Annales de l'I. H. P., section A

R. Aminou
Y. Kosmann-Schwarzbach

Bigèbres de Lie, doubles et carrés

Annales de l'I. H. P., section A, tome 49, nº 4 (1988), p. 461-478
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1988__49_4_461_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 49, n° 4, 1988, p. 461-478. *Physique théorique*

Bigèbres de Lie, doubles et carrés

par

R. AMINOU et Y. KOSMANN-SCHWARZBACH
UFR de Mathématiques et UA au CNRS 751, Université de Lille I,
F-59655 Villeneuve d'Ascq

RÉSUMÉ. — A toute bigèbre de Lie quasitriangulaire correspond une algèbre de Lie-Semenov Tian Shansky (en abrégé, algèbre de Lie-Semenov) et réciproquement. Le double d'une bigèbre de Lie quasitriangulaire et le carré de l'algèbre de Lie-Semenov associée se correspondent, à un anti-isomorphisme près.

ABSTRACT. — To each quasitriangular Lie bigebra there corresponds a Lie-Semenov Tian Shansky algebra (henceforth, Lie-Semenov algebra) and conversely. The double of a quasitriangular Lie bigebra and the square of the associated Lie-Semenov algebra correspond to one another, up to an anti-isomorphism.

INTRODUCTION

Nous présentons une étude des doubles de bigèbres de Lie quasitriangulaires et des carrés des algèbres de Lie-Semenov Tian Shansky (en abrégé, algèbres de Lie-Semenov) et nous comparons ces deux constructions.

Parmi les bigèbres de Lie exactes, les *bigèbres de Lie quasitriangulaires* jouent un rôle particulier. Cette notion a d'abord été introduite par Drinfel'd [*3*]. Récemment Magri et Kosmann-Schwarzbach [*4*] ont montré que les potentiels quasitriangulaires sont les potentiels dont la partie symétrique est ad-invariante et inversible et dont la courbure de Schouten est nulle. (Remarquons que la définition adoptée dans [*4*] diffère un peu de celle de Drinfel'd car celui-ci ne suppose pas la partie symétrique inversible.) De là on déduit facilement que, si $r = a + s$ est la décomposition d'un potentiel quasitriangulaire en parties antisymétrique et symétrique, $R = a \circ s^{-1}$ est une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée [5], [6], [7], [1], antisymétrique par rapport à la forme bilinéaire symétrique ad-invariante définie par s. On voit alors *qu'à toute bigèbre de Lie quasitriangulaire correspond une algèbre de Lie-Semenov et réciproquement.*

Nous exposons d'abord (paragraphe 1) la structure de bigèbre de Lie quasitriangulaire naturellement définie [3] sur le *double d'une bigèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ quelconque, c'est-à-dire sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ muni de la structure bicroisée d'algèbre de Lie (dual twilled extension) [4], et nous en donnons deux exemples simples. Puis nous montrons (paragraphe 2) qu'avec un choix adéquat de la définition des *morphismes d'algèbres de Lie-Semenov*, la correspondance entre bigèbres de Lie quasitriangulaires et algèbres de Lie-Semenov devient une équivalence de catégories. Après avoir précisé (paragraphe 3) la structure du double dans le cas où la bigèbre de départ est quasitriangulaire, et rappelé (paragraphe 4) la notion de *carré* [6] *d'une algèbre de Lie-Semenov*, nous faisons au paragraphe 5 la *comparaison des doubles et des carrés.* Si $\mathfrak{g}$ est une bigèbre de Lie quasitriangulaire, son double d'une part, et la bigèbre de Lie quasitriangulaire associée à $\mathfrak{g}$ d'autre de Lie-Semenov carré de l'algèbre de Lie-Semenov associée à $\mathfrak{g}$ d'autre part se correspondent dans un *anti-isomorphisme* que nous explicitons.

Les structures analogues sur les groupes de Lie associés feront l'objet d'une étude ultérieure.

1. **Double d'une bigèbre de Lie.**

1.1. Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ deux espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie, en dualité séparante. On peut donc identifier $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}^*$. On notera $\langle\ ,\ \rangle$ cette dualité. On suppose que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, dont le crochet de Lie est noté $[\ ,\ ]$.

Par définition, l'application linéaire $\mathrm{ad}^* : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{h})$ vérifie

$$\langle \mathrm{ad}^*_x \xi, y \rangle = - \langle \xi, [x, y] \rangle, \qquad \forall \xi \in \mathfrak{h}, \qquad \forall x \in \mathfrak{g}, \qquad \forall y \in \mathfrak{g}.$$

Soit $\varepsilon : \mathfrak{g} \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ un 1-*cocycle jacobien* [4] défini sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$. Alors, par définition, ${}^t\varepsilon$ s'identifie à une application linéaire de $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{h}$ et $[\xi, \eta]_\varepsilon = {}^t\varepsilon(\xi \otimes \eta)$ est un crochet d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{h}$, encore noté $[\xi, \eta]$ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, et $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \varepsilon)$ est une *bigèbre de Lie* [2], [3], [4].

1.2. Si le 1-cocycle jacobien ε est *exact*, on dit qu'il définit une *bigèbre de Lie exacte.* Si $\varepsilon = \delta r$, où $r \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$, on posera comme dans [4],

$$[\ ,\ ]_\varepsilon = [\ ,\ ]_{\delta r} = [\ ,\ ]^r$$

et l'on dira que r est un *potentiel jacobien.*

Rappelons que, par définition [4], la *courbure de Schouten* K^r d'une application linéaire r de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, dont la partie symétrique s est ad-invariante et inversible, est l'application bilinéaire antisymétrique de $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ définie par

$$K^r(\xi, \eta) = r\left(\mathrm{ad}^*_{r\xi}\eta - \mathrm{ad}^*_{r\eta}\xi\right) - [r\xi, r\eta] + r[\xi, \eta]_s,$$

où $[\xi, \eta]_s = -2s^{-1}[s\xi, s\eta] = -2\,\mathrm{ad}^*_{s\xi}\eta = \mathrm{ad}^*_{s\eta}\xi - \mathrm{ad}^*_{s\xi}\eta$, pour $\xi \in \mathfrak{h}$, $\eta \in \mathfrak{h}$. La courbure de Schouten de r, s'écrit encore

$$K^r(\xi, \eta) = -r\left(\mathrm{ad}^*_{r\xi}\eta + \mathrm{ad}^*_{r\eta}\xi\right) - [r\xi, r\eta].$$

Un *potentiel quasitriangulaire* sur $\mathfrak{g}$ est, par définition [4], un élément r de $\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ tel que

i) la partie symétrique s de r est ad-invariante et inversible, et

ii) la courbure de Schouten K^r de r est nulle.

On sait [4] que tout potentiel quasitriangulaire est jacobien. Une *bigèbre de Lie quasitriangulaire* est, par définition, une bigèbre de Lie exacte définie par un potentiel quasitriangulaire. Cette notion a d'abord été introduite par Drinfel'd [3], mais notre définition diffère légèrement de la sienne où la partie symétrique de r n'est pas supposée inversible.

1.3. La *structure bicroisée d'algèbre de Lie* sur $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ est donnée par

(1.1) $$[(x_1, \xi_1), (x_2, \xi_2)]_{\mathfrak{k}} = \left([x_1, x_2] + \mathrm{ad}^*_{\xi_1} x_2 - \mathrm{ad}^*_{\xi_2} x_1,\ [\xi_1, \xi_2] + \mathrm{ad}^*_{x_1}\xi_2 - \mathrm{ad}^*_{x_2}\xi_1\right),$$

où $\langle \mathrm{ad}^*_\xi x, \eta \rangle = -\langle x, [\xi, \eta] \rangle$.

