ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

ALAIN BACHELOT
VESSELIN PETKOV

Existence des opérateurs d'ondes pour les systèmes hyperboliques avec un potentiel périodique en temps

Annales de l'I. H. P., section A, tome 47, nº 4 (1987), p. 383-428
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1987__47_4_383_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 47, n° 4, 1987, p. 383-428. *Physique théorique*

Existence des opérateurs d'ondes pour les systèmes hyperboliques avec un potentiel périodique en temps

par

Alain BACHELOT
Université de Bordeaux I, U. E. R. de Mathématiques et Informatique,
Unité associée au C. N. R. S. 226, 351, Cours de la Libération,
33405 Talence Cedex, France

et

Vesselin PETKOV
Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences Bulgare,
P. O. Box 373, 1090 Sofia, Bulgarie

RÉSUMÉ. — On montre l'existence de l'opérateur de diffusion pour l'équation des ondes avec un potentiel périodique en temps et à support compact dans l'espace en dimension supérieure ou égale à 3, sous l'hypothèse que l'énergie est uniformément bornée. Le résultat clef est la décroissance de l'énergie locale. Le théorème RAGE de Georgiev et Petkov assure la décroissance faible et on prouve la convergence en norme par la compacité d'un opérateur d'évolution locale obtenue par l'analyse microlocale de la propagation des singularités. Si la dimension est impaire, la décroissance est exponentielle pour des données initiales à support compact appartenant à un sous-espace de codimension finie. On donne des conditions suffisantes pour que l'énergie reste bornée en étudiant le spectre du propagateur d'évolution locale. On étend ces résultats aux systèmes hermitiens du premier ordre à multiplicité quelconque, en présence d'un potentiel périodique comme le système de Dirac avec un champ électromagnétique périodique.

ABSTRACT. — We prove the existence of the scattering operator for the wave equation with a potential which is periodic in time and has compact support in space, in dimension greater than or equal to 3, provided the energy is uniformly bounded. The key result is the decay of the local energy. The RAGE theorem of Georgiev and Petkov implies weak decay and we get strong convergence by using the compactness of the local evolution operator, derived from a microlocal analysis of the propagation of singularities. In the case where the dimension is odd, the decay is exponential for initial data: *i*) with compact support and *ii*) included in a subspace of finite codimension. We give some sufficient conditions for the boundedness of the energy by studying the spectrum of the local evolution operator. We extend these results to first order hermitian systems with arbitrary multiplicity and with a periodic potential such as the Dirac system in a periodic electromagnetic field.

1. INTRODUCTION

Dans cet article on étudie l'existence et la complétude des opérateurs d'onde pour l'équation des ondes, et plus généralement pour les systèmes hermitiens du premier ordre, en présence d'un potentiel périodique en temps et local en espace. Nous avons traité le cas de la dimension impaire d'espace dans [*1*] et [*2*]. Dans le cas de la dimension quelconque, présenté ici, l'analyse microlocale de la propagation des singularités remplace l'utilisation du principe de Huygens.

Considérons l'équation :

$$u_{tt} - \Delta_x u = q(t,x)u, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 3 \leqslant n. \tag{1}$$

On suppose que le potentiel q satisfait l'hypothèse :

$$(\mathrm{H}_1) \quad \begin{aligned} &a) \text{ il existe } \mathrm{T} > 0 \text{ tel que pour tout } x, t,\ q(t+\mathrm{T}, x) = q(t,x); \\ &b) \text{ il existe } \rho > 0 \text{ tel que pour tout } x, t,\ q(t,x) = 0 \text{ si } |x| \geqslant \rho; \\ &c) \ q \text{ est dans } \mathrm{C}^0(\mathbb{R}_t, \mathrm{L}^\infty(\mathrm{R}^n_x)). \end{aligned}$$

Soit $\mathscr{H}$ le complété de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ pour la norme énergétique :

$$\|(f_1, f_2)\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2 dx.$$

Pour $n \geqslant 3$, $\mathscr{H}$ est un espace de distributions. On note $\mathrm{U}_0(t)$ le groupe unitaire sur $\mathscr{H}$ associé au problème de Cauchy libre :

$$u_{tt} - \Delta_x u = 0, \qquad u(0,x) = f_1(x), \qquad u_t(0,x) = f_2(x); \tag{2}$$

c'est-à-dire :

$$(u(t), u_t(t)) = \mathrm{U}_0(t) \quad (f_1, f_2)$$

et

$$U_0(t) = e^{itA}$$

où

$$A = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta_x & 0 \end{pmatrix}$$

est un opérateur autoadjoint sur $\mathscr{H}$ de domaine :

$$\{ (f_1, f_2) \in \mathscr{H} / \Delta f_1 \in L^2(\mathbb{R}^n), \qquad \nabla f_2 \in L^2(\mathbb{R}^n) \}.$$

On considère le problème de Cauchy perturbé associé à (1) :

(3) $$u_{tt} - \Delta_x u = q(t, x)u, \qquad u(s, x) = f_1(x), \qquad u_t(s, x) = f_2(x).$$

Sous l'hypothèse (H_1), étant donné $f = (f_1, f_2)$ dans $\mathscr{H}$, il existe une unique solution u de (3) telle que $(u(t), u_t(t))$ soit dans $C^0(\mathbb{R}, \mathscr{H})$; la preuve est standard : on résout localement en temps par le théorème de point fixe et on globalise par une estimation d'énergie à l'aide du lemme de Gronwall, inégalité (9) ci-dessous. On note $U(t, s)$ le propagateur associé à (3) et défini par :

$$U(t, s)f = (u(t), u_t(t)) ;$$

on vérifie aisément les propriétés suivantes :

(4) $$\frac{d}{dt} U(t, s)f = iAU(t, s)f + Q(t)U(t, s)f, \qquad U(s, s) = Id,$$

où

(5) $$Q(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q(t) & 0 \end{pmatrix}$$

est un opérateur borné sur $\mathscr{H}$ pour $n \geqslant 3$;

(6) $$\frac{d}{ds} U(t, s)f = -iU(t, s)Af - U(t, s)Q(s)f$$

(7) $$\forall t, r, s \qquad U(t, s)U(s, r) = U(t, r)$$

(8) $$\forall t, s \qquad U(t+T, s+T) = U(t, s)$$

(9) $$\| U(t, s) \| \leqslant \beta e^{\alpha|t-s|}, \qquad 0 < \beta, \quad 0 \leqslant \alpha.$$

On s'intéresse à l'existence des opérateurs W_- et W définis par :

(10) $$W_- f = \lim_{t \to +\infty} U(0, -t)U_0(-t)f$$

(11) $$Wf = \lim_{t \to +\infty} U_0(-t)U(t, 0)f.$$

(10) exprime que le problème de Cauchy (3) est bien posé pour $s = -\infty$ et (11) signifie que la solution de (3) est asymptotiquement libre. Deux conditions nécessaires pour que W existe sont que :

a) l'énergie totale de la solution u de (3) donnée par $\| U(t, s)f \|$ reste bornée, *b*) l'énergie locale dans toute boule de rayon $R > \rho$ définie par :

$$\| U(t, s)f \|_{E_R}^2 = \int_{|x| \leqslant R} (|\nabla_x u(t, x)|^2 + |u_t(t, x)|^2) dx \tag{12}$$

tende vers 0 quand $|t|$ tend vers l'infini.

Nous montrons dans ce travail qu'une condition suffisante d'existence des opérateurs W_- et W est que l'énergie reste uniformément bornée :

$$(H_2) \begin{cases} \text{Il existe } C_0 > 0 \text{ tel que pour tout } f \text{ dans } \mathscr{H} \text{ et tout } t \geqslant s \text{ dans } \mathbb{R} \\ \text{on a : } \| U(t,s)f \| \leqslant C_0 \| f \|. \end{cases}$$

G. Perla-Menzala [*16*] [*17*] a montré que s'il existe une fonction $g(|x|)$ telle que :

$$g'' \leqslant 0, \qquad 0 \leqslant rg' \leqslant g \leqslant \varepsilon < 1, \qquad r = |x|$$

et si q vérifie :

$$0 \leqslant q, \qquad q_t + 2g'q + gq_r \leqslant (r^{-1}g - g')r^{-2}c - (2r)^{-1}(n-1)g'' \tag{13}$$

où $c = 2^{-1}(n-1)(n-3)$, $3 \leqslant n$ impair, alors (H_2) est satisfaite. Voici deux exemples de potentiel vérifiant (H_1) et (H_2) :

EXEMPLE 1. — Soit φ une fonction positive C^1 sur $\mathbb{R}^n$ à support compact telle que :

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{n-1}{2} \frac{1}{|x|^2}, \qquad \varphi_r \leqslant 0 \,;$$

alors pour ω assez petit, le potentiel q défini par :

$$q(t, x) = \sin^2(\omega t)\varphi(x)$$

vérifie (13) avec $g(x) = 2\varepsilon\pi^{-1} \operatorname{Arctg}(1 + |x|)$ et l'hypothèse (H_2) est satisfaite.

EXEMPLE 2. — On choisit une fonction V, positive, C^1 sur $\mathbb{R}^n$, nulle pour $|x| \geqslant R$ et telle que $V_r \leqslant 0$, et une fonction périodique réelle θ vérifiant :

$$0 < m \leqslant \theta(t), \qquad |\theta'(t)| < mR^{-1}\theta(t) \,;$$

on pose :

$$q(t, x) = V(\theta(t)x)$$

alors (13) est satisfaite pour $g(|x|) = m$ assez petit.

Remarquons qu'on ne suppose pas que le potentiel soit « petit », mais seulement sa variation en temps.

Pour que la condition de décroissance de l'énergie locale soit remplie, il faut écarter certaines données initiales. On définit l'opérateur de monodromie V par :

$$V = U(T, 0) \,; \tag{14}$$

l'hypothèse (H_2) implique que V est un opérateur à puissances bornées et donc son rayon spectral est inférieur ou égal à 1 et il en va de même pour l'adjoint de V noté V*. On désigne par $\mathcal{F}_b$ (respectivement $\mathcal{H}_b$) le sous-espace de $\mathcal{H}$ engendré par les vecteurs propres de V (respectivement de V*) associées aux valeurs propres de module 1. On voit facilement que si $f \neq 0$ est dans $\mathcal{F}_b \cup \mathcal{H}_b$, l'énergie locale de la solution de (3) de donnée initiale f ne tend pas vers 0.

Dans la deuxième partie nous montrons, par la méthode de Cook, que W_- est défini de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}_b^\perp$, l'orthogonal de $\mathcal{H}_b$ dans $\mathcal{H}$; il est donc naturel de tenter de définir W sur cet espace.

Dans la troisième partie, on prouve que l'énergie locale des solutions de (3) à données initiales dans $\mathcal{H}_b^\perp$ tend vers zéro en moyenne quadratique. L'outil principal est le théorème de type RAGE de Georgiev et Petkov [*10*] qui assure la décroissance faible. Le point clef, pour obtenir la décroissance en norme, est la compacité de l'opérateur d'évolution local $\varphi U(t, 0)P_-^a$, pour t assez grand, où φ est une fonction de troncature et $P_\pm^a$ est projecteur sur l'orthogonal de l'espace de Lax et Phillips $D_\pm^a$ définis par :

$$(15) \qquad D_\pm^a = \{ f \in \mathcal{H} / U_0(t) f = 0 \quad \text{pour} \quad |x| \leqslant \pm t + a \}.$$

L'analyse microlocale de la propagation des singularités permet de prouver que $\varphi U(t, 0)P_-^a$ est limite forte d'une suite d'opérateurs régularisants; on en déduit la compacité par le théorème de Rellich-Kondrasov. Si la dimension est impaire, la décroissance de l'énergie locale pour f dans $\mathcal{H}_b^\perp$ et à support compact est en fait exponentielle. Pour démontrer cela, on remplace l'opérateur $\varphi U(t, 0)P_-^a$, qui n'est pas un propagateur, par le célèbre propagateur d'évolution locale $Z^a(t, s)$ défini par :

$$(16) \qquad s \leqslant t, \qquad Z^a(t, s) = P_+^a U(t, s) P_-^a$$

et on montre que, pour t assez grand, $Z^a(t, 0)$ est strictement contractant sur $\mathcal{H}_b^\perp$.

La décroissance de l'énergie locale, au sens de Césaro, et l'uniformité de l'inégalité d'énergie dans (H_2) permettent de montrer, dans la quatrième partie, que les solutions de (3) à données initiales dans $\mathcal{H}_b^\perp$ sont dispersives, i. e. pour tout $\varepsilon > 0$ il existe s et τ assez grands tels que :

$$\sup_{t \geqslant \tau} \| U(t, 0) f - U_0(t - s) U(s, 0) f \| \leqslant \varepsilon .$$

On en déduit l'existence de W sur $\mathcal{H}_b^\perp$ et de $S = W \circ W_-$ sur $\mathcal{H}$.

Dans la cinquième partie on montre, dans le cas de la dimension impaire, que $\mathcal{F}_b$ et $\mathcal{H}_b$ sont des sous-espaces de même dimension finie, et, de plus, si $V \mid \mathcal{H}_b$ ou si $V^* \mid \mathcal{F}_b$ est une contraction, alors ces deux espaces sont confondus.

Dans la sixième partie, on étudie le spectre de V, V* et $Z = Z^\rho(T, 0)$ quand l'hypothèse (H_2) n'est pas satisfaite. Les valeurs spectrales de V, de module supérieur à 1, sont des valeurs propres de multiplicité finie. Si on suppose que l'énergie locale reste bornée, le spectre de V est inclus dans $\{ z / |z| \leqslant 1 \}$ et une condition suffisante pour que (H_2) soit vérifiée est que l'énergie locale tende vers 0 au sens de Césaro quand t tend vers l'infini. Si on suppose que l'énergie des solutions à données initiales dans D^{ρ}_{-} reste bornée, alors V est un opérateur à puissances bornées sur un sous-espace de $\mathcal{H}$ de codimension finie.

Dans la septième partie, on établit l'existence des opérateurs W_-, W et $S = W \circ W_-$ pour les systèmes hermitiens du premier ordre en présence d'un potentiel périodique. L'hypothèse de symétrie assure que le propagateur $U(t, s)$ est unitaire et donc (H_2) est trivialement vérifiée. En revanche, la preuve de la compacité de $\varphi U(t, 0)P^{a}_{-}$ est plus délicate même dans le cas de la dimension impaire, car d'une part, la solution d'un système hyperbolique du premier ordre $\mathcal{L}u = f$ n'est pas plus régulière que f, et d'autre part, on ne fait pas l'hypothèse de multiplicité constante. On utilise l'analyse microlocale de la propagation des singularités pour examiner la régularité de la solution pour $|x| \leqslant a$, $t > 2aC_{\min}^{-1}$ avec une donnée initiale à support dans $\{ |x| \leqslant a \}$; cette étude est menée dans l'appendice I. Dans l'appendice II, on donne une démonstration du fait que le nombre et les multiplicités des valeurs propres distinctes de $\sum_{i=1}^{n} \omega_i A_i$, $\omega \in S^{n-1}$, sont presque partout constants sur S^{n-1}.

II. EXISTENCE DE L'OPÉRATEUR W_-

Pour montrer que $U(0, -t)U_0(-t)f$ converge dans $\mathcal{H}$ quand $|t| \to \infty$, il suffit de montrer que :

$$\left\| \frac{d}{dt}(U(0, -t)U_0(-t)f) \right\|, \qquad f \in D(A),$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (méthode de Cook). On sait que :

$$\frac{d}{dt}(U(0, -t)U_0(-t))f = U(0, -t)Q(-t)U_0(-t)f$$

et on applique les hypothèses (H_1) et (H_2):

$$\left\| \frac{d}{dt}(U(0, -t)U_0(-t)f \right\| \leqslant C \| Q(-t)U_0(-t)f) \| .$$

A présent, remarquons que si g est une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dont le support soit disjoint de $\{ 0 \}$, la fonction

$$F(t, x) = \int e^{i(t|\xi| + x \cdot \xi)} g(\xi) d\xi$$

décroît comme $|t|^{-N}$ pour tout N, uniformément par rapport à $|x| \leqslant R$; en effet :

$$F(t, x) = \int_{\omega \in S^{n-1}} \left(\int_0^\infty e^{it\rho(t+x.\omega)} g(\rho\omega)\rho^{n-1} d\rho \right) d\omega$$

et on intègre N fois par parties l'intégrale en ρ en notant que pour $|t| \geqslant 2R$ on a $|t + x \cdot \omega| \geqslant |t|/2$ si $|x| \leqslant R$. On en déduit que si f est dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ et si 0 n'est pas dans le support de sa transformée de Fourier, alors $\| Q(-t)U_0(-t)f \|$ est un $O(|t|^{-N})$ pour tout N, ce qui montre que W_- est défini sur un sous-espace dense de $\mathscr{H}$; or (H_2) implique que :

$$\| W_- f \| \leqslant C_0 \| f \| .$$

Donc $W_- f$ existe pour tout f de $\mathscr{H}$. Soit à présent un vecteur propre φ de V^* associé à une valeur propre λ de module 1. On a :

$$\langle U(0, -nT)U_0(-nT)f, \varphi \rangle = \bar{\lambda}^n \langle U_0(-nT)f, \varphi \rangle .$$

Comme le spectre ponctuel de A est vide, on sait que $U_0(t)f$ tend faiblement vers O dans $\mathscr{H}$ quand $|t| \to \infty$; on en déduit que $W_- f$ est orthogonal à $\mathscr{H}_b$. Nous concluons en énonçant le :

THÉORÈME 1. — *Sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *l'opérateur* W_- *est défini pour tout f dans* $\mathscr{H}$ *et on a la relation*:

(17) $$\overline{\operatorname{Im} W_-} \subset \mathscr{H}_b^\perp .$$

III. DÉCROISSANCE DE L'ÉNERGIE LOCALE

THÉORÈME 2. — *On suppose que n est supérieur ou égal à 3 et que les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *sont vérifiées. Alors pour tout* φ *dans* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *et tout f dans* $\mathscr{H}_b^\perp$ *on a* :

(18) $$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \| \varphi U(mT, 0)f \|^2 = 0 .$$

COROLLAIRE 1. — *Sous les mêmes conditions et pour tout* t_0 *on a* :

(19) $$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \| \varphi U(s + t_0, 0)f \|^2 \quad ds = 0 .$$

Si la dimension est impaire, la décroissance est plus rapide :

THÉORÈME 3. — *Sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *n étant* impair $\geqslant 3$, *on a, pour tout f dans* $\mathscr{H}_b^\perp$ *et tout* φ *dans* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$:

(20) $$\lim_{t \to \infty} \| \varphi U(t, 0)f \| = 0 ;$$

si, de plus, f est un élément de $\mathscr{H}_b^\perp$ à support inclus dans $\{ |x| \leqslant R \}$, on obtient :

(21) $$\| \varphi U(t, 0) f \| \leqslant c e^{-\delta t} \| f \|_{E_R}, \quad 0 < \delta .$$

où les constantes c et δ sont indépendantes de f.

