

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

XUE PING WANG

Puits multiples pour l'opérateur de Dirac

Annales de l'I. H. P., section A, tome 43, n° 3 (1985), p. 269-319

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1985__43_3_269_0

© Gauthier-Villars, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Puits multiples pour l'opérateur de Dirac

par

Xue Ping WANG

 Institut de Mathématiques et d'Informatique
 Université de Nantes, F 44072, Nantes, France

RÉSUMÉ. — On considère le problème de puits multiples pour l'opérateur de Dirac $D(h)$ dépendant d'un petit paramètre $h > 0$:

$$D(h) = h \sum_{j=1}^3 \alpha_j D_j + \alpha_4 + V I_4$$

défini dans $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$. Modulo une erreur exponentiellement petite mesurée par la distance d'Agmon entre les puits, les quantités spectrales de l'opérateur de Dirac à puits multiples sont la somme directe de celles des opérateurs de Dirac correspondant à un puits. Dans le cas où les puits sont non-dégénérés, ils se divisent géométriquement en deux familles, « collines » et « vallées », qui sont non-résonnantes au sens de Helffer-Sjöstrand [13]. On prouve en particulier que pour l'opérateur de Dirac à un puits non-dégénéré, les deux premières valeurs propres positives admettent le même développement semi-classique et en présence de symétries pour V , elles sont vraiment égales.

ABSTRACT. — We consider the multiple well problem for the Dirac operator $D(h)$ depending on a small parameter $h > 0$:

$$D(h) = h \sum_{j=1}^3 \alpha_j D_j + \alpha_4 V I_4,$$

defined in $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$. Modulo some exponentially small error, measured by Agmon's distance between the wells, the spectral quantities of the

Dirac operator with multiple wells are the direct sum of those of the Dirac operators corresponding to one well. When the wells are non-degenerate, they can be divided into two families, « hills » and « valleys », which are non-resonant in the sense of Helffer-Sjöstrand [13]. In particular, one proves that for the Dirac operator with one non-degenerate well, the first two positive eigenvalues have the same semi-classical expansion and, in the presence of symmetries for V , are really equal.

1. INTRODUCTION

On se propose d'étudier le spectre discret de l'opérateur de Dirac dépendant d'un petit paramètre $h > 0$:

$$(1.1) \quad D(h) = h \sum_{j=1}^3 \alpha_j D_j + \alpha_4 + V I_4$$

défini dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$. Ici les α_j sont des matrices 4×4 vérifiant:

$$\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 2\delta_{jk} I_4.$$

Supposons que V soit une fonction réelle C^∞ dans \mathbb{R}^3 et que pour certains $E \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que $|V(x) - E| \leq 1 - \varepsilon$ lorsque $|x| \geq R$. On sait alors que le spectre de $D(h)$ dans un petit voisinage de E est pûrement discret. On appelle puits de l'opérateur de Dirac $D(h)$, de niveau d'énergie E , les composantes connexes disjointes de l'ensemble $\{x; |V(x) - E| \geq 1\}$. L'objet de ce travail est d'étudier les propriétés asymptotiques du spectre de $D(h)$ près de E . Inspiré par une série de travaux récents de Helffer-Sjöstrand ([11]-[13]), on va établir la relation entre des quantités spectrales d'un opérateur de Dirac à puits multiples et celles d'opérateurs de Dirac perturbés à un seul puits. La théorie spectrale de l'opérateur de Dirac a fait l'objet de nombreux travaux (voir par exemple [3] [8] [16] [17] [19] et [20]). Mais à notre connaissance, il semble que le problème de puits multiples pour l'opérateur de Dirac dans la limite semi-classique n'a pas encore été abordé dans un cadre mathématique, au moins sous une forme écrite dans la littérature. Étant donnée la liaison étroite entre l'opérateur de Dirac et l'opérateur de Schrödinger, on peut espérer obtenir des phénomènes voisins de ceux observés pour l'opérateur de Schrödinger à puits multiples (voir par exemple [5] [6] [11]-[13] et [24]-[25]). Harrell

et Klaus ([8]) ont donné un tel exemple dans le cas où deux puits s'éloignent vers l'infini.

En essayant d'appliquer la méthode de Helffer et Sjöstrand [11] à l'opérateur de Dirac, on rencontre tout de suite une difficulté technique : ces auteurs introduisent artificiellement des problèmes de Dirichlet attachés à chaque puits. On ne voit pas comment poser un tel problème pour l'opérateur de Dirac. Il est possible qu'on puisse adapter la méthode de Harrell-Klaus [8], mais cette méthode semble difficile à rendre rigoureuse lorsqu'on n'a pas de symétries. Rappelons que dans la mécanique classique, les effets de puits de potentiel sont isolés, mais que dans la mécanique quantique il existe des interactions entre les puits, appelées effets tunnels. Dans l'étude du problème des puits multiples pour l'opérateur de Schrödinger, une des étapes est de réduire le problème de puits multiples à des problèmes à un puits. Utilisant une remarque de Helffer-Sjöstrand, on introduit des perturbations du potentiel V pour obtenir des opérateurs de Dirac à un puits, puis on étudie l'effet tunnel entre les puits : c'est-à-dire la différence entre les quantités spectrales de l'opérateur de départ et celle de la somme directe des opérateurs perturbés. Dans ce travail, un rôle important est joué par une estimation d'énergie (voir (2.7)), du type utilisée par Agmon et déjà utilisée dans [25] ou plus intensivement dans [11]. On peut trouver dans [3] d'autres estimations d'énergie pour l'opérateur de Dirac.

Ce travail est organisé de la manière suivante : dans la section 2, on introduit la notion de puits pour l'opérateur de Dirac. Par une inégalité d'énergie, on établit la décroissance exponentielle des vecteurs propres en dehors de puits. Cela permet d'obtenir les premières informations sur l'effet tunnel et la matrice d'interaction. Les résultats démontrés au § 2 peuvent être comparés avec ceux du § 2 de [11]. Dans la section 3, on se borne au cas où les puits sont non-dégénérés. En fait les puits de l'opérateur de Dirac se divisent géométriquement en deux familles. Sous les conditions de non-dégénéricités sur les puits, on démontre que ces deux familles de puits sont non résonnantes au sens de Helffer-Sjöstrand [13] : chaque famille contribue au spectre positif ou négatif respectivement. Ce phénomène est semble-t-il particulier à l'opérateur de Dirac. Utilisant la décroissance des vecteurs propres en dehors des puits, on montre l'existence des développements asymptotiques en puissances de $h^{1/2}$ pour les valeurs propres. On démontre en particulier que le premier terme de ces développements est encore déterminé par les valeurs propres de différents oscillateurs harmoniques associés près de fond de puits. Dans la section 4, on calcule plus précisément les premières valeurs propres et les vecteurs propres correspondants par la méthode W. K. B. Les principes de cette méthode sont bien connus. Mais comme on cherche un vecteur propre dans une région classiquement interdite, on est conduit à résoudre une équation

eikonale dont la matrice correspondante est non hermitienne et dont les valeurs propres sont de multiplicité variable. Heureusement, dans notre cas, on peut trouver un hamiltonien classique dont l'équation eikonale associée est équivalente à la notre et qui possède de bonnes propriétés pour prolonger les solutions des équations de transport. Le résultat principal qu'on montre dans la section 4 est que pour l'opérateur de Dirac à un puits non-dégénéré, la première valeur propre, qui est associée à la première valeur propre de l'oscillateur harmonique localisé au fond de puits, est toujours de multiplicité asymptotique 2 (pour la définition voir la section 4). Une question ouverte est de savoir si elle est vraiment double, ou si on observe un décalage entre ces deux valeurs propres. Dans la section 5, sous certaines hypothèses géométriques, on calcule explicitement la matrice d'interaction. Dans la section 6, on étudie des cas particuliers où en présence de symétries pour le potentiel V , la première valeur propre est de multiplicité 2. Ce phénomène est particulier à l'opérateur de Dirac, car il est bien connu que la première valeur propre de l'opérateur de Schrödinger est toujours simple.

Ce travail a été suggéré par B. Helffer. De nombreuses discussions avec lui ont été essentielles à ce travail. L'auteur voudrait l'en remercier bien sincèrement ici. Il remercie également D. Robert pour d'utiles discussions sur ce sujet.

2. INTERACTION ENTRE LES Puits

Considérons l'opérateur de Dirac $D(h)$:

$$(2.1) \quad D(h) = h \sum_{j=1}^3 \alpha_j D_j + \alpha_4 + V I_4$$

défini dans $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$, où les α_k sont des matrices auto-adjointes 4×4 :

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \quad j = 1, 2, 3$$

I_k étant l'identité dans \mathbb{C}^k et σ_j les matrices de Pauli 2×2 :

$$(2.2) \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a les relations bien connues des σ_j :

$$(2.3) \quad \sigma_1 \sigma_2 = -\sigma_2 \sigma_1 = i \sigma_3, \quad \sigma_2 \sigma_3 = -\sigma_3 \sigma_2 = i \sigma_1, \quad \sigma_3 \sigma_1 = -\sigma_1 \sigma_3 = i \sigma_2$$

D'où

$$\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 2\delta_{kj} I_4, \quad j, k = 1, 2, 3, 4.$$

On fait les hypothèses suivantes sur le potentiel V :

(2.4) V est une fonction réelle C^∞ et il existe des constantes $E \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ telles que l'on ait, pour certain $R > 0$, que :

$$|V(x) - E| \leq 1 - \varepsilon, \quad \text{lorsque } |x| \geq R.$$

Pour introduire la notion de puits, on regarde les valeurs propres du symbole $d(x, \xi)$ de l'opérateur $D(h)$:

$$d(x, \xi) = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \xi_j + \alpha_4 + V(x) I_4$$

$d(x, \xi)$ admet deux valeurs propres doubles : $\lambda_{\pm} = \pm \sqrt{1 + |\xi|^2 + V(x)}$.