1.4. Déterminons $\mathrm{ad}^*_{(0,\xi)}$ et $\mathrm{ad}^*_{(x,0)}$ pour $\xi \in \mathfrak{h}$ et $x \in \mathfrak{g}$.
Soient $(z, \zeta) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ et $(\eta, y) \in \mathfrak{h} \times \mathfrak{g}$. On a

$$[(0, \xi), (z, \zeta)]_{\mathfrak{k}} = \left(\mathrm{ad}^*_\xi z,\ [\xi, \zeta] - \mathrm{ad}^*_z \xi\right),$$

d'où

$$\begin{aligned}\langle (\eta, y), [(0, \xi), (z, \zeta)]_{\mathfrak{k}} \rangle &= \langle \eta, \mathrm{ad}^*_\xi z \rangle + \langle [\xi, \zeta] - \mathrm{ad}^*_z \xi, y \rangle \\ &= -\langle [\xi, \eta], z \rangle - \langle \zeta, \mathrm{ad}^*_\xi y \rangle + \langle \mathrm{ad}^*_y \xi, z \rangle.\end{aligned}$$

Or $\langle \mathrm{ad}^*_{(0,\xi)}(\eta, y), (z, \zeta) \rangle = -\langle (\eta, y), [(0, \xi), (z, \zeta)]_{\mathfrak{k}} \rangle$. D'où

(1.2) $$\mathrm{ad}^*_{(0,\xi)}(\eta, y) = \left([\xi, \eta] - \mathrm{ad}^*_y \xi, \mathrm{ad}^*_\xi y\right).$$

On montre de la même manière que

(1.3) $$\mathrm{ad}^*_{(x,0)}(\eta, y) = \left(\mathrm{ad}^*_x \eta,\ [x, y] - \mathrm{ad}^*_\eta x\right).$$

1.5. Considérons l'algèbre de Lie $(\mathfrak{k}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{k}})$ et l'application linéaire $m : \mathfrak{k}^* \to \mathfrak{k}$ définie par $m(\xi, x) = (x, 0)$.

Notons A la partie antisymétrique de m et S sa partie symétrique. On a alors :

$$\mathrm{S}(\xi, x) = \frac{1}{2}(x, \xi),$$

$$\mathrm{A}(\xi, x) = \frac{1}{2}(x, -\xi).$$

S est inversible et invariant et $(2\mathrm{S})^{-1}$ est l'isomorphisme induit par la forme bilinéaire symétrique inversible naturelle sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ définie par la dualité.

PROPOSITION 1.1. — $(\mathfrak{k}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{k}}, \delta m)$ est une bigèbre de Lie quasitriangulaire.

Démonstration. — Montrons en effet que $\mathrm{K}^m = 0$, où K^m désigne la courbure de Schouten de m. Par définition,

$$\mathrm{K}^m((\xi, x), (\eta, y)) = m\left(\mathrm{ad}^*_{m(\xi,x)}(\eta, y) - \mathrm{ad}^*_{m(\eta,y)}(\xi, x)\right) - [m(\xi, x), m(\eta, y)]_{\mathfrak{k}} + m([(\xi, x), (\eta, y)]_{\mathrm{S}}),$$

où

$$[(\xi, x), (\eta, y)]_{\mathrm{S}} = \mathrm{ad}^*_{\mathrm{S}(\eta,y)}(\xi, x) - \mathrm{ad}^*_{\mathrm{S}(\xi,x)}(\eta, y).$$

D'où

$$\mathrm{K}^m((\xi, x), (\eta, y)) = -m\left(\mathrm{ad}^*_{{}^t m(\xi,x)}(\eta, y) + \mathrm{ad}^*_{m(n,y)}(\xi, x)\right) - [m(\xi, x), m(\eta, y)]_{\mathfrak{k}}.$$

D'une part,

$$[m(\xi, x), m(\eta, y)]_{\mathfrak{k}} = [(x, 0), (y, 0)]_{\mathfrak{k}} = ([x, y], 0).$$

D'autre part,

$$\mathrm{ad}_{{}^t m(\xi,x)}(\eta, y) = \mathrm{ad}^*_{(0,\xi)}(\eta, y) = ([\xi, \eta] - \mathrm{ad}^*_y \xi, \mathrm{ad}^*_\xi y),$$

d'où

$$m\left(\mathrm{ad}^*_{{}^t m(\xi,x)}(\eta, y)\right) = \left(\mathrm{ad}^*_\xi y, 0\right).$$

Enfin,

$$\mathrm{ad}^*_{m(\eta,y)}(\xi, x) = \mathrm{ad}^*_{(y,0)}(\xi, x) = \left(\mathrm{ad}^*_y \xi, [y, x] - \mathrm{ad}^*_\xi y\right),$$

d'où

$$m\left(\mathrm{ad}^*_{m(\eta,y)}(\xi, x)\right) = \left([y, x] - \mathrm{ad}^*_\xi y, 0\right).$$

On obtient donc $\mathrm{K}^m = 0$.

DÉFINITION 1.1. — On dit que la bigèbre de Lie quasitriangulaire $(\mathfrak{k}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{k}}, \delta m)$ est le *double* de la bigèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \varepsilon)$.

On a donc montré qu'à toute structure de bigèbre de Lie sur $\mathfrak{g}$ est associée canoniquement une structure de bigèbre de Lie quasitriangulaire (en particulier exacte) sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$. Explicitons la structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{k}^*$. On sait ([*4*], (2.11)) qu'elle est alors définie par

$$[(\xi, x), (\eta, y)]^m = \mathrm{ad}^*_{\mathrm{A}(\eta,y)}(\xi, x) - \mathrm{ad}^*_{\mathrm{A}(\xi,x)}(\eta, y), \tag{1.4}$$

où $A : \mathfrak{k}^* \to \mathfrak{k}$ est la partie antisymétrique de m,

$$A(\xi, x) = \frac{1}{2}(x, -\xi).$$

Par définition, $\mathrm{ad}^*_{A(\eta,y)}(\xi, x) = \frac{1}{2}(\mathrm{ad}^*_{(y,0)}(\xi, x) - \mathrm{ad}^*_{(0,\eta)}(\xi, x))$, donc d'après (1.2) et (1.3),

$$\mathrm{ad}^*_{A(\eta,y)}(\xi, x) = \frac{1}{2}(-[\eta, \xi] + \mathrm{ad}^*_y \xi + \mathrm{ad}^*_x \eta, [y, x] - \mathrm{ad}^*_\xi y - \mathrm{ad}^*_\eta x).$$

D'où

$$[(\xi, x), (\eta, y)]^m = ([\xi, \eta]_\varepsilon, - [x, y]). \tag{1.5}$$

Ainsi ($\mathfrak{k}^*$, [, $]^m$) est le *produit direct* de ($\mathfrak{h}$, [, $]_\varepsilon$) et de l'algèbre de Lie opposée à $\mathfrak{g}$.

1.6. *Exemples.*

1) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle (resp. complexe) de dimension 2, de base $\{ e_1, e_2 \}$, dont le crochet de Lie est donné par

$$[e_1, e_2] = \alpha e_2, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \text{ (resp. } \mathbb{C}).$$

Soit $\beta \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). On considère le 1-cocycle $B : \mathfrak{g} \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g})$ défini par

$$B(e_1) = 0, \qquad B(e_2) = \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce cocycle est un 1-cocycle jacobien (non exact si $\beta \neq 0$) et la structure d'algèbre de Lie qu'il définit sur $\mathfrak{g}^*$ est donnée par

$$[e_1^*, e_2^*]_B = \beta e_2^*,$$

et ($\mathfrak{g}$, [,], B) est une bigèbre de Lie.

La structure bicroisée d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ est définie par la formule (1.1). On notera simplement x (resp. ξ) l'élément $(x, 0)$ (resp. $(0, \xi)$) de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$.

On obtient

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2]_{\mathfrak{k}} &= \alpha e_2, \\
[e_1, e_1^*]_{\mathfrak{k}} &= 0, \\
[e_1, e_2^*]_{\mathfrak{k}} &= -\alpha e_2^*, \\
[e_2, e_1^*]_{\mathfrak{k}} &= \beta e_2, \\
[e_2, e_2^*]_{\mathfrak{k}} &= -\beta e_1 + \alpha e_1^*, \\
[e_1^*, e_2^*]_{\mathfrak{k}} &= \beta e_2^*,
\end{aligned}$$

Si $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ (resp. $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$), on obtient le produit semi-direct de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{g}^*$) par l'idéal abélien $\mathfrak{g}^*$ (resp. $\mathfrak{g}$) défini par l'action coadjointe de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}^*$ (resp. de $\mathfrak{g}^*$ sur $\mathfrak{g}$).

