pour un système de N points matériels est le groupe de Galilée homogène amplifié noté H_N et engendré par les matrices de la forme

$$(V.1) \qquad \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ 0 & \mathbf{1}_N \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A \in SO(3) \quad \text{et} \quad \mathbf{b} \in \mathbf{R}^{3 \times N}.$$

Ainsi G_N peut s'écrire sous forme du produit semi-direct $H_N \underline{\times} (\mathbf{R}^{3 \times N} \otimes \mathbf{R})$ et un élément du quotient $\mathscr{Z} := G_N/H_N$ est représenté par un bloc

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ e\,\mathbf{1}_N \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \mathbf{c} \in \mathbf{R}^{3 \times N} \quad \text{et} \quad e \in \mathbf{R}.$$

Dans le cas habituel qui correspond à $N=1$ le groupe de Galilée homogène s'interprète naturellement comme le fibré des repères sur l'espace-temps Newtonien quadridimensionnel. Dans le cas présent H_N apparaît naturellement comme un sous-groupe de $\mathrm{Gl}(3+N, R)$ alors que le quotient G_N/H_N est de dimension $3N+1$. A cause de cette différence de dimensions (pour $N \neq 1$) l'interprétation géométrique du groupe de Galilée ne peut pas être généralisée de façon immédiate au cas du groupe de Galilée amplifié, nous proposons donc de faire la construction suivante:

$\mathscr{Z}$ peut être vu comme plongé dans $\mathbf{R}^{(3+N)N}$ dont tout élément peut être réalisé par la juxtaposition de N colonnes notée $[z_1, z_2 \ldots z_N]$ où $z_j \in \mathbf{R}^{3+N}$, $(J \in [1, N])$, à travers l'identification:

$$z_J^\alpha = c_J^\alpha \qquad \text{pour} \quad \alpha \in [1, 3]$$

et

$$z_J^\alpha = e\,\delta_{3+J}^\alpha \qquad \text{pour} \quad \alpha \in [3+1, 3+N],$$

α numérotant les composantes dans la base canonique de chacun des N constituants $\mathbf{R}^{3+N}$ distingués par l'indice J.

On désignera par π le plongement de $\mathscr{Z}$ dans $(\mathbf{R}^{3+N})^N$. Inversement $(\mathbf{R}^{3+N})^N$ se projette canoniquement sur chaque copie de $\mathbf{R}^{3+N}$ et on notera p_J la projection sur la copie indicée par J.

Pour chaque constituant, par exemple celui repéré par J, on va construire le fibré des repères Galiléens amplifiés, c'est-à-dire la G-structure $H_N(\mathbf{R}^{N+3})$. Celle-ci possède une structure de groupe qu'on peut qualifier de groupe de Galilée à N translations temporelles indépendantes (paramétrées par ε), puisqu'un élément peut être représenté par la matrice :

$$(V.2)\qquad \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} & \vec{c}_J \\ 0 & \mathbf{1}_N & \varepsilon_J \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{où} \quad \vec{c}_J \in \mathbf{R}^3 \quad \text{et} \quad \varepsilon_J \in \mathbf{R}^N.$$

La forme de soudure de $H_N((\mathbf{R}^{N+3})_J)$ est construite à partir des composantes à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^N)$ de la forme de Maurer-Cartan, qu'on écrit sous la forme :

$$(V.3)\qquad \vartheta_J = \begin{pmatrix} \vec{\theta}_J \\ \Theta_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1}(\overrightarrow{dc}_J - \overrightarrow{\mathbf{b}\, d\varepsilon_J}) \\ d\varepsilon_J \end{pmatrix}.$$

Le repère mobile obtenu par dualité est noté $(\underline{e}_J\, E_J)$ où $\underline{e}_J$ est une ligne à 3 composantes et E_J une ligne à N composantes. H_N agit à droite sur $(\underline{e}_J\, E_J)$ suivant $(\underline{e}_J\, E_J) \to (\underline{e}_J\, A\ \underline{e}_J\, \mathbf{b} + E_J)$ et on montre que cette action laisse invariant le champ de tenseurs 2-contravariants symétriques de signature $(+ + + 0 \ldots 0)$ (où figurent N zéros) défini par

$$(V.4)\qquad \gamma_J = \sum_{a=1}^{3} \delta^{ab}\, e_a^J \otimes e_b^J$$

ainsi que la 1-forme vectorielle $\psi_J \equiv \Theta_J$ qui engendre le noyau de γ_J.

Les composantes à valeurs dans $\mathscr{L}(H_N)$ de la forme de Maurer-Cartan définissent une forme de connexion (φ, Φ) pour $H_N((\mathbf{R}^{N+3})_J)$, où $\varphi = A^{-1}\, dA$ est la composante $\mathscr{L}(0(3))$-valuée et $\Phi = A^{-1}\, d\mathbf{b}$ la composante $\mathscr{L}(\mathbf{R}^{3N})$-valuée. On vérifie que cette connexion transporte parallèlement les quantités γ et Ψ c'est-à-dire que

$$(V.5)\qquad \nabla\psi = 0 \qquad \text{et} \qquad \nabla\gamma = 0.$$

On peut donc dire que $(\mathbf{R}^{3+N}, \gamma, \psi, \nabla)_J$ définit un espace de configuration-multi-temps pour le constituant numéro J au sein du système qu'on peut aussi qualifier de variété galiléenne amplifiée munie d'une connexion « newtonienne ».