On emploiera fréquemment le résultat suivant :
si f appartient à D_+^a ou si g est dans D_-^a, pour tout $s \leqslant t$ et $a \geqslant \rho$ on a :

(22) $$\langle U(t, s) f, g \rangle = \langle f, U(s, t) g \rangle .$$

En effet, si f est dans D_+^a, $U(t, s)f = U_0(t-s)f$ qui est nul pour $|x| \leqslant t-s+a$. Or, pour $|x| \geqslant t-s+a$, $g = U_0(t-s)U(s, t)g$, donc :

$$\langle U(t, s) f, g \rangle = \langle U_0(t-s) f, U_0(t-s) U(s, t) g \rangle = \langle f, U(s, t) g \rangle .$$

De même, si g est dans D_-^a, $U(s, t)g = U_0(s-t)g$ qui est nul pour $|x| \leqslant t-s+a$ et on a aussi $f = U_0(s-t)U(t, s)f$ pour $|x| \geqslant t-s+a$; on obtient alors :

$$\langle f, U(s, t) g \rangle = \langle U_0(s-t) U(t, s) f, U_0(s-t) g \rangle = \langle U(t, s) f, g \rangle .$$

On en déduit en particulier que si n est impair, l'opérateur $Z^a(t, s) = P_+^a U(t, s) P_-^a$ est un propagateur, i. e. :

(23) $$t \geqslant s \geqslant r \Rightarrow Z^a(t, s) Z^a(s, r) = Z^a(t, r) .$$

Pour établir (23), on remarque tout d'abord que $Z^a(s, r)f$ est orthogonal à D_+^a ; soit f_- dans D_-^a ; on a d'après (22) :

$$\langle Z^a(s, r) f, f_- \rangle = \langle P_-^a f, U(r, s) f_- \rangle = \langle P_-^a f, U_0(r-s) f_- \rangle = 0 .$$

Donc,

$$Z^a(t, s) Z^a(s, r) f = P_+^a U(t, s) P_+^a U(s, r) P_-^a f .$$

Or,

$$U(t, s) |_{D_+^a} = U_0(t-s) |_{D_+^a}$$

ce qui implique que $P_+^a U(t, s) P_+^a = P_+^a U(t, s)$.

Finalement :

$$Z^a(t, s) Z^a(s, r) f = P_+^a U(t, s) U(s, r) P_-^a f = Z^a(t, r) f .$$

On montre aisément que Z^a vérifie également :

(24) $$s \leqslant t \Rightarrow \operatorname{Im} Z^a(t, s) \subset K^a = (D_+^a \oplus D_-^a)^\perp$$

(25) $$Z^a(t, t) |_{K^a} = \mathrm{Id} |_{K^a}$$

(26) $$\| Z^a(t, s) \| \leqslant c e^{\delta |t-s|}, \qquad 0 \leqslant \delta$$

(27) $$Z^a(t + T, s + T) = Z^a(t, s) .$$

Ces résultats préliminaires sont classiques (voir [5]).

LEMME III.1. — *Soit $n \geqslant 2$. Pour tout f dans $(D_-^a)^\perp$, $U_0(t + 2a) f$ est C^∞ pour $|x| < a + t$, $t \geqslant 0$.*

Preuve. — Le cas où n est impair est évident et on suppose n pair $\geqslant 2$. Nous rappelons les représentations translatives $\mathscr{R}_\pm$ de $U_0(t)$ (voir [*14*] [*20*]) : on définit sur $\mathbb{R}_s$ les distributions $p_\pm$ en donnant leur transformée de Fourier :

$$\hat{p}_\pm(\sigma) = \begin{cases} \sigma^{(n-1)/2}, & \sigma > 0 \\ -\,|\,\sigma\,|^{(n-1)/2} e^{\pm i\pi(n-3)/2}, & \sigma < 0 . \end{cases}$$

On pose :

$$\mathscr{R}f = \partial_t \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2, \qquad f = (f_1, f_2)$$

où $\tilde{f}_i$ est la transformée de Radon de f et on introduit les opérateurs $\mathscr{R}_\pm$:

$$\mathscr{R}_\pm f = d_n p_\pm \underset{s}{*} \mathscr{R}f, \qquad d_n = 2^{-n/2}\pi^{(1-n)/2} .$$

On pose $k = \mathscr{R}_- f$ et si f est dans $(D^a_-)^\perp$, $k(s, \omega) = 0$ pour $s < -a$, c'est-à-dire :

$$\mathscr{R}_- U_0(t + 2a)\mathscr{R}_-^{-1} k = T_{t+2a} k = h(s, \omega) = 0$$

pour $s < a + t$, où T_{t+2a} désigne l'opérateur de translation de $t + 2a$ sur $L^2(\mathbb{R}_s \times S^{n+1}_\omega)$. On note $K = \mathscr{R}_+ \mathscr{R}_-^{-1}$ la transformation de Hilbert partielle par rapport à s dans $L^2(\mathbb{R}_s \times S^{n+1}_\omega)$:

$$\imath \in L^2(\mathbb{R}_s \times S^{n-1}_\omega), \qquad \mathscr{F}_s(K\imath)(\sigma, \omega) = \text{signe}\,(\sigma)\mathscr{F}_s(\imath)(\sigma, \omega) .$$

Remarquons que les opérateurs K et $p_\pm *$ ne sont pas pseudolocaux sur $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ donc *a fortiori* ne sont pas microlocaux ; ils sont néanmoins microlocaux elliptiques en dehors de l'ensemble des directions « tangentielles » $\mathscr{T}$:

$$\mathscr{T} = \{ (s, \omega, \sigma, \omega) \in T^*(\mathbb{R} \times S^{n-1}) ; \sigma = 0 \}$$
$$\mathrm{WF}(K\imath) = \mathrm{WF}(p_\pm * \imath) = \mathrm{WF}(\imath) \quad \text{si} \quad \mathrm{WF}(\imath) \cap \mathscr{T} = \varnothing .$$

Montrons que $\mathrm{WF}(h) \cap \mathscr{T} = \varnothing$. Comme h et k diffèrent d'une translation en s, il suffit de voir que $\mathrm{WF}(k) \cap \mathscr{T} = \varnothing$. On sait que $\mathscr{R}$ est un opérateur intégral de Fourier tel que :

$$\mathrm{WF}'(\mathscr{R}) = \{ (s, \omega, x ; \sigma, w, \xi) ; s = x \cdot \omega, \xi = \sigma\omega, w = -\,\sigma(x - (x \cdot \omega)\omega) \} .$$

Donc $\mathrm{WF}(\mathscr{R}f) \cap \mathscr{T} = \varnothing$ et on en conclut que $\mathrm{WF}(k) \cap \mathscr{T} = \varnothing$ et donc $\mathrm{WF}(Kk) \cap \mathscr{T} = \varnothing$.

On en déduit que $\mathrm{WF}(Kh) = \mathrm{WF}(h)$ et que Kh est C^∞ pour $s < a + t$. On écrit que $Kh = h_1 + h_2$ avec

$$h_1 \in (C^\infty \cap L^2)(\mathbb{R}_s \times S^{n-1}_\omega) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{supp} h_2 \subset \{ s > a + t - \varepsilon \}, \quad \varepsilon > 0 .$$

On obtient que $U_0(t + 2a)f = (\mathscr{R}_+)^{-1}h_1 + (\mathscr{R}_+)^{-1}h_2$. Or $(\mathscr{R}_+)^{-1}h_1$ est C^∞ et $(\mathscr{R}_+)^{-1}h_2$ est dans $D^{a+t-\varepsilon}_+$. On en conclut que $U_0(t + 2a)f$ est C^∞ pour $|\,x\,| \leqslant a + t - \varepsilon$ ce qui achève la preuve du lemme.

LEMME III.2. — *On suppose que* (H_1) *est vérifiée. Soit* φ *l'opérateur* *de multiplication par une fonction* C^∞ *à support dans* $\{ |x| < a \}$, $\rho < a$. *Alors* $\varphi U(t, 0)P_-^a$ *est un opérateur compact sur* $\mathscr{H}$ *pour* $t \geqslant 2a$.

Preuve. — On écrit :

$$\varphi U(t, 0)P_-^a f = \varphi U_0(t)P_-^a f + \int_0^t \varphi U_0(t - s)Q(s)U(s, 0)P_-^a f \, ds .$$

Tout d'abord le lemme III.1 et le théorème du graphe fermé montrent que pour $t \geqslant 2a$, $\varphi U_0(t)P_-^a$ est un opérateur continu de $\mathscr{H}$ dans $(C^\infty_{\text{compact}}(\mathbb{R}^n))^2$; c'est donc un opérateur compact de $\mathscr{H}$ par le théorème de Rellich-Kondrasov. A présent considérons une partie bornée $\mathscr{B}$ de $\mathscr{H}$; on choisit une fonction C^∞ à support compact $\chi(x)$, égale à 1 sur $\{ x/|x| \leqslant \rho \}$. L'estimation (9) donne

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \chi & 0 \end{pmatrix} U(s, 0)P_-^a f \right\|_{H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant M(t_0) \tag{28}$$

$$\left\| \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \chi & 0 \end{pmatrix} U(s, 0)P_-^a f \right\| \leqslant M(t_0) \tag{29}$$

où $M(t_0)$ est une constante indépendante de s dans $[0, t_0]$ et de f dans $\mathscr{B}$. On déduit de (28) par le théorème de Rellich-Kondrasov que, pour tout s dans $[0, t_0]$, l'ensemble $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \chi & 0 \end{pmatrix} U(s, 0)P_-^a f : f \in \mathscr{B} \right\}$ est précompact dans $\mathscr{H}$ et (29) montre que l'ensemble $\left\{ s \in [0, t_0] \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \chi & 0 \end{pmatrix} U(s, 0)P_-^a f \right\}$ est équicontinu ; le théorème d'Ascoli implique alors que c'est une partie précompacte de $C^0([0, t_0], \mathscr{H})$ et il en est donc de même pour l'ensemble $\left\{ t \in [0, t_0] \to \int_0^t \varphi U_0(t - s)Q(s)U(s, 0)P_-^a f \, ds, \ f \in \mathscr{B} \right\}$. On conclut que $\left\{ \int_0^t \varphi U_0(t - s)Q(s)U(s, 0)P_-^a f \, ds, \ f \in \mathscr{B} \right\}$ est précompact dans $\mathscr{H}$, ce qui achève la démonstration.

Si n est impair on remarque que $P_+^a U_0(t)P_-^a = 0$ pour $t \geqslant 2a$ et on obtient le :

LEMME III.3. — *On suppose que n est impair* $\geqslant 3$ *et que q vérifie* (H_1). *Alors pour* $t \geqslant 2a$, $\rho \leqslant a$, *l'opérateur* $Z^a(t, 0) = P_+^a U(t, 0)P_-^a$, *est compact.*

Preuve du théorème 2.

On voit aisément que :

$$\begin{aligned} \varphi U(kT, 0)f = {} & (\varphi U(mT, 0)P_-^a)U((k - m)T, 0)f \\ & + \varphi U(mT, 0)(I - P_-^a)U((k - m)T, 0)f. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$; on choisit g dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\| f - g \| < \varepsilon$

et $a > \rho$ tel que le support de g soit dans $\{ |x| < a \}$. L'hypothèse (H_2) montre qu'il existe $C > 0$ indépendante de k et m telle que :

$$\| \varphi U(mT, 0)(I - P^a_-)U((k - m)T, 0)(f - g) \| \leqslant C\varepsilon .$$

D'autre part, pour tout $\psi \in \mathscr{H}$ on a par (22) :

$$\langle (I - P^a_-)U((k - m)T, 0)g, \psi \rangle = \langle g, U(0, (k - m)T)(I - P^a_-)\psi \rangle$$

et pour $k \geqslant m$

$$U(0, (k - m)T)(I - P^a_-)\psi = U_0((m - k)T)(I - P^a_-)\psi \in D^a_-$$

donc

$$\langle g, U(0, (k - m)T)(I - P^a_-)\psi \rangle = 0$$

et $(I - P^a_-)U((k - m)T, 0)g$ est nul. On en conclut que pour $k \geqslant m$:

$$(30) \qquad \| \varphi U(kT, 0)f \| \leqslant C\varepsilon + \| (\varphi U(mT, 0)P^a_-)U((k - m)T, 0)f \| .$$

On choisit m pour que $mT > 2a$. Le lemme III.2 assure que $\varphi U(mT, 0)P^a_-$ est un opérateur compact et le théorème RAGE de Georgiev et Petkov [*10*] implique que :

$$(31) \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \| \varphi U(mT, 0)P^a_- U((k - m)T, 0)f \|^2 = 0 .$$

Le théorème 2 suit maintenant de (30) et (31).

Pour obtenir (19), on remarque que :

$$(32) \quad \frac{1}{t}\int_0^t \| \varphi U(s+t_0, 0)f \|^2 ds \leqslant c\left(\frac{1}{t} + \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \| \varphi U_s(kT, 0)f_s \|^2 ds\right)$$

où $NT \leqslant t < (N + 1)T$, U_s est le propagateur associé à (3) pour le potentiel $q_s(t, x) = q(t + t_0 + s, x)$ et $f_s = U(s + t_0, 0)f$. Comme f est dans $\mathscr{H}_b^\perp$, f_s est orthogonal à l'espace engendré par les vecteurs propres de $U_s(t, 0)^*$ associés aux valeurs propres de module 1 ; en effet, on a $U_s(t, 0) = U(t + t_0 + s, t_0 + s)$ et $f_s = U(s + t_0, 0)f$. On a donc :

$$\langle f_s, g \rangle = \langle f, U(s + t_0, 0)^*g \rangle .$$

Or, on obtient facilement que :

$$V^*U(s + t_0, 0)^*g = U(s + t_0, 0)^*U(s + t_0 + T, s + t_0)^*g .$$

Donc si $U_s(T, 0)^*g = \lambda g$, $U(s + t_0, 0)^*g$ est dans $\mathscr{H}_b$, on conclut que si f est dans $\mathscr{H}_b^\perp$, f_s est orthogonal à g. On applique le théorème 2 à U_s et f_s et en tenant compte de (H_2) le théorème de convergence dominée implique que le second membre de (32) tend vers 0 ce qui montre (19). Q. E. D.

LEMME III.4. — *On suppose que* (H_1) *est vérifiée. Alors, pour tout* $a \geqslant \rho$,

D_+^a *et* D_-^a *sont inclus dans* $\mathscr{H}_b^\perp$. *Si, de plus, n est impair* $\geqslant 3$, $Z^a(T, 0)$ *invarie* $\mathscr{H}_b^\perp$.

Preuve. — Soient f dans D_+^a et $g \neq 0$ vérifiant $V^*g = \lambda g$, $|\lambda| = 1$. On a :

$$\langle U(mT, 0)f, g \rangle = \langle f, V^{*m}g \rangle = \bar{\lambda}^m \langle f, g \rangle .$$

D'autre part,

$$U(mT, 0)f = U_0(mT)f \rightharpoonup 0, \quad m \to \infty .$$

On en déduit que $\langle f, g \rangle$ est nul.

Si f est dans D_-^a on a : $f = U(0, -mT)U_0(-mT)f$ et donc :

$$|\langle f, g \rangle| = |\langle U_0(-mT)f, V^{*m}g \rangle| = |\langle U_0(-mT)f, g \rangle|$$

et on conclut encore par la convergence faible de $U_0(-mT)f$. Si n est impair, on écrit $\mathscr{H}$ comme la somme orthogonale :

$$\mathscr{H} = D_+^a \oplus D_-^a \oplus K^a .$$

Si f est dans $\mathscr{H}_b^\perp$ on a :

$$f = f_+ + f_- + g, \qquad f_\pm \in D_\pm^a, \qquad g \in K^a .$$

Ce qui précède montre que g est dans $\mathscr{H}_b^\perp$ et il en est de même de $P_\mp^a f = f_\pm + g$. $\mathscr{H}_b^\perp$ est donc invariant par $P_\pm^a$ et V, donc par $Z^a(T, 0)$.

PROPOSITION III.1. — *On suppose que n est impair* $\geqslant 3$ *et que les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *sont vérifiées. Alors pour tout* $a \geqslant \rho$, *il existe un entier non nul* m_a *tel que* :

$$\| Z^a(m_a T, 0 \|_{\mathscr{L}(\mathscr{H}_b^\perp, \mathscr{H}_b^\perp)} < 1 . \tag{33}$$

Preuve. — Le lemme III.3 assure l'existence d'un entier m_0 tel que $Z^a(m_0 T, 0)$ soit compact. On applique l'hypothèse (H_2) :

$$\| (Z^a(m_0 T, 0))^k \|_{\mathscr{L}(\mathscr{H}_b^\perp, \mathscr{H}_b^\perp)}^{1/k} = \| Z^a(km_0 T, 0) \|_{\mathscr{L}(\mathscr{H}_b^\perp, \mathscr{H}_b^\perp)}^{1/k} \leqslant C_0^{1/k} .$$

Donc le rayon spectral de $Z^a(m_0 T, 0)$ est inférieur ou égal à 1. Supposons qu'il existe f dans $\mathscr{H}_b^\perp$, $f \neq 0$, tel que $Z^a(m_0 T, 0)f = \lambda f$, $|\lambda| = 1$. Il est clair que f est orthogonal à D_+^a ; f est aussi orthogonal à D_-^a ; soit en effet g dans D_-^a ; on utilise (22) :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle P_-^a f, U(0, m_0 T) P_+^a g \rangle$$

et

$$g \in D_-^a \Rightarrow U(0, m_0 T) P_+^a g = U_0(-m_0 T) g \in D_-^a .$$

Finalement on conclut que :

$$f \in (D_+^a)^\perp \cap (D_-^a)^\perp . \tag{34}$$

Remarquons d'autre part que :

$$0 \leqslant \iota \leqslant m_0 - 1 \Rightarrow Z^a(\iota T, 0)f \neq 0 . \tag{35}$$

A présent évaluons $Z^a(m_0 T, 0)V^k f$ en tenant compte de (22) et (34) :

$$\begin{aligned} Z^a(m_0T,0)V^k f &= P^a_+ U(m_0T,0)P^a_- P^a_+ U(kT,0)P^a_- f \\ &= Z^a(kT,0)Z^a(m_0,T,0)f = \lambda Z^a(kT,0)f. \end{aligned}$$

Or, pour $k = jm_0 + \imath$, $0 \leqslant \imath \leqslant m_0 - 1$,

$$\begin{aligned} \| Z^a(kT,0)f \| &= \| Z^a(\imath,0)(Z^a(m_0T,0))^j f \| \\ &= \| Z^a(\imath,0)f \| . \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$(36) \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \| Z^a(m_0T,0)V^k f \|^2 = \frac{1}{m_0} \sum_{\imath=0}^{m_0-1} \| Z^a(\imath,0)f \|^2 .$$

Or, d'après le théorème de type RAGE de [*10*] la limite (36) est nulle et donc $Z^a(\imath T, 0)f = 0$ pour $0 \leqslant \imath \leqslant m_0 - 1$ ce qui est en contradiction avec (35). Le rayon spectral de $Z^a(m_0T, 0)$ est donc strictement inférieur à 1 et par la formule du rayon spectral, il existe un multiple m_a de m_0 tel que $\| Z^a(m_aT, 0) \| < 1$.