Supposons $\alpha\beta \neq 0$. Alors on pose $e = \beta e_1 + \alpha e_1^*$, $e' = \beta e_1 - \alpha e_1^*$; on vérifie que

$$\mathrm{ad}_e = 0$$
$$[e', e_2] = 2\alpha\beta e_2, \qquad [e', e_2^*] = -2\alpha\beta e_2^*$$
$$[e_2, e_2^*] = -e'.$$

On en déduit que $\mathfrak{k}$ est somme directe de l'idéal abélien engendré par e et de l'algèbre de Lie simple de dimension 3 engendrée par e', e_2, e_2^* qui est isomorphe à $\mathrm{sl}(2, \mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$) dans le cas réel (resp. complexe) par l'isomorphisme

$$e' \to \alpha\beta \mathrm{H}, \qquad e_2 \to \alpha \mathrm{X}^+, \qquad e_2^* \to -\beta \mathrm{X}^-.$$

Soit $(\mathfrak{k}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{k}}, \delta m)$, où $m : \mathfrak{k}^* \to \mathfrak{k}$ est définie par $m(\xi, x) = (x, 0)$, la bigèbre double de $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \mathrm{B})$. La structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{k}^*$ est le produit direct de la structure de $\mathfrak{g}^*$ et de la structure opposée de $\mathfrak{g}$. Ainsi,

$$[e_1^*, e_2^*]^m = \beta e_2^*, \qquad [e_1, e_2]^m = -\alpha e_2,$$

les autres crochets étant nuls.

2) Soit l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ avec la base

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{X}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{X}^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminons les potentiels jacobiens sur $\mathfrak{g}$. On montre d'abord que toute application linéaire symétrique $s : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$ ad-invariante est proportionnelle à la forme de Killing. Donc la matrice de s dans la base $\mathrm{H}, \mathrm{X}^+, \mathrm{X}^-$ et la base duale est proportionnelle à

$$s_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit alors $a : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$ une application linéaire antisymétrique de matrice

$$a = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $[a, a]$ est ad-invariant, pour tout choix de α, β, γ dans $\mathbb{C}$. Donc le *potentiel jacobien* le plus général sur $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ a pour matrice

$$r = \begin{pmatrix} \varkappa & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & 2\varkappa - \gamma \\ \beta & 2\varkappa + \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

où α, β, γ, $\varkappa \in \mathbb{C}$.

La structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}^*$ est donnée par

$$[\xi, \eta]^r = \mathrm{ad}^*_{a(\eta)}\, \xi - \mathrm{ad}^*_{a(\xi)}\, \eta\,.$$

Des relations,

$$a(\mathrm{H}^*) = \alpha\mathrm{X}^+ + \beta\mathrm{X}^-, \quad a(\mathrm{X}^{+*}) = -\alpha\mathrm{H} + \gamma\mathrm{X}^-, \quad a(\mathrm{X}^{-*}) = -\beta\mathrm{H} - \gamma\mathrm{X}^+\,,$$

on obtient

$$[\mathrm{H}^*, \mathrm{X}^{+*}]^r = -2\alpha\mathrm{H}^* + \gamma\mathrm{X}^{+*}$$
$$[\mathrm{H}^*, \mathrm{X}^{-*}]^r = 2\beta\mathrm{H}^* + \gamma\mathrm{X}^{-*}$$
$$[\mathrm{X}^{+*}, \mathrm{X}^{-*}]^r = 2\beta\mathrm{X}^{+*} + 2\alpha\mathrm{X}^{-*}\,.$$

Déterminons le crochet d'algèbre de Lie de $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$. On a

$$\mathrm{ad}_{\mathrm{H}^*} = \begin{pmatrix} 0 & -2\alpha & 2\beta \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}_{\mathrm{X}^{+*}} = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 & 0 \\ -\gamma & 0 & 2\beta \\ 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}_{\mathrm{X}^{-*}} = \begin{pmatrix} -2\beta & 0 & 0 \\ 0 & -2\beta & 0 \\ -\gamma & -2\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc le tableau suivant des crochets de Lie

	H	X^+	X^-	H^*	X^{+*}	X^{-*}
H	0	$2\mathrm{X}^+$	$-2\mathrm{X}^-$	$-2\alpha\mathrm{X}^+ + 2\beta\mathrm{X}^-$	$2\alpha\mathrm{H} - 2\mathrm{X}^{+*}$	$-2\beta\mathrm{H} + 2\mathrm{X}^{-*}$
X^+	$-2\mathrm{X}^+$	0	H	$\gamma\mathrm{X}^+ - \mathrm{X}^{-*}$	$-\gamma\mathrm{H} + 2\beta\mathrm{X}^- + 2\mathrm{H}^*$	$-2\beta\mathrm{X}^+$
X^-	$2\mathrm{X}^-$	$-\mathrm{H}$	0	$\gamma\mathrm{X}^- + \mathrm{X}^{+*}$	$2\alpha\mathrm{X}^-$	$-\gamma\mathrm{H} - 2\alpha\mathrm{X}^+ - 2\mathrm{H}^*$
H^*	$2\alpha\mathrm{X}^+ - 2\beta\mathrm{X}^-$	$-\gamma\mathrm{X}^+ + \mathrm{X}^{-*}$	$-\gamma\mathrm{X}^- - \mathrm{X}^{+*}$	0	$-2\alpha\mathrm{H}^* + \gamma\mathrm{X}^{+*}$	$2\beta\mathrm{H}^* + \gamma\mathrm{X}^{-*}$
X^{+*}	$-2\alpha\mathrm{H} + 2\mathrm{X}^{+*}$	$\gamma\mathrm{H} - 2\beta\mathrm{X}^- - 2\mathrm{H}^*$	$-2\alpha\mathrm{X}^-$	$2\alpha\mathrm{H}^* - \gamma\mathrm{X}^{+*}$	0	$2\beta\mathrm{X}^{+*} + 2\alpha\mathrm{X}^{-*}$
X^{-*}	$2\beta\mathrm{H} - 2\mathrm{X}^{-*}$	$2\beta\mathrm{X}^+$	$\gamma\mathrm{H} + 2\alpha\mathrm{X}^+ + 2\mathrm{H}^*$	$-2\beta\mathrm{H}^* - \gamma\mathrm{X}^{-*}$	$-2\beta\mathrm{X}^{+*} - 2\alpha\mathrm{X}^{-*}$	0

Pour que la courbure de Schouten de r soit nulle, il faut et il suffit que $[a, a] - [s, s] = 0$, où $[s, s](\xi, \eta) = [s\xi, s\eta]$, pour $\xi \in \mathfrak{g}^*$, $\eta \in \mathfrak{g}^*$. On trouve

$$[a, a](\mathrm{H}^*, \mathrm{X}^{+*}) = (4\alpha\beta - \gamma^2)\mathrm{X}^-, \qquad [s, s](\mathrm{H}^*, \mathrm{X}^{+*}) = -4\varkappa^2\mathrm{X}^-$$
$$[a, a](\mathrm{H}^*, \mathrm{X}^{-*}) = -(4\alpha\beta - \gamma^2)\mathrm{X}^+, \qquad [s, s](\mathrm{H}^*, \mathrm{X}^{-*}) = 4\varkappa^2\mathrm{X}^+$$
$$[a, a](\mathrm{X}^{+*}, \mathrm{X}^{-*}) = (4\alpha\beta - \gamma^2)\mathrm{H}, \qquad [s, s](\mathrm{X}^{+*}, \mathrm{X}^{-*}) = -4\varkappa^2\mathrm{H}\,.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que r soit quasitriangulaire est donc

$$\begin{cases} \gamma^2 - 4\varkappa^2 = 4\alpha\beta \\ \varkappa \neq 0\,. \end{cases}$$

On pourra, en remplaçant r par un potentiel proportionnel, supposer que $\varkappa = 1$, ce que nous ferons. Pour $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 2$, $\varkappa = 1$, on retrouve la structure de bigèbre de Lie quasitriangulaire de $sl(2, \mathbb{C})$, décrite dans [*4*] et obtenue comme cas particulier de la structure quasitriangulaire définie par Drinfel'd [*3*] sur les algèbres de Lie semi-simples (et plus généralement encore, sur les algèbres de Kac-Moody).