Dans [10], Helffer et Robert ont introduit une notion de puits généralisé pour un opérateur pseudo-différentiel à symbole réel $a(x, \xi)$: les puits de cet opérateur correspondant au niveau d'énergie E_0 sont les composantes connexes disjointes de la projection dans l'espace \mathbb{R}_x^3 de l'ensemble $\{(x, \xi) ; a(x, \xi) = E_0\}$. Par analogie dans notre cas, on appelle puits de l'opérateur de Dirac correspondant à l'énergie E les composantes connexes disjointes de la projection dans l'espace \mathbb{R}_x^3 de l'ensemble $\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^6 ; \lambda_+(x, \omega) = E \text{ ou } \lambda_-(x, \xi) = E\}$. Notons que sous les conditions (2.4), le spectre de $D(h)$ est pûrement discret dans un petit voisinage contenant E . On peut alors étudier les propriétés asymptotiques du spectre discret près de E de l'opérateur $D(h)$ lorsque h tend vers 0. Notons aussi que sous les conditions de (2.4), les puits de $D(h)$ sont des compacts connexes dans \mathbb{R}^3 , dont la réunion est l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^3 ; |V(x) - E| \geq 1\}$. Quitte à remplacer V par $V - E$, on supposera dans la suite que $E = 0$. Alors, la projection de $\{(x, \xi) ; \lambda_+(x, \xi) = 0, \text{ ou } \lambda_-(x, \xi) = 0\}$ est l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^3 ; V^2 \geq 1\}$. Supposons que ce dernier ensemble admette N composantes connexes compactes deux à deux disjointes. On les désigne par $U_j, j = 1, \dots, N$.

$$(2.5) \quad \bigcup_{j=1}^N U_j = \{x \in \mathbb{R}^3 ; V^2 \geq 1\}.$$

Par définition, les U_j sont les puits de l'opérateur de Dirac correspondant au niveau d'énergie 0. Évidemment les U_j se décomposent en deux familles : $\{U_j^+, j = 1, \dots, N^+\}$ et $\{U_j^-, j = 1, \dots, N^-\}$. $N^+ + N^- = N$ et

$$(2.6)_+ \quad \bigcup_{j=1}^{N^+} U_j^+ = \{x \in \mathbb{R}^3 ; V \geq 1\}$$

$$(2.6)_- \quad \bigcup_{j=1}^{N^-} U_j^- = \{x \in \mathbb{R}^3; V \leq -1\}.$$

On va voir que sous les conditions imposées sur le potentiel, les U_j^+ et U_j^- contribuent au spectre négatif ou positif respectif respectivement. On montrera également que les U_j^\pm sont deux familles de puits non résonnants au sens de Helffer et Sjöstrand [13].

L'objet de notre travail est d'étudier le comportement semi-classique des valeurs propres de $D(h)$ dans un intervalle du type : $[-a_1(h), a_2(h)]$, où $a_j(h) > 0$ et $a_j(h) \rightarrow 0$ lorsque h tend vers 0. Comme dans le travail de Helffer et Sjöstrand [11], Simon [25], la proposition suivante joue un rôle important.

PROPOSITION 2.1. — *Soit ϕ une fonction réelle bornée, uniformément lipschitzienne sur \mathbb{R}^3 . Alors pour toute fonction continue $u \in H^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$, on a :*

$$(2.7) \quad h^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(e^{\phi/h}u)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} (1 - V^2 - |\nabla\phi|^2)e^{2\phi/h}|u|^2 dx \\ = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^3} e^{2\phi/h} \langle \bar{D}(h)D(h)u, u \rangle dx, \quad h > 0.$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire dans \mathbb{C}^4 et $\bar{D}(h)$ l'opérateur de Dirac obtenu en remplaçant V par $-V$. En particulier, si $F_+, F_- \in L^\infty$ sont tels que $F_+ \geq 0$, $F_- \geq 0$, $F_+ + F_- > 0$, et $F_+^2 - F_-^2 = 1 - V^2 - |\nabla\phi|^2$, alors,

$$(2.8) \quad h^2 \|\nabla(e^{\phi/h}u)\|^2 + 1/2 \|F_+ e^{\phi/h}u\|^2 \\ \leq \left\| \frac{1}{F_+ + F_-} e^{\phi/h} \bar{D}(h)D(h)u \right\|^2 + 3/2 \|F_- e^{\phi/h}u\|^2.$$

Preuve. — Il suffit de démontrer (2.7) pour $\phi \in C^1$ et $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$. On passe ensuite au cas général comme dans [11] par régularisation. Un calcul direct donne :

$$(2.9) \quad h^2 \|\nabla(e^{\phi/h}u)\|^2 - \iint e^{2\phi/h} |\nabla\phi|^2 |u|^2 dx = - \iint e^{2\phi/h} h^2 \langle \Delta u, u \rangle dx$$

Comme on a :

$$\bar{D}(h)D(h) = (-h^2\Delta + 1 - V^2)I_4 + i^{-1} \sum_{j=1}^3 \alpha_j \partial_{x_j} V$$

il vient de (2.9) que :

$$(2.10) \quad h^2 \|\nabla e^{\phi/h}u\|^2 + \iint (1 - V^2 - |\nabla\phi|^2)e^{2\phi/h}|u|^2 dx \\ = \iint e^{2\phi/h} \langle \bar{D}(h)D(h)u, u \rangle dx + i^{-1}h \iint e^{2\phi/h} \left\langle \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j \partial_{x_j} V \right) u, u \right\rangle dx.$$

Notons que les α_j sont auto-adjoints dans \mathbb{C}^4 et que V est réelle, donc

$$\left\langle \sum_{j=1}^3 \alpha_j \partial_{x_j} V u, u \right\rangle \text{ est réel pour tout } x. \text{ En prenant la partie réelle de (2.10),}$$

on obtient (2.7). (2.8) se déduit facilement de (2.7) (voir aussi [11]).

C. Q. F. D.

Dans la suite, on note H^m l'espace de Sobolev d'ordre m : $H^m = H^m(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$ et on pose aussi $H = H^0$. Sous nos conditions (2.4), $D(h)$ défini sur C_0^∞ est essentiellement auto-adjoint dans H (voir [4]). Par abus de notation, on note encore $D(h)$ sa réalisation auto-adjointe dans H . Alors il est facile à voir que le domaine de $D(h)$ est exactement H^1 , et pour $f \in H^1$,

$$(2.11) \quad \|D_0(h)f\| = |f|_{1,h} \quad \text{avec : } D_0(h) = h \sum_{j=1}^3 \alpha_j D_j + \alpha_4$$

et où on a noté $| \cdot |_{m,h}$ la norme de H^m définie par

$$|u|_{m,h} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|(hD)^\alpha u\|.$$

Quand f est un vecteur propre de $D(h)$, correspondant à la valeur propre E , alors

$$D_0(h)f = (E - V)f.$$

Sous les conditions (2.4), appliquant (2.11), on obtient

$$(2.12) \quad |f|_{1,h} \leq C \|f\|, \quad \text{pour } 0 < h \leq 1.$$

LEMME 2.2. — *Sous les conditions (2.3), supposons de plus qu'il existe m entier, tel que*

$$(2.13) \quad |\partial_x^\alpha V| \leq C_\alpha \quad \text{pour } |\alpha| \leq m.$$

Alors les vecteurs propres de $D(h)$ sont dans H^{m+1} .

La démonstration est triviale et on l'omet.

Notons que sans la condition (2.13), on peut aussi montrer que les vecteurs propres de $D(h)$ sont C^∞ en x . Dans la suite, pour pouvoir appliquer la proposition 2.1, on supposera toujours que (2.13) est satisfait pour $m = 1$.

Introduisons maintenant la distance d'Agmon d correspondant à la métrique d'Agmon : $(1 - V^2)_+ dx^2$ (voir aussi Agmon [2], Simon [25], Helffer-Sjöstrand [11]). Pour $\eta > 0$ assez petit, les ensembles $U_j(\eta)$ définis par :

$$U_j(\eta) = \{x; d(x, U_j) < \eta\}$$

vérifient : $U_j(\eta) \cap U_k(\eta) = \emptyset$ lorsque $k \neq j$, $k, j = 1, \dots, N$, où on rappelle que N est le nombre des puits. Prenons des fonctions réelles $W_j \in C_0^\infty(U_j(\eta))$ de sorte que si l'on pose

$$(2.14) \quad V_j(x) = \sum_{k \neq j} W_k + V, \quad D_j(h) = D_0(h) + V_j, \quad j = 1, \dots, N$$

on ait :

$$U_j = \{x; V_j^2 \geq 1\}, \quad V_j = V \quad \text{si } x \notin \bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N U_k(\eta) \quad \text{et } V_j^2 \leq V^2.$$

Les $D_j(h)$ sont les opérateurs de Dirac à un seul puits. Pour chaque V_j , on introduit une distance dégénérée d'Agmon d_j associée à la métrique $(1 - V_j^2)_+ dx^2$. Vu le choix des W_j , on a évidemment

$$d(x, U_j) \leq d_j(x, U_j), \quad j = 1, \dots, N.$$

Maintenant on peut mesurer la distance entre les puits. On pose :

$$S_1 = \min_{j \neq k} d(U_j, U_k).$$

Alors, on voit facilement que $d(U_j(\eta), U_k(\eta)) \geq S_1 - 2\eta$, lorsque $j \neq k$. Par les estimations grossières sur le nombre des valeurs propres d'opérateurs pseudo-différentiels à symbole matriciel, (voir [9] et [26]), on obtient que pour tout $0 < C < 1$, il existe $N_0 > 0$ tel que le nombre des valeurs propres de $D(h)$ ou de $D_j(h)$ dans l'intervalle $[-C, C]$ est majoré par h^{-N_0} à une constante multiplicative près. Dans la suite, on prend pour I un intervalle de la forme $[-a_1(h), a_2(h)]$ avec $a_j(h) \rightarrow 0_+$. On note par $\lambda_k(\mu_{j,k}$ resp.) les valeurs propres de $D(h)$ ($D_j(h)$, resp.) contenues dans l'intervalle I et par u_k ($v_{j,k}$ resp.) les vecteurs propres associés normalisés :

$$(2.15) \quad D(h)u_k = \lambda_k u_k, \quad k = 1, \dots, m_0$$

$$(2.16) \quad D_j(h)v_{j,k} = \mu_{j,k} v_{j,k}, \quad k = 1, \dots, m_j.$$

On introduit les fonctions d , d_j par :

$$(2.17) \quad d(x) = d\left(x, \bigcup_{j=1}^N U_j\right)$$

$$(2.18) \quad d_j(x) = d_j(x, U_j).$$

LEMME 2.3. — *Sous les conditions (2.3) et (2.13) pour $m = 1$ et utilisant les notations de (2.15) et (2.16), on a pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$(2.19) \quad \|\nabla(e^{(1-\varepsilon)d/h} u_k)\|^2 + \|e^{(1-\varepsilon)d/h} u_k\|^2 \leq C_\varepsilon e^{2\varepsilon/h}$$

$$(2.20) \quad \|\nabla(e^{(1-\varepsilon)d_j/h} v_{j,k})\|^2 + \|e^{(1-\varepsilon)d_j/h} v_{j,k}\|^2 \leq C_\varepsilon e^{2\varepsilon/h}$$

pour $0 < h \leq h_\varepsilon$.