Preuve du théorème 3.

La proposition assure l'existence de $\delta > 0$ tel que :

$$\| Z^a(m_aT,0) \|_{\mathscr{L}(\mathscr{H}_b^\perp, \mathscr{H}_b^\perp)} \leqslant e^{-\delta m_a T} .$$

Pour $km_aT \leqslant t < (k+1)m_aT$ on trouve :

$$\begin{aligned} \| Z^a(t,0) \|_{\mathscr{L}(\mathscr{H}_b^\perp, \mathscr{H})} &= \| Z^a(t, km_aT)Z^a(km_aT,0) \|_{\mathscr{L}(\mathscr{H}_b^\perp, \mathscr{H})} \\ &\leqslant ce^{-k\delta m_a T} \leqslant c' e^{-\delta t} . \end{aligned}$$

On choisit $a = \operatorname{Sup}(R, R_1, \rho)$ et pour f dans $\mathscr{H}_b^\perp$ à support inclus dans $\{ |x| \leqslant R \}$ et φ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ à support inclus dans $\{ |x| \leqslant R_1 \}$ on a :

$$\| \varphi U(t,0)f \| = \| \varphi Z^a(t,0)f \| \leqslant c \| Z^a(t,0)f \| \leqslant c' e^{-\delta t} \| f \| . \qquad \text{Q.E.D.}$$

De façon générale, f étant donné dans $\mathscr{H}_b^\perp$, pour $\varepsilon > 0$, on choisit g dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\| f - g \| \leqslant \varepsilon$ et $\operatorname{supp} g \subset \{ |x| \leqslant R \}$. On a alors :

$$U(t,0)f = U(t,0)P^a_- f + U(t,0)(\mathrm{Id} - P^a_-)(f-g) .$$

Donc,

$$\| \varphi U(t,0)f \| \leqslant \| \varphi Z^a(t,0)f \| C_0\varepsilon \leqslant c'' e^{-\delta t} \| f \| + C_0\varepsilon$$

C_0 ne dépendant pas de ε, la preuve est complète.

IV. EXISTENCE DE L'OPÉRATEUR W

THÉORÈME 4. — *Sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *et pour tout* $n \geqslant 3$, *la limite* Wf *définie par (11) existe pour tout* f *dans* $\mathscr{H}_b^\perp$ *et l'opérateur de diffusion* $S = W_0 W_-$ *est un opérateur borné défini sur* $\mathscr{H}$.

Preuve. — La démonstration repose sur la décroissance de l'énergie locale de la solution perturbée, assurée par le théorème 2, et sur l'intégrabilité par rapport au temps de l'énergie locale des solutions libres à données initiales à support compact.

LEMME IV.1. — *Soient* R, $R_1 > 0$ *et* $f = (f_1, f_2)$ *dans* $\mathcal{H}$ *tel que* $\operatorname{supp} f \subset \{ |x| \leqslant R_1 \}$ *on suppose* $n \geqslant 2$ *pair.*
Alors il existe $C_{R,R_1} > 0$ *ne dépendant que de* R *et* R_1 *telle que :*

$$\| U_0(t)f \|_{E_R} \leqslant C_{R,R_1}(1 + |t|)^{-n} \| f \|,$$
$$\| Q(t)U_0(t)f \| \leqslant C_{R,R_1}(1+|t|)^{-n+1} \| f \|.$$

Preuve. — On suppose que f est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On écrit $U_0(t)f = (u(t), u_t(t))$ et on a :

$$u(t, x) = C_n \int_{|x-y| \leqslant |t|} \frac{f_2(y)dy}{(t^2 - |x-y|^2)^{(n-1)/2}} + C_n \frac{\partial}{\partial t} \int_{|x-y| \leqslant |t|} \frac{f_1(y)dy}{(t^2 - |x-y|^2)^{(n-1)/2}}$$

où C_n est une constante dimensionnelle. Si $|t| > \sqrt{2}(R + R_1) + 1, |x| \leqslant R$ et $|y| \leqslant R_1$ on trouve que :

$$t^2 - |x - y|^2 \geqslant t^2 - (R + R_1)^2 \geqslant \frac{t^2}{2},$$

donc on voit aisément que :

$$|u(t, x)| \leqslant C|t|^{-n+1}(\| f_1 \|_{L^1} + \| f_2 \|_{L^2}),$$
$$|u_t(t, x)| \leqslant C|t|^{-n}(\| f_1 \|_{L^1} + \| f_2 \|_{L^2}).$$

et de même,

$$|\nabla_x u(t, x)| \leqslant C|t|^{-n}(\| f_1 \|_{L^1} + \| f_2 \|_{L^2}).$$

On sait que, pour f_1 à support dans $\{ |x| \leqslant R_1 \}$ on a :

$$\| f_1 \|_{L^1(|x| \leqslant R_1)} \leqslant C_{R_1} \| f_1 \|_{L^2(|x| \leqslant R_1)} \leqslant C'_{R_1} \| f \|_{E_{R_1}}$$

et on obtient (37). Q. E. D.

LEMME IV.2. — *On définit l'opérateur* $v_s(t)$ *par :*

$$v_s(t)f = U(t, 0)f - U_0(t - s)U(s, 0)f, \qquad t, \quad s \geqslant 0.$$

Alors, si f *appartient à* $\mathcal{H}_b^{\perp}$, *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* T_1 *et* $T_2 > 0$ *tels que :*

$$\sup_{t \geqslant T_2} \| v_{T_1}(t) f \| \leqslant \varepsilon. \tag{38}$$

Preuve. — On choisit g dans $\mathcal{H}$ tel que :

$$\operatorname{supp} g \subset \{ |x| \leqslant R \}, \qquad \rho \leqslant R, \qquad \| f - g \| \leqslant \frac{\varepsilon}{6C_0}.$$

On a alors grâce à l'hypothèse (H_2) :

$$\| v_s(t)f \| \leqslant \| v_s(t)g \| + \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'autre part, $v_s(t)g$ vérifie :

$$\frac{d}{dt} v_s(t) - iAv_s(t)g - Q(t)v_s(t)g = Q(t)U_0(t-s)U(s,0)g$$

et

$$v_s(s)g = 0.$$

Pour tout $d > 0$ on a donc :

$$v_s(t)g = U(t, s+d)v_s(s+d)g + \int_{s+d}^{t} U(t,\tau)Q(\tau)U_0(\tau - s)U(s,0)g d\tau$$

et en appliquant (H_1) et (H_2) :

$$\| v_s(t)g \| \leqslant C_0 \| v_s(s+d)f \| + \frac{\varepsilon}{3} + C \int_{s+d}^{t} \| Q(\tau)U_0(\tau - s)U(s,0)g \| d\tau$$

et finalement on obtient :

$$\text{(39)} \quad \| v_s(t)f \| \leqslant 2\frac{\varepsilon}{3} + C_0 \| v_s(s+d)f \| + C \int_{s+d}^{t} \| Q(\tau)U_0(\tau - s)U(s,0)g \| d\tau .$$

Posons $w_s(t)g = U_0(t-s)U(s,0)g$ si $t \geqslant s$ et $w_s(t)g = U(t,0)g$ si $t \leqslant s$; $w_s(t)g$ est solution de

$$\frac{d}{dt} w_s(t)g - iAw_s(t)g = 1_{]-\infty,s]}(t)Q(t)U(t,0)g, \quad w_s(0) = g.$$

On a donc :

$$\text{(40)} \qquad w_s(t)g = U_0(t)g + \int_0^s U_0(t-\sigma)Q(\sigma)U(\sigma,0)g d\sigma .$$

En tenant compte des hypothèses (H_1), (H_2) et du lemme IV.1, on obtient :

$$\text{(41)} \quad \| Q(t)w_s(t)g \| \leqslant C \| g \| (1+t-s)^{-n+2} \leqslant C(\| f \| + \varepsilon)(1+t-s)^{-n+2}.$$

On suppose $n \geqslant 4$ et on déduit de (39) et (41) que :

$$\text{(42)} \quad \| v_s(t)f \| \leqslant 2\frac{\varepsilon}{3} + C_0 \| v_s(s+d)f \| + C(\| f \| + \varepsilon)(1+d)^{-n+3}.$$

Si $n = 3$, $Q(t)w_s(t) = 0$ pour $t \geqslant s + 2R$; on choisit $d \geqslant 2R$ et (42) est vérifié. On conclut de (42) que, pour tout $n \geqslant 3$, il existe $d_\varepsilon > 0$ indépendant de $s > 0$ tel que pour tout $t \geqslant s + d_\varepsilon$, on a :

$$\text{(43)} \qquad \| v_s(t)f \| \leqslant 5\frac{\varepsilon}{6} + C_0 \| v_s(s+d_\varepsilon)f \| .$$

A présent remarquons que $v_s(s + d_\varepsilon)f = 0$ pour $|x| \geqslant \rho + d_\varepsilon$, donc pour tout $t \geqslant s + d_\varepsilon$:

$$\| v_s(t)f \| \leqslant 5\frac{\varepsilon}{6} + C_0 \| v_s(s + d_\varepsilon)f \|_{E_{\rho + d_\varepsilon}}.$$

Or, on a :

$$\| v_s(s + d_\varepsilon)f \|_{E_{\rho + d_\varepsilon}} \leqslant \| U(s + d_\varepsilon, 0)f \|_{E_{\rho + d_\varepsilon}} + \| U(s, 0)f \|_{E_{\rho + 2\varepsilon}}$$

donc, pour tout $\sigma > 0$,

$$\frac{1}{\sigma}\int_0^\sigma \| v_s(s + d_\varepsilon)f \|^2_{E_{\rho + d_\varepsilon}} ds \leqslant \frac{2}{\sigma}\int_0^\sigma \| U(s + d_\varepsilon, 0)f \|^2_{E_{\rho + d_\varepsilon}} ds + \frac{2}{\sigma}\int_0^\sigma \| U(s, 0)f \|^2_{E_{\rho + 2\varepsilon}} ds.$$

On en déduit, à l'aide du corollaire 1, qu'il existe $T_1 > 0$ tel que $\| v_{T_1}(T_1 + d_\varepsilon)f \|_{E_{\rho + d_\varepsilon}} < \dfrac{\varepsilon}{6C_0}$. On en conclut que pour tout $t \geqslant T_2 = T_1 + d_\varepsilon$ on a :

$$\| v_{T_1}(t)f \| \leqslant \varepsilon$$

ce qui achève la preuve du lemme IV.2.

Pour achever la démonstration du théorème 4, nous choisissons T_1 et T_2 comme précédemment, $\varepsilon > 0$ étant fixé. On évalue :

$$\begin{aligned} \| U_0(-t)U(t, 0)f - U_0(-s)U(s, 0)f \| &\leqslant \\ &\leqslant \| U_0(-t)U(t,0)f - U_0(-T_1)U(T_1,0)f \| + \\ &+ \| U_0(-T_1)U(T_1,0)f - U_0(-s)U(s,0)f \| \leqslant \\ &\leqslant \| v_{T_1}(t)f \| + \| v_{T_1}(s)f \| \leqslant 2\varepsilon \quad \text{si} \quad t, s \geqslant T_2 . \end{aligned}$$

Donc si f appartient à $\mathscr{H}_b^\perp$, $U_0(-t)U(t, 0)f$ converge dans $\mathscr{H}$ quand $t \to \infty$.

Q. E. D.

V. ÉTUDE DES ESPACES $\mathscr{F}_b$ ET $\mathscr{H}_b$ (n impair $\geqslant 3$)

Dans cette partie on montre que sous les hypothèses (H_1) et (H_2) les sous-espaces $\mathscr{F}_b$ et $\mathscr{H}_b$ sont de dimension finie, en les comparant à l'espace $\mathscr{L}_b^a$ engendré par les vecteurs propres de $Z^a(T, 0)$, $a \geqslant \rho$, associés à une valeur propre de module 1.

THÉORÈME 5. — *On suppose que* $n \geqslant 3$ *est impair et que les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *sont satisfaites. Alors pour tout* $a \geqslant \rho$ *on a :*

$$\dim \mathscr{F}_b = \dim \mathscr{H}_b = \dim \mathscr{L}_b^a < \infty \tag{44}$$

$$\mathscr{F}_b = \mathscr{L}_b^a. \tag{45}$$

Si on suppose de plus que la restriction de V *à* $\mathscr{F}_b$ *est une contraction, ou que la restriction de* V* *à* $\mathscr{H}_b$ *est une contraction, alors* :

$$\mathscr{F}_b = \mathscr{H}_b = \mathscr{L}_b^a. \tag{46}$$

Preuve. — Comme pour $\mathscr{H}_b$ dans le lemme III.4 on voit facilement que $\mathscr{F}_b$ est orthogonal à D_+^a et D_-^a. Si $Vf = \lambda f$, $|\lambda| = 1$ on a $P_{+,-}^a f = f$ et donc $Z^a(T, 0)f = \lambda f$ ce qui montre que :

$$\mathscr{F}_b \subset \mathscr{L}_b^a. \tag{47}$$

Pour établir (44) et (45) il suffit de vérifier que :

$$\dim \mathscr{L}_b^a \leqslant \dim \mathscr{H}_b \tag{48}$$

$$\dim \mathscr{H}_b \leqslant \dim \mathscr{F}_b. \tag{49}$$

Tout d'abord le lemme III.3 et le théorème de Riesz-Schauder impliquent que $\mathscr{L}_b^a$ est de dimension finie. Soit h dans $\mathscr{L}_b^a \cap \mathscr{H}_b^\perp$, $h \neq 0$. Puisque h est dans $\mathscr{L}_b^a$ on a :

$$\prod_{j=1}^{N} (Z^a(T, 0) - \lambda_j) \quad h = 0 \tag{50}$$

où les λ_j désignent les N valeurs propres distinctes de module 1 de $Z^a(T, 0)$. Le lemme III.4 assure que $\mathscr{H}_b^\perp \cap \mathscr{L}_b^a$ est invariant par $Z^a(T, 0)$; on déduit alors de (50) par une récurrence immédiate sur N qu'il existe un vecteur propre de $Z^a(T, 0)$ dans $\mathscr{H}_b^\perp$ associé à une valeur propre de module 1 ce qui est en contradiction avec la proposition III.1. Donc $\mathscr{H}_b^\perp \cap \mathscr{L}_b^a = \{0\}$ ce qui montre (48). Pour établir (49), on remarque que puisque V* est un opérateur à puissance bornée, d'après [*10*], il existe un opérateur auto-adjoint B tel que :

$$\operatorname{Ker} B = \{ \varphi \in \mathscr{H} / \lim_{m \to \infty} V^{*m} \varphi = 0 \}$$

$$V^* g = \lambda g, \qquad |\lambda| = 1 \Rightarrow VB^2 g = \bar{\lambda} B^2 g.$$

Considérons une famille (g_j) de vecteurs propres linéairement indépendants de V* associés à des valeurs propres λ_j, $|\lambda_j| = 1$. Si $\sum_j \alpha_j B^2 g_j = 0$ alors $\sum_j \alpha_j g_j$ est dans $\operatorname{Ker} B^2 = \operatorname{Ker} B$; donc

$$O = \lim_{m \to \infty} V^{*m}\Big(\sum_j \alpha_j g_j\Big) = \lim_{m \to \infty} \sum_j \alpha_j \lambda_j^m g_j$$

ce qui entraîne $\alpha_j = 0$. Donc la famille $(B^2 g_j)$ est une famille libre de $\mathscr{F}_b$ ce qui montre (49). Supposons à présent que la restriction de V* à $\mathscr{H}_b$

soit une contraction. Soit $h \neq 0$ tel que $Vh = \lambda h$, $|\lambda| = 1$. On écrit $h = f + g$, avec f dans $\mathcal{H}_b^\perp$ et g dans $\mathcal{H}_b$. On a alors :

$$Vg = \lambda f - Vf + \lambda g .$$

En notant que Vf est dans $\mathcal{H}_b^\perp$ on obtient :

$$\| g \|^2 = \langle Vg, \lambda g \rangle = \langle g, \lambda V^* g \rangle \leqslant \| g \|^2 .$$

Si $g = 0$, alors $h = f$ est dans $\mathcal{F}_b \cap \mathcal{H}_b^\perp$ qui est réduit à O puisque $\mathcal{F}_b = \mathcal{L}_b^a$. Si g n'est pas nul, on a $Vg = \lambda g$ donc $Vf = \lambda f$ et encore par la proposition III.1, f est nul; donc $h = g \in \mathcal{H}_b$ ce qui montre (46). Dans le cas où la restriction de V à $\mathcal{F}_b$ est une contraction, on utilise le même argument.

VI. LE CAS DE L'ÉNERGIE NON BORNÉE (n impair)

Dans tout ce paragraphe nous supposons que l'hypothèse (H_1) est vérifiée et que $n \geqslant 3$ est impair. Tout d'abord on étudie le spectre de V, V* et $Z = Z^\rho(T, 0)$ quand l'hypothèse (H_2) n'est pas satisfaite. On note $\sigma(\mathcal{T}) = \sigma_p(\mathcal{T}) \cup \sigma_c(\mathcal{T}) \cup \sigma_r(\mathcal{T})$ le spectre d'un opérateur $\mathcal{T}$, réunion de ses spectres ponctuel, continu et résiduel. Pour $\lambda \neq 0$, on note E_λ, l'espace engendré par les vecteurs propres généralisés de V associés à λ et on désigne par $G_\pm$ l'espace engendré par les vecteurs propres généralisés de $Z_\pm$ associés à λ où $Z_+ = Z = P_+VP_-$, $Z = P_-V^{-1}P_+$, $P_\pm = P_\pm^\rho$.

THÉORÈME 6. — *Le spectre ponctuel de* V, $\sigma_p(V)$, *est formé d'un nombre fini de valeurs propres* $\lambda_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, M$ *de multiplicité finie. De plus,*

$$(51) \quad \begin{cases} a) \text{ si } |\lambda_j| > 1, P_+ \text{ est un isomorphisme de } E_{\lambda_j} \text{ sur } G_{\lambda_j}^+ ; \\ b) \text{ si } |\lambda_j| = 1, E_{\lambda_j} \subset G_{\lambda_j}^+ ; \\ c) \text{ si } |\lambda_j| < 1, P_- \text{ est un isomorphisme de } E_{\lambda_j} \text{ sur } G_{1/\lambda_j}^- ; \end{cases}$$

on a aussi

$$\sigma_c(V) \cup \sigma_r(V) = S^1$$

et le spectre résiduel de V, $\sigma_r(V)$, *est un ensemble fini de valeurs* $\mu_j \in S^1$.