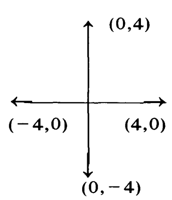
Montrons que dans tous les cas où r est quasitriangulaire, $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ est isomorphe à l'algèbre de Lie semi-simple D_2, c'est-à-dire à $sl(2, \mathbb{C}) \oplus sl(2, \mathbb{C})$. On vérifie que

$$\begin{aligned} H_1 &= H - H^* - \alpha X^+ - \beta X^- , \\ H_2 &= H + H^* + \alpha X^+ + \beta X^- , \\ X_1^+ &= \beta H + (\gamma + 2)X^+ - X^{-*} , \\ X_1^- &= - \alpha H + (\gamma - 2)X^- + X^{+*} , \\ X_2^+ &= - \beta H - (\gamma - 2)X^+ + X^{-*} , \\ X_2^- &= \alpha H - (\gamma + 2)X^- - X^{+*} , \end{aligned}$$

forment une base de $\mathfrak{k}$ et l'on obtient le tableau des crochets de Lie

	H_1	X_1^+	X_1^-	H_2	X_2^+	X_2^-
H_1	0	$4X_1^+$	$-4X_1^-$	0	0	0
X_1^+	$-4X_1^+$	0	$-8H_1$	0	0	0
X_1^-	$4X_1^-$	$8H_1$	0	0	0	0
H_2	0	0	0	0	$4X_2^+$	$-4X_2^-$
X_2^+	0	0	0	$-4X_2^+$	0	$-8H_2$
X_2^-	0	0	0	$4X_2^-$	$8H_2$	0

H_1, H_2 engendrent une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{k}$, les quatre racines sont

$(\pm 4, 0)$ et $(0, \pm 4)$ 

. D'où la conclusion.

Si $\mathfrak{g} = sl(2, \mathbb{R})$, $\mathfrak{k}$ est une algèbre de Lie isomorphe à $sl(2, \mathbb{R}) \oplus sl(2, \mathbb{R})$.

1.7. *Morphismes de bigèbres de Lie.* Soient $(\mathfrak{g}_1, [\ ,\ ]_1, \varepsilon_1)$ et $(\mathfrak{g}_2, [\ ,\ ]_2, \varepsilon_2)$ deux bigèbres de Lie et ψ une application linéaire de $\mathfrak{g}_1$ dans $\mathfrak{g}_2$. On dit que ψ est un *morphisme* (resp. un antimorphisme) de *bigèbres de Lie* si ψ est un morphisme d'algèbres de Lie de $(\mathfrak{g}_1, [\ ,\ ]_1)$ dans $(\mathfrak{g}_2, [\ ,\ ]_2)$ et ${}^t\psi$ est un morphisme (resp. antimorphisme) d'algèbres de Lie de $(\mathfrak{g}_2^*, [\ ,\ ]_{\varepsilon_2})$ dans $(\mathfrak{g}_1^*, [\ ,\ ]_{\varepsilon_1})$.

PROPOSITION 1.2. — Soit $\mathfrak{g}$ une bigèbre de Lie et soit $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ son double. L'injection i de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{k}$ est un morphisme de bigèbres de Lie et l'injection j de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{k}$ est un antimorphisme.

Démonstration. — Par définition,

$$i(x) = (x, 0), \qquad \text{pour} \quad x \in \mathfrak{g},$$

et

$$j(\xi) = (0, \xi), \qquad \text{pour} \quad \xi \in \mathfrak{h},$$

d'où

$${}^t i(\xi, x) = \xi$$

et

$${}^t j(\xi, x) = x\,.$$

Il est clair, d'après (1.1) et (1.5), que

$$i([x, y]) = [i(x), i(y)]_{\mathfrak{k}}\,,$$

$${}^t i([(\xi, x), (\eta, y)]^m) = [\xi, \eta] = [{}^t i(\xi, x), {}^t i(\eta, y)]\,,$$

et que

$$j([\xi, \eta]) = [j(\xi), j(\eta)]_{\mathfrak{k}}\,,$$

$${}^t j([\xi, x), (\eta, y)]^m) = -\ [x, y] = -\ [{}^t j(\xi, x), {}^t j(\eta, y)]\,,$$

d'où la proposition.

2. Bigèbres de Lie quasitriangulaires et algèbres de Lie-Semenov.

2.1. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie munie d'une forme bilinéaire symétrique inversible invariante. On note $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ l'isomorphisme induit par cette forme bilinéaire inversible. Rappelons [*1*] [*4*] qu'on dit que $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \mathrm{R}, \phi)$ est une algèbre de Lie-Semenov si $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \mathrm{R})$ est une *algèbre de Lie double* [*5*], où R est une solution antisymétrique par rapport à ϕ de l'*équation de Yang-Baxter modifiée*, c'est-à-dire un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ qui vérifie

$$\langle \phi \circ \mathrm{R}(x), y \rangle = -\langle \phi \circ \mathrm{R}(y), x \rangle$$

et

$$\mathrm{R}([\mathrm{R}x, y] + [x, \mathrm{R}y]) - [\mathrm{R}x, \mathrm{R}y] = [x, y]\,.$$

Alors $[x, y]_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2}([\mathrm{R}x, y] + [x, \mathrm{R}y])$ est un crochet d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{g}$.

PROPOSITION 2.1. — Toute structure de bigèbre de Lie quasitriangulaire sur $\mathfrak{g}$ détermine une structure d'algèbre de Lie-Semenov sur $\mathfrak{g}$ et inversement.

Démonstration. — Soit r une application linéaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. On note s la partie symétrique et a la partie antisymétrique de r. On suppose que s est ad-invariant. On sait ([*4*], formule (2.15)) que, pour $\xi \in \mathfrak{h}$, $\eta \in \mathfrak{h}$,

$$K^r(\xi, \eta) = a(\mathrm{ad}^*_{a\xi}\eta - \mathrm{ad}^*_{a\eta}\xi) - [a\xi, a\eta] - [s\xi, s\eta].$$

En utilisant l'ad-invariance de s, on obtient encore

$$K^r(\xi, \eta) = (a \circ s^{-1})(\mathrm{ad}_{a\xi} s\eta - \mathrm{ad}_{a\eta} s\xi) - [a\xi, a\eta] - [s\xi, s\eta].$$

Soit R l'endomorphisme de $\mathfrak{g}$ défini par

$$R = a \circ s^{-1}.$$

Posant $s\xi = x$ et $s\eta = y$, on obtient

$$\text{(2.1)} \quad K^r(s^{-1}x, s^{-1}y) = R([Rx, y] + [x, Ry]) - [Rx, Ry] - [x, y].$$

On voit ainsi que l'endomorphisme $R = a \circ s^{-1}$ vérifie l'équation de Yang-Baxter modifiée si et seulement si la courbure de Schouten de r est nulle.

Soit donc $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \varepsilon)$ une bigèbre de Lie quasitriangulaire. Par définition, $\varepsilon = \delta r$ où r est un potentiel jacobien, dont la partie symétrique, s, est ad-invariante et inversible, à courbure de Schouten nulle, c'est-à-dire, tel que $K^r = 0$. Alors l'endomorphisme $R = a \circ s^{-1}$ vérifie l'équation de Yang-Baxter modifiée, et $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], R, s^{-1})$ est une algèbre de Lie-Semenov.

Inversement, supposons que $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], R, \phi)$ est une algèbre de Lie-Semenov où $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ est l'isomorphisme induit par la forme bilinéaire symétrique inversible sur $\mathfrak{g}$. Considérons

$$r = R \circ \phi^{-1} + \phi^{-1} = a + s.$$

Par construction, s est alors inversible et invariant. De plus, d'après la formule (2.1), puisque R vérifie l'équation de Yang-Baxter modifiée, la courbure K^r est nulle. En conclusion, $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \delta r)$ est une bigèbre de Lie quasitriangulaire.

Le crochet de Lie $[\ ,\ ]_R$ sur $\mathfrak{g}$ et le crochet de Lie $[\ ,\ ]_\varepsilon$ sur $\mathfrak{h}$ sont alors liés par

$$\text{(2.2)} \qquad [x, y]_R = -\frac{1}{2} s([s^{-1}x, s^{-1}y]_\varepsilon).$$

En effet,

$$\begin{aligned} 2[x, y]_R + s[s^{-1}x, s^{-1}y]_\varepsilon &= [Rx, y] + [x, Ry] + s(\mathrm{ad}^*_{(a\circ s^{-1})y} s^{-1}x - \mathrm{ad}^*_{(a\circ s^{-1})x} s^{-1}y) \\ &= \mathrm{ad}_{(a\circ s^{-1})x}\, y - \mathrm{ad}_{(a\circ s^{-1})y}\, x + s\, \mathrm{ad}^*_{(a\circ s^{-1})y}\, s^{-1}x - s\, \mathrm{ad}^*_{(a\circ s^{-1})x}\, s^{-1}y \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'après l'ad-invariance de s.