Considérons ensuite les N images réciproques par p_J sur $(\mathbf{R}^{3+N})^N$ de chaque $H_N((\mathbf{R}^{N+3})_J)$ et identifions les. Se trouve ainsi défini un fibré principal $\mathscr{H}$ de groupe structurel H_N sur $(\mathbf{R}^{3+N})^N$. La juxtaposition des images réciproques des formes de soudure de chacun des constituants définit une forme de soudure pour ce fibré donnée par :

$$(V.6)\qquad \vartheta \equiv \begin{pmatrix} \theta \\ \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^* \vec{\theta}_1 & p_2^* \vec{\theta}_2 & \ldots & p_N^* \vec{\theta}_N \\ p_1^* \Theta_1 & p_2^* \Theta_2 & \ldots & p_N^* \Theta_N \end{pmatrix}.$$

Par construction $\mathscr{H}$ se trouve donc aussi muni d'une connexion dont la 1-forme est toujours donnée par le couple (φ, Φ). Le groupe de Galilée amplifié G_N s'identifie alors avec l'image réciproque par π sur $\mathscr{Z}$ de ce fibré principal: c'est-à-dire que $\pi^*(\vartheta)$ s'identifie avec les composantes à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathbf{R}^{3N} \times \mathbf{R})$ de la forme de Maurer-Cartan de G_N. En ce sens G_N peut donc être considéré comme le fibré des repères galiléens amplifiés sur $\mathscr{Z}$.

Nous savons d'autre part que le groupe de Galilée peut jouer le rôle d'espace d'évolution pour une particule d'épreuve [4]. Qu'en est-il pour le groupe de Galilée amplifié? Sur $\mathscr{H}$ introduisons la matrice symétrique $N \times N$ de 2-formes ${}^t\Phi \wedge \theta - {}^t\theta \wedge \Phi$ dont un élément est donné par ${}^t(\mathbf{b}\, d\varepsilon_J - d\vec{c}_J) \wedge d\vec{b}_K - {}^t d\vec{b}_J \wedge (\mathbf{b}\, d\varepsilon_K - d\vec{c}_K)$. Considérons en l'image réciproque sur G_N que nous notons $\eta = \pi^*({}^t\Phi \wedge \theta - {}^t\theta \wedge \Phi)$ et dont un élément est donné par ${}^t(\vec{b}_J\, de - d\vec{c}_J) \wedge d\vec{b}_K - {}^t d\vec{b}_J \wedge (\vec{b}_K\, de - d\vec{c}_K)$. C'est une matrice de 2-formes fermées qui va faire de (G_N, η) un espace d'évolution amplifié car en quotientant par les noyaux respectifs des diverses composantes on retrouve la matrice symplectique $\tilde{\eta}$ de l'espace des mouvements amplifié définie au chapitre II.

VI. VERS UNE VERSION AMPLIFIÉE DE LA GÉOMÉTRIE CHRONOPROJECTIVE

Dans le chapitre IV nous avons utilisé une décomposition symétrique du groupe symplectique $\mathrm{Sp}(2(3+N), \mathbf{R})$ qui, en réduisant W_N^* à l'identité, a fait apparaître naturellement le sous-groupe $W_N \underline{\times} (\mathrm{Gl}(N, \mathbf{R}) \otimes \mathrm{Sp}(6, \mathbf{R}))$. Dans celui-ci il est aussi intéressant d'exhiber le sous-groupe isomorphe à $W_N \underline{\times} (\mathrm{Sl}(2, \mathbf{R}) \otimes \mathrm{O}(3))$ que nous définirons comme l'extension centrale du groupe de Schrödinger amplifié $\widetilde{\mathrm{Sch}}_N$, elle-même contenant $\tilde{G}_N$ en tant que sous-groupe. Pour le vérifier il suffit de remarquer que $\mathrm{Sp}(6, \mathbf{R})$ contient le sous-groupe $\mathrm{Sl}(2, \mathbf{R}) \otimes \mathrm{O}(3)$ dont une représentation matricielle 6×6 est donnée par

$$
\begin{pmatrix} g\mathrm{A} & -f\mathrm{A} \\ -e\mathrm{A} & d\mathrm{A} \end{pmatrix} \tag{VI.1}
$$

où $\mathrm{A} \in \mathrm{O}(3)$ et $d, e, f, g \in \mathbf{R}$ tels que $dg - ef = 1$. Pour retrouver le groupe $\tilde{G}_N$ paramétré de la même façon que dans II il suffit de faire $f = 0$, $d = g = 1$, $V_p = g\mathbf{b} - f\mathbf{c}$ et $V_q = d\mathbf{c} - e\mathbf{b}$ dans la paramétrisation de $W_N \underline{\times} (\mathrm{Sl}(2, \mathbf{R}) \otimes \mathrm{O}(3))$.