On a un résultat analogue pour V* : $\sigma_p(V^*)$ *est un ensemble fini de valeurs propres de multiplicité finie* ; $\sigma_r(V^*)$ *est une partie finie de* S^1, *et on a* :

$$\sigma_p(V^*) \subset \overline{\sigma_p(V)} \cup \overline{\sigma_r(V)}$$
$$\sigma_r(V^*) \cup \sigma_c(V^*) = S^1 .$$

L'inégalité (9) implique que l'énergie croît au plus exponentiellement. Nous montrons qu'une estimation de l'énergie locale permet de majorer le spectre de Z.

THÉORÈME 7. — *S'il existe* $\alpha > 0$ *tel que pour tout* f *dans* $\mathcal{H}$ *on ait pour tout entier* m

$$\sup_{mT - 2\rho \leqslant \tau \leqslant mT} \| Q(\tau)U(\tau, 0)f \|_{E_\rho} \leqslant C(f)\alpha^m \tag{52}$$

alors $Z^\rho(T, 0)$ *n'admet pas de valeur propre* λ, $|\lambda| > \alpha$.

Les théorèmes 6 et 7 montrent que si l'énergie locale reste bornée ($\alpha = 1$) le rayon spectral de V est inférieur ou égal à 1. Nous précisons ce résultat et établissons une relation avec le comportement de l'énergie totale.

THÉORÈME 8. — *Soit* f *dans* $\mathcal{L}_b^\rho$. *Alors* f *appartient à* $\mathcal{F}_b$ *si et seulement si*:

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \| V^k f \| \leqslant C(f) < \infty .$$

On obtient aussi une condition suffisante pour que l'hypothèse (H_2) soit satisfaite

THÉORÈME 9. — *La condition* $\sigma(Z) \cap \{ |\lambda| \geqslant 1 \} = \emptyset$ *est équivalente à*

$$\forall f \in \mathcal{H}, \quad \lim_{t \to +\infty} \| Q(t)U(t, 0)f \| = 0 ; \tag{LD}$$

cette condition implique l'hypothèse (H_2).

De plus, pour que (LD) *soit satisfaite, il suffit que pour tout* $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, supp $\varphi \subset \{ |x| \leqslant \rho \}$, *il existe une suite* $m_j \to \infty$ *telle que*

$$\lim_{j \to \infty} \Big(\sup_{m_jT - 2\rho \leqslant \tau \leqslant m_jT} \| Q(\tau)U(\tau, 0)f \| \Big) = 0 .$$

où $f = (0, \varphi)$.

A présent nous donnons une condition nécessaire pour que (H_2) soit vérifiée.

THÉORÈME 10. — *Supposons que* :

$$\forall f \in D_-^\rho, \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} \| V^k f \| \leqslant C(f) < \infty . \tag{H_-}$$

Alors il existe un sous-espace $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}$, *invariant par* V *et tel que*

i) $\quad \operatorname{codim} \mathcal{E} < \infty$

ii) $\quad \sup_{k \in \mathbb{N}} \| V^k |_{\mathcal{E}} \| \leqslant C_0 < \infty .$

Problème ouvert. — Le théorème 10 incite à poser un problème ouvert intéressant : existe-t-il, sous la seule hypothèse (H_1) un sous-espace $\mathcal{E}$ invariant par V de codimension finie, et sur lequel V soit un opérateur à puissances bornées; peut-on alors définir sur $\mathcal{E}$ les opérateurs d'onde et de diffusion.

Voici un résultat dans cette direction.

THÉORÈME 11. — *On suppose que* (H_1) *est vérifiée. Alors il existe une décomposition de* $\mathcal{H}$ *en somme directe* $\mathcal{H} = \mathcal{H}' + \mathcal{F}$ *telle que* :

a) $\mathcal{H}'$ *et* $\mathcal{F}$ *sont invariants par rapport à* V *et* V^{-1};

b) $\dim \mathcal{F} < \infty$;

c) il existe $C_0 > 0$ *et* $q_0 \in \mathbb{N}$ *tels que* :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \| V^k |_{\mathcal{H}'} \| \leqslant C_0 | k |^{q_0}.$$

COROLLAIRE. — *Si on note* V' *la restriction de* V *à* $\mathcal{H}'$ *on a* :

$$\| (V' - \lambda)^{-1} \|_{\mathcal{H}'} \leqslant \frac{C_0'}{\| \lambda | - 1 |^{q_0 + 1}}, \quad \forall | \lambda | \neq 1.$$

Cette estimation peut être utile si on désire construire un calcul spectral pour V'. Enfin, nous énonçons une condition suffisante pour que (H_2) soit vérifiée.

THÉORÈME 12. — *On suppose que* (H_1) *est vérifiée et que*:

i) $\quad \forall f \in \mathcal{H} \quad \sup_{t \geqslant 0} \| U(t, 0) f \|_{E_\rho} \leqslant C(f) < \infty$;

ii) $\quad \mathcal{F}_b = \mathcal{Z}_b^\rho$;

iii) $\quad \forall f \in D_-^\rho, \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} \| (\mathrm{Id} - P_+^\rho) V^k f \| \leqslant C_1(f) < \infty$;

alors l'hypothèse (H_2) *est satisfaite.*

Remarques. — Les conditions *i*) et *ii*) sont nécessaires (voir théorème 5). En général, on a $\mathcal{F}_b \subset \mathcal{Z}_b^\rho$ et le théorème 8 montre que *ii*) n'est pas *a priori* une conséquence de *i*). D'autre part, la condition *iii*) pose un contrôle sur le comportement de l'énergie globale de $\{ V^k f \}$, $f \in D_-^\rho$.

Preuve du théorème 6.

LEMME VI.1. — *Soit* $(V - \lambda) f$ *dans* $(D_-^\rho)^\perp$, $| \lambda | \geqslant 1$. *Alors* f *est orthogonal à* D_-^ρ *de même, si* $(V^{-1} - \lambda) f$ *est dans* $(D_+^\rho)^\perp$, $| \lambda | \geqslant 1$, f *est dans* $(D_+^\rho)^\perp$.

Preuve. — Pour g dans D_-^ρ on considère :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle \lambda f - V f, g \rangle + \frac{1}{\lambda} \langle f, V^* g \rangle = \frac{1}{\lambda} (f, V^{-1} g) = \ldots = \frac{1}{\lambda^p} \langle f, V^{-p} g \rangle.$$

Comme $\langle f, V^{-p} g \rangle = \langle f, U_0(-pT) g \rangle \to 0, p \to \infty$ on obtient que $\langle f, g \rangle = 0$. De même, pour g dans D_+^ρ et $(V^{-1} - \lambda) f$ dans $(D_+^\rho)^\perp$ on a :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle \lambda f - V^{-1} f, g \rangle + \frac{1}{\lambda} \langle V^{-1} f, g \rangle =$$
$$= \frac{1}{\lambda} \langle f, V g \rangle = \ldots = \frac{1}{\lambda^p} \langle f, V^p g \rangle.$$

On remarque que $\langle f, V^p g \rangle = \langle f, U_0(pT)g \rangle$ et on conclut comme précédemment.

LEMME VI.2. — *On suppose que* $(V-\lambda)^m f = 0, (V-\lambda)^{m-1} f \neq 0, |\lambda| \geqslant 1$. *Alors* $(Z-\lambda)^m P_+^\rho f = 0$, $(Z-\lambda)^{m-1} P_+^\rho f \neq 0$. *La même conclusion est vraie pour* V^{-1} *et* Z_-.

Preuve. — Soit $f_k = (V-\lambda)^{m-k} f$, $k=0, \ldots, m$. Alors $f_j \neq 0$ pour $j=1, \ldots, m$ et $(V - \lambda)f_1 = 0$. D'après le lemme VI.1, f_1 est dans $(D_-^\rho)^\perp$; de même, $(V - \lambda)f_2 = f_1$ implique que f_2 est dans $(D_-^\rho)^\perp$ et par itération $f = f_m$ est aussi dans $(D_-^\rho)^\perp$. On obtient que $f_k = (V - \lambda)^{m-k} P_-^\rho f$ et donc

$$g_k = P_+^\rho f_k = P_+^\rho (V - \lambda)^{m-k} P_-^\rho f = P_+^\rho (V - \lambda)^{m-k} P_-^\rho P_+^\rho f.$$

Ainsi $g_k = (Z - \lambda)^{m-k} P_+^\rho f$ et

$$(Z - \lambda)^m g_m = P_+^\rho (V - \lambda)^m f = 0 .$$

D'autre part, si $(Z - \lambda)^{m-1} g_m = 0$, on trouve $g_1 = 0$ et f_1 est dans D_+^ρ. Alors $O = (V - \lambda)f_1 = (U_0(T) - \lambda)f_1$ donne une contradiction. Pour V^{-1} et Z_-, on applique le même argument. Q. E. D.

Nous démontrons tout d'abord que pour $|\lambda| > 1$, P_+^ρ est un isomorphisme de E_k sur G_λ^+. Remarquons que d'après le lemme VI.2, on a $P_+^\rho E_\lambda \subset G_\lambda^+$. Soit $\{ f_i \}_i$ une base de E_λ formée des vecteurs propres généralisés de V associés à λ et soit $f = \Sigma \alpha_i f_i$. Si $P_+^\rho f = 0$, on a $f \in D_+^\rho$ et les $\sum_i \alpha_i V^k f_i = V^k f = U_0(kT)f$ sont uniformément bornés par rapport à $k \in \mathbb{N}$. En écrivant $\sum_i \alpha_i V^k f_i = \sum_i \alpha_{i_k} f_i$, on en déduit que $|\alpha_{i_k}| \leqslant C_0$ pour tout k dans $\mathbb{N}$. On écrit que si f_i est d'ordre m_i et $k = pm_i$

$$V^k f_i = \lambda^k f_i + \sum_{1 \leqslant j < k} \beta_{k,j} (V - \lambda)^j f_i$$

on en déduit que $|\alpha_i \lambda^k| = |\alpha_{i_k}| \leqslant C_0$. ce qui entraîne $\alpha_i = 0$ et donc $f = 0$; P_+^ρ est injective sur E_λ.

Maintenant on rappelle que Z^m étant compact pour m assez grand, Z admet un nombre fini de valeurs propres λ_j, $|\lambda_j| > 1$. On considère le projecteur sur $G_{\lambda_j}^+$:

$$P_j f = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_j} (\zeta \, \mathrm{Id} - Z)^{-1} f \, d\zeta$$

où γ_j est un contour dans $\{ \zeta \in \mathbb{C} / |\zeta| > 1 \}$ autour de λ_j et ne contenant pas d'autre valeur propre de Z. Alors si $f \neq 0$ est dans $G_{\lambda_j}^+$ on a $P_j f = f$.

D'autre part on voit aisément qu'il existe g tel que :

$$g \in D_+^\rho, \ (\zeta \operatorname{Id} - Z)^{-1} f = (\zeta \operatorname{Id} - V)^{-1} f + (\zeta \operatorname{Id} - V)^{-1} g.$$

Posons :

$$h_\zeta = (\zeta \operatorname{Id} - U_0(T))^{-1} g = \zeta^{-1}\left(\operatorname{Id} - \frac{U_0(T)}{\zeta}\right)^{-1} g$$

$$h = \zeta^{-1} \sum_0^\infty \left(\frac{U_0(T)}{\zeta}\right)^j g \in D_+^\rho, \quad |\zeta| > 1, \quad \zeta \in \gamma_j.$$

Alors on a :

$$g = (\zeta \operatorname{Id} - U_0(T)) h_\zeta = (\zeta \operatorname{Id} - V) h_\zeta$$

et cela donne :

$$(\zeta \operatorname{Id} - Z)^{-1} f = (\zeta \operatorname{Id} - V)^{-1} f + h_\zeta, \ \zeta \in \gamma_j.$$

On en déduit que :

$$f = P_j f = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_j} (\zeta \operatorname{Id} - V)^{-1} f d\zeta + h_j = F_j + h_j$$

où $h_j \in D_+^\rho$. On a $O \neq F_j \in E_j$ et $P_+^\rho F_j = f$, donc P_+^ρ est une surjection et cela achève la preuve pour $|\lambda_j| > 1$.

A présent, soit $|\lambda| < 1$ et $(V - \lambda)^m f = 0$, $(V - \lambda)^{m-1} f \neq 0$. Alors $\sum_{k=0}^m C_m^k V^{m-k}(-\lambda)^k f = 0$. On applique $V^{-m}(-\lambda)^{-m}$ et on trouve

$$\sum_{k=0}^m C_m^k (-\lambda^{-1})^{m-k} \cdot (V^{-1})^k f = 0$$

c'est-à-dire $(V^{-1} - \lambda^{-1})^m f = 0$ et de même $(V^{-1} - \lambda^{-1})^{m-1} f \neq 0$. E_λ est alors engendré par les vecteurs propres généralisés de V^{-1} associés à λ^{-1} et on répète le raisonnement ci-dessus.

Maintenant considérons une valeur λ de $\sigma_p(V) \cap S^1$. D'après le lemme VI.2 on a $P_+^\rho E_\lambda \subset G_\lambda^+$. D'autre part, on peut supposer que E_λ est engendré par les vecteurs propres généralisés de V^{-1} associés à $\lambda^{-1} \in S^1$. Alors il existe une base de E_λ, (g_k) telle que $(V^{-1} - \lambda^{-1})^k g_k = 0$. On applique le lemme VI.1 et par récurrence on obtient $g_k \in (D_+^\rho)^\perp$. Donc $E_\lambda = P_+^\rho E_\lambda$ est inclus dans G_λ^+. Pour achever l'étude de $\sigma(V)$ on écrit :

$$V = U_0(T) + K_0, \qquad K_0 = \int_0^T U_0(T - \tau) Q(\tau) U(\tau, 0) d\tau.$$

K_0 est un opérateur compact et pour $|\zeta| \neq 1$ on a :

$$V - \zeta \operatorname{Id} = (U_0(T) - \zeta \operatorname{Id})[\operatorname{Id} - (U_0(T) - \xi \operatorname{Id})^{-1} K_0].$$

On applique le théorème analytique de Fredholm deux fois, respectivement dans $\{|\zeta| > 1\}$ et $\{|\zeta| < 1\}$. Pour $|\zeta| > \|V\|$, $V - \zeta \operatorname{Id}$ est inversible et $\sigma(V) \cap \{ |\zeta| > 1 \}$ et un sous-ensemble borné localement fini de $\{ |\zeta| > 1 \}$ formé de valeurs propres de multiplicité finie. Or E_λ, $|\lambda| > 1$ est isomorphe à G_λ^+ où λ est une valeur propre de Z. Z^m étant compact pour m assez grand, on en conclut que $\sigma(V) \cap \{ |\zeta| > 1 \}$ est fini et on obtient a). D'autre part, dans $\{ |\zeta| < 1 \}$, l'opérateur $(V - \zeta)$ est inversible pour $\zeta = 0$ et on applique le même argument en notant comme précédemment que V^{-1} a un nombre fini de valeurs propres μ_j, $|\mu_j| > 1$ ce qui montre c). Enfin, pour $\lambda \in \sigma_p(V) \cap S^1$ on a $E_\lambda \subset G_\lambda^+$ et on conclut encore par la compacité de Z^m et $\sigma_p(V)$ est fini. De plus, le théorème analytique de Fredholm assure que le spectre essentiel de V coïncide avec celui de $U_0(T)$ donc $\sigma_c(V) \cup \sigma_r(V) = S^1$. Finalement $\lambda \in \sigma_r(V)$ implique $\bar{\lambda} \in \sigma_p(V^*)$ et cela achève la preuve du théorème 6.

Preuve du théorème 7.

Si $Z^\rho(T, 0) = \lambda f$, $f \neq 0$, on a :

$$\lambda^m f = P_+^\rho U_0(mT) P_-^\rho f + \int_0^{mT} P_+^\rho U_0(mT - \tau) P_-^\rho Q(\tau) U(\tau, 0) P_-^\rho f \, d\tau$$

or, on a :

$$P_+^\rho U_0(t) P_-^\rho = 0 \, ; \qquad t \geqslant 2\rho \, .$$

Donc, pour $mT \geqslant 2\rho$ on obtient :

$$\begin{aligned} |\lambda|^m \| f \| &\leqslant \int_{mT-2\rho}^{mT} \| Q(\tau) U(\tau, 0) P_-^\rho f_\rho \|_{E_\rho} d\tau \\ &\leqslant C(P_-^\rho f) \alpha^m \, . \end{aligned}$$

Comme f n'est pas nul, cette inégalité entraîne la conclusion du théorème.

Preuve du théorème 8.

La nécessité est évidente. Soit maintenant $f \neq 0$ vérifiant :

$$Zf = \lambda f, \qquad |\lambda| = 1, \qquad \operatorname*{Sup}_{k \in \mathbb{N}} \| V^k f \| \leqslant C_1 < \infty \, .$$

En tenant compte de (34), on écrit :

$$Vf = \lambda f + g, \quad g \in D_+^\rho$$

et, par itération

$$\lambda^{-k} V^k f = f + g_{k-1}$$

où

$$g_k = \lambda^{-1} \sum_{m=0}^{k} \left(\frac{U_0(T)}{\lambda} \right)^m g$$

On considère

$$G = \lambda^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{U_0(t)}{\lambda} \right)^m g$$

qui est défini pour tout x de $\mathbb{R}^n$ puisque x étant fixé, la suite $g_k(x)$ devient stationnaire. On a, de plus, pour tout k :

$$\| G \|_{E_{\rho+kT}} = \| g_k \|_{E_{\rho+kT}} \leqslant C_1 + \| f \|$$

ce qui montre que G est dans $\mathscr{H}$. De plus, g_k tend faiblement vers G dans $\mathscr{H}$; en effet, si $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ on a $\langle G - g_k, \varphi \rangle = 0$ pour k assez grand et si $h \in \mathscr{H}$ on en déduit par approximation que : $\lim\limits_{k\to\infty} \langle G - g_k, h \rangle = 0$. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \langle VG, h \rangle &= \lim_{k\to\infty} \langle Vg_k, h \rangle = \lim_{k\to\infty} \left\langle \sum_{1}^{k+1} \left(\frac{U_0(T)}{\lambda}\right)^m g, h \right\rangle \\ &= (\lambda G - g, h \rangle . \end{aligned}$$

On obtient alors que $VG = \lambda G - g$ et donc $V(f + G) = \lambda(f + G)$ ce qui montre que $f + G$ est dans $\mathscr{F}_b$. Or, d'après (34) et (47) $\mathscr{F}_b$ est orthogonal à D_+^ρ et à D_-^ρ. On a donc :

$$f + G = P_+^\rho(f + G) = f + P_+^\rho G$$

et ainsi $G = P_+^\rho G$. Or $\langle P_+^\rho G, h \rangle = \lim\limits_{k\to\infty} \langle P_+^\rho g_k, h \rangle = 0$ pour tout h dans $\mathscr{H}$. Finalement G est nul et $Vf = \lambda f$ ce qui montre que f est dans $\mathscr{F}_b$.