DÉFINITION 2.1. (Morphismes d'algèbres de Lie-Semenov). — Soient $(\mathfrak{g}_1, [\ ,\ ]_1, R_1, \phi_1)$ et $(\mathfrak{g}_2, [\ ,\ ]_2, R_2, \phi_2)$ deux algèbres de Lie-Semenov et

ψ une application linéaire de $\mathfrak{g}_1$ dans $\mathfrak{g}_2$. On dira que ψ est un *morphisme* (resp. antimorphisme) *d'algèbres de Lie-Semenov* si ψ est un morphisme d'algèbres de Lie de $(\mathfrak{g}_1, [\ ,\ ]_1)$ dans $(\mathfrak{g}_2, [\ ,\ ]_2)$ et $\phi_1^{-1} \circ {}^t\psi \circ \phi_2$ est un morphisme (resp. antimorphisme) d'algèbres de Lie de $(\mathfrak{g}_2, [\ ,\ ]_{R_2})$ dans $(\mathfrak{g}_1, [\ ,\ ]_{R_1})$.

NOTATION— On note $\mathscr{C}$ la catégorie des bigèbres de Lie quasitriangulaires et $\tilde{\mathscr{C}}$ la catégorie des algèbres de Lie-Semenov avec les morphismes précédemment définis.

PROPOSITION 2.2. — Les catégories $\mathscr{C}$ et $\tilde{\mathscr{C}}$ sont équivalentes.

Démonstration. — D'après la proposition 2.1, on peut associer à toute bigèbre de Lie quasitriangulaire une algèbre de Lie-Semenov et inversement. Soient alors $\mathscr{G}_1 = (\mathfrak{g}_1, [\ ,\ ]_1, \varepsilon_1)$, $\mathscr{G}_2 = (\mathfrak{g}_2, [\ ,\ ]_2, \varepsilon_2)$ deux bigèbres de Lie quasitriangulaires et soit ψ une application linéaire de $\mathfrak{g}_1$ dans $\mathfrak{g}_2$. Soient $\tilde{\mathscr{G}}_1 = (\mathfrak{g}_1, [\ ,\ ]_1, R_1, s_1^{-1})$ et $\tilde{\mathscr{G}}_2 = (\mathfrak{g}_2, [\ ,\ ]_2, R_2, s_2^{-1})$ les algèbres de Lie-Semenov associées à $\mathscr{G}_1$ et $\mathscr{G}_2$ respectivement. Montrons que ψ est un morphisme de bigèbres de Lie de $\mathscr{G}_1$ dans $\mathscr{G}_2$ si et seulement si ψ est un morphisme d'algèbres de Lie-Semenov de $\tilde{\mathscr{G}}_1$ dans $\tilde{\mathscr{G}}_2$. Il suffit de montrer à cet effet que ${}^t\psi : (\mathfrak{g}_2^*, [\ ,\ ]_{\varepsilon_2}) \to (\mathfrak{g}_1^*, [\ ,\ ]_{\varepsilon_1})$ est un morphisme d'algèbres de Lie si et seulement si $s_1 \circ {}^t\psi \circ s_2^{-1} : (\mathfrak{g}_2, [\ ,\ ]_{R_2}) \to (\mathfrak{g}_1, [\ ,\ ]_{R_1})$ est un morphisme d'algèbres de Lie. Soient $x_2, y_2 \in \mathfrak{g}_2$. On a d'après (2.2),

$$\begin{aligned}
&{}^t\psi([s_2^{-1}(x_2), s_2^{-1}(y_2)]_{\varepsilon_2}) - [{}^t\psi(s_2^{-1}(x_2)), {}^t\psi(s_2^{-1}(y_2))]_{\varepsilon_1} \\
&\quad = -2s_1^{-1}(s_1 \circ {}^t\psi \circ s_2^{-1}([x_2, y_2]_{R_2}) - [s_1 \circ {}^t\psi \circ s_2^{-1}(x_2), s_1 \circ {}^t\psi \circ s_2^{-1}(y_2)]_{R_1}),
\end{aligned}$$

d'où la propriété.

Considérons maintenant le foncteur $\mathscr{F}$ de $\mathscr{C}$ dans $\tilde{\mathscr{C}}$ qui

— à toute bigèbre de Lie quasitriangulaire $\mathscr{G}$ associe l'algèbre de Lie-Semenov $\tilde{\mathscr{G}}$,

— à tout morphisme ψ de bigèbres de Lie quasitriangulaires de $\mathscr{G}_1$ dans $\mathscr{G}_2$ associe $\mathscr{F}(\psi) = \psi$, morphisme d'algèbres de Lie-Semenov de $\tilde{\mathscr{G}}_1$ dans $\tilde{\mathscr{G}}_2$.

Considérons aussi le foncteur $\tilde{\mathscr{F}}$ de $\tilde{\mathscr{C}}$ dans $\mathscr{C}$ qui

— à toute algèbre de Lie-Semenov $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], R, \phi)$ associe la bigèbre de Lie quasitriangulaire $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \delta r)$ où $r = R \circ \phi^{-1} + \phi^{-1}$,

— à tout morphisme ψ d'algèbres de Lie-Semenov associe $\tilde{\mathscr{F}}(\psi) = \psi$, morphisme de bigèbres de Lie quasitriangulaires.

Il est clair que l'on peut définir des isomorphismes fonctoriels de $\tilde{\mathscr{F}} \circ \mathscr{F}$ dans l'identité de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{F} \circ \tilde{\mathscr{F}}$ dans l'identité de $\tilde{\mathscr{C}}$, et que, par conséquent, $\mathscr{F}$ est une équivalence de catégories de $\mathscr{C}$ dans $\tilde{\mathscr{C}}$.

Remarquons que l'on peut remplacer la catégorie $\mathscr{C}$ par la catégorie $\mathscr{C}_0$ des « bigèbres strictes » dont les objets sont les algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ munies d'un 1-cocycle jacobien sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g})$ — on suppose ici $\mathfrak{h}$ égale à $\mathfrak{g}^*$ et pas seulement isomorphe à $\mathfrak{g}^*$ — et dont les morphismes sont définis comme précédemment. Le foncteur $\mathscr{F}$ définit alors un isomorphisme de catégories de $\mathscr{C}_0$ dans $\tilde{\mathscr{C}}$.

2.2. Étudions l'*algèbre de Lie-Semenov associée au double d'une bigèbre de Lie.* Si $\mathscr{G} = (\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \varepsilon)$ est une bigèbre de Lie, on sait (proposition 1.1) que son double, $\mathscr{G}^{(2)} = (\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{k}}, \delta m)$, est une bigèbre de Lie quasitriangulaire. Par $\mathscr{F}$ est associée à $\mathscr{G}^{(2)}$ une algèbre de Lie-Semenov

$$\widetilde{\mathscr{G}^{(2)}} = (\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{k}}, \mathrm{M}, \mathrm{S}^{-1})$$

avec $\mathrm{M} : \mathfrak{k} \to \mathfrak{k}$, $\mathrm{M} = \mathrm{A} \circ \mathrm{S}^{-1}$, où A désigne, comme au paragraphe 1.5, la partie antisymétrique de m, et S la partie symétrique. On a donc $\mathrm{M}(x, \xi) = (x, -\xi)$ pour $(x, \xi) \in \mathfrak{k}$. Le crochet $[\ ,\ ]_{\mathrm{M}}$ sur $\mathfrak{k}$ est donné par

$$[(x, \xi), (y, \eta)]_{\mathrm{M}} = ([x, y], -[\xi, \eta]_{\varepsilon}). \tag{2.3}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
[(x, \xi), (y, \eta)]_{\mathrm{M}} &= \frac{1}{2}([\mathrm{M}(x, \xi), (y, \eta)]_{\mathfrak{k}} + [(x, \xi), \mathrm{M}(y, \eta)]_{\mathfrak{k}}) \\
&= \frac{1}{2}([(x, -\xi), (y, \eta)]_{\mathfrak{k}} + [(x, \xi), (y, -\eta)]_{\mathfrak{k}}),
\end{aligned}$$

$$[(x, -\xi), (y, \eta)]_{\mathfrak{k}} = \left([x, y] - \mathrm{ad}_{\xi}^* y - \mathrm{ad}_{\eta}^* x, -[\xi, \eta]_{\varepsilon} + \mathrm{ad}_x^* \eta + \mathrm{ad}_y^* \xi\right),$$
$$[(x, \xi), (y, -\eta)]_{\mathfrak{k}} = \left([x, y] + \mathrm{ad}_{\xi}^* y + \mathrm{ad}_{\eta}^* x, -[\xi, \eta]_{\varepsilon} - \mathrm{ad}_x^* \eta - \mathrm{ad}_y^* \xi\right),$$

d'où la formule (2.3). L'algèbre de Lie $(\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}, [\ ,\ ]_{\mathrm{M}})$ est donc le *produit direct* de $\mathfrak{g}$ et de l'algèbre de Lie opposée à $(\mathfrak{h}, [\ ,\ ]_{\varepsilon})$.