Preuve. — On prouve (2.19), (2.20) se déduit de la même manière. Pour $R > 0$, prenons une fonction χ telle que $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, $0 \leq \chi' \leq 1$ et $\chi(t) = t$ pour $t \leq R$. Posons $\tilde{d} = \chi \circ d$. On peut appliquer l'inégalité (2.8) en remplaçant V par $V - \lambda_k$ et ϕ par $(1 - \varepsilon)\tilde{d}$, d'où on obtient

$$(2.21) \quad h^2 \|\nabla(e^{\phi/h}u_k)\|^2 + 1/2 \|F_+e^{\phi/h}u_k\|^2 \leq 3/2 \|F_-e^{\phi/h}u_k\|^2$$

où F_\pm appartenant à L^∞ sont choisies telles que, $F_+, F_- \geq 0$, $F_+^2 - F_-^2 = 1 - (V - \lambda_k)^2 - (1 - \varepsilon)^2 |\nabla\tilde{d}|^2$, p. p. Pour $\delta > 0$, vu le choix de l'intervalle I , pour $h > 0$ assez petit, on a

$$1 - (V - \lambda_k)^2 - (1 - \varepsilon)^2 |\nabla\tilde{d}|^2 \geq 2(1 - \varepsilon)(1 - V^2) + 2\lambda_k V - \lambda_k^2 \geq \varepsilon(1 - \varepsilon)\delta$$

presque partout en x tel que $1 - V(x)^2 \geq \delta$. Pour δ assez petit, $d(x)$ est inférieur à ε sur l'ensemble $\{x; 1 - V(x)^2 \leq \delta\}$. Maintenant on prend F_+ telle que $F_+^2 = 1 - (V - \lambda_k)^2 - |\nabla\phi|^2$ sur $\{x; 1 - V(x)^2 \geq \delta\}$ et ailleurs continue et strictement positive ; alors le support de F_- est contenu dans $\{x; 1 - V(x)^2 \leq \delta\}$. De (2.21), il vient :

$$(2.22) \quad h^2 \|\nabla(e^{\phi/h}u_k)\|^2 + 1/2 \|e^{\phi/h}u_k\|^2 \leq C_\varepsilon e^{2\varepsilon/h}.$$

Notons que la constante C_ε est indépendante du choix de χ , t. q. $\chi' \leq 1$. Faisant tendre R vers l'infini, on obtient (2.19) par (2.22). C. Q. F. D.

Soient E, F deux sous-espaces de H . On désigne par Π_E (Π_F resp.) la projection orthogonale de H sur E (sur F resp.). On définit la distance non symétrique entre E et F par :

$$\vec{d}(E, F) = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in E}} \|(I - \Pi_F)x\| = \|(I - \Pi_E)\|$$

(voir Helffer-Sjöstrand [11]). Rappelons la proposition suivante (cf. [11]).

PROPOSITION 2.4. — *Soit A un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert H . Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact, $f_1, \dots, f_N \in H$ linéairement indépendants, $\mu_1, \dots, \mu_N \in I$ tels que*

$$A f_j = \mu_j f_j + r_j \quad \|r_j\| \leq \varepsilon.$$

Soit $a > 0$ tel que $\text{Sp}(A) \cap ((I + B(0, 2a)) \setminus I)$ soit vide. Alors si E est l'espace engendré par les f_j et F est l'espace associé à $\text{Sp}(A) \cap I$, on a :

$$\vec{d}(E, F) \leq \frac{N^{1/2}\varepsilon}{a(\lambda^{\min})^{1/2}}$$

où λ^{\min} est la plus petite valeur propre de la matrice $S = ((f_j, f_k))$.

Dans la suite on note E_j l'espace engendré par $v_{j,k}$, $k = 1, \dots, m_j$, et F celui engendré par u_j , $j = 1, \dots, m_0$. On pose : $E = \bigoplus_{j=1}^N E_j$.

THÉORÈME 2.5. — On a :

$$(2.23) \quad \vec{d}(F, E) = \vec{d}(E, F) = \hat{0}(e^{-S_1/h}) \quad \text{lorsque } h \text{ tend vers } 0.$$

De plus dès que h est assez petit, il existe une bijection

$$b : \text{Sp}(D(h)) \cap I \rightarrow \bigcup_1^N \text{Sp}(D_j(h)) \cap I$$

telle que l'on a :

$$(2.24) \quad |b(\lambda) - \lambda| = \hat{0}(e^{-S_1/h}), \quad \lambda \in \text{Sp}(D(h)) \cap I.$$

Ici la notation $\hat{0}(e^{-S_1/h})$ signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_\varepsilon > 0$, tel que l'on ait :

$$|b(\lambda) - \lambda| = 0(e^{-(S_1 + \varepsilon)/h}), \quad \forall \eta < \eta_\varepsilon$$

lorsque h tend vers 0, η étant le paramètre utilisé dans (2.14) pour définir les opérateurs de Dirac perturbés.

REMARQUE 2.6. — Ces résultats sont semblables à ceux du théorème 2.4 de [11], qui relie le spectre de l'opérateur de Schrödinger dans \mathbb{R}^n à multi-puits à ceux de l'opérateur de Schrödinger dans un ouvert avec la condition de Dirichlet au bord.

Preuve du Théorème 2.5. — On estime d'abord $\vec{d}(E, F)$. Utilisant les notations de (2.15), (2.16), on a :

$$(2.25) \quad D(h)v_{j,k} = \mu_{j,k}v_{j,k} + (V_j - V)v_{j,k}.$$

Comme le support de $V_j - V$ est dans $\bigcup_{k \neq j} U_k(\eta)$, et que $d_j(x) \geq d(x, U_j)$, on déduit de (2.20) que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\|V_j - V)v_{j,k}\| \leq C_\varepsilon e^{-(S_1 - \eta - \varepsilon/2)/h}.$$

Dans la suite, on fixe $\eta_\varepsilon = \varepsilon/2 > 0$. Donc (2.25) donne que pour $0 < \eta < \varepsilon/2$,

$$D(h)v_{j,k} = \mu_{j,k}v_{j,k} + 0(e^{-(S_1 - \varepsilon)/h}).$$

D'autre part, en notant que $d_j(x) + d_{j'}(x) \geq S_1$, lorsque $j' \neq j$, on déduit facilement que

$$(2.26) \quad (v_{j,k}, v_{j',k'}) = \delta_{jk, j'k'} + 0(e^{-(S_1 - \varepsilon)/h}).$$

Maintenant on peut appliquer la proposition 2.4, car d'après les résultats de [26], on peut choisir $a = a(h) > 0$ tel que $|\text{Log } a(h)| = 0\left(\frac{1}{h}\right)$ et tel que dans $[-2a(h) - a_1(h), -a_1(h)]$ et $[a_2(h), a_2(h) + 2a(h)]$, $D(h)$ n'ait pas de valeurs propres. Donc par (2.26), on obtient :

$$(2.27) \quad \vec{d}(E, F) = 0(e^{-(S_1 - \varepsilon)/h}).$$

Pour estimer $\vec{d}(F, E)$, on fait une partition d'unité : soit $g_j \in C_0^\infty(U_j(\eta))$, $0 \leq g_j \leq 1$ et $g_j = 1$ sur le support de W_j , $j = 1, \dots, N$. Choisissons $g_0 \geq 0$ tel que

$$\sum_{j=0}^N g_j = 1 \quad \text{sur } \mathbb{R}^3.$$

Soient λ une valeur propre de $D(h)$ et u un vecteur propre associé normalisé. D'après (2.19), il existe $C_1 > 0$ tel que

$$(2.28) \quad g_0 u = 0(e^{-C_1/h})$$

$$(2.29) \quad D_j(h)(g_j u) = \lambda(g_j u) + 0(e^{-C_1/h}) \quad \text{dans } H.$$

Donc d'après la proposition 2.4, modulo une erreur exponentiellement petite, on peut exprimer $g_j u$ par une combinaison linéaire des vecteurs propres de $D_j(h)$

$$g_j u = \sum_{k=1}^{m_j} a_{jk} v_{jk} + 0(e^{-C_2/h})$$

où C_2 est certaine constante, $0 < C_2 \leq C_1$. Compte tenu de (2.28), on a :

$$u = \sum_{j,k} a_{jk} v_{jk} + 0(e^{-C_2/h}).$$

Puisque les u forment une base orthonormée de F , cette dernière estimation montre que $\vec{d}(F, E) = 0(e^{-C_2/h})$ lorsque h tend vers 0. En particulier, on en déduit que, pour h assez petit, $\vec{d}(E, F)$ et $\vec{d}(F, E)$ sont inférieurs à 1. Par (2.27), on obtient alors :

$$\vec{d}(E, F) = \vec{d}(F, E) = 0(e^{-(S_1 - \varepsilon)/h})$$

dim $F = \dim E$, pour h assez petit.

Cela montre (2.23) et l'existence d'une bijection de F sur E . La démonstration de (2.24) est analogue à celle de [11], on omet les détails.

C. Q. F. D.

Passons maintenant au calcul de la matrice d'interaction entre les puits. On introduit d'abord le projecteur Π_0 de H sur E le long de F^\perp . D'après les résultats du théorème 2.5, Π_0 est bien défini au moins pour h assez petit. On peut démontrer :

$$(2.30) \quad \|\Pi_0 - \Pi_E\| = \hat{O}(e^{-S_1/h}).$$

D'autre part pour Π_E , on a une expression explicite :

$$\Pi_E u = \sum a_{\alpha\beta}(u, v_\alpha)v_\beta, \quad \forall u \in H$$

où pour faciliter l'écriture, on a noté α un couple d'entiers (j, k) , $k = 1, \dots, m_j$, $j = 1, \dots, N$, et $j(\alpha)$ la projection de α sur sa première composante. Notons que la matrice $(a_{\alpha\beta})$ est donnée par

$$(a_{\alpha\beta}) = {}^t S^{-1}$$

où $S = ((v_\alpha, v_\beta))$. On introduit l'opérateur approché τ de Π_E par :

$$\tau u = \sum_{\alpha, \beta} (u, v_\alpha) v_\beta.$$

On a par (2.26) et (2.30) :

$$(2.31) \quad \|\tau - \Pi_0\| = \hat{O}(e^{-S_1/h}).$$

En notant que $D(h)v_\alpha = \mu_\alpha v_\alpha - (V_{j(\alpha)} - V)v_\alpha$ et $\|(V_{j(\alpha)} - V)v_\alpha\| = \hat{O}(e^{-S_1/h})$ on déduit de (2.31) que :

$$(\Pi_0 D(h))v_\alpha = \mu_\alpha v_\alpha - \sum_{\beta} ((V_{j(\alpha)} - V)v_\alpha, v_\beta) v_\beta + \hat{O}(e^{-2S_1/h})$$

si on note par : $W_{\alpha\beta} = ((V_{j(\alpha)} - V)v_\alpha, v_\beta)$, alors

$$(2.32) \quad \begin{aligned} W_{\alpha\beta} &= (D_{j(\alpha)}(h)v_\alpha, v_\beta) - (D(h)v_\alpha, v_\beta) \\ &= \mu_\alpha (v_\alpha, v_\beta) - (v_\alpha, D(h)v_\beta) \\ &= (\mu_\alpha - \mu_\beta)(v_\alpha, v_\beta) + (v_\alpha, (V_{j(\beta)} - V)v_\beta) \\ &= (\mu_\alpha - \mu_\beta)t_{\alpha\beta} + \overline{W_{\beta\alpha}} \end{aligned}$$

où la matrice $T = (t_{\alpha\beta})$ est donnée par $T = S - I$. On note par \vec{V} la base orthonormalisée de E construite à partir des (v_α) définie par : $\vec{V} = (v_{1,1}, \dots, v_{N,m_N})S^{-1/2}$. Alors utilisant (2.32), on obtient que la matrice de $\Pi_0 D(h)|_E$ par rapport à la base \vec{V} est donnée par :

$$S^{1/2}((\mu_\alpha \delta_{\alpha\beta}) - (W_{\alpha\beta}))S^{-1/2} \quad \text{modulo } \hat{O}(e^{-2S_1/h}).$$