On écrit maintenant $\mathscr{Z}_b^\rho = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$ où $Z|_{E_\lambda} = \lambda_i \, \mathrm{Id}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$ et $|\lambda_i| = 1$. Supposons que $f = \sum\limits_{i=1}^{p} f_i$, $f_i \in E_{\lambda_i}$ et $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \| V^k f \| \leqslant C_0$. Comme précédemment on écrit : $Vf_i = \lambda_i f_i + g_i$, $g_i \in D_+^\rho$ et on a $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$V^k f_i = \lambda_i^k f_i + \lambda_i^{k-1} \sum_{m=0}^{k-1} \left(\frac{U_0(T)}{\lambda_i}\right)^m g_i, \qquad i = 1, \ldots, p .$$

On obtient que :

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^{k-1} \sum_{m=0}^{k-1} \left(\frac{U_0(T)}{\lambda_i}\right)^m g_i \right\| \leqslant C_0' .$$

A présent remarquons que :

$$\left(\frac{V}{\lambda_i} - \mathrm{Id}\right) \sum_{m=0}^{k-1} \left(\frac{U_0(T)}{\lambda_i}\right)^m g_i = \left(\left(\frac{U_0(T)}{\lambda_i}\right)^k - \mathrm{Id}\right) g_i .$$

On en déduit que :

$$\left(\frac{V}{\lambda_2} - \mathrm{Id}\right) \dots \left(\frac{V}{\lambda_p} - \mathrm{Id}\right)\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^{k-1} \sum_{m=0}^{k-1} \left(\frac{U_0(T)}{\lambda_i}\right)^m g_i\right)$$

$$= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \dots (\lambda_1 - \lambda_p)}{\lambda_2 \dots \lambda_p} \lambda_1^{k-1} \sum_{m=0}^{k-1} \left(\frac{U_0(T)}{\lambda_i}\right)^{m+p-1} g_1 + G_{1,k}$$

avec $\operatorname{Sup}_k \| G_{1,k} \| \leqslant C_0'' < \infty$.

Finalement,

$$\operatorname{Sup}_k \left\| \lambda_1^{k-1} \sum_{m=0}^{k-1} \left(\frac{U_0(T)}{\lambda_i}\right)^m g_1 \right\| \leqslant C_1$$

et donc

$$\operatorname{Sup}_k \| V^k f_1 \| \leqslant C_1'$$

et d'après ce qui précède f_1 est dans $\mathscr{F}_b$. On répète le même argument pour $i = 2, \dots, p$ et on obtient $f_i \in \mathscr{F}_b$. C. Q. F. D.

LEMME VI.3. — *Pour tout f dans $\mathscr{H}$ et tout χ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ on a :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \| \chi U_0(t) f \|^2 dt \leqslant C(\chi) \| f \|^2 .$$

Preuve. — Montrons que si f est dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $\| \chi U_0(t) f \|$ est dans $L^2(\mathbb{R}_t)$. Si $\mathscr{R}_n$ est la représentation par translation de $U_0(t)$ définie par $\mathscr{R}_n f = d_n D_s^{(n-1)/2} \mathscr{R} f$ si n est impair et $\mathscr{R}_n = d_n \,|\, D_s \,|^{(n-1)/2} \mathscr{R}$ si n est pair, où $d_n = 2^{-n/2} \pi^{(1-n)/2}$, $\mathscr{R} f = \partial_s \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2$ où $\tilde{f}_i$ est la transformée de Radon de f_i, et $| D_s |^{(n-1)/2}$ est l'opérateur de symbole $| \sigma |^{(n-1)/2}$ (voir [*14*] [*20*]) ; on a :

$$U_0(t) f = \mathscr{R}_n^{-1} [(\mathscr{R}_n f)(- t + ., .)]$$

et

$$\begin{aligned} \| \chi U_0(t) f \| &= C \left\| \left(\mathscr{R}_n \chi \mathscr{R}_n^{-1}\right) [(\mathscr{R}_n f)(s - t, \omega)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}_s \times S_\omega^{n-1})} \\ &= C \left\| \left(\mathscr{R}_n \chi \mathscr{R}_n^{-1}\right) [(\mathscr{R}_n f)(s - t, \omega)] \right\|_{L^2([-\rho_1, +\rho_1]_s \times S_\omega^{n-1})} . \end{aligned}$$

A présent si g est dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}_s \times S_\omega^{n-1})$ on écrit :

$$g = g_1 + g_+ + g_-$$

où

$$\operatorname{supp} g_1 \subset [-\rho_1, \rho_1] \times S^{n-1}, \qquad \operatorname{supp} g_+ \subset [\rho_1, +\infty[\times S^{n-1},$$
$$\operatorname{supp} g_- \subset]-\infty, -\rho_1] \times S^{n-1} .$$

On a :

$$\mathscr{R}_n^{-1} g_\pm \in D_\pm^{\rho_1}, \qquad \chi \mathscr{R}_n^{-1} g_\pm = 0 ,$$

On en déduit que :

$$\| \mathscr{R}_n \chi \mathscr{R}_n^{-1} g \|_{L^2(\mathbb{R} \times S^{n-1})} = \| \mathscr{R}_n \chi \mathscr{R}_n^{-1} g_1 \|_{L^2(\mathbb{R} \times S^{n-1})} \leqslant C_0(\chi) \| g \|_{L^2([-\rho_1, +\rho_1] \times S^{n-1})} .$$

On a alors :

$$\| \chi U_0(t) f \|^2 \leqslant C_0^2(\chi) \int_{-\rho_1}^{+\rho_1} \int_{S^{n-1}} | \mathscr{R}_n f(s-t, \omega) |^2 ds d\omega$$

et

$$\int \| \chi U_0(t) f \|^2 dt \leqslant 2\rho_1 C_0^2(\chi) \| \mathscr{R}_n f \|^2_{L^2(\mathbb{R} \times S^{n-1})} .$$

On conclut que :

$$\int \| \chi U_0(t) f \|^2 dt \leqslant C(\chi) \| f \|^2 .$$

A présent si f est un élément de $\mathscr{H}$ on choisit une suite f_p dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ convergeant vers f dans $\mathscr{H}$. Alors $\chi U_0(t) f_p$ converge vers $\chi U_0(t) f$ dans $L^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{H})$ donc dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$.

D'autre part, d'après ce qui précède, on a :

$$\int \| \chi U_0(t) f_p \|^2 dt \leqslant C(\chi) \| f_p \|^2$$

et $(\chi U_0(t) f_p)_p$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R}, \mathscr{H})$; donc cette suite converge vers $\chi U_0(t) f$ dans $L^2(\mathbb{R}, \mathscr{H})$-faible et

$$\int \| \chi U_0(t) f \|^2 dt \leqslant \liminf_p (C(\chi) \| f_p \|^2 = C(\chi) \| f \|^2 .$$

LEMME VI.4. — *On suppose que* $\sigma(Z) \cap \{ z / | z | \geqslant 1 \} = \emptyset$. *Alors pour tout* f *dans* $\mathscr{H}$ *et tout* χ *dans* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, supp $\chi \subset \{ | x | \leqslant \rho \}$, *on a :*

$$\int_0^\infty \| \chi U(t, 0) f \|^2 dt \leqslant C(\chi) \| f \|^2 .$$

On écrit que :

$$U(t, 0) f = U_0(t) f + \int_0^t U(t, \tau) Q(\tau) U_0(\tau) f d\tau .$$

On a alors :

$$\| \chi U(t, 0) f \| \leqslant \| \chi U_0(t) f \| + C \int_0^t \| Z(t, \tau) \| \, \| Q(\tau) U_0(\tau) f \| d\tau .$$

L'hypothèse $\sigma(Z) \cap \{ z / | z | \geqslant 1 \} = \emptyset$ entraîne que pour m assez grand $\| Z^m \| \leqslant \alpha < 1$. Comme dans la preuve du théorème 3 on en déduit l'existence de $C > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour tout t, τ :

$$\| Z(t, \tau) \| \leqslant C e^{-\delta(t-\tau)} .$$

On obtient que, pour tout $t \geqslant 0$:

$$\| \chi \mathrm{U}(t, 0) f \| \leqslant \| \chi \mathrm{U}_0(t) f \| + \mathrm{C}'(e^{-\delta t} \mathrm{Y}(t) * \| \mathrm{Q}(t) \mathrm{U}_0(t) f \|)(t)$$

où $\mathrm{Y}(t)$ est la fonction d'Heaviside. Soit χ_0 dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ égale à 1 sur $\{ |x| \leqslant \rho \}$; on a : $\| \mathrm{Q}(t)\mathrm{U}_0(t) f \| \leqslant \mathrm{C} \| \chi_0 \mathrm{U}_0(t) f \|$. On conclut par l'inégalité de Young et le lemme précédent :

$$\int_0^\infty \| \chi \mathrm{U}(t, 0) f \|^2 dt \leqslant \mathrm{C} \int_0^\infty \| \chi \mathrm{U}_0(t) f \|^2 dt \leqslant \mathrm{C}(\chi) \| f \|^2 .$$

Remarque. — On a aussi : $\| \mathrm{Q}(t)\mathrm{U}(t, 0) f \| \leqslant \mathrm{C} \| \chi_0 \mathrm{U}(t, 0) f \|$ ce qui montre que $\| \mathrm{Q}(t)\mathrm{U}(t, 0) f \|$ est dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{R}_t)$.

Preuve du théorème 9. — On suppose que (LD) est satisfaite. Soit f non nul tel que $\mathrm{Z} f = \lambda f$, $|\lambda| \geqslant 1$. Alors pour tout $k\mathrm{T} \geqslant 2\rho$ on obtient :

$$\lambda^k f = \int_{k\mathrm{T}-2\rho}^{k\mathrm{T}} \mathrm{P}_+^\rho \mathrm{U}_0(k\mathrm{T} - \tau) \mathrm{P}_-^\rho \mathrm{Q}(\tau) \mathrm{U}(\tau, 0) \mathrm{P}_-^\rho f \, d\tau$$

et

$$|\lambda|^k \| f \| \leqslant \mathrm{C} \int_{k\mathrm{T}-2\rho}^{k\mathrm{T}} \| \mathrm{Q}(\tau) \mathrm{U}(\tau, 0) \mathrm{P}_-^\rho f \| \, d\tau .$$

On en déduit que :

$$\| f \| \leqslant 2\mathrm{C}\rho \sup_{k\mathrm{T}-2\rho \leqslant \tau \leqslant k\mathrm{T}} \| \mathrm{Q}(\tau) \mathrm{U}(\tau, 0) \mathrm{P}_-^\rho f \|$$

et l'hypothèse (LD) entraîne que f est nul.

Comme Z^m est compact pour m assez grand on a démontré que $\sigma(\mathrm{Z}) \cap \{ z / |z| \geqslant 1 \}$ est vide.

Réciproquement, si $\sigma(\mathrm{Z}) \cap \{ z / |z| \geqslant 1 \} = \varnothing$, on montre comme dans le lemme VI.4 que :

$$\| \mathrm{Q}(t) \mathrm{U}(t, 0) f \| \leqslant \| \mathrm{Q}(t) \mathrm{U}_0(t) f \| + \mathrm{C} \int_0^{\mathrm{A}} e^{-\delta(t-\tau)} \| f \| \, d\tau + \mathrm{C}\varepsilon \int_{\mathrm{A}}^t e^{-\delta(t-\tau)} d\tau$$

si $\| \mathrm{Q}(\tau) \mathrm{U}_0(\tau) f \| \leqslant \varepsilon$ pour $\tau \geqslant \mathrm{A}$; finalement, pour t assez grand $\| \mathrm{Q}(t) \mathrm{U}(t, 0) f \| \leqslant \varepsilon + c\varepsilon + c'\varepsilon$. Pour montrer que l'hypothèse (H_2) est vérifiée on multiplie l'équation (1) par $\bar{u}_t$ et on intègre en x sur $\mathbb{R}^n$ et en t sur $[0, t_0]$:

$$\| \mathrm{U}(t_0, 0) f \|^2 = \| f \|^2 + 2\mathscr{R}e \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^n} q(t, x) u(t, x) \bar{u}_t(t, x) dt dx .$$

On obtient alors :

$$\| \mathrm{U}(t_0, 0) f \|^2 \leqslant \| f \|^2 + \mathrm{C} \int_0^{t_0} \| \mathrm{U}(t, 0) f \|_{\mathrm{E}_\rho} \cdot \| \mathrm{Q}(t) \mathrm{U}(t, 0) f \| \, dt .$$

On conclut par le lemme VI.4 que :

$$\| U(t,0)f \| \leqslant C' \| f \| \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

A présent, soit $f = (0, \varphi)$, $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, supp $\varphi \subset \{ |x| \leqslant \rho \}$, et $m_j \to \infty$ tel que :

$$\sup_{m_j T - 2\rho \leqslant \tau \leqslant m_j T} \| Q(\tau)U(\tau, 0)f \| \to 0, \qquad j \to \infty .$$

On considère :

$$Z^{m_j} f = P_+^{\rho} U_0(m_j T) f + \int_{m_j T - 2\rho}^{m_j T} P_+^{\rho} U_0(m_j T - \tau) Q(\tau) U(\tau, 0) f \, d\tau$$

et on obtient :

$$\| Z^{m_j} f \| \to 0, \qquad j \to \infty .$$

On écrit $K_\rho = G_\rho + F_\rho$ où G_ρ et F_ρ sont invariants pour Z et

$$\| Z|_{G_\rho} \| < 1, \qquad \dim F_\rho < \infty .$$

Soit $(f_{h,k})_{1 \leqslant k \leqslant M}^{1 \leqslant h \leqslant \mu_k}$ une base de F_ρ formée de vecteurs propres généralisés de Z :

$$f_{0,k} = 0, \qquad (Z - \lambda_k) f_{h,k} = f_{h-1,k}, \qquad 1 \leqslant h \leqslant \mu_k$$
$$(Z - \lambda_k)^h f_{h,k} = 0, \qquad (Z - \lambda_k)^{h-1} f_{h,k} \neq 0$$

et $(\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant M}$ sont les M valeurs propres distinctes de Z de module $\geqslant 1$. On a donc :

$$Z^{m_j} f_{h,k} = \lambda_k^{m_j} f_{h,k} + \sum_{1 \leqslant i < h} P_i(\lambda_k) f_{i,k}$$

où P_i est un polynôme de degrés $m_j - h + i$.

On écrit f sur la base $(f_{h,k})$:

$$f = g + \Sigma \alpha_{h,k} f_{h,k}, \qquad g \in G_\rho .$$

Il vient :

$$Z^{m_j} f - Z^{m_j} g = \sum_{h,k} \alpha_{h,k} \left(\lambda_k^{m_j} f_{h,k} + \sum_{1 \leqslant i \leqslant h} P_i(\lambda_k) f_{i,k} \right).$$

Le membre de gauche tendant vers zéro si $j \to \infty$ on a :

$$1 \leqslant k \leqslant M, \qquad \sum_{1 \leqslant h \leqslant \mu_k} \alpha_{h,k} \left(\lambda_k^{m_j} f_{h,k} + \sum_{1 \leqslant i \leqslant h} P_i(\lambda_k) f_{i,k} \right) \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} 0 .$$

On en déduit que $\alpha_{h,k} = 0$, $f = g$ appartient à G_ρ et

$$\| Q(t)U(t,\tau)f \| = \| Q(t)Z(t,\tau)f \| \leqslant Ce^{-\delta(t-\tau)} \| f \|, \qquad \delta > 0 .$$

On rappelle que, pour tout f_0 dans $\mathscr{H}$

$$U(t,0)f_0 = U_0(t)f_0 + \int_0^t U(t,\tau)Q(\tau)U_0(\tau)f_0 \, d\tau$$

et on applique pour $t \geqslant 0$ le résultat précédent à $f = Q(\tau)U_0(\tau)f_0$:

$$\| Q(t)U(t,0)f_0 \| \leqslant \| Q(t)U_0(t)f_0 \| + C'(e^{-\delta t}Y(t) * \| Q(t)U_0(t)f_0 \|).$$

Sachant que $e^{-\delta t}Y(t)$ et $\| Q(t)U_0(t)f_0 \|$ sont dans $L^2(\mathbb{R}_t)$ on conclut par l'inégalité de Young et (L.D) est vérifiée. Q. E. D.

Preuve du théorème 10. — On sait que Z^m est compact pour $mT \geqslant 2\rho$. On en déduit que Z a un spectre dénombrable qui ne s'accumule éventuellement que vers 0 et l'espace engendré par les vecteurs propres généralisés associés à $\lambda \in \sigma(Z)$ est de dimension finie. On note K_ρ l'orthogonal dans $\mathscr{H}$ de $D^\rho_+ \oplus D^\rho_-$ et on écrit :

$$K_\rho = G_b + S_b$$

comme somme directe, où G_b et S_b sont invariants par Z et le rayon spectral de $Z|_{G_b}$ est strictement inférieur à 1. Alors il existe un entier m tel que :

$$\| Z^m|_{G_b} \| \leqslant \alpha < 1.$$

On en déduit que :

$$\| Z(t,0) \|_{\mathscr{L}(G_b,\mathscr{H})} \leqslant ce^{-\delta t}, \qquad 0 < \delta.$$

D'autre part, on a l'égalité :

$$U(t,0)f = U_0(t)f + \int_0^t U_0(t-\tau)Q(\tau)U(\tau,0)f\,d\tau$$

et pour f dans K_ρ on a :

$$\| U(t,0)f \| \leqslant \| f \| + \int_0^t \| Q(\tau)U(\tau,0)f \|\,d\tau$$

avec

$$\| Q(\tau)U(\tau,0)f \| \leqslant C \| Z(\tau,0)f \|.$$

Donc pour f dans G_b on a :

(55) $$\sup_{t \geqslant 0} \| U(t,0)f \| \leqslant C_1 \| f \|.$$

D'autre part $S_b = \sum_{i=1}^{p} E_i$ où les espaces de dimension finie E_i sont invariants par rapport à Z et associés aux valeurs propres λ_i, $|\lambda_i| \geqslant 1$. Soit g dans D^ρ_- et soit :

$$Vg = g_b + \sum_i e_i + g_+ + g_-$$

où

$$g_b \in G_b, \qquad e_i \in E_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant p, \qquad g_\pm \in D^\rho_\pm.$$

On obtient :

$$P^\rho_+ V^k g = Z^k g_b + \sum_i Z^k e_i + P^\rho_+ V^k g_-.$$

En tenant compte de (55) et de l'hypothèse du théorème on conclut que :

$$\sup_{k\geqslant 0}\left\|\sum_i Z^k e_i\right\| \leqslant C_1 < \infty . \tag{56}$$

Soit $e_i = \sum_j \alpha_{ij} f_{ij}$ où $\{ f_{i,j} \}_j$ forme une base de E_i de vecteurs propres généralisés. Alors :

$$\sum_i Z^k e_i = \sum_{i,j} a_{k,i,j} f_{ij}$$

et (56) implique que :

$$\forall i, j, \qquad \sup_k | a_{k,i,j} | \leqslant A_{ij} < \infty . \tag{57}$$

On considère $i = 1$ et on suppose que $| \lambda_1 |$ est strictement supérieur à 1. Soit $f_{1,m}$ un vecteur propre généralisé d'ordre m :

$$(Z - \lambda_1)^m f_{1,m} = 0, \qquad (Z - \lambda_1)^{m-1} f_{1,m} \neq 0 .$$

On voit que :

$$Z^k f_{1,m} = \lambda_1^k f_{1,m} + \sum_{j\neq m} b_{k,l,j} f_{1,j} ;$$

donc $a_{k,1,m} = \alpha_{1,m}\lambda_1^k$ et (57) entraîne que $\alpha_{1,m} = 0$. Par itération on conclut que $\alpha_{ij} = 0$ si $| \lambda_i | > 1$.