Comme $(\mathfrak{k}^*, [\ ,\ ]^m)$ est le produit direct de $(\mathfrak{h}, [\ ,\ ]_{\varepsilon})$ et de l'algèbre de Lie opposée à $\mathfrak{g}$ (cf. paragraphe 1.5), on voit que la bijection linéaire $(x, \xi) \to (\xi, x)$ est un anti-isomorphisme de l'algèbre de Lie $(\mathfrak{k}, [\ ,\ ]_{\mathrm{M}})$ sur l'algèbre de Lie $(\mathfrak{k}^*, [\ ,\ ]^m)$. Cette propriété s'obtient aussi en appliquant la formule (2.2), compte tenu de la définition $\mathrm{S}(\xi, x) = \frac{1}{2}(x, \xi)$.

3. Double d'une bigèbre de Lie quasitriangulaire.

3.1. Considérons le *cas où la bigèbre* $\mathfrak{g}$ *est une bigèbre de Lie quasitriangulaire* $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \varepsilon)$, $\varepsilon = \delta r$, où $r : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ est un potentiel quasitriangulaire, c'est-à-dire $r = a + s$, s inversible et ad-invariant, et $\mathrm{K}^r = 0$.

Alors $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$, d'après ce qui précède, est une bigèbre de Lie quasitriangulaire $(\mathfrak{k}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{k}}, \delta m)$, le *double* de $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \varepsilon)$.

Explicitons $\mathrm{ad}_{\xi}^* x$, $\xi \in \mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{g}$, dans ce cas. Soit $\eta \in \mathfrak{h}$. On a

$$\langle \eta, \mathrm{ad}_{\xi}^* x \rangle = -\langle [\xi, \eta]_{\varepsilon}, x \rangle .$$

D'où

$$\begin{aligned}\langle \eta, \mathrm{ad}^*_\xi x \rangle &= - \langle [\xi, \eta]^r, x \rangle = - \langle \mathrm{ad}^*_{a(\eta)} \xi - \mathrm{ad}^*_{a(\xi)} \eta, x \rangle \\ &= \langle \xi, \mathrm{ad}_{a(\eta)} x \rangle - \langle \eta, \mathrm{ad}_{a(\xi)} x \rangle \\ &= \langle \mathrm{ad}^*_x \xi, a(\eta) \rangle - \langle \eta, \mathrm{ad}_{a(\xi)} x \rangle \\ &= - \langle \eta, a(\mathrm{ad}^*_x \xi) + \mathrm{ad}_{a(\xi)} x \rangle ,\end{aligned}$$

i. e.,

$$\mathrm{ad}^*_\xi x = (\mathrm{ad}_x \circ a - a \circ \mathrm{ad}^*_x)\, \xi .$$

Le crochet d'algèbre de Lie bicroisée sur $\mathfrak{k}$ s'écrit alors

$$(3.1) \quad [(x, \xi), (y, \eta)]_{\mathfrak{k}} = ([x, y] - ([a\xi, y] + [x, a\eta]) + a(\mathrm{ad}^*_x \eta - \mathrm{ad}^*_y \xi), \\ \mathrm{ad}^*_{x - a\xi} \eta - \mathrm{ad}^*_{y - a\eta} \xi) .$$

3.2. *L'algèbre de Lie-Semenov associée à la bigèbre de Lie quasitriangulaire* ${}^{(2)}\mathcal{G} = (\mathfrak{k}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{k}}, \delta m)$ est, avec les notations du paragraphe 2.2, $\widetilde{{}^{(2)}\mathcal{G}} = (\mathfrak{k}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{k}}, \mathrm{M}, \mathrm{S}^{-1})$. D'après la formule (2.3), lorsque $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \varepsilon)$ est quasitriangulaire, avec $\varepsilon = \delta r = \delta a$, le crochet de Lie $[\ ,\ ]_{\mathrm{M}}$ sur $\mathfrak{k}$ est donné par

$$(3.2) \qquad [(x, \xi), (y, \eta)]_{\mathrm{M}} = ([x, y], - \mathrm{ad}^*_{a(\eta)} \xi + \mathrm{ad}^*_{a(\xi)} \eta) .$$

3.3. On peut considérer d'autre part l'*isomorphisme* $\mathrm{I} \times s$ *de* $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ *sur* $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, où I désigne l'application identique. Le transport du crochet $[\ ,\ ]_{\mathfrak{k}}$ par cet isomorphisme donne un *crochet* $[\ ,\ ]_{((\mathrm{R}))}$ *sur* $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ tel que :

$$(3.3) \quad [(x_1, y_1), (x_2, y_2)]_{((\mathrm{R}))} \\ = ([x_1, x_2] + [x_2, \mathrm{R}y_1] + [\mathrm{R}y_2, x_1] - \mathrm{R}([x_2, y_1] - [x_1, y_2]), \\ [x_1, y_2] + [y_1, x_2] + 2[y_2, y_1]_{\mathrm{R}}) .$$

Cette formule se déduit de (3.1).

PROPOSITION 3.1. — L'application linéaire j_{R} de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ qui à (x, y) associe $(x - 2y_+, x - 2y_-)$, où

$$y_+ = \frac{1}{2}(\mathrm{R} + \mathrm{I})(y) \qquad \text{et} \qquad y_- = \frac{1}{2}(\mathrm{R} - \mathrm{I})(y) ,$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie de $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, [\ ,\ ]_{((\mathrm{R}))})$ sur $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, [\ ,\ ]_\times)$, où $[\ ,\ ]_\times$ désigne le crochet de produit direct d'algèbres de Lie.

Démonstration. — j_{R} est une bijection. De plus,

$$\begin{aligned}[(x_1, 0), (x_2, 0)]_{((\mathrm{R}))} &= ([x_1, x_2], 0) ,\\ [(0, y_1), (0, y_2)]_{((\mathrm{R}))} &= (0, 2[y_2, y_1]_{\mathrm{R}}) ,\\ [(x_1, 0), (0, y_2)]_{((\mathrm{R}))} &= ([\mathrm{R}y_2, x_1] + \mathrm{R}[x_1, y_2], [x_1, y_2]) .\end{aligned}$$

Ainsi

$$(3.4) \quad j_{\mathrm{R}}([(x_1, 0), (x_2, 0)]_{((\mathrm{R}))}) = ([x_1, x_2], [x_1, x_2]) = [j_{\mathrm{R}}(x_1, 0), j_{\mathrm{R}}(x_2, 0)]_\times .$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
j_{\mathrm{R}}([(x_1,0),(0,y_2)]_{((\mathrm{R}))}) &= ([\mathrm{R}y_2,x_1]-[x_1,y_2],[\mathrm{R}y_2,x_1]+[x_1,y_2]),\\
[j_{\mathrm{R}}(x_1,0),j_{\mathrm{R}}(0,y_2)]_\times &= [(x_1,x_1),(-2y_{2+},-2y_{2-})]_\times\\
&= ([x_1,-2y_{2+}],[x_1,-2y_{2-}])\\
&= ([\mathrm{R}y_2+y_2,x_1],[\mathrm{R}y_2-y_2,x_1])\\
&= ([\mathrm{R}y_2,x_1]-[x_1,y_2],[\mathrm{R}y_2,x_1]+[x_1,y_2]),
\end{aligned}$$

i. e.,

$$(3.5)\qquad j_{\mathrm{R}}([(x_1,0),(0,y_2)]_{((\mathrm{R}))}) = [j_{\mathrm{R}}(x_1,0),j_{\mathrm{R}}(0,y_2)]_\times .$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
j_{\mathrm{R}}([(0,y_1),(0,y_2)]_{((\mathrm{R}))}) &= j_{\mathrm{R}}(0,2[y_2,y_1]_{\mathrm{R}})\\
&=(\mathrm{R}([\mathrm{R}y_1,y_2]+[y_1,\mathrm{R}y_2])+[\mathrm{R}y_1,y_2]+[y_1,\mathrm{R}y_2],\\
&\quad\ \mathrm{R}([\mathrm{R}y_1,y_2]+[y_1,\mathrm{R}y_2])-[\mathrm{R}y_1,y_2]-[y_1,\mathrm{R}y_2])\\
&=([\mathrm{R}y_1,\mathrm{R}y_2]+[y_1,y_2]+2[y_1,y_2]_{\mathrm{R}},\\
&\quad\ [\mathrm{R}y_1,\mathrm{R}y_2]+[y_1,y_2]-2[y_1,y_2]_{\mathrm{R}}).\\
[j_{\mathrm{R}}(0,y_1),j_{\mathrm{R}}(0,y_2)]_\times &= [(-2y_{1+},-2y_{1-}),(-2y_{2+},-2y_{2-})]_\times\\
&=([\mathrm{R}y_1+y_1,\mathrm{R}y_2+y_2],[\mathrm{R}y_1-y_1,\mathrm{R}y_2-y_2])\\
&=([\mathrm{R}y_1,\mathrm{R}y_2]+[y_1,y_2]+2[y_1,y_2]_{\mathrm{R}},\\
&\quad\ [\mathrm{R}y_1,\mathrm{R}y_2]+[y_1,y_2]-2[y_1,y_2]_{\mathrm{R}}),
\end{aligned}$$

i. e.,

$$(3.6)\qquad j_{\mathrm{R}}([(0,y_1),(0,y_2)]_{((\mathrm{R}))}) = [j_{\mathrm{R}}(0,y_1),j_{\mathrm{R}}(0,y_2)]_\times .$$

On déduit de (3.4) (3.5) (3.6) par linéarité que j_{R} est un morphisme d'algèbres de Lie.