Par contraction de $W_N \underline{\times} (\mathrm{Sl}(2, \mathbf{R}) \otimes \mathrm{Sp}(6, \mathbf{R}))$ on obtient $(\mathbf{R}^6)_N \underline{\times} (\mathrm{Sl}(2, \mathbf{R}) \otimes \mathrm{Sp}(6, \mathbf{R}))$ qui contient les formes non-étendues Sch_N et

G_N de $\widetilde{Sch}_N$ et $\tilde{G}_N$ respectivement. Une représentation de Sch_N en dimension $3+2N$ est obtenue en complétant la représentation de G_N donnée en (I.5 *a*) de la façon suivante:

$$\text{(VI.2)} \qquad \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ 0 & d\mathbf{1}_N & e\mathbf{1}_N \\ 0 & f\mathbf{1}_N & g\mathbf{1}_N \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad dg-ef=1.$$

Dans le cas $N=1$ en relâchant la contrainte sur le déterminant on obtient le groupe chronoprojectif Chr, qui avec le sous-groupe privilégié engendré par $(A, \vec{b}, d, f, g)$ est à l'origine de la géométrie conforme galiléenne appelée géométrie chronoprojective [5].

Qu'en est-il dans le cas amplifié?

On retrouve les difficultés dues à la différence de dimensions entre $3N+1$ et $N+3$ déjà rencontrées et évoquées au début du chapitre V.

Dans $Gl(N+3, \mathbf{R})$ on a une représentation non-fidèle du sous-groupe L de G_N engendré par $(A, \mathbf{b}, d, g, f)$ donnée par les matrices

$$g^{-1}\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ 0 & d\mathbf{1}_N \end{pmatrix}.$$

Elles définissent le groupe galiléen conforme $CH_N \approx H_N \underline{\times} (\mathring{\mathbf{R}} \times \mathring{\mathbf{R}})$ qui contient deux dilatations et que par analogie avec le cas $N=1$ nous désignerons sous le nom de « sous-groupe d'isotropie » de L. On peut donc définir une G-structure $CH_N(\mathbf{R}^{N+3})$ qui sera le fibré des repères galiléens conformes. L'action de CH_N sur les repères s'écrit
$(\underline{e}_J E_J) \to (\underline{e}_J g^{-1} A\, \underline{e}_J g^{-1} \mathbf{b} + E_J d)$. On peut en déduire l'action sur γ et ψ qui est donnée par

$$\gamma \to g^{-2}\gamma \qquad \text{et} \qquad \psi \to d^{-1} g \psi.$$

Ces remarques jettent les bases de la construction d'une géométrie conforme Galiléenne ou géométrie chronoprojective dans le cas amplifié.

CONCLUSION

Tout au long de cet article nous avons présenté divers groupes de Lie matriciels qui sont des versions dites amplifiées des groupes standard qui sont à la base du développement de la théorie des systèmes dynamiques classiques et quantiques, à savoir le groupe de Galilée et son extension centrale, le groupe de Galilée homogène, le groupe de Weyl-Heisenberg, et leur rapport avec le groupe symplectique. Nous avons également construit les formes amplifiées des espaces qui leur sont naturellement associés: espace de configuration-temps, espace des mouvements, espace d'évolution, fibré préquantique. Pour finir nous nous sommes intéressés au groupe de Schrödinger et au groupe chronoprojectif qui devraient permettre de développer une géométrie conforme sur la version Newtonienne amplifiée de l'espace de configuration-temps.

Mais ce travail ne constitue en fait qu'une première étape et il reste à effectuer « sous forme amplifiée » la démarche standard qui consiste à remplacer les groupes qui s'interprètent comme des fibrés principaux sur des espaces numériques par des fibrés de repères sur des variétés appropriées. Les courbures alors introduites fourniront le support nécessaire pour espérer géométriser la notion d'interaction mutuelle à travers des champs extérieurs dépendant explicitement du temps.

RÉFÉRENCES

[1] J. M. SOURIAU, *Structures des systèmes dynamiques*, Dunod Université, Paris, 1970.
[2] V. ARNOLD, *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*, éditions Mir, Moscou, 1976.
[3] V. GUILLEMIN et S. STERNBERG, *Symplectic Techniques in Physics*, Cambridge University Press, 1984.
[4] C. DUVAL et H. P. KUNZLE, *Reports on Mathematical Physics*, vol. **13**, 1978, p. 351-368.
[5] G. BURDET, C. DUVAL et M. PERRIN, *J. Math. Phys.*, vol. **24**, 1983, p. 1752-1760; Publications of the Research Institute for Mathematical Science (Kyoto University), vol. **19**, 1983, p. 813-840; *Class. Quantum Gravity*, vol. **3**, 1986, p. 461-480.

(*Manuscrit reçu le* 18 *décembre* 1989.)