On suppose maintenant que $| \lambda_1 | = 1$. Soit $f_{1,i}$ défini par :

$$f_{1,0} = 0, \qquad (Z - \lambda_1) f_{1,i} = f_{1,i-1}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m$$
$$(Z - \lambda_1)^i f_{1,i} = 0, \qquad (Z - \lambda_1)^{i-1} f_{1,i} \neq 0 .$$

On a :

$$Z^k f_{1,m} = \lambda_1^k f_{1,m} + k\lambda_1^{k-1} f_{1,m-1} + \sum_{j\neq m, m-1} b_{k,1,j} f_{1,j} \tag{58}$$

$$Z^k f_{1,m-1} = \lambda_1^k f_{1,m-1} + \sum_{j\neq m, m-1} c_{k,1,j} f_{1,j} .$$

On en déduit que :

$$a_{k,1,m-1} = k a_{1,m}\lambda_1^{k-1} + a_{1,m-1}\lambda_1^k$$

et (57) entraîne que $\alpha_{1,m} = 0$. Par itération on obtient $\alpha_{1,j} = 0$, $j > 1$ et finalement $e_i = 0$ si $| \lambda_i | > 1$ et $e_i = \lambda_{i,1} f_{i,1}$ si $| \lambda_i | = 1$; donc $\sum_i e_i$ appartient à $\mathscr{X}_b^\varrho$. D'autre part, on a :

$$V^{k+1} g = V^k g_b + V^k\left(\sum_i e_i\right) + V^k g_+ + V^k g_-$$

et on conclut comme ci-dessus que :

$$\operatorname*{Sup}_{k\geqslant 0}\left\| V^k\left(\sum_i e_i\right)\right\| C_2 < \infty .$$

Le théorème 8 montre alors que $\sum_i e_i$ est dans $\mathcal{F}_b$. On introduit l'espace $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = G_b + \mathcal{F}_b \oplus D^\rho_+ \oplus D^\rho_- .$$

Alors,

$$V(G_b) \subset G_b + D^\rho_+ , \qquad V\mathcal{F}_b \subset \mathcal{F}_b, \qquad VD^\rho_+ \subset D^\rho_+ , \qquad VD^\rho_- \subset \mathcal{E}$$

donc $\mathcal{E}$ est un espace fermé stable par V et pour tout f dans $\mathcal{E}$ on a :

$$\operatorname*{Sup}_{k\geqslant 0} \| V^k f \| \leqslant C(f) < \infty .$$

Le théorème de Banach-Steinhaus implique que :

$$\operatorname*{Sup}_{k\geqslant 0} \| V^k |_{\mathcal{E}} \| < \infty$$

et codim $\mathcal{E}$ est finie puisque la dimension de S_b est finie. C. Q. F. D.

Preuve du théorème 11. — Soit $\mathcal{H}_+$ ($\mathcal{H}_-$) l'espace engendré respectivement par les vecteurs propres généralisés de V (res. V^{-1}) associés aux valeurs propres $|\lambda| > 1$. En utilisant un argument standard on écrit $\mathcal{H}$ sous forme d'une somme directe : $\mathcal{H} = \mathcal{H}' + \mathcal{H}_+ + \mathcal{H}_-$ où $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}_\pm$ sont invariants par V et V^{-1}, $\mathcal{H}_\pm$ sont de dimension finie d'après le théorème 6 et

$$\sigma(V|_{\mathcal{H}'}) \cup \sigma(V^{-1}|_{\mathcal{H}'}) \subset \{ z/|z| = 1 \} .$$

Soient $D'_{a,\pm} = \mathcal{H}' \cap D^a_\pm$, $a \geqslant \rho$ et soient $P'_{a,\pm}$ les projecteurs orthogonaux dans $\mathcal{H}'$ sur $(D'_{a,\pm})^\perp$. On introduit :

$$Z'_a = P'_{a,+}VP'_{a,-}, \qquad \hat{Z}_a = P'_{a,-}V^{-1}P'_{a,+} .$$

LEMME VI.5. — *Pour p et q dans $\mathbb{N}$ on a*

i) $$Z'^p_a Z'^q_a = Z'^{p+q}_a$$

ii) $$\hat{Z}^p_a \hat{Z}^q_a = \hat{Z}^{p+q}_a .$$

Preuve. — Il suffit de vérifier que $V^q P'_{a,-} f$ est dans $(D'_{a,-})^\perp$. En effet, soit $g \in D'_{a,-}$; on a :

$$\langle V^q P'_{a,-} f, g \rangle = \langle P'_{a,-} f, V^{-q} g \rangle = 0$$

puisque $\mathcal{H}'$ et D^a_- sont invariants par V^{-1} et $V^{-q}g$ est dans $D'_{a,-}$. On en déduit *i*). Pour établir *ii*) on vérifie de même que $V^{-q}P'_{a,+} f$ est dans $(D'_{a,+})^\perp$.

LEMME VI.6. — *Les opérateurs Z'^m_a, $\hat{Z}^m_a$ sont compacts pour mT $> 2a$.*

Preuve. — On écrit :

$$Z_a'^m = (P'_{a,+} - P_+^a)V^m P'_{a,-} + P_+^a V^m(P'_{a,-} - P_-^a) + P_+^a V^m P_-^a$$

et on considère les opérateurs dans la somme comme des opérateurs de $\mathscr{H}'$ dans $\mathscr{H}$. On sait que $P_+^a V^m P_-^a$ est compact pour $mT > 2a$ (lemme III.3). D'autre part $\mathscr{H}'$ étant de codimension finie, on a :

$$\dim \operatorname{Im} (P'_{a,\pm} - P_\pm^a)\mathscr{H}' < \infty$$

et les deux premiers termes sont compacts. Q. E. D.

Il est clair que $\sigma(Z'_a) \cup \sigma(\hat{Z}_a) \subset \{ z ; | z | \leqslant 1 \}$.

LEMME VI.7. — *Il existe q_1, q_2 dans $\mathbb{N}$ tels que pour tout $a \geqslant \rho$, on a :*

$$\| Z_a'^k \| \leqslant C_a k^{q_1}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$
$$\| \hat{Z}_a^k \| \leqslant C_a k^{q_2}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Preuve. — On écrit $\mathscr{H}' = K'_a \oplus D'_{a,+} \oplus D'_{a,-}$. L'opérateur $Z_a'^m$ étant compact pour m assez grand, le spectre discret de Z'_a est formé de valeurs propres de multiplicité finie et, de plus, on peut vérifier comme dans [5] que les valeurs propres et leur multiplicité sont indépendantes de $a \geqslant \rho$. On décompose K'_a en une somme directe;

$$K'_a = G'_a + F_a$$

où

$$\sigma(Z'_a|_{G'_a}) \subset \{ z / | z | < \delta \} \qquad 0 < \delta < 1$$
$$\dim F_a < \infty ,$$

et G'_a et F_a sont invariants par Z'_a. On considère la forme de Jordan de $Z'_a|_{F_a}$ et on note $(q_1 + 1)$ la dimension maximale (indépendante de $a \geqslant \rho$) des blocs de Jordan. On obtient :

$$\| Z_a'^k \| \leqslant C_a \operatorname{Sup} (1, \| Z_a'^k|_{F_a} \|)$$

or,

$$\| Z_a'^k|_{F_a} \| \leqslant C' k^{q_1}.$$

On en déduit le premier point du lemme. Pour $\hat{Z}_a^k$ on répète le même argument.

Maintenant nous estimons $\| V^m f \|$ pour f dans $K'_a + D'_{a,+}$ et f dans $D'_{a,-}$ où $a = T + \rho + 1$. On écrit :

$$\begin{aligned} V^m f &= U_0(mT)f + \int_0^{mT} U_0(mT - \tau)Q(\tau)U(\tau, 0)f\,d\tau \\ &= U_0(mT)f + \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^T U_0((m-k)T - \tau)Q(\tau)U(\tau, 0)V^k f\,d\tau . \end{aligned}$$

Soit $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, Supp $\psi \subset \{ | x | \leqslant T + \rho + 1 \}$ et $\psi = 1$ pour $| x | \leqslant T + \rho + \frac{1}{2}$.

Pour $0 \leqslant \tau \leqslant T$ on a :

$$Q(\tau)U(\tau, 0)g = Q(\tau)U(\tau, 0)\psi \cdot g .$$

Cela donne :

$$V^m f = U_0(mT)f + \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^T U_0((m-k)T - \tau)Q(\tau)U(\tau, 0)\psi V^k f d\tau .$$

Si f est dans K'_a on obtient :

$$\psi V^k f = \psi P'_{a,+} V^k P'_{a,-} f$$

et en tenant compte du lemme VI.7 on conclut que :

$$\| V^m f \| \leqslant \| f \| + CmTm^{q_1} \| f \| \leqslant C' m^{q_1+1} \| f \| .$$

Maintenant si f est dans $D'_{a,+}$ on a :

$$\| V^m f \| = \| U_0(mT)f \| = \| f \| .$$

Il reste à étudier $\| V^m f \|$ quand f est dans $D'_{a,-}$. On pose : $V' = V|_{\mathscr{H}'}$, $V'^{-1} = V^{-1}|_{\mathscr{H}'}$.

LEMME VI.8. — *On a, pour tout entier m:*

$$\| (\mathrm{Id} - P'_{a,-})V'^m |_{D'_{a,-}} \| = 1 .$$

Preuve. — On voit aisément que $V'^{-1}g = V'^* g$ pour g dans $D'_{a,-}$ où l'adjoint V'^* est défini sur $\mathscr{H}'$. Alors :

$$U_0(-mT)g = V^{-m}g = V'^{-m}g = (V'^*)^m g$$

implique

$$\| (V'^*)^m |_{D'_{a,-}} \| = 1 .$$

Soit $\tilde{V} = (V'^*|_{D'_{a,-}})^*$ considéré comme un opérateur de $D'_{a,-}$ dans $D'_{a,-}$. On obtient $\tilde{V} = (I - P'_{a,-})V'$ car

$$\forall f \in D'_{a,-}, \qquad \forall g \in D'_{a,-}, \qquad \langle f, V^* g \rangle = \langle (\mathrm{Id} - P'_{a,-})V' f, g \rangle .$$

D'autre part,

$$(\mathrm{Id} - P'_{a,-})V'^m = [(\mathrm{Id} - P'_{a,-})V']^m = \tilde{V}^m$$

et

$$\| \tilde{V}^m \| = \| (V'^*)^m \|_{D'_{a,-}} \| = 1$$

ce qui démontre le lemme. Q. E. D.

Soit à présent g dans $D'_{a,-}$; nous allons estimer $\| V^k g \|$. On écrit :

$$V' g = g_a + g_{a,+} + g_1 = f_1 + g_1$$

où

$$g_1 \in D'_{a,-}, \qquad f_1 \in (D'_{a,-})^{\perp}, \qquad g_a \in K'_a, \qquad g_{a,+} \in D'_{a,+} .$$

Par itération on définit :

$$V'^k g = \sum_{j=0}^{k-1} V^{k-1-j} f_{j+1} + g_k ; \qquad k \in \mathbb{N}$$

où

$$V' g_j = f_{j+1} + g_{j+1}, \qquad g_{j+1} \in D'_{a,-}, \qquad f_{j+1} \in (D'_{a,-})^{\perp}$$

et aussi

$$g_j = (\mathrm{Id} - P'_{a,-})V' \dots (\mathrm{Id} - P'_{a,-})V' g = (\mathrm{Id} - P'_{a,-})V'^j g .$$

Le lemme VI.8 implique que $\| g_j \| = \| g \|$ et donc

$$\| f_j \| = \| P'_{a,-} V' g_{j-1} \| \leqslant C \| g \| .$$

On sait que puisque f_{j+1} est dans $K'_a + D'_{a,+}$ on a :

$$\| V^{k-1-j} f_{j+1} \| \leqslant C(k-1-j)^{q_1+1} \| f_{j+1} \| \leqslant C(k-1-j)^{q_1+1} \| g \|$$

et on conclut que :

$$\| V'^k g \| \leqslant C' k^{q_1+2} \| g \| \; k \geqslant 1 .$$

L'étude pour $(-k) \in \mathbb{N}$ est analogue.

Preuve du théorème 12. — La condition *i*) implique que :

$$\forall f \in \mathscr{H} \; \sup_k \| P_+^\rho V^k f \| \leqslant C_1(f) < \infty$$

et on conclut par le théorème de Banach Steinhaus que :

$$\sup_k \| P_+^\rho V^k \| \leqslant C_1 < \infty$$

donc

$$\sup_k \| Z^k \| \leqslant C_1$$

On déduit alors de (58) que $m = 1$ et $S_b = \mathscr{L}_b^\rho$; on a donc :

$$\mathscr{H} = G_b + \mathscr{L}_b^\rho \oplus D_+^\rho + D_-^\rho$$

et en tenant compte de *ii*) :

$$\mathscr{H} = G_b + \mathscr{F}_b \oplus D_+^\rho \oplus D_-^\rho = \mathscr{E} .$$

On conclut par le théorème précédent en remarquant que *i*) et *iii*) entraînent (H2). C. Q. F. D. Le corollaire est une conséquence directe du théorème et de [7], chapitre XV 15.24, n° 27, p. 2078.

VII. ÉTUDE DES SYSTÈMES HERMITIENS DU PREMIER ORDRE AVEC UN POTENTIEL PÉRIODIQUE

Considérons l'opérateur :

$$(59) \qquad L_0 = \partial_t + \sum_{j=1}^{n} A_j \partial_{x_j}, \qquad n \geqslant 3 ,$$

où les A_j sont des matrices hermitiennes $N \times N$ à coefficients constants. On suppose que les vitesses de propagation ne s'annulent pas :

(H_3) | Pour tout ω dans S^{n-1} la matrice $A(\omega) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j A_j$ est inversible.

Remarquons que puisque n est supérieur à 1, $A(\omega)$ admet le même nombre de valeurs propres positives et de valeurs propres négatives et N est pair ; si $\lambda_1(\omega) \geqslant \lambda_2(\omega) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_N(\omega)$ sont les N valeurs propres de $A(\omega)$ on note :

$$C_{\min} = \inf_{\omega \in S^{n-1}} \lambda_{\frac{N}{2}}(\omega), \qquad C_{\max} = \operatorname{Sup}_{\omega \in S^{n-1}} \lambda_1(\omega).$$

Dans cette partie, on désigne par $\mathscr{H}$ l'espace $(L^2(\mathbb{R}^n))^N$ et on pose :

$$A = i \sum_{j=1}^{n} A_j \partial_{x_j}, \qquad U_0(t) = e^{itA}.$$

Nous étudions la théorie de la diffusion pour le système :

$$L\psi = \partial_t \psi + \sum_{j=1}^{n} A_j \partial_{x_j} \psi + iV(t, x)\psi \tag{60}$$

où $V(t, x)$ est une matrice hermitienne $N \times N$ vérifiant :

(H'_1) |
a) il existe $T > 0$ tel que pour tout t, x, $V(t + T, x) = V(t, x)$;
b) il existe $\rho > 0$ tel que pour tout t, $V(t, x) = 0$ si $|x| > \rho$;
c) les coefficients de V sont dans $C^0(\mathbb{R}^{n+1})$.

On note Q l'opérateur de multiplication par iV. Étant donné f dans $\mathscr{H}$ il existe une unique solution $\psi(t)$ dans $C^0(\mathbb{R}, \mathscr{H})$ du problème de Cauchy

$$L\psi = 0, \qquad \psi(s, x) = f(x)$$

que l'on exprime à l'aide d'un propagateur $U(t, s)$:

$$\psi(t) = U(t, s)f.$$

Ce propagateur satisfait (4), (9).

L'énergie et l'énergie locale sont données par :

$$f = (f_1, \ldots, f_N) \in \mathscr{H}, \quad \|f\|^2 = \sum_{j=1}^{N} \int |f_j(x)|^2 dx$$

$$\|f\|^2_{E_R} = \sum_{j=1}^{N} \int_{|x| \leqslant R} |f_j(x)|^2 dx.$$

Le système L étant hermitien, l'énergie totale est conservée et l'hypothèse (H2) est donc trivialement vérifiée :

$$\forall t, s \qquad \| U(t, s)f \| = \| f \| .$$

Comme dans l'étude de l'équation des ondes on introduit les espaces $\mathcal{F}_b$ et $\mathcal{H}_b$ à partir de l'opérateur de monodromie $V = U(T, 0)$. On introduit aussi les espaces de Lax-Phillips :

$$D^a_{+,-} = \{ f \in \mathcal{H} / U_0(t)f = 0 \qquad \text{pour} \qquad |x| \leqslant \pm C_{\min} t + a \} .$$

On désigne encore par $\mathcal{X}^a_b$ l'espace engendré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres de module 1 de $Z^a = P^a_+ V P^a_-$ où $P^a_{+,-}$ est le projecteur sur l'orthogonal de $D^a_{+,-}$.

On s'intéresse à l'existence des opérateurs d'ondes définis par (10) et (11).