Remarquons que les relations précédentes peuvent être démontrées à l'aide des formules

$$[x_+,y_+] = ([x,y]_{\mathrm{R}})_+$$
$$[x_-,y_-] = ([x,y]_{\mathrm{R}})_-$$

pour $x\in\mathfrak{g}$, $y\in\mathfrak{g}$, qui sont des conséquences de l'équation de Yang-Baxter modifiée.

4. **Carré d'une algèbre de Lie-Semenov** [*6*].

Soit $(\mathfrak{g},[\ ,\ ],\mathrm{R},\phi)$ une algèbre de Lie-Semenov. On note ${}^\delta\mathfrak{g}=\{(x,x),x\in\mathfrak{g}\}$ la diagonale de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. Alors ${}^\delta\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g},[\ ,\ ]_\times)$. D'autre part, on considère $\bar{\mathfrak{g}}_{\mathrm{R}}=\{(x_+,x_-),x\in\mathfrak{g}\}$ où $x_+=\frac{1}{2}(\mathrm{R}+\mathrm{I})(x)$ et $x_-=\frac{1}{2}(\mathrm{R}-\mathrm{I})(x)$. $\bar{\mathfrak{g}}_{\mathrm{R}}$ est aussi une sous-algèbre de Lie de $(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g},[\ ,\ ]_\times)$ et $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}={}^\delta\mathfrak{g}\oplus\bar{\mathfrak{g}}_{\mathrm{R}}$ (somme directe des deux sous-espaces vectoriels ${}^\delta\mathfrak{g}$ et $\bar{\mathfrak{g}}_{\mathrm{R}}$).

Soit ${}^{(2)}\mathrm{R}$ l'application linéaire de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ définie par ${}^{(2)}\mathrm{R} = p_{\delta\mathfrak{g}} - p_{\bar{\mathfrak{g}}_\mathrm{R}}$, où $p_{\delta\mathfrak{g}}$ et $p_{\bar{\mathfrak{g}}_\mathrm{R}}$ sont les projections sur ${}^{\delta}\mathfrak{g}$ et $\bar{\mathfrak{g}}_\mathrm{R}$ respectivement. On vérifie par un calcul simple que ${}^{(2)}\mathrm{R}$ est antisymétrique par rapport au produit scalaire invariant « , » sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ défini par

$$\langle\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle\rangle = \langle \phi(x_1), x_2 \rangle - \langle \phi(y_1), y_2 \rangle .$$

On note ${}^{(2)}\phi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to (\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})^*$ l'isomorphisme induit par « , ». On a

$${}^{(2)}\mathrm{R}(x, y) = ((\mathrm{R} + \mathrm{I})y - \mathrm{R}x, \mathrm{R}y - (\mathrm{R} - \mathrm{I})x)$$

et

$${}^{(2)}\phi^{-1}(\xi, \eta) = (s\xi, -s\eta) .$$

L'endomorphisme ${}^{(2)}\mathrm{R}$ vérifie l'équation de Yang-Baxter modifiée car il est la différence des projecteurs sur deux sous-algèbres de Lie supplémentaires dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. On en déduit que $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, [\ ,\ ]_\times, {}^{(2)}\mathrm{R}, {}^{(2)}\phi)$ est aussi une algèbre de Lie-Semenov, appelée le *carré de l'algèbre de Lie-Semenov* $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \mathrm{R}, \phi)$. On a

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]_{{}^{(2)}\mathrm{R}} =$$

$$\frac{1}{2}([y_1, x_2] - [\mathrm{R}(x_1 - y_1), x_2] + [x_1, y_2] - [x_1, \mathrm{R}(x_2 - y_2)],$$
$$[x_1, y_2] - [\mathrm{R}(x_1 - y_1), y_2] + [y_1, x_2] - [y_1, \mathrm{R}(x_2 - y_2)]) .$$

5. Comparaison des doubles et des carrés.

Soit $\mathscr{G} = (\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \delta r)$ une bigèbre de Lie quasitriangulaire. On a noté $\mathscr{G}^{(2)} = (\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}, [\ ,\ ]_\mathfrak{t}, \delta m)$ le double de la bigèbre de Lie $\mathscr{G}$ et $\widetilde{\mathscr{G}^{(2)}} = (\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}, [\ ,\ ]_\mathfrak{t}, \mathrm{M}, \mathrm{S}^{-1})$ l'algèbre de Lie-Semenov associée à $\mathscr{G}^{(2)}$.

D'autre part, soit ${}^{(2)}\tilde{\mathscr{G}} = (\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, [\ ,\ ]_\times, {}^{(2)}\mathrm{R}, {}^{(2)}\phi)$ le carré de l'algèbre de Lie-Semenov $\tilde{\mathscr{G}} = (\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \mathrm{R}, s^{-1})$ associée à $\mathscr{G}$ par le foncteur $\mathscr{F}$, et soit ${}^{(2)}\mathscr{G} = (\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, [\ ,\ ]_\times, \delta m')$ la bigèbre de Lie quasitriangulaire associée à ${}^{(2)}\tilde{\mathscr{G}}$ par $\mathscr{F}^{-1}$. Par définition, $\widetilde{{}^{(2)}\mathscr{G}} = {}^{(2)}\tilde{\mathscr{G}}$.

Notons $k_{\mathrm{R},s}$ l'application linéaire $j_\mathrm{R} \circ (\mathrm{I} \times s)$ de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Le transport du crochet $[\ ,\ ]_\mathfrak{t}$ par l'isomorphisme $\mathrm{I} \times s$ donne un crochet $[\ ,\ ]_{((\mathrm{R}))}$ sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, et j_R est un isomorphisme d'algèbres de Lie de $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, [\ ,\ ]_{((\mathrm{R}))})$ sur $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, [\ ,\ ]_\times)$ d'après la proposition 3.1. Donc $k_{\mathrm{R},s}$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie de $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}, [\ ,\ ]_\mathfrak{t})$ sur $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, [\ ,\ ]_\times)$.

On se propose de montrer que $k_{\mathrm{R},s}$ est un anti-isomorphisme de bigèbres de Lie quasitriangulaires de $\mathscr{G}^{(2)}$ sur ${}^{(2)}\mathscr{G}$. La démonstration résulte des lemmes suivants.

LEMME 5.1. — Le potentiel jacobien $m' : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ de la bigèbre quasitriangulaire ${}^{(2)}\mathscr{G}$ est donné par

$$m'(\xi, \eta) = ({}^t r(\xi) - r(\eta), {}^t r(\xi) - r(\eta)) .$$

En effet par définition, $m' = {}^{(2)}\mathrm{R} \circ {}^{(2)}\phi^{-1} + {}^{(2)}\phi^{-1}$. D'où, compte tenu de $\mathrm{R} \circ s = a$ et $r = a + s$ et des expressions de ${}^{(2)}\mathrm{R}$ et de ${}^{(2)}\phi^{-1}$,

$$m'(\xi, \eta) = (-\, a(\xi) + s(\xi) - a(\eta) - s(\eta), -\, a(\xi) + s(\xi) - a(\eta) - s(\eta)).$$

D'où l'expression de $m'(\xi, \eta)$ (qui est un élément de la diagonale de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$).