Un calcul élémentaire entraîne que la matrice de $\Pi_0 D(h)|_E$ pour la base \vec{V} est donnée par :

$$(2.33) \quad \left(\begin{array}{cccc} \mu_{1,1} & & & \\ & \mu_{1,2} & & 0 \\ & & \dots & \\ & 0 & & \mu_{N,m_N} \end{array} \right) - (\hat{W}_{\alpha\beta}) + \hat{O}(e^{-2S_1/h})$$

où $\hat{W}_{\alpha\beta} = 1/2(W_{\alpha\beta} + \overline{W_{\beta\alpha}})$. De même on peut démontrer que pour tout h assez petit $\Pi_F(v_{1,1}, \dots, v_{N,m_N})$ est une base de F . On note par \vec{U} la base orthonormalisée de F construite à partir de $\Pi_F(v_{1,1}, \dots, v_{N,m_N})$. La matrice de $D(h)|_F$ pour la base \vec{U} est aussi de la forme (2.33). Comme ces deux

matrices sont hermitiennes, il est facile à comparer leurs valeurs propres. En résumant ce que l'on a prouvé, on obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 2.7. — *La matrice de $D(h)|_F$ pour la base orthonormée \tilde{U} s'écrit sous la forme :*

$$(2.34) \quad \begin{pmatrix} \mu_{1,1} & & & 0 \\ & \dots & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & \mu_{N,m_N} \end{pmatrix} = (\hat{W}_{\alpha\beta}) + \hat{O}(e^{-2S_1/h})$$

où $\hat{W}_{\alpha\beta} = 1/2((\tilde{V}_{j(\alpha)} + \tilde{V}_{j(\beta)})v_\alpha, v_\beta)$ vérifie l'estimation

$$\begin{aligned} \hat{W}_{\alpha\beta} &= \hat{O}(e^{-S_1/h}) && \text{pour tous } \alpha, \beta \\ \hat{W}_{\alpha\beta} &= \hat{O}(e^{-2S_1/h}) && \text{lorsque } j(\alpha) = j(\beta) \end{aligned}$$

et $\tilde{V}_j = \sum_{k \neq j} W_k$. En particulier pour $h > 0$ assez petit, il existe une bijection b entre les valeurs propres de $D(h)|_F$ et celles de la matrice $(\mu_\alpha \delta_{\alpha\beta} - \hat{W}_{\alpha\beta})$ telle que

$$(2.35) \quad |b(\lambda) - \lambda| = \hat{O}(e^{-2S_1/h}) \quad \lambda \in \text{Sp}(D(h)|_F).$$

L'estimation d'erreur donnée dans (2.34) ne nous suffit pas pour des études plus précises. Par exemple, pour étudier la résonance entre les puits, les quantités en considération sont justement de l'ordre de l'estimation d'erreur. Helffer-Sjöstrand ont remarqué dans [12] et [13] qu'on pouvait améliorer l'estimation (2.34).

REMARQUE 2.8. — Soit $\eta > 0$ assez proche de 0. Considérons deux valeurs propres μ_α et μ_β . Supposons qu'il existe $0 < a \leq S_1$ tel que :

$$(2.36) \quad \mu_\alpha - \mu_\beta = O(e^{-(a-\varepsilon)/h}) \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

Lorsque $j(\alpha) = j(\beta)$ ou $d(U_{j(\alpha)}, U_{j(\beta)}) \geq S_1 + a$, on a $W_{\alpha\beta} = O(e^{-(S_1+a-\varepsilon)/h})$ pour tout $\varepsilon > 0$. Sinon soit E le domaine contenant l'ensemble $d(U_{j(\alpha)}, x) + d(U_{j(\beta)}, x) \leq S_1 + a$ tel que ∂E soit régulier et soit Ω un domaine tel que $U_{j(\alpha)}(\eta) \subset \Omega$, $U_{j(\beta)}(\eta) \cap \Omega = \emptyset$ et que $E \setminus \Omega$ soit connexe. On note $P = \partial\Omega \cap E$. Alors,

$$(2.37) \quad W_{\alpha\beta} = \int_{\Omega \cap E} \langle \tilde{V}_{j(\alpha)} v_\alpha, v_\beta \rangle dx$$

car le support de $\tilde{V}_{j(\alpha)}$ est dans $U_{j(\alpha)}(\eta)$. Comme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \cap E} \langle \tilde{V}_{j(\alpha)} v_\alpha, v_\beta \rangle dx &= \int_{\Omega \cap E} \langle D_{j(\alpha)}(h)v_\alpha, v_\beta \rangle dx - \int_{\Omega \cap E} \langle D(h)v_\alpha, v_\beta \rangle dx \\ &= (\mu_\alpha - \mu_\beta) \int_{\Omega \cap E} \langle v_\alpha, v_\beta \rangle dx + ih \int_P \langle \alpha_n v_\alpha, v_\beta \rangle ds + \int_{\Omega \cap E} \langle \tilde{V}_{j(\beta)} v_\alpha, v_\beta \rangle dx \end{aligned}$$

on déduit de (2.36) et (2.37) que

$$(2.38) \quad W_{\alpha\beta} = ih \int_{\mathbb{P}} \langle \alpha_n v_\alpha, v_\beta \rangle dS + O(e^{-(S_1 + a - \varepsilon)/h}).$$

Ici on a noté $\alpha_n = \sum_{j=1}^3 \alpha_j n_j$ et \vec{n} la normale extérieure à Ω . Si on suppose

$\mu_\alpha - \mu_\beta = O(h^\infty)$, on peut montrer que :

$$(2.39) \quad W_{\alpha\beta} = ih \int_{\mathbb{P}} \langle \alpha_n v_\alpha, v_\beta \rangle dS + O(h^N e^{-S_1/h}), \quad \text{pour tout entier } N.$$

lorsque α, β sont tels que $j(\alpha) \neq j(\beta)$ et $d(U_{j(\alpha)}, U_{j(\beta)}) \leq S_1$. Dans les autres cas, on a toujours $W_{\alpha\beta} = O(h^N e^{-S_1/h})$ pour tout N entier. Pour démontrer (2.39), on a besoin d'une estimation sur la décroissance des vecteurs propres de la forme :

$$h \|\nabla(e^{d/h} u)\|^2 + \|e^{d/h} u\|^2 \leq Ch^{-N_0} \|u\|^2$$

pour certain entier N_0 . On renvoie à [11] pour la démonstration de ce type d'estimation.

3. DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DES VALEURS PROPRES

Le développement semi-classique des valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger a fait l'objet de nombreux travaux (voir par exemple [5] [11] [24]). Mais à notre connaissance, sauf dans le cas où l'opérateur de Dirac possède deux puits s'éloignant vers l'infini (voir Harrell et Klaus [8]), le développement asymptotique pour les valeurs propres de l'opérateur de Dirac dans le cas semi-classique n'a pas été écrit explicitement dans la littérature. Vu les résultats obtenus dans la section 2, pour étudier le développement semi-classique des valeurs propres de l'opérateur de Dirac à multipuits, on peut se ramener à étudier l'opérateur de Dirac à un seul puits modulo une erreur exponentiellement petite. Dans cette section, combinant la méthode de Helffer et Sjöstrand [11] avec celle de Simon [24], on va montrer l'existence du développement semi-classique. En particulier, nos résultats montrent que dans le cas où le puits est non dégénéré, les valeurs propres au niveau fondamental peuvent encore être comparées avec celles d'un oscillateur harmonique localisé près du puits.

On fait d'abord les hypothèses suivantes sur V :

$$(3.1) \quad V \text{ est une fonction réelle, de classe } C^\infty; \quad -1 \leq V(x) < 1, \quad x \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \overline{\lim}_{|x| \rightarrow \infty} |V(x)| < 1.$$

Posons $C = \min(1, 1 - \sup_{\mathbb{R}^3} V)$. On a $C > 0$.

LEMME 3.1. — *Sous les conditions (3.1), D(h) n'a pas de spectre dans l'intervalle]-C, 0].*

Preuve. — S'il existait $E \in]-C, 0] \cap \text{Sp}(D(h))$, E serait une valeur propre de D(h). On note $u = (u_1, u_2)$ le vecteur propre associé, $\|u\| = 1$, où u_1, u_2 sont deux vecteurs à deux composantes. Par (2.2), on a :

$$\begin{aligned} (1 + V - E)u_1 + (\Sigma h \sigma_j D_j)u_2 &= 0 \\ (-1 + V - E)u_2 + (\Sigma h \sigma_j D_j)u_1 &= 0 \end{aligned}$$

D'où il vient que :

$$((1 + V - E)u_1, u_1) - ((-1 + V - E)u_2, u_2) + 2i \text{Im}(\Sigma h \sigma_j D_j u_2, u_1) = 0.$$

Cela entraîne :

$$(3.2) \quad 1 + ((V - E)u_1, u_1) - ((V - E)u_2, u_2) = 0.$$

Mais $((V - E)u_1, u_1) \geq (-1 - E)(u_1, u_1)$ et $((V - E)u_2, u_2) \leq (1 - C - E)(u_2, u_2)$, donc on a :

$$1 + ((V - E)u_1, u_1) - ((V - E)u_2, u_2) \geq (C + E)(u_2, u_2) - E(u_1, u_1) \geq (C + E)(u_2, u_2).$$

Comme u est un vecteur propre de D(h) et que $u_2 \neq 0$, donc $(C + E)(u_2, u_2) > 0$. On arrive à une contradiction avec (3.2) ce qui prouve le lemme par l'absurde.

C. Q. F. D.

On suppose maintenant que V a un seul puits non dégénéré :

(3.3) il existe x_0 tel que $V(x) = -1$ si $x = x_0$; de plus le Hessien de V au point x_0 est défini positif, on le note par V'' ;

Quitte à faire une translation, on peut supposer $x_0 = 0$. Pour faciliter la démonstration, on suppose aussi :

$$(3.4) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^3, \quad \text{il existe } C_\alpha \text{ tel que } |\partial_x^\alpha V| \leq C_\alpha \text{ sur } \mathbb{R}^3.$$

Dans la suite, on suppose toujours que les conditions (3.1), (3.3) et (3.4) sont vérifiées. Introduisons les espaces dépendants du paramètre h :

$$B_{n,h} = \{ f \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4); (h^{-1/2}x)^\alpha (h^{1/2}D_x)^\beta f \in L^2, |\alpha| + |\beta| \leq n \}.$$

On munit $B_{n,h}$ de la norme naturelle : $\| \cdot \|_{n,h}$.