THÉORÈME 13. — *Sous les hypothèses* (H'_1) *et* (H_3) *les conclusions des théorèmes 1, 2, 3, 4, 5 sont valides pour le système* L *donné par* (60) *avec les changements de notations ci-dessus.*

L'adaptation des démonstrations des parties II à V au cas du système est immédiate à l'exception de l'estimation (37) de décroissance de l'énergie locale des solutions libres et des lemmes de compacité de $\varphi U(t, 0)P^a_-$ et $Z^a(t, 0)$. La démonstration de ce dernier point est plus délicate que dans le cas de l'équation des ondes, même en dimension impaire, car d'une part, l'opérateur $\int_0^t U_0(t - s)Q(s)U(s, 0)ds$ n'est pas compact et, d'autre part, la multiplicité des $\lambda_j(\omega)$ est *a priori* variable. Nous renvoyons à l'appendice I pour la preuve de la compacité de $\varphi U(t, 0)\varphi, |t| \geqslant \dfrac{2a}{C_{\min}}$ où φ est une fonction régulière de troncature nulle pour $|x| \geqslant a$. Établissons tout d'abord l'expression de la solution du problème de Cauchy :

$$(61) \qquad L_0 u = 0, \qquad u(0, x) = f(x), \quad f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))^N .$$

L'hypothèse (H_3) assure l'existence d'une base mesurable $(r_j(\omega))_{1 \leqslant j \leqslant N}$ de vecteurs propres unitaires de $A(\omega)$; on note :

$$\varphi_j(s,\omega) = (\tilde{f}(s, \omega) \cdot r_j(\omega))r_j(\omega), \qquad 0 \leqslant s, \qquad \omega \in S^{n-1}$$

où $\tilde{f}$ est la transformée de Radon de f. On obtient facilement que :

$$\tilde{u}(t ; s, \omega) = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j(s - t\lambda_j(\omega), \omega)$$

où $\lambda_j(\omega)$ est la valeur propre de $A(\omega)$ associée à $r_j(\omega)$. La solution de (61) s'écrit alors :

$$(62) \qquad u(t, x) = d_n^2 \int \sum_{j=1}^{N} | D_s |^{n-1} \varphi_j(x \cdot \omega - t\lambda_j(\omega), \omega) d\omega$$

où $d_n = 2^{-n/2}\pi^{(1-n)/2}$ et $|D_s|^{n-1} = \left(-i\frac{\partial}{\partial s}\right)^{n-1}$ si n est impair et

$$|D_s|^{n-1} = K\left(-i\frac{\partial}{\partial s}\right)^{n-1}$$

si n est pair, où K désigne la transformée de Hilbert partielle par rapport à s. De plus, les valeurs propres λ_i et λ_j sont égales si elles coïncident sur un ensemble non négligeable (voir l'appendice II). $A(\omega)$ possède donc p valeurs propres λ'_j deux à deux presque partout distinctes et on pose :

$$\varphi'_j = \Sigma\varphi_i$$

où la sommation s'étend sur tous les i tels que $\lambda_i \equiv \lambda'_j$. On écrit donc :

$$u(t, x) = d_n^2 \int \sum_{j=1}^{p} |D_s|^{n-1}\varphi'_j(x \cdot \omega - t\lambda'_j(\omega), \omega)dw. \tag{63}$$

On définit

$$\varepsilon_j = \frac{\lambda'_j(\omega)}{|\lambda'_j(\omega)|}, \qquad \psi_j(s, \omega) = \varphi'_j(\varepsilon_j s, \varepsilon_j\omega), \qquad \mu_j(\omega) = \varepsilon_j\lambda'_j(\varepsilon_j\omega)$$

et on fait le changement de variable $\omega \to \varepsilon_j\omega$:

$$u(t, x) = d_n^2 \int \sum_{j=1}^{p} |D_s|^{n-1}\psi_j(x \cdot \omega - t\mu_j(\omega), \omega)d\omega. \tag{64}$$

On en déduit par un résultat de Lax-Phillips ([*13*], théorème 1.2, p. 186) que f est dans D^0_+ si et seulement si le support de $|D_s|^{n-1}\psi_j$ est dans $\mathbb{R}^+_s \times S^{n-1}_\omega$. Nous concluons en énonçant le :

LEMME VII.1. — *f appartient à $D^a_{+,-}$ si et seulement si $|D_s|^{n-1}\varphi'_j(s, \omega) = 0$ pour $\pm\,\varepsilon_j s \leqslant a$, $1 \leqslant j \leqslant p$.*

A présent nous établissons l'analogue du lemme III.1 :

LEMME VII.2. — *Soit $n \geqslant 2$. Pour tout f dans $(D^a_-)^\perp$, $U_0\left(t + \frac{2a}{C_{\min}}\right)f$ est C^∞ pour $|x| < a + C_{\min}t$, $t \geqslant 0$.*

Preuve. — Nous supposons que n est pair. D'après (64) on a :

$$u(t, .) = \mathscr{R}^* K D_s^{n-1} h(t; \ldots)$$

où $\mathscr{R}^*$ est l'adjoint de la transformée de Radon et

$$h(t; s, \omega) = \sum_{j=1}^{p} \psi_j(s - t\mu_j(\omega), \omega).$$

On a $h(t; s, \omega) = 0$ pour $s \leqslant -a + tC_{\min}$, $t \geqslant 0$ et comme dans le lemme III.1 on a :

$$\mathrm{WF}(\tilde{f}) \cap \mathscr{T} = \emptyset$$

ce qui assure que :

$$\mathrm{WF}(h(t; \ldots)) \cap \mathscr{T} = \emptyset .$$

On en déduit que $\mathrm{KD}_s^{n-1} h(t; s, \omega)$ est C^∞ en (s, ω) pour $s < -a + tC_{\min}$ et on écrit :

$$\mathrm{KD}_s^{n-1} h(t; s, \omega) = h_1(t; s, \omega) + h_2(t; s, \omega)$$

où

$$\operatorname{supp} h_1 \subset \{ s > -a + tC_{\min} - \varepsilon \} \times S_\omega^{n-1}, \qquad \varepsilon > 0$$
$$h_2 \in (C^\infty \cap L^2)(\mathbb{R}_s \times S_\omega^{n-1}) .$$

$\mathscr{R}^* h_2$ est C^∞ et $\mathscr{R}^* h_1$ est nul pour $|x| < -a + tC_{\min} - \varepsilon$, ce qui montre que $u(t, .)$ est C^∞ pour $|x| < -a + tC_{\min} - \varepsilon$ et $u\left(t + \dfrac{2a}{C_{\min}}, .\right)$ est C^∞ pour $|x| < a + tC_{\min}$, $t \geqslant 0$.

LEMME VII.3. — *On suppose que les hypothèses* (H_1') *et* (H_3) *sont vérifiées. Soit* φ *l'opérateur de multiplication par une fonction* C^∞ *à support dans* $\{ x / |x| \leqslant a \}$, $\rho \leqslant a$. *Alors l'opérateur* $\varphi U(t, 0) P_-^a$ *est compact pour* $t \geqslant \dfrac{12a}{C_{\min}}$ *et si n est impair* $\geqslant 3$, *il en est de même pour* $Z^a(t, 0)$.

Preuve. — Pour alléger les notations, on se restreint au cas où $C_{\min} = C_{\max} = 1$. Nous supposons tout d'abord que V est C^∞. On définit l'opérateur $M(t, s) = U(t, s) - U_0(t - s)$. Comme dans [5] on décompose $\varphi U(t, 0) P_-^a f$ en une somme de trois termes :

$$(65) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi U(t, 0) P_-^a f &= \varphi M(t, t - 2a) U(t - 2a, 2a) M(2a, 0) P_-^a f \\ &\quad + \varphi M(t, t - 2a) U(t - 2a, 2a) U_0(2a) P_-^a f \\ &\quad + \varphi U_0(2a) U(t - 2a, 0) P_-^a f . \end{aligned} \right.$$

Nous allons montrer que pour t assez grand, ces trois termes sont C^∞ ; en fait, si n est impair les deux derniers sont nuls. Tout d'abord, pour $t > 2a$, $U(t - 2a, 0) P_-^a f$ est orthogonal à D_-^a donc d'après le lemme VII.2 : $\varphi U_0(2a) U(t - 2a, 0) P_-^a f$ est C^∞.

Pour étudier la régularité du second terme posons :

$$W(t) = [U(t - 2a, 2a) - U_0(t - 4a)] U_0(2a) P_-^a f .$$

On a :

$$\frac{d}{dt} W(t) = AW(t) + Q(t - 2a) W(t) + Q(t - 2a) U_0(t - 2a) P_-^a f ,$$
$$W(4a) = 0 .$$

Le lemme VII.2 assume que $Q(t - 2a) U_0(t - 2a) P_-^a f$ est C^∞ pour $t > 4a$

et le potentiel $V(t, x)$ étant C^∞, $U(t, s)$ invarie $(\mathscr{D}(\mathbb{R}^n))^N$; donc $W(t)$ est C^∞ pour $t \geqslant 4a$. Or $U_0(t-4a)U_0(2a)P_-^a f$ est C^∞ pour $|x| < t - 3a$ donc $U(t-2a, 2a)U_0(2a)P_-^a f$ est C^∞ sur $|x| < t-3a$ pour $t > 4a$. Soit χ l'opérateur de multiplication par une fonction C^∞ à support dans $\{x/|x| \leqslant 4a\}$ est égale à 1 sur $\{x/|x| \leqslant 3a\}$; on a :

$$\chi U(t-2a, 2a)U_0(2a)P_-^a f \in C^\infty, \qquad t > 7a.$$

D'autre part, l'argument classique du cône de dépendance et du cône d'influence assure que pour tout s

$$U(s, s-2a)(1-\chi) = U_0(2a)(1-\chi)$$
$$(1-\chi)U(s, s-2a) = (1-\chi)U_0(2a)$$

donc

(66) $$M(s, s-2a) = \chi M(s, s-2a)\chi.$$

On en déduit que pour $t > 7a$

$$\varphi M(t, t-2a)U(t-2a, 2a)U_0(2a)P_-^a f$$
$$= \varphi M(t, t-2a)\chi U(t-2a, 2a)U_0(2a)P_-^a f \in C^\infty.$$

Grâce à (66), le premier terme de (65) s'écrit :

$$\varphi M(t, t-2a)U(t-2a, 2a)M(2a, 0)P_-^a f$$
$$= \varphi M(t, t-2a)\chi U(t-2a, 2a)\chi M(2a, 0)P_-^a f.$$

Le théorème A.I.2 de l'appendice I implique que $\chi U(t-2a, 2a)\chi g$ est C^∞ pour tout g de $\mathscr{H}$ si $t > 12a$. On conclut finalement que $\varphi U(t, 0)P_-^a f$ est C^∞ pour $t > 12a$. Le théorème du graphe fermé montre que $\varphi U(t, 0)P_-^a$ est un opérateur continu de $\mathscr{H}$ dans $(H^s_{\text{compact}}(\mathbb{R}^n))^N$ pour tout $s > 0$ et $t > 12a$; c'est donc un opérateur compact sur $\mathscr{H}$ d'après le théorème de Rellich-Kondrasov. Dans le cas où le potentiel n'est pas C^∞ on choisit une suite régularisante θ^j de $\mathbb{R}^{n+1}$ et on pose :

$$V^j = \theta^j * V.$$

V^j converge vers V dans $(L^\infty(\mathbb{R}^{n+1}))^{N^2}$ quand j tend vers l'infini. On note $U^j(t, s)$ le propagateur associé au système : $L^j = \partial_t + \sum_{h=1}^n A_h \partial_{x_h} + iV^j(t, x)$.

On désigne par Q^j l'opérateur de multiplication par iV^j, on a :

$$U^j(t, 0) - U(t, 0) = \int_0^t U_0(t-s)(Q^j(s) - Q(s))U^j(s, 0)ds$$
$$+ \int_0^t U_0(t-s)Q(s)(U^j(s, 0) - U(s, 0))ds.$$

On obtient alors :

$$\| \mathrm{U}^j(t,0) - \mathrm{U}(t,0) \| \leqslant t \,|\, \mathrm{V}^j - \mathrm{V} \,|_{\mathrm{L}^\infty} + \int_0^t |\, \mathrm{V} \,|_{\mathrm{L}^\infty} \| \mathrm{U}^j(s,0) - \mathrm{U}(s,0) \| \, ds .$$

Le lemme de Gronwall implique donc que $\mathrm{U}^j(t, 0)$ tend en norme vers $\mathrm{U}(t, 0)$ et il en est de même pour $\varphi \mathrm{U}^j(t, 0)\mathrm{P}_-^a$ vers $\varphi \mathrm{U}(t, 0)\mathrm{P}_-^a$ qui est donc compact pour $t \geqslant 12a$. Si n est impair, on peut remplacer φ par P_+^a dans tout ce qui précède et on obtient ainsi la compacité de $\mathrm{Z}^a(t, 0)$ ce qui achève la preuve du lemme.

Nous démontrons à présent la décroissance de l'énergie locale.

LEMME VII.4. — *Soit f dans $\mathscr{H}$ de support inclus dans $\{ |x| \leqslant \mathrm{R} \}$; alors on a :*

$$\| \mathrm{U}_0(t) f \|_{\mathrm{E}_\mathrm{R}} \leqslant \mathrm{C}_\mathrm{R}(1 + |t|)^{-n} \| f \|$$

où C_R est indépendant de f.

Preuve. — Le symbole de $|\, \mathrm{D}_s |^{n-1}$, $|\sigma|^{n-1}$, étant homogène de degré $n-1$, le noyau de $|\, \mathrm{D}_s |^{n-1}$ est homogène de degré $-n$ et (64) implique que pour f dans $(\mathscr{D}(\mathbb{R}^n))^\mathrm{N}$, $\operatorname{supp} f \subset \{ |x| \leqslant \mathrm{R} \}$, $|x| \leqslant \mathrm{R}$ et $|t| \geqslant \dfrac{3\mathrm{R}}{\mathrm{C}_{\min}}$ on a :

$$u(t,x) = \mathrm{C} \int_{\mathrm{S}^{n-1}} \int_{-\mathrm{R}}^{+\mathrm{R}} \sum_{j=1}^{p} \frac{\psi_j(s,\omega)}{|\, x \cdot \omega - t\mu_j(\omega) - s \,|^n} \, ds d\omega .$$

On en déduit que :

$$|\, u(t,x) \,| \leqslant \mathrm{C}(1 + |t|)^{-n} \int_{\mathrm{S}^{n-1}} \int_{-\mathrm{R}}^{+\mathrm{R}} |\, \tilde{f}(s,\omega) \,| \, ds d\omega$$

et comme f est à support compact, on a :

$$\int_{\mathrm{S}^{n-1}} \int_{-\mathrm{R}}^{+\mathrm{R}} |\, \tilde{f}(s,\omega) \,| \, ds d\omega \leqslant \mathrm{C}_\mathrm{R} \| f \|$$

et finalement on obtient :

$$\int_{|x| \leqslant \mathrm{R}} |\, u(t,x) \,|^2 dx \leqslant \mathrm{C}'(1 + |t|)^{-2n} \| f \|^2 \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

APPENDICE 1

On considère le système :

$$L = D_t - \sum_{j=1}^{n} A_j D_{x_j} + V(t, x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

où $A(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j A_j$ est une matrice hermitienne $N \times N$, *inversible* pour tout $\xi \neq 0$ et V est une matrice $N \times N$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. Soient $\lambda_1(\xi) \geqslant \lambda_2(\xi) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_N(\xi)$ les valeurs propres de $A(\xi)$ et

$$0 < C_{\min} = \operatorname*{Inf}_{\omega \in S^{n-1}} \lambda_{\frac{N}{2}}(\omega), \qquad C_{\max} = \operatorname*{Sup}_{\omega \in S^{n-1}} \lambda_1(\omega).$$

On définit la variété caractéristique :

$$\Sigma = \{ (t, x, \tau, \xi) \in T^*(\mathbb{R}^{n+1}) \backslash 0 ; \qquad \det(\tau \, \mathrm{Id} - A(\xi)) = 0 \}.$$

Étant donné $\mu = (\bar{t}, \bar{x}, \bar{\tau}, \bar{\xi}) \in \Sigma$, $\bar{t} > 0$, on considère :

$$K(\mu) = \{ (t, x, \tau, \xi) \in \Sigma ; \quad 0 \leqslant t < \bar{t}, \quad C_{\min}(\bar{t} - t) \leqslant |x - \bar{x}| \}.$$

THÉORÈME A.I 1. — *Soit $u(t, x)$ dans $C^0(\mathbb{R}_t, (L^2(\mathbb{R}_x^n))^N)$ la solution du problème de Cauchy :*

(A.1) $$Lu = 0, \qquad u(0, x) = f(x) \in (L^2(\mathbb{R}_x^n))^N.$$

Alors $WF(u) \cap K(\mu) = \emptyset$ implique : $\mu \notin WF(u)$.

THÉORÈME A.I.2. — *Supposons que* $\operatorname{Supp} f \subset \{ x ; |x| \leqslant a \}$. *Alors $u(t, x)$ est C^∞ pour $|x| \leqslant a$, $t > 2aC_{\min}^{-1}$.*

Preuve du théorème A.I.1. — On définit les opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 0 $P_{+,-}(D_x)$ en posant pour $|\xi| = 1$

$$P_+(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma^+} (z \, \mathrm{Id} - A(\xi))^{-1} dz, \qquad P_-(\xi) = \mathrm{Id} - P_+(\xi)$$

où γ^+ est un contour simple fermé dans $\{ \operatorname{Re} z > 0 \}$ contenant $[C_{\min}, C_{\max}]$.

on pose : $u_{+,-} = P_{+,-}(D_x)U, \quad U = (u_+, u_-), \quad f_{+,-} = P_{+,-}(D_x)f$

$$a_{+,-}(\xi) = P_{+,-}(\xi)A(\xi) - P_{-,+}(\xi)A(\xi)$$

$$\mathscr{L} = D_t - \begin{pmatrix} a_+(D_x), & 0 \\ 0 & , \; a_-(D_x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_+(D_x) \circ V, & P_+(D_x) \circ V \\ P_-(D_x) \circ V, & P_-(D_x) \circ V \end{pmatrix}.$$

Le problème de Cauchy (A.1) est équivalent à :

(A.2) $$\mathscr{L}U = 0, \qquad U(0, .) = (f_+, f_-).$$

A présent on découple microlocalement le symbole total de $\mathscr{L}$ en utilisant la procédure de Taylor [*24*], chap. IX, § 1 : il existe un opérateur $\mathscr{U}$ de symbole principal une matrice unitaire, défini sur un voisinage $\omega(\mu)$ de μ dans $T^*(\mathbb{R}^{n+1})$ tel que :

$$\tilde{\mathscr{L}} = \mathscr{U}^{-1} \mathscr{L} \mathscr{U} = \begin{pmatrix} D_t - a_+(D_x) + B_+ & 0 \\ 0 & D_t - a(D_x) + B \end{pmatrix} \operatorname{mod.} C^\infty$$

où $B_{+,-}$ sont des opérateurs d'ordre 0. On pose $v = \mathscr{U}^{-1}U\mathscr{U} = (v_+, v_-)$ et on a :

$$\text{(A.3)} \qquad \begin{cases} D_t v_\pm - a_\pm(D_x)v_\pm + B_\pm v_\pm = F_\pm \in C^\infty \\ v_\pm(0,.) = g_\pm \end{cases}$$

avec

$$\text{(A.4)} \qquad WF(v) \cap \omega(\mu) = WF(u) \cap \omega(\mu)$$

et on remarque que $a_{+,-}(\xi)$ sont des matrices hermitiennes $N \times N$ telles que :

$$\text{(A.5)} \qquad \begin{cases} \text{spectre } (a_+(\xi)) \subset [C_{\min}, C_{\max}], & \forall \xi \in S^{n-1} \\ \text{spectre } (a_-(\xi)) \subset [-C_{\max}, -C_{\min}], & \forall \xi \in S^{n-1}. \end{cases}$$

Pour étudier la propagation des singularités de la solution de (A.3), nous allons appliquer les résultats de Melrose [15]. On définit les cônes $\Gamma_{+,-}(\mu)$ de la façon suivante : si $\mu = (\bar{t}, \bar{x}, \bar{\tau}, \bar{\xi})$ on considère la forme :

$$\alpha = d\tilde{\alpha}, \qquad \tilde{\alpha} = \alpha_1(t - \bar{t}) + \beta_1 \cdot (x - \bar{x}) + \alpha_2(\tau - \bar{\tau})\frac{|\bar{\tau}|}{|\tau|} + \beta_2 \cdot (\xi - \bar{\xi})\frac{|\bar{\xi}|}{|\xi|}.$$