LEMME 5.2. — L'application linéaire bijective ${}^t k_{\mathrm{R},s} : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \mathfrak{h} \times \mathfrak{g}$ est donnée par

$${}^t k_{\mathrm{R},s}(\xi, \eta) = (\xi + \eta, r(\eta) - {}^t r(\xi)).$$

En effet, par définition, $k_{\mathrm{R},s}(x, \xi) = (x - r(\xi), x + {}^t r(\xi))$. On en déduit l'expression de ${}^t k_{\mathrm{R},s}$.

LEMME 5.3. — Le diagramme suivant est anti-commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \arrow[r, "m'"] \arrow[d, "{}^t k_{\mathrm{R},s}"'] & \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \\
\mathfrak{h} \times \mathfrak{g} \arrow[r, "m"] & \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} \arrow[u, "k_{\mathrm{R},s}"']
\end{tikzcd}$$

$m' = -\, k_{\mathrm{R},s} \circ m \circ {}^t k_{\mathrm{R},s}$.

Démonstration. — En effet,

$$\begin{aligned}
-\, k_{\mathrm{R},s} \circ m \circ {}^t k_{\mathrm{R},s}(\xi, \eta) &= -\, k_{\mathrm{R},s} \circ m(\xi + \eta, r(\eta) - {}^t r(\xi)) \\
&= -\, k_{\mathrm{R},s}(r(\eta) - {}^t r(\xi), 0) \\
&= -\, (r(\eta) - {}^t r(\xi), r(\eta) - {}^t r(\xi)) \\
&= m'(\xi, \eta).
\end{aligned}$$

LEMME 5.4. — Soit $\alpha : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ un morphisme d'algèbres de Lie de $(\mathscr{A}, [\ ,\ ])$ dans $(\mathscr{A}', [\ ,\ ]')$. Soient p et p' des potentiels jacobiens sur $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ tels que $p' = \alpha \circ p \circ {}^t\alpha$ (resp. $p' = -\, \alpha \circ p \circ {}^t\alpha$). Alors α est un morphisme (resp. antimorphisme) de bigèbres de Lie.

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned}
&\langle {}^t\alpha[\xi', \eta']^{p'} - [{}^t\alpha(\xi'), {}^t\alpha(\eta')]^{p}, x \rangle \\
&\quad = \langle {}^t\alpha \left(\mathrm{ad}'^{*}_{p'(\eta')} \xi' - \mathrm{ad}'^{*}_{p'(\xi')} \eta'\right) - \left(\mathrm{ad}^{*}_{p({}^t\alpha(\eta'))} {}^t\alpha(\xi') - \mathrm{ad}^{*}_{p({}^t\alpha(\xi'))} {}^t\alpha(\eta')\right), x \rangle \\
&\quad = -\, \langle \xi', [p'(\eta'), \alpha(x)]' \rangle + \langle \eta', [p'(\xi'), \alpha(x)]' \rangle + \langle \xi', \alpha[p({}^t\alpha(\eta')), x] \rangle \\
&\qquad -\, \langle \eta', \alpha[p({}^t\alpha(\xi')), x] \rangle \\
&\quad = -\, \langle \xi', [(p' - \alpha \circ p \circ {}^t\alpha)(\eta'), \alpha(x)]' \rangle + \langle \eta', [(p' - \alpha \circ p \circ {}^t\alpha)(\xi'), \alpha(x)]' \rangle \\
&\quad = -(p' - \alpha \circ p \circ {}^t\alpha)(\eta', \mathrm{ad}'^{*}_{\alpha(x)} \xi') + (p' - \alpha \circ p \circ {}^t\alpha)(\xi', \mathrm{ad}'^{*}_{\alpha(x)} \eta').
\end{aligned}$$

On en déduit le lemme. De plus la preuve montre que α est un morphisme de bigèbres de Lie (exactes) (resp. antimorphisme) de $(\mathscr{A}, [\ ,\ ], \delta p)$ dans $(\mathscr{A}', [\ ,\ ]', \delta p')$ si et seulement si $\forall \xi', \eta', x$,

$$(p' - \varepsilon\, \alpha \circ p \circ {}^t\alpha)(\xi', \mathrm{ad}'^*_{\alpha(x)}\, \eta') - (p' - \varepsilon\, \alpha \circ p \circ {}^t\alpha)(\eta', \mathrm{ad}'^*_{\alpha(x)}\, \xi') = 0,$$

avec $\varepsilon = 1$ (resp. $\varepsilon = -1$).

D'après le lemme 5.3 et le lemme 5.4 appliqué à $(\mathscr{A}, [\ ,\ ]) = (\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{k}})$ avec $p = m$, $(\mathscr{A}', [\ ,\ ]') = (\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, [\ ,\ ]_\times)$ avec $p' = m'$, et $\alpha = k_{\mathrm{R},s}$, on obtient

PROPOSITION 5.1. — *L'application linéaire $k_{\mathrm{R},s} = j_{\mathrm{R}} \circ (\mathrm{I} \times s)$ est un anti-isomorphisme de bigèbres de Lie quasitriangulaires du double de $\mathscr{G}$,*

$$\mathscr{G}^{(2)} = (\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{k}}, \delta m) \qquad \text{sur} \qquad {}^{(2)}\mathscr{G} = (\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, [\ ,\ ]_\times, \delta m').$$

Puisque le carré ${}^{(2)}\tilde{\mathscr{G}}$ de $\tilde{\mathscr{G}}$ est par définition $\widetilde{{}^{(2)}\mathscr{G}}$, on en déduit le corollaire suivant

COROLLAIRE 5.1. — *L'application linéaire $k_{\mathrm{R},s}$ est un anti-isomorphisme d'algèbres de Lie-Semenov de $\widetilde{\mathscr{G}^{(2)}} = (\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{k}}, \mathrm{M}, \mathrm{S}^{-1})$ sur le carré de $\tilde{\mathscr{G}}$, ${}^{(2)}\tilde{\mathscr{G}} = (\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, [\ ,\ ]_\times, {}^{(2)}\mathrm{R}, {}^{(2)}\phi)$.*

En vue des applications à la théorie des systèmes intégrables, on pourra donc travailler de manière équivalente soit avec les algèbres de Lie-Semenov, soit avec les bigèbres de Lie quasitriangulaires.

REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient R. Gergondey et F. Magri pour de nombreuses et très utiles discussions et le referee pour plusieurs suggestions.

RÉFÉRENCES

[1] R. AMINOU, Bigèbres de Lie, structures de Poisson et variantes de l'équation de Yang-Baxter. *Publ. IRMA*, Université de Lille I, t. **9**, n° 3, 1987.

[2] V. G. DRINFELD, Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of the classical Yang-Baxter equations. *Soviet Math. Dokl.*, t. **27**, n° 1, 1982, p. 68-71.

[3] V. G. DRINFELD, Quantum groups. *Proceedings Int. Congress Math.* (Berkeley, 1986), Amer. Math. Society, 1988.

[4] Y. KOSMANN-SCHWARZBACH et F. MAGRI, Poisson-Lie groups and complete integrability. I. Drinfeld bigebras, dual extensions and their canonical representations. *Annales Inst. Henri Poincaré*, Série A *(Physique théorique)*, t. **49**, n° 4, 1988, p. 433-460.

[5] M. A. SEMENOV-TIAN-SHANSKY, What is a classical *r*-matrix? *Funct. Anal. Appl.*, t. **17**, n° 4, 1983, p. 259-272.

[6] M. A. SEMENOV-TIAN-SHANSKY, Dressing transformations and Poisson group actions. *Publ. RIMS* (Kyoto University), t. **21**, 1985, p. 1237-1260.

[7] M. A. SEMENOV-TIAN-SHANSKY, Classical r-matrices, Lax equations, Poisson-Lie groups and dressing transformations, in *Field theory, quantum gravity and strings, II*, H. J. de Vega and N. Sanchez, eds., *Lecture notes in physics*, Springer Verlag, Berlin, t. **280**, 1987, p. 174-214.

(Manuscrit reçu le 21 février 1988)

(Version révisée reçue le 1er juillet 1988)

La Revue *Annales de l'Institut Henri Poincaré/Physique théorique* est une publication de Gauthier-Villars, société Anonyme, constituée pour 99 ans, au capital de 3 089 600 F.

Siège social : 17, rue Rémy-Dumoncel, Paris, P. D. G. : J.-M. BOURGOIS.

Actionnaire : Bordas S. A. (99,8 % des parts).

Directeur de la publication : J. LISSARRAGUE. Responsable de la Rédaction : P. COLLET.