Pour étudier la continuité des opérateurs pseudo-différentiels dépendant d'un paramètre $h > 0$, on peut utiliser la notion d'opérateur h-admissible (voir Helffer-Robert [9] et Robert [21]). Soit $a(h)$, $0 < h \leq 1$, une famille de fonctions C^∞ de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans l'espace des matrices 4×4 . On dit que $a(h)$ est un symbole admissible de poids borné si pour tout entier $N \geq 0$, on a :

$$a(h) = \sum_{j=0}^N h^j a_j + h^{N+1} r_N(h)$$

où a_j sont les symboles de poids borné et $r_N(h)$ vérifie : $|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta r_N(h)| \leq C_{\alpha\beta N}$ $\forall 0 < h \leq 1$. On note par $A(x, hD, h)$ l'opérateur h -admissible associé au symbole $a(h)$ par le formalisme de Weyl :

$$(A(x, hD, h)u)(x) = \iint_{\mathbb{R}^6} e^{i\langle x-y, p \rangle} a\left(\frac{x+y}{2}, hp, h\right) u(y) dx dp$$

pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$. Dans la suite, les opérateurs h -admissibles sont à symboles matriciels hermitiens et on note par les mêmes lettres leurs réalisations auto-adjointes dans H .

LEMME 3.2. — Si $A(x, hD, h)$ est un opérateur h -admissible, de symbole $a(h)$ de poids borné, alors $A(x, hD, h)$ est uniformément continue de $B_{n,h}$ dans $B_{n,h}$ pour tout n , c'est-à-dire qu'il existe une constante C_n telle que

$$(3.5) \quad \|A(x, hD, h)f\|_{n,h} \leq C_n \|f\|_{n,h} \quad f \in B_{n,h}$$

pour tout h , $0 < h \leq 1$.

Preuve. — Pour $n = 0$, (3.5) est évident par la continuité des opérateurs pseudo-différentiels dans L^2 . Montrons donc (3.5) $n = 1$. Pour $f \in \mathcal{S}$, on a :

$$(3.6) \quad [x_j, A(x, hD, h)]f = hR_j(h)f$$

$$(3.7) \quad [hD_j, A(x, hD, h)]f = hT_j(h)f$$

où $R_j(h)$, $T_j(h)$ sont des opérateurs h -admissibles, de poids bornés. En divisant ces deux égalités par $h^{1/2}$ et en prenant la norme dans L^2 , on obtient

$$\sum_{j=1}^3 \|h^{-1/2} x_j A(x, hD, h)f\|^2 + \|h^{1/2} D_j A(x, hD, h)f\|^2 \leq C \|f\|_{1,h}^2$$

Donc $\|A(x, hD, h)f\|_{1,h} \leq C' \|f\|_{1,h}$, cela prouve (3.5) pour $n = 1$ par un argument de densité. Supposons que (3.5) est démontré pour $n \leq k-1$, $k \geq 2$. Lorsque $n = k$, on utilise la formule pour les commutateurs (3.6) et (3.7). En prenant la norme dans $B_{k-1,h}$, on obtient

$$\begin{aligned} \| [x_j, A(x, hD, h)]f \|_{k-1,h} &= h \| R_j(h)f \|_{k-1,h} \\ \| [hD_j, A(x, hD, h)]f \|_{k-1,h} &= h \| T_j(h)f \|_{k-1,h}. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^3 \{ h^{-1/2} x_j A(x, hD, h)f \|_{k-1,h} + \| h^{1/2} D_j A(x, hD, h)f \|_{k-1,h} \} \\ & \leq \sum_{j=1}^3 \{ \| [h^{-1/2} x_j, A(x, hD, h)]f \|_{k-1,h} + \| A(x, hD, h)(h^{-1/2} x_j f) \|_{k-1,h} \\ & \quad + \| [h^{-1/2} D_j, A(x, hD, h)]f \|_{k-1,h} + \| A(x, hD, h)(h^{1/2} D_j f) \|_{k-1,h} \} \end{aligned}$$

on conclut par les hypothèses de récurrence que

$$\begin{aligned} \|A(x, hD, h)f\|_{k,h} &\leq C_k \sum_{j=1}^3 \{ \|h^{-1/2}x_j f\|_{k-1,h} + \|h^{1/2}D_j f\|_{k-1,h} \} \\ &\leq C'_k \|f\|_{k,h} \end{aligned} \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Pour $R_0 > 0$ fixé, posons $I = [0, R_0h]$. Le lemme 3.1 montre que pour $h > 0$ assez petit, le spectre de $D(h)$ contenu dans l'intervalle I est constitué de valeurs propres positives et on les note $0 < E_1(h) \leq E_2(h) \leq \dots$ et on note u_1, u_2, \dots , des vecteurs propres associés normalisés.

Pour améliorer l'estimation sur la décroissance des vecteurs propres, on a besoin du résultat suivant :

LEMME 3.3. — *Soient $E \in I$ une valeur propre de $D(h)$, u un vecteur propre associé. Alors sous les conditions (3.1) et (3.3), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que :*

$$(3.8) \quad h \|\nabla(e^{(1-\varepsilon)d/h})u\|^2 + \|e^{(1-\varepsilon)d/h}u\|^2 \leq C_\varepsilon \|u\|^2$$

où $d(x)$ désigne la distance entre x et 0 par rapport à la métrique $(1 - V^2)dx^2$.

Preuve. — La démonstration est la même qu'au lemme 2.3, en remarquant que si on prend $\delta = Ch$, $d(x)/h$ est uniformément borné par rapport à h pour x dans le support de F_- . C. Q. F. D.

PROPOSITION 3.4. — *Sous les conditions (3.1), (3.3) et (3.4), supposons que u soit un vecteur propre de $D(h)$, avec valeur propre $E \in I$, $\|u\| = 1$. Alors u appartient à $B_{n,h}$ pour tout entier $n \geq 0$ et on a :*

$$(3.9) \quad \|u\|_{n,h} \leq C_n \quad \text{pour } 0 < h \leq 1.$$

Preuve. — Remarquons d'abord que pour prouver (3.9), il suffit de démontrer que l'on a, pour tout α et β ,

$$(3.10) \quad \|(h^{-1/2}x)^\alpha (h^{1/2}D)^\beta u\| \leq C_{\alpha\beta} \quad \text{pour } 0 < h \leq 1.$$

On va démontrer (3.10) par une récurrence en $|\beta|$. Utilisant les hypothèses (3.1) et (3.3), on peut montrer qu'il existe un voisinage Ω de 0 tel que $d(x)$ est C^2 dans Ω et qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$d(x) \geq C|x| \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega.$$

Quitte à diminuer Ω , les hypothèses (3.3) assurent que $d(x)$ est supérieur

à $C'|x|^2$ dans Ω , où $C' > 0$. Par (3.6), on en conclut que pour tout multi-
indice α , on a :

$$\begin{aligned} \|(h^{-1/2}x)^\alpha u\|^2 &= \int_{\Omega} |(h^{-1/2}x)^\alpha u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} |(h^{-1/2}x)^\alpha u|^2 dx \\ &\leq C_1 \left\{ \int_{\Omega} e^{C'|x|^2/2h} |u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} |e^{(1-\varepsilon)d/h} u|^2 dx \right\} \\ &\leq C_\alpha \end{aligned}$$

Cela prouve (3.10) pour $\beta = 0$, α quelconque. Supposons que (3.10) soit
prouvé pour tout β tel que $|\beta| \leq 2(k-1)$, $k > 1$ et pour tout α . Comme
 $D_0(h)u = (E - V)u$, il vient

$$(-h^2\Delta + 1)u = (E - V)^2u + \left(ih \sum_{j=1}^3 \alpha_j \partial_{x_j} V \right) u$$

ou encore,

$$(3.11) \quad -h\Delta u = h^{-1} \{ (E - V)^2 - 1 \} u + \left(i \sum_{j=1}^3 \alpha_j \partial_{x_j} V \right) u.$$

Comme $E \in I = [0, R_0h]$, d'après les hypothèses (3.3), on en déduit que
 $\|(h^{-1/2}x)^\alpha (h\Delta)u\| \leq C_\alpha$ pour tout α . Appliquant successivement la formule
(3.11) k fois, on obtient :

$$(-h\Delta)^k u = P_k(x, h^{1/2}D_x, h)u$$

où $P_k(x, h^{1/2}D_x, h)$ est un opérateur différentiel d'ordre inférieur à $2(k-1)$
et d'après les hypothèses de récurrence, on a :

$$\|(h^{-1/2}x)^\alpha P_k(x, h^{1/2}D_x, h)u\| \leq C_{\alpha,k} \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^3.$$

D'où, il vient :

$$\|(h^{-1/2}x)^\alpha ((-h\Delta)^k + 1)u\| \leq \tilde{C}_{\alpha,k} \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^3.$$

En passant par la transformation de Fourier, on en conclut que

$$\|(h^{-1/2}x)^\alpha (h^{1/2}D)^\beta u\| \leq C_{\alpha\beta} \quad |\beta| \leq 2k.$$

Cela prouve (3.10), ainsi la proposition.

C. Q. F. D.

Pour calculer le premier terme dans le développement asymptotique
des valeurs propres de l'opérateur de Dirac, on utilise l'opérateur pseudo-
différentiel $U(hD)$, de symbole $U(p)$:

$$U(p) = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{1 + |p|^2} & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{1 + |p|^2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 \end{pmatrix}$$

et

$$T = (2\sqrt{1 + |p|^2}(1 + \sqrt{1 + |p|^2}))^{1/2}.$$

Il est facile à vérifier que $U(p)$ diagonalise la matrice $\sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j + \alpha_4$ et que $U(hD)$ est un opérateur unitaire dans $H = L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$. Posons :

$$\tilde{D}(h) = U(hD)^* D(h) U(hD).$$

Alors on peut écrire :

$$\tilde{D}(h) = \begin{pmatrix} P_+(h)I_2 & 0 \\ 0 & P_-(h)I_2 \end{pmatrix} + W(h)$$

où $P_+(h)$ et $P_-(h)$ sont deux opérateurs pseudo-différentiels, de symboles $\pm \sqrt{1 + |p|^2} + V$ respectivement.

$W(h) = U(hD)^* [V, U(hD)]$ est un opérateur h -admissible de symbole d'ordre 0 (voire [21]). $\tilde{D}(h)$ a les mêmes valeurs propres que $D(h)$ et les vecteurs propres correspondants sont donnés par :

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \tilde{u}_j &= U(hD)u_j \\ \tilde{D}(h)\tilde{u}_j &= E_j \tilde{u}_j \quad E_j \in I, j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.2 et la proposition 3.4, on a :

COROLLAIRE 3.5. — Les \tilde{u}_j appartiennent à $B_{n,h}$ pour tout n et on a

$$(3.13) \quad \|\tilde{u}_j\|_{n,h} \leq C_n \quad 0 < h \leq 1.$$

Remarquons que $P_-(h) \leq -C_0 < 0$ dans H . Compte-tenu du lemme 3.1, $P_-(h)$ ne joue pas de rôle dans les études du spectre de $D(h)$ dans I . Pour $P_+(h)$, on l'écrit sous la forme :

$$P_+(h) = \frac{-h^2}{2} \Delta + 1/2 \langle V''x, x \rangle + R_1(hD) + R_2(x)$$

où

$$(3.14) \quad R_1(p) = \sum_{|\alpha|=4} p^\alpha R_{1,\alpha}(p), \quad R_2(x) = \sum_{|\alpha|=3} x^\alpha R_{2,\alpha}(x)$$

$R_{1,\alpha}, R_{2,\alpha}$ étant des fonctions C^∞ bornées sur \mathbb{R}^3 , ainsi que leurs dérivées. Maintenant, on pose

$$\tilde{D}(h) = D_1(h) + D_2(h) + W(h)$$

où

$$D_1(h) = \begin{pmatrix} \left(-\frac{h^2}{2}\Delta + 1/2 \langle V''x, x \rangle \right) I_2 & 0 \\ 0 & P_-(h)I_2 \end{pmatrix}$$

$$D_2(h) = \begin{pmatrix} (R_1(hD) + R_2(x))I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le spectre de l'opérateur $D_1(h)$ dans $[0, +\infty[$ est facile à calculer : si on note $0 < e_1 < e_2 \leq e_3 \leq \dots$ les valeurs propres de l'oscillateur harmonique $-\frac{1}{2}\Delta + 1/2 \langle V''x, x \rangle$, h_1, h_2, \dots les vecteurs propres orthonormalisés, alors $D_1(h)$ a pour valeurs propres $0 < E_{1,0} \leq E_{2,0} < E_{3,0} < \dots$, où $E_{2k-1,0} = E_{2k,0} = e_k h$. Les vecteurs propres de $D_1(h)$ sont donnés par :

$$g_{2k-1} = h^{-n/4} \begin{pmatrix} h_k \left(\frac{x}{\sqrt{h}} \right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g_{2k} = h^{-n/4} \begin{pmatrix} 0 \\ h_k \left(\frac{x}{\sqrt{h}} \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots$$

En notant la décroissance exponentielle des h_k , on voit facilement que : $\|g_j\|_{n,h} \leq C_{n,j}$. D'autre part, d'après les résultats sur le calcul fonctionnel, le symbole de $W(h)$ s'écrit sous la forme :

$$(3.15) \quad W(x, p, h) = h \{ \sum \partial_j V(x) W_j(p) + hr_1(x, p, h) \}$$

où $r_1(x, p, h)$ est un symbole admissible d'ordre 0 (voir Robert [20]). Comme $\partial_j V(x)$ s'annule en 0, par le lemme 3.2, on déduit de (3.15) que si $f \in B_{n,h}$, alors $W(h)f \in B_{n,h}$ et on a :

$$(3.16) \quad \|W(h)f\|_{n,h} \leq C_n h^{3/2} \|f\|_{n,h}.$$

De même, on a aussi :

$$(3.17) \quad \|D_2(h)f\|_{n,h} \leq C_n h^{3/2} \|f\|_{n+4,h}.$$

Du corollaire 3.5 et la décroissance des g_k , il vient :

$$(3.18) \quad \|(D_1(h) - E_j)\tilde{u}_j\| \leq C_j h^{3/2}$$

$$(3.19) \quad \|(\tilde{D}(h) - E_{j,0})g_j\| \leq C_j h^{3/2} \text{ pour tout } j \geq 1 \text{ et } h \in]0, h_0].$$

Désignons maintenant par E l'espace engendré par les g_j et par F celui engendré par les \tilde{u}_j . On remarque qu'il existe $C > 0$ tel que si $E_{n,0} \neq E_{m,0}$,

alors $|E_{n,0} - E_{m,0}| \geq Ch$. Donc on peut appliquer la proposition 2.4 à $D_1(h)$ avec $a = C_0h$, $C_0 > 0$ convenable et on obtient :

$$(3.20) \quad \vec{d}(E, F) \leq Ch^{1/2} .$$

Cela signifie que dans l'intervalle $[0, R_0h + Ch^{3/2}]$, $D_1(h)$ a au moins autant de valeurs propres que $\tilde{D}(h)$ dans $[0, R_0h]$. Rappelons encore que le spectre de $D_1(h)$ a été calculé explicitement. Donc on en conclut que le nombre des E_j dans I est majoré par une constante indépendante de h . Vu (3.19), en appliquant la proposition 2.4, on obtient aussi :

$$(3.21) \quad \vec{d}(F, E) \leq Ch^{1/2} .$$

Par l'argument utilisé dans la démonstration du théorème 2.5, on obtient

THÉORÈME 3.6. — *Sous les conditions (3.1), (3.3) et (3.4), désignons par F l'espace propre de $\tilde{D}(h)$ dans l'intervalle $I = [0, R_0h]$ et par E celui de $D_1(h)$. Alors pour h assez petit, on a :*

$$\vec{d}(F, E) = \vec{d}(E, F) \leq Ch^{1/2} .$$

Il existe une bijection b entre le spectre de $\tilde{D}(h)$ et celui de $D_1(h)$ dans I telle que

$$|b(\lambda) - \lambda| \leq Ch^{3/2} \quad \text{pour } \lambda \in \text{Sp}(\tilde{D}(h)) \cap I .$$

De plus cette bijection peut être choisie de sorte que $b(E_j) = E_{j,0}$, $j = 1, 2, \dots$

Une conséquence immédiate est le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.7. — *Sous les conditions du théorème 3.6, on a :*

$$(3.22) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E_j}{h} = e_k \quad j = 2k - 1, 2k, \quad k = 1, 2, \dots$$

où les e_k sont les valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger $-1/2\Delta + 1/2 \langle V''x, x \rangle$.

Par les résultats du théorème 3.6, on peut obtenir facilement un développement semi-classique des valeurs propres de $\tilde{D}(h)$. La méthode de Simon [24] s'applique dans notre cas. On donne donc seulement une esquisse.

Supposons que e_n soit une valeur propre de $-1/2\Delta + \langle V''x, x \rangle/2$, de multiplicité l , $e_n > e_{n-1}$. D'après le théorème 3.6, il existe $C > 0$ tel que $\forall j, m$, si $E_j \neq E_m$, alors :

$$|E_j - E_m| \geq 2Ch$$

pour h assez petit. On peut donc définir l'opérateur Π_n par :

$$\Pi_n = \frac{1}{(2\pi i)} \int_{|\lambda - e_n h| = Ch} (\tilde{D}(h) - \lambda)^{-1} d\lambda .$$

On note par F l'espace propre de $\tilde{D}(h)$ correspondant aux valeurs propres $\{E_j, j = 2n - 2, \dots, 2(n + k) - 2\}$ par G l'ensemble des vecteurs $g_{2n-1}, \dots, g_{2n+2k-2}$ définis dans (3.14). Comme dans la démonstration du théorème 3.6, on peut montrer que $\Pi_n G$ est une base de F pour h assez petit et que

$$(3.23) \quad (g_k, \Pi_n g_j) = \delta_{kj} + O(h^{1/2})$$

$$(3.24) \quad \tilde{D}(h)\Pi_n g_j = h e_n \Pi_n g_j + O(h^{3/2})$$

pour $2n + 1 \leq j, k \leq 2(n + l)$. Posons $S = ((g_k, \Pi_n g_j))$. Pour h assez petit $\Pi_n G S^{-1/2}$ est une base orthonormale de F . La matrice de $\tilde{D}(h)|_F$ pour cette base est donnée par :

$$C(h) = S^{1/2} H S^{-1/2}$$

où $H = ((\Pi_n g_k, \tilde{D}(h)g_j))$. Donc pour montrer que les E_j admettent un développement semi-classique, il suffit de montrer que l'on peut le faire pour chaque élément de $C(h)$ (voir Simon [24]). Cela revient à prouver que $(g_k, \Pi_n g_j)$ et $(\Pi_n g_k, \tilde{D}(h)g_j)$ admettent un développement semi-classique. Ici on le prouve pour $(g_k, \Pi_n g_j)$.

LEMME 3.8. — *Sous les conditions du théorème 3.6, posons $f(h) = (g_k, \Pi_n g_j)$. Alors $f(h)$ admet un développement semi-classique en puissance de $h^{1/2}$ en ce sens que pour tout $N \geq 0$, on a :*

$$(3.25) \quad f(h) = \sum_{m=0}^N C_j h^{m/2} + h^{(N+1)/2} r_N(h)$$

$r_N(h)$ vérifiant l'estimation $|r_N(h)| \leq C_N, 0 < h \leq h_0$.

Preuve. — Pour $C > 0$ assez petit mais fixé, on peut écrire :

$$(3.26) \quad f(h) = \frac{1}{2\Pi i} \int_{|\lambda - e_n h| = Ch} (g_k, (\tilde{D}(h) - \lambda)^{-1} g_j) d\lambda \\ = \frac{1}{2\Pi i} \int_{|\lambda - e_n h| = Ch} \left(g_k, \sum_{m=0}^N (-1)^m (D_1(h) - \lambda)^{-1} [\tilde{V}(D_1(h) - \lambda)^{-1}]^m g_j + R_{Nj} \right) d\lambda$$

où $\tilde{V}_2 = D(h) + W(h)$. Par un changement de variable, développant le symbole \tilde{V} autour de $x = 0, p = 0$, et utilisant la continuité des opérateurs pseudo-différentiels, on peut montrer que

$$\frac{1}{2\Pi i} \int_{|\lambda - e_n h| = Ch} (g_k, (-1)^m (D_1(h) - \lambda)^{-1} [\tilde{V}(D_1(h) - \lambda)^{-1}]^m g_j) d\lambda$$

admet un développement de la forme $h^{m/2} \sum_{l \geq 0} C_{lm} h^{l/2}$. En effet, comme g_j est dans $B_{l,h}$ pour tout entier $l > 0$, en posant $\lambda = \mu h$, on obtient par les inégalités (3.16)-(3.19) que

$$\| [\tilde{V}(D_1(h) - h\mu)^{-1} g_j]_{l,h} \| \leq C_l h^{m/2}$$

pour tout h , $0 < h \leq 1$ et $\mu, |\mu - e_n| = C$. Donc il est facile à voir que :

$$(g_k, (-1)^m (D_1(h) - h\mu)^{-1} [\tilde{V}(D_1(h) - \mu h)^{-1}]^m g_j)$$

admet un développement semi-classique de la forme :

$$h^{m/2-1} \sum_{l \geq 0} a_l(\mu) h^{l/2}, \quad 0 < h \leq 1 \quad \text{et} \quad |\mu - e_n| = C.$$

Cette expression est valide au sens de (3.25). D'où, on déduit que :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - e_n h| = Ch} (g_k, (-1)^m (D_1(h) - \lambda)^{-1} [\tilde{V}(D_1(h) - \lambda)^{-1}]^m g_j) d\lambda \\ &= \frac{h}{2\pi i} \int_{|\mu - e_n| = C} (g_k, (-1)^m (D_1(h) - \mu h)^{-1} [\tilde{V}(D_1(h) - \mu h)^{-1}]^m g_j) d\mu \\ &\sim h^{m/2} \sum_{l \geq 0} C_{lm} h^{l/2} \end{aligned}$$

En précisant l'expression du reste R_N comme dans Simon [24], par la méthode utilisée ci-dessus, on peut montrer :

$$\left| \int_{|\lambda - e_n h| = Ch} (g_k, R_N g_j) d\lambda \right| \leq Ch^{(N+1)/2}.$$

D'après (3.26), cela prouve le lemme.

C. Q. F. D.

Ajoutant quelques remarques évidentes, on obtient :

THÉORÈME 3.9. — *Sous les conditions du théorème 3.6, les valeurs propres de $D(h)$ dans l'intervalle I admettent un développement semi-classique en puissance de $h^{1/2}$:*

$$(3.27) \quad E_j(h) = e_n h + \sum_{k \geq 1} h^{(k+2)/2} E_{j,k} \quad j = 2n - 1, 2n.$$

(3.27) est valide au sens de (3.25) et e_n est la n -ième valeur propre de l'oscillateur harmonique $-1/2\Delta + 1/2 \langle V''x, x \rangle$.

REMARQUE 3.10. — En général, on ne peut pas développer les $E_j(h)$ en puissances de h (voir Helffer-Sjöstrand [11] pour le cas de l'opérateur de

Schrödinger). Mais pour certains E_j , on peut montrer que les puissances impaires de $h^{1/2}$ dans (3.27) disparaissent (voir la section 4).

Revenons maintenant à l'opérateur de Dirac à puits multiples. On fait les hypothèses suivantes sur le potentiel V :

(3.28) V est une fonction réelle C^∞ telle que $\overline{\lim}_{|x| \rightarrow +\infty} |V| < 1$, les puits de l'opérateur de Dirac correspondant se réduisent aux points $x_1^\pm, \dots, x_{N_\pm}^\pm$, $V(x_j^\pm) = \pm 1$ et que le Hessien de V en point x_j soit non dégénéré, on le note par $V''(x_j)$.

On désigne par $\{e_1^+, e_2^+, \dots, e_n^+, \dots\}$ et $\{e_1^-, e_2^-, \dots, e_n^-, \dots\}$ ensemble des valeurs propres des opérateurs $-1/2\Delta + 1/2 \langle V''(x_j^-)x, x \rangle, j=1, \dots, N_-$ et celles des opérateurs $-1/2\Delta - 1/2 \langle V''(x_j^+)x, x \rangle, j=1, 2, \dots, N_+$, arrangées de l'ordre croissant. Grâce aux résultats obtenus dans la section 2 et au théorème 3.9, on a :

THÉORÈME 3.11. — *Sous les conditions (3.4), (3.28), il existe $C > 0$ tel que $D(h)$ n'a pas de valeurs propres dans l'intervalle $[-Ch, Ch]$. Si on désigne par $E_j^\pm(h)$ les valeurs propres consécutives ou négatives respectivement, alors les $E_j^\pm(h)$ admettent un développement semi-classique en puissance de $h^{1/2}$:*

$$(3.29) \quad E_j^+(h) = he_n^+ + \sum_{k \geq 3} h^{k/2} E_{j,k}^+ \quad j = 2n - 1, 2n$$

$$(3.30) \quad E_j^-(h) = -he + \sum_{k \geq 3} h^{k/2} E_{j,k}^-$$

(3.29) et (3.30) sont valides au sens du lemme 3.8.

REMARQUE 3.12. — Sous les conditions du théorème 3.12, on peut préciser la bijection b donnée dans le théorème 2.3. Si on note par $D_j^+(h)$ ($D_j^-(h)$, resp.) l'opérateur de Dirac perturbé par le procédé de la section 2, en gardant le puits $U_j^+ = \{x_j^+\}$ ($U_j^- = \{x_j^-\}$ resp.), alors il existe deux bijections b^+ et b^- :

$$b^+ : \text{Sp}(D(h)) \cap [0, R_0h] \rightarrow \bigcup_j \text{Sp}(D_j^-(h)) \cap [0, R_0h]$$

$$b^- : \text{Sp}(D(h)) \cap [-R_0h, 0] \rightarrow \bigcup_j \text{Sp}(D_j^+(h)) \cap [-R_0h, 0]$$

telles que $|b^+(\lambda) - \lambda| = \hat{O}(e^{-S_1/h})$, $|b^-(\lambda) - \lambda| = \hat{O}(e^{-S_1/h})$, S_1 étant la plus petite distance entre deux puits distincts de $\{U_j^+, U_j^-, j=1, \dots, N^+, k=1, \dots, N^-\}$. Ce résultat montre que les deux familles de puits sont non résonnantes au sens de Helffer et Sjöstrand [13]. Donc on peut espérer mesurer l'effet tunnel $|b^+(\lambda) - \lambda|$ ($|b^-(\lambda) - \lambda|$ resp.) par la plus petite distance entre les

puits positifs $\{U_j^-\}$ (celle entre les puits négatifs $\{U_j^+\}$ resp.). Comme ces deux familles de puits ont une signification géométrique évidente, on peut donner une démonstration directe à cette affirmation.

Plus précisément, on note : $I^+ =]0, R_0h[$, $I^- = [-R_0h, 0[$. Comme dans (2.6) $_{\pm}$, on note encore par U_j^+ (U_j^- resp.) les puits positifs (négatifs resp.). Introduisons les perturbations du potentiel V par W_j^{\pm} où W_j^{\pm} sont choisies telles que :

$$W_j^{\pm} \in C_0^{\infty} \left(\bigcup_{k \neq j} U_k^{\pm}(\eta) \right) \quad V_j^{\pm} = V + W_j^{\pm}$$

$$\{V_j^+ \geq 1\} = U_j^+, \quad \{V_j^- \leq -1\} = U_j^-, \quad j = 1, \dots, N^{\pm}.$$

Désignons : $D_j^{\pm}(h) = D_0(h) + V_j^{\pm}$. Alors sous les conditions du théorème 3.12, D_j^+ n'a pas de spectre dans l'intervalle I^+ pour h assez petit. On note par μ_{α}^+ , $\alpha = (j, k)$, les valeurs propres de $\dot{D}_{j(\alpha)}^+(h)$ dans l'intervalle I^- :

$$D_{j(\alpha)}^+ \varphi_{\alpha}^+ = \mu_{\alpha}^+ \varphi_{\alpha}^+ \quad \|\varphi_{\alpha}^+\| = 1.$$

De même, on note par μ_{α}^- les valeurs propres de $D_{j(\alpha)}^-(h)$ dans I^+ :

$$D_{j(\alpha)}^- \varphi_{\alpha}^- = \mu_{\alpha}^- \varphi_{\alpha}^-, \quad \|\varphi_{\alpha}^-\| = 1.$$

et par E_j^{\pm} celles de $D(h)$ dans I^{\pm} respectivement : $D(h)f_j^{\pm} = E_j^{\pm} f_j^{\pm}$, $\|f_j^{\pm}\| = 1$.

LEMME 3.13. — Si on définit $d^{\pm}(x)$ par $d^+(x) = d\left(x, \bigcup_{j=1}^{N^+} U_j^+\right)$, $d^-(x) = d\left(x, \bigcup_{j=1}^{N^-} U_j^-\right)$, sous les conditions du théorème 3.12, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$(3.31)_+ \quad h \|\nabla(e^{(1-\varepsilon)d^+/h} f_j^+)\|^2 + \|e^{(1-\varepsilon)d^+/h} f_j^+\|^2 \leq C_{\varepsilon}$$

$$(3.31)_- \quad h \|\nabla(e^{(1-\varepsilon)d^-/h} f_j^-)\|^2 + \|e^{(1-\varepsilon)d^-/h} f_j^-\|^2 \leq C_{\varepsilon}.$$

De même si on désigne : $d_j^{\pm}(x) = d_j^{\pm}(x, U_j^{\pm})$ où d_j^{\pm} est la distance associée à la métrique d' Agmon $(1 - V_j^{\pm 2})dx^2$, on a :

$$(3.32)_{\pm} \quad \|\nabla(e^{(1-\varepsilon)d_j^{\pm}/h} \varphi_{\alpha}^{\pm})\|^2 + \|e^{(1-\varepsilon)d_j^{\pm}/h} \varphi_{\alpha}^{\pm}\|^2 \leq C_{\varepsilon}.$$

Preuve. — On démontre (3.31) $_+$, les autres estimations se déduisent de la même manière. Remarquons d'abord que par la technique du lemme 3.3, on peut obtenir :

$$h^2 \|\nabla(e^{(1-\varepsilon)d^+/h} f_j^+)\|^2 + 1/2 \|F_+ e^{(1-\varepsilon)d^+/h} f_j^+\|^2 \leq 3/2 \|F_- e^{(1-\varepsilon)d^+/h} f_j^+\|^2$$

où $F_+^2 - F_-^2 = 1 - (V - E_j^+)^2 - (1 - \varepsilon)^2 |\nabla d^+|^2$ avec $F_+, F_- \geq 0$ à déterminer. $1 - (V - E_j^+)^2 - (1 - \varepsilon)^2 |\nabla d^+|^2 = \varepsilon(2 - \varepsilon)(1 - V^2) + 2E_j^+ V - (E_j^+)^2$, presque partout en x , près des puits U_k^- , $1 - V^2 \geq 0$ et $V \leq -1/2$. Vu les résultats du théorème 3.12, il existe $C_0 > 0$ tel que $C_0 h \leq E_j^+ \leq R_0 h$, donc

$$1 - (V - E_j^+)^2 - (1 - \varepsilon)^2 |\nabla d^+|^2 \geq Ch, \quad C > 0$$

près des puits négatifs U_k^- . Comme dans la démonstration du lemme 3.3, on peut choisir F_+ et F_- tel que $F_+^2 \geq C_1 h$ sur \mathbb{R}^3 et $F_-^2 \leq C_1^{-1} h$ avec $\text{supp } F_- \subset \{x, -1 + V \leq C_2 h\}$, où $C_1, C_2 > 0$. Comme sur l'ensemble $\{x, -1 + V \leq C_2 h\}$, d^+ est majoré par $d^+(x) \leq C_3 h$ (voir la proposition 4.1), on obtient :

$$h \|\nabla(e^{(1-\varepsilon)d^+/h} f_j^+)\|^2 + \frac{C^2}{2} \|e^{(1-\varepsilon)d^+/h} f_j^+\|^2 \leq C_4$$

ce qui prouve (3.31)₊.

C. Q. F. D.

On définit maintenant la distance entre les puits U_j^\pm :

$$S^+ = \min_{\substack{k \neq j \\ 1 \leq k, j \leq N^+}} d(U_k^+, U_j^+)$$

$$S^- = \min_{\substack{k \neq j \\ 1 \leq k, j \leq N^-}} d(U_k^-, U_j^-).$$

THÉOREME 3.14. — *Sous les conditions du théorème 3.12, on désigne par E^+ (E^- resp.) l'espace engendré par φ_α^- (par les φ_α^+ resp.) et par F^+ (F^- resp.) celui engendré par les f_j^+ (f_j^- resp.). Alors on a :*

$$(3.33)_+ \quad \vec{d}(E^+, F^+) = \vec{d}(F^+, E^+) = \hat{0}(e^{-S^+/h})$$

$$(3.33)_- \quad \vec{d}(E^-, F^-) = \vec{d}(F^-, E^-) = \hat{0}(e^{-S^-/h}).$$

Pour $h > 0$ assez petit il existe une bijection

$$b^\pm : \text{Sp}(D(h)) \cap I^\pm \rightarrow \bigcup_{j=1}^{N^\pm} \text{Sp}(D_j^\pm(h)) \cap I^\pm$$

telle que l'on a :

$$(3.34) \quad |b^\pm(\lambda) - \lambda| = \hat{0}(e^{-S^\pm/h}) \quad \text{pour } \lambda \in \text{Sp}(D(h)) \cap I^\pm$$

la correspondance des signes dans (3.34) étant déterminée par exemple par :

$$b^+ : \text{Sp}(D(h)) \cap I^+ \rightarrow \bigcup_{j=1}^{N^-} \text{Sp}(D_j^-(h)) \cap I^+$$

et

$$|b^+(\lambda) - \lambda| = \hat{0}(e^{-S^-/h}), \quad \lambda \in \text{Sp}(D(h)) \cap I^+.$$

Étant donné le lemme 3.14, la démonstration de ce théorème est analogue celle du théorème 2.5, on omet les détails.

4. MULTIPLICITÉ ASYMPTOTIQUE DES PREMIÈRES VALEURS PROPRES

Dans la section 3, on a démontré que sous certaines conditions sur le potentiel V , pour chaque valeur propre $E(h)$ de l'opérateur de Dirac $D(h)$,

il existe une autre valeur propre $E'(h)$, telle que le premier terme des développements semi-classique de $E(h)$ et $E'(h)$ est le même. Une question est alors de savoir quel est le décalage exact de ces deux valeurs propres. Comme premier pas dans cette direction, on montre dans cette section que cette quantité est de grandeur h^∞ lorsque $E(h)$ est une valeur propre dont le premier terme de développement semi-classique est la première valeur propre de l'oscillateur harmonique associé localisé au fond de puits (voir théorème 3.12).

DÉFINITION 4.1. — Soit $E(h)$ une valeur propre de $D(h)$. On dira que $E(h)$ est de multiplicité asymptotique au moins k s'il existe k vecteurs $\varphi_j(h)$, $j = 1, \dots, k$, $\varphi_j(h) \in D(D(h))$, $\|\varphi_j(h)\| = 1$, tels que :

1) Si on note $\{\lambda_j(h), j = 1, \dots, k\}$ les valeurs propres de la matrice $k \times k$ $S(h) = ((\varphi_j(h), \varphi_m(h)))$, il existe un $N_0 \geq 0$ tel que $|\lambda_j(h)| \geq Ch^{N_0}$, pour $h \in]0, h_0]$, $j = 1, \dots, k$;

2) On a pour tout entier N :

$$D(h)\varphi_j(h) = E(h)\varphi_j(h) + O(h^N) \quad j = 1, \dots, k.$$

Par la méthode de démonstration du théorème 2.5, on peut vérifier que si la valeur propre $E(h)$ est de multiplicité asymptotique au moins k , il existe k valeurs propres de $D(h)$, $E_1(h), E_2(h), \dots, E_k(h)$, telles que $E_j(h) = E(h) + O(h^\infty)$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Considérons l'opérateur de Dirac à un puits.

Supposons que les conditions (3.1) et (3.4) soient vérifiées par V . On va étudier la multiplicité asymptotique des valeurs propres de $D(h)$ par la méthode WKB. Les principes de cette méthode sont bien connus (voir Maslov-Fedoriuk [18], Yajima [28] pour le problème de Cauchy et Leray [17] pour le problème de quantification). Mais dans notre cas des problèmes nouveaux se présentent, car en cherchant une fonction propre approchée W. K. B. de $D(h)$, on voit que les valeurs propres du symbole principal sont de multiplicité variable : $\lambda_\pm = \pm \sqrt{1 - |\xi|^2} + V$ et d'ailleurs non régulières. Pour surmonter cette difficulté, on étudie directement l'Hamiltonien classique $\lambda \equiv -\lambda_+\lambda_- = 1 - \xi^2 - V(x)^2$ et l'équation eikonale associée :

$$(4.1) \quad 1 - |\nabla\Psi|^2 - V(x)^2 = 0, \quad \Psi(0) = 0.$$

Dans la suite, on se borne à une étude près du fond du puits et on s'intéresse seulement aux premières valeurs propres de $D(h)$, $0 < E_1(h) \leq E_2(h)$.

On désigne encore par $d(\cdot, \cdot)$ la distance dans \mathbb{R}^3 associée à la métrique d'Agmon $(1 - V^2)dx^2$, $d(x) = d(x, 0)$. On peut montrer comme dans [11] le résultat suivant :

PROPOSITION 4.1. — *Sous les conditions précédentes, il existe un voisinage Ω , de 0, tel que $d(x)$ est C^∞ dans Ω .*

D'après la proposition 4.1, $d(x)$ résout l'équation eikonale (4.1) dans Ω . Utilisant la méthode W. K. B., on peut chercher un vecteur propre approché de $D(h)$ dans Ω sous la forme $e^{-d/h} \sum_{j \geq 0} h^j u_j$, car une valeur propre $E(h)$ de la forme :

$$E(h) \sim \sum_{j \geq 1} h^j e_j.$$

En revenant à l'équation :

$$D(h)\varphi(h) \equiv E(h)\varphi(h) \quad \text{mod } e^{-d/h}O(h^\infty)$$

on voit que $u(h) \sim \sum_{j \geq 0} h^j u_j$ doit satisfaire :

$$(4.2) \quad (P_0(x) + hP_1(D))u(h) \equiv E(h)u(h) \quad \text{mod } O(h^\infty)$$

où

$$P_0(x) = i \sum_{j=1}^3 \alpha_j d_j + \alpha_4 + VI_4$$

$$P_1(D) = \sum_{j=1}^3 \alpha_j D_j \quad \text{et} \quad d_j = \partial_{x_j} d.$$

En écrivant $u \in \mathbb{C}^4$ comme $u = (u', u'')$ avec u' et u'' appartenant à \mathbb{C}^2 et en posant :

$$L_0 = i \sum_{j=1}^3 \sigma_j d_j, \quad L_1 = i^{-1} \sum_{j=1}^3 \sigma_j \partial_{x_j} V, \quad L = \sum_{j=1}^3 \sigma_j D_j$$

on peut réécrire (4.2) sous la forme :

$$\begin{cases} (L_0 + hL)u'' + (1 + V)u' = Eu' \\ (L_0 + hL)u' + (-1 + V)u'' = Eu'' \end{cases}$$

ou encore, vu l'hypothèse (3.1),

$$(4.3) \quad \begin{cases} (-h^2 \Delta + 2h \Sigma d_j \partial_{x_j} + h \Delta d)u' + \frac{h}{1 - V + E} L_1 (L_0 + hL)u' = E(E - 2V)u' \\ u'' = \frac{1}{1 - V + E} (L_0 + hL)u' \end{cases}$$

En point $x = 0$, (4.3) entraîne que :

$$(4.4) \quad -h^2 \Delta u' + h \Delta d u' = E(E + 2)u', \quad x = 0.$$

L'égalité (4.4) permet de relier les e_j avec les dérivées de u' en $x = 0$. En

fait, si on écrit $u' \sim \sum_{j \geq 0} h^j u'_j$, on a en $x = 0$:

$$(4.5)_0 \quad \frac{\Delta d}{2} u'_0 = e_1 u'_0$$

$$(4.5)_n \quad -\Delta u'_{n-1} + \Delta d u'_n = \sum_{m+l=n+1} \left(\sum_{k+j=m} e_k e_j + 2e_m \right) u'_l, \quad n \geq 1.$$

D'après (4.5)₀, on voit que si l'on prend $u'_0(0) \neq 0$, ce qui est le cas pour les deux premières valeurs propres, la condition nécessaire que e_1 doit satisfaire est :

$$(4.6) \quad e_1 = (\Delta d/2)|_{x=0}.$$

Il est facile à vérifier que $e_1 = 1/2 \sum_{j=1}^3 \sqrt{\lambda_j}$, où les λ_j sont les valeurs propres de la matrice $2V''(0)$. Les relations pour déterminer e_2 et e_3 sont :

$$(4.7) \quad -\Delta u'_0 = (e^2_1 + 2e_2)u'_0, \quad x = 0$$

$$(4.8) \quad -\Delta u'_1 = (2e_2 e_1 + 2e_3)u'_0 + (2e_2 + e^2_1)u'_1.$$

Il faut remarquer que malgré les expressions explicites des e_j , il est difficile de calculer les e_j , car le calcul de $\Delta u'_j$ en $x = 0$ (d'après l'équation (4.3)) fait intervenir les dérivées d'ordres supérieurs des u'_k , $k \leq j - 1$. Mais ces expressions nous donnent des informations suffisantes. En dérivant la première égalité de (4.3) par rapport à x_k , on a :

$$(4.9) \quad -h^2 \Delta \partial_k u' + 2h \sum_{j=1}^3 d_{jk} \partial_j u' + h(\Delta d_k u' + \Delta d \partial_k u') + \frac{h^2}{2 + E} (\partial_k L_1) L u' = E(2 + E) \partial_k u', \quad x = 0$$

où on a noté : $d_{jk} = \partial_{x_j} \partial_{x_k} d$. (4.9) permet d'obtenir les dérivées d'ordre 1 des u'_j . Par exemple, pour u'_0 , on a :

$$(4.10) \quad 2 \sum_{