On introduit les cônes $\Gamma^*_{+,-}(\mu)$:

$$\Gamma^*_{+,-}(\mu) = \{ \alpha = d\tilde{\alpha} \in T^*(T^*\mathbb{R}^{n+1}); \quad H_\alpha(\tau \,\mathrm{Id} - a_\pm(\xi))(\mu) \text{ est définie positive} \}$$

où H_α est l'adjoint de $d\alpha$ pour la forme symplectique sur $T^*(T^*\mathbb{R}^{n+1})$ et on pose :

$$\Gamma_{+,-}(\mu) = \{ v \in T_\mu(T^*\mathbb{R}^{n+1}); \quad \langle v, \alpha \rangle \geqslant 0, \quad \forall \alpha \in \Gamma^*_{+,-}(\mu) \}$$

On appelle rayon généralisé une application $C_{+,-}(t)$ définie sur un intervalle I, lipschitzienne à valeur dans Σ et telle que si en t il existe une suite $s_n \neq t$ convergeant vers t et telle que $(C_{+,-}(s_n) - C_{+,-}(t))(s_n - t)^{-1}$ converge quand $n \to \infty$, cette limite est dans $\Gamma_\pm(C_\pm(t))$. On appelle « passé » d'un point $\mu = (\bar{t}, \bar{x}, \bar{\tau}, \bar{\xi}) \in \Sigma$, $0 < \bar{t}$, noté $P(\mu)$, la réunion des rayons généralisés $C_\pm(t) : [t_1, \bar{t}] \to \Sigma$ avec $t_1 \leqslant \bar{t}$ et $C_{+,-}(\bar{t}) = \mu$. Le résultat fonmental de Melrose assure que pour des systèmes tels que (A.3) vérifiant (A.5) on a :

$$\text{(A.6)} \qquad WF(v) \cap (P(\mu) \backslash \{ \mu \}) = \varnothing \Rightarrow \mu \notin WF(v).$$

Le théorème A.1 est donc une conséquence de (A.4), (A.6) et du :

Lemme A.I.3. — *Soit* $\mu = (\bar{t}, \bar{x}, \bar{\tau}, \bar{\xi}) \in \Sigma$, $\bar{t} > 0$. *Alors :*

$$\text{(A.7)} \qquad (P(\mu) \backslash \{ \mu \}) \subset K(\mu).$$

Preuve. — Soit $C_+ : [0, \bar{t}] \to P(\mu)$ un rayon généralisé tel que $0 < \bar{t}$, $C_+(\bar{t}) = \mu$. Il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$\text{(A.8)} \qquad C_+([0, \bar{t}]) \subset \overline{K}_\varepsilon(\mu)$$

où

$$\overline{K}_\varepsilon(\mu) = \{ (t, x, \tau, \xi) \in \Sigma; \quad 0 \leqslant t \leqslant \bar{t}\,(C_{\min} - \varepsilon)(\bar{t} - t) \leqslant | x - \bar{x} | \}.$$

On introduit la forme :

$$\alpha = d\tilde{\alpha}, \qquad \tilde{\alpha} = -(C_{\min} - \varepsilon)(t - \bar{t})\,|\,\xi\,| - \xi \cdot (x - \bar{x}).$$

On obtient :

$$H_\alpha(\tau \,\mathrm{Id} - a_+(\xi)) = -(C_{\min} - \varepsilon)\,|\,\xi\,|\,\mathrm{Id} + \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} a_+(\xi).$$

On vérifie aisément à partir de la définition de P_+ et a_+ que :

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} a_+(\xi) = |\xi| a_+(\xi)$$

et donc la matrice

$$H_{\alpha}(\tau \, \mathrm{Id} - a_+(\xi)) = |\xi| ((\varepsilon - C_{\min}) \, \mathrm{Id} + a_+(\xi))$$

est définie positive ce qui assure que $\alpha = d\tilde{\alpha}$ appartient à $\Gamma_{\ddagger}^*(C_+(t))$ et

$$\alpha = -(C_{\min} - \varepsilon)|\xi| dt - \sum_{j=1}^{n} \xi_j dx_j - \sum_{j=1}^{n} \left[(C_{\min} - \varepsilon)(t - \bar{t}) \frac{\xi_j}{|\xi|} + (x_j - \bar{x}_j) \right] d\xi_j .$$

Si $C_+(t) = (t, x(t), \tau(t), \xi(t))$ on a, par la définition de C_+ et Γ_+ :

$$0 \leqslant -(C_{\min} - \varepsilon)|\xi(t)| - \xi(t) \cdot x'(t) - (C_{\min} - \varepsilon)(t - \bar{t}) \frac{\xi(t)}{|\xi(t)|} \cdot \xi'(t) - (x(t) - \bar{x}) \cdot \xi(t)$$

où x' et ξ' sont les dérivées définies p. p. de x et ξ. On obtient :

$$(C_{\min} - \varepsilon)|\xi| \leqslant [(\bar{x} - x) \cdot \xi]' + (C_{\min} - \varepsilon)(\bar{t} - t)|\xi|' .$$

On intègre cette inégalité entre t et $\bar{t}$ en remarquant que x et ξ sont des fonctions absolument continues de t :

$$(C_{\min} - \varepsilon) \int_t^{\bar{t}} |\xi(s)| ds \leqslant (x(t) - \bar{x}) \cdot \xi(t) + (C_{\min} - \varepsilon)(t - \bar{t})|\xi(t)| + \\ + (C_{\min} - \varepsilon) \int_t^{\bar{t}} |\xi(s)| ds .$$

Puisque $(t, x, \tau, \xi) \in \Sigma$, $\xi(t)$ n'est pas nul et

$$(C_{\min} - \varepsilon)(\bar{t} - t) \leqslant (x(t) - \bar{x}) \cdot \frac{\xi(t)}{|\xi(t)|} \leqslant |\bar{x} - x(t)|$$

ce qui prouve (A.8). Dans le cas d'un rayon $C_-(t)$, on utilise la même méthode en introduisant $\tilde{\alpha} = -(C_{\min} - \varepsilon)(t - \bar{t})|\xi| + \xi \cdot (x - \bar{x})$.

Preuve du théorème A.I.2. — Soit $\mu = (\bar{t}, \bar{x}, \bar{\tau}, \bar{\xi}) \in \Sigma$, $|\bar{x}| \leqslant a$, $\bar{t} > \dfrac{2a}{C_{\min}}$. On suppose que $\mu \in WF(u)$ et on introduit :

$$\mathscr{I} = \{ t \in \mathbb{R} ; 0 \leqslant t < \bar{t}, \text{ il existe } (x, \tau, \xi), (t, x, \tau, \xi) \in WF(u) \cap P(\mu) \} .$$

D'après (A.6), $\mathscr{I}$ n'est pas vide et on pose :

$$t_0 = \operatorname{Inf} \mathscr{I} .$$

Les singularités se propageant à une vitesse inférieure ou égale à $C_{\max}$ et $WF(u)$ et $P(\mu)$ étant fermés, il existe (x_0, τ_0, ξ_0) tels que $\mu_0 = (t_0, x_0, \tau_0, \xi_0) \in WF(u) \cap P(\mu)$. Si $t_0 > 0$ la définition de t_0 implique que $WF(u) \cap (P(\mu_0) \setminus \{ \mu_0 \}) = \emptyset$ et donc $\mu_0 \notin WF(u)$, ce qui est une contradiction. Si $t_0 = 0$, on a par (A.7) :

$$\mu_0 = (0, x_0, \tau_0, \xi_0) \in WF(u) \cap P(\mu) \subset WF(u) \cap K(\mu) .$$

Donc,

$$|x_0| \geqslant |x_0 - \bar{x}| - |\bar{x}| \geqslant C_{\min}\bar{t} - a > a .$$

D'autre part, si $|t| < \dfrac{|x_0| - a}{C_{\max}}$, la solution $u(t, x)$ est nulle dans un petit voisinage de x_0 et donc $\mu_0 \notin WF(u)$, ce qui est encore une contradiction. Q. E. D.

APPENDICE 2

On considère m matrices carrées A_i d'ordre N à coefficients complexes et m polynômes P_i de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$. Pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, on définit la matrice $A(x)$

$$A(x) = \sum_{i=1}^{m} P_i(x)A_i .$$

Soient une hypersurface algébrique irréductible S de l'espace affine réel $A^n_{\mathbb{R}}$ définie par un polynôme $Q(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, irréductible dans $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ et $S(\mathbb{R})$ l'ensemble des points de S rationnels sur $\mathbb{R}$:

$$S(\mathbb{R}) = \{ x \in \mathbb{R}^n / Q(x) = 0 \} .$$

On veut montrer que le nombre de valeurs propres distinctes de $A(x)$ ainsi que leurs multiplicités sont invariants sur un ouvert Zariski-dense de $S(\mathbb{R})$.

THÉORÈME A.II. — *Il existe une hypersurface* V *de* S *et des entiers* $p, q, p_1, \ldots, p_q, m_1, \ldots, m_q$ *tels que :*

$$p = \sum_{i=1}^{q} p_i, \qquad N = \sum_{i=1}^{q} m_i p_i, \qquad m_i \neq m_j \quad \text{si} \quad i \neq j$$

et tels que pour tout x *de* $(S \setminus V)$ *la matrice* $A(x)$ *admette exactement* p *valeurs propres distinctes dans* $\mathbb{C}$ *dont* p_i *sont de multiplicité* m_i.

Remarque. — Si les polynômes P_i sont tous homogènes de même degrés, on peut remplacer $S(\mathbb{R})$ par la variété conique Γ s'appuyant sur $S(\mathbb{R})$, $\Gamma = \{ x \in \mathbb{R}^n /\ \lambda \in \mathbb{R} ; Q(\lambda x) = 0 \}$.

Le cas particulier important $m = n$, $P_i(X) = X_i$ était utilisé dans [*13*], p. 190.

Preuve. — On note $\mathbb{C}[y_1, \ldots, y_n]$ le quotient de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ par l'idéal engendré par Q(X). Le polynôme Q étant irréductible, cet anneau est intègre et on désigne par $\mathbb{C}(y)$ son corps de fractions. Considérons la matrice $A(y)$ à coefficients dans $\mathbb{C}(y)$ donnée par :

$$A(y) = \sum_{i=1}^{m} P_i(y)A_i$$

et soit $\chi_{A(y)}(T) = \det(T\,\mathrm{Id} - A(y))$ son polynôme caractéristique. $\chi_{A(y)}(T)$ admet une décomposition en facteurs premiers :

$$\chi_{A(y)}(T) = \prod_{i=1}^{r} R^{\alpha_i}_{i,y}(T) \tag{1}$$

où les polynômes $R_{i,y}(T)$ sont des polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{C}(y)[T]$ de degrés N_i et deux à deux étrangers. La caractéristique de $\mathbb{C}$ étant nulle, $R_{i,y}(T)$ et son polynôme dérivé $R'_{i,y}(T)$ n'ont pas de racine commune dans la clôture algébrique de $\mathbb{C}(y)$ et leur résultant de Sylvester, $C_i(y)$ n'est pas nul. De même, pour $i \neq j$, le résultant $D_{i,j}(y)$ de $R_{i,y}(T)$ et $R_{j,y}(T)$ est un élément non nul de $\mathbb{C}(y)$. Il existe un élément non nul $E(y) \in \mathbb{C}[y]$ tel que pour tout i, j :

$$E(y)R_{i,j}(T) \in \mathbb{C}[y][T], \qquad E(y)C_i(y) \in \mathbb{C}[y], \qquad E(y)D_{i,j}(y) \in \mathbb{C}[y] .$$

On pose :

$$E(y) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant r} (E(y)C_i(y)) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant r} (E(y)D_{i,j}(y)) \,;$$

$F(y)$ n'est pas nul puisque $\mathbb{C}[y]$ est intègre et il existe donc un polynôme $F(X)$ de $\mathbb{C}[X]$ dont l'image par la surjection canonique $\mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[y]$ soit $F(y)$. Comme $F(y)$ n'est pas nul, $Q(X)$ ne divise pas $F(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$, et de même $Q(X)$ ne divise pas $\overline{F}(X)$; il suit que $Q(X)$ ne divise pas $G(X) \stackrel{\text{def}}{=} F(X)\overline{F}(X) \in \mathbb{R}[X]$.

Ainsi donc le fermé V de $A^n_{\mathbb{R}}$ défini par l'idéal $Q(X)\mathbb{R}[X] + G(X)\mathbb{R}[X]$ est un fermé de S de codimension 1 dans S (théorème des idéaux principaux de Krull appliqué à $R[X]/Q(X)\mathbb{R}[X]$).

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ un point de $(S - V)(\mathbb{R})$, i. e. tel que $Q(x) = 0$ et $G(x) \neq 0$.

Soit $H(X) \in \mathbb{C}[X]$; alors le point x induit un homomorphisme σ_x de $\mathbb{C}[y] \to \mathbb{C}$ par $H(y) \to H(x)$; cet homomorphisme se prolonge canoniquement aux éléments de $\mathbb{C}(y)$ qui admettent une écriture de la forme $A(y)/B(y)$ avec $A(y)$ et $B(y)$ dans $\mathbb{C}[y]$, $B(y) \neq 0$. Puisque $G(x) \neq 0$ implique $E(x) \neq 0$, l'homomorphisme σ_x se prolonge aux coefficients de $R_{i,y}$. Il suit de cela que l'homomorphisme σ_x appliqué à (1) donne :

$$\chi_{A(x)}(T) = \prod_{i=1}^{r} R_{i,x}^{\alpha_i}(T) \tag{2}$$

où $R_{i,x}(T) = \sigma_x(R_{i,y})$ et $\chi_{A(x)}$ est le polynôme caractéristique de $A(x)$; par ailleurs $\sigma_x(C_i(y)) = C_i(x)$ est le résultant de $R_{i,x}$ et $R'_{i,x}$ et $\sigma_x(D_{i,j}(y)) = D_{i,j}(x)$ est celui de $R_{i,x}$ et $R_{j,x}$. Toujours $G(x) \neq 0$ implique que ces résultants sont non nuls. Il suit de cela que (2) s'écrit :

$$\chi_{A(x)}(T) = \prod_{i=1}^{r} R_{i,x}^{\alpha_i}(T) = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{N_i} (T - \lambda_{i,j}(x))^{\alpha_i}$$

$$\lambda_{i,j}(x) \neq \lambda_{h,k}(x) \quad \text{si} \quad (i,j) \neq (h,k).$$

On achève la démonstration en posant :

$$p = \sum_{i=1}^{r} N_i, \qquad q = \# \{ \alpha_i, 1 \leqslant i \leqslant r \} = \{ m_1, \ldots, m_q \}$$

$$1 \leqslant j \leqslant q, \qquad p_j = \sum_{\alpha_i = m_j} N_i \qquad \text{Q. E. D.}$$

REMERCIEMENTS

La preuve du théorème A.II nous a été indiquée par Jean Fresnel que nous remercions très vivement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BACHELOT et V. PETKOV, Existence de l'opérateur de diffusion pour l'équation des ondes avec un potentiel périodique en temps ; *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **303**, série I, n° 14, 1986, p. 671-673.

[2] A. BACHELOT et V. PETKOV, Existence de l'opérateur de diffusion pour l'équation des ondes avec un potentiel périodique en temps ; à paraître in « Nonlinear partial differential equations and their applications, Collège de France Seminar ». H. Brezis et J. L. Lions Eds. *Research Notes in Math.*, Pitman, Boston, Londres, Melbourne.
[3] C. BLOOM et N. KAZARINOFF, Energy decays locally even if total energy grows algebrically with time. *J. Diff. Equations*, t. **16**, 1974, p. 352-372.
[4] J. COPPER, G. PERLA-MENZALA, W. STRAUSS, *On the scattering frequencies of time dependent potentials*. Preprint.
[5] J. COPPER et W. STRAUSS, Scattering of waves by periodically moving bodies. *J. Funct. Anal.*, t. **47**, 1982, p. 180-229.
[6] J. COPPER et W. STRAUSS, Abstract scattering theory for time periodic systems with applications to electromagnetism. *Indiana Univ. Math.*, t. **34**, 1985, p. 33-83.
[7] N. DUNFORD et J. SCHWARTZ, Linear operators. *Wiley Interscience*, New York, 1971.
[8] J. A. FERREIRA et G. PERLA-MENZALA, *Time dependent approach to the inverse scattering problem for wave equation with time dependent coefficients;* Preprint.
[9] V. GEORGIEV, Existence and completeness of the wave operators for dissipative hyperbolic systems. *J. Operator Theory*, t. **14**, 1985, p. 291-310.
[10] V. GEORGIEV et V. PETKOV, Théorème de type RAGE pour des opérateurs à puissances bornées. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **303**, série I, 1986, p. 605-608.
[11] J. C. GUILLOT et G. SCHMIDT, Spectral and scattering theory for Dirac operators. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, t. **55**, 1974, p. 193-206.
[12] J. S. HOWLAND, Stationary scattering theory for time dependent hamiltonians. *Math. Ann.*, t. **207**, 1974, p. 315-335.
[13] P. D. LAX et R. PHILLIPS, Scattering theory. *Academic Press*, New York, 1967.
[14] R. B. MELROSE, Singularities and energy decay in acoustical scattering. *Duke Math. J.*, t. **46**, 1979, p. 43-59.
[15] R. B. MELROSE, The trace of the wave group; in Contemporary Mathematics, vol. **27**. *Microlocal Analysis*, *A. M. S.*, 1985, p. 127-167.
[16] G. PERLA-MENZALA, On perturbed wave equations with time dependent coefficients. *Ann. Scuola Norm. Pisa*, t. **11**, 1984, p. 541-558.
[17] G. PERLA-MENZALA, Sur l'opérateur de diffusion pour l'équation des ondes avec des potentiels dépendant du temps ; *C. R. Acad. Sci. Paris*, série I, t. **300**, 1985, p. 621-624.
[18] G. PERLA-MENZALA, *Scattering properties of wave equations with time dependent potentials;* Preprint.
[19] V. PETKOV, *Scattering theory for mixed problems in the exteriour of moving obstacles;* Intern. Conf. on Hyperbolic Equ. and Related Topics, Padova, 1985, *à paraître*.
[20] V. PETKOV, *Scattering theory for hyperbolic operators;* Notas de Curso n° 24, Departamento de Matematica, Universitade Federal de Pernambuco, Recife, 1987.
[21] G. POPOV et Zv. RANGELOV, *On the exponential growth of the local energy for periodically moving obstacles;* Preprint.
[22] R. PHILLIPS, Scattering theory for the wave equation with a short range perturbation. *Indiana Univ. Math. J.*, t. **31**, 1982, p. 609-639.
[23] W. STRAUSS, The existence of the scattering operator for moving obstacles. *J. Funct. Anal.*, t. **31**, 1979, p. 255-262.
[24] M. E. TAYLOR, *Pseudodifferential operators;* Princeton University Press, 1981.

(Manuscrit reçu le 20 mai 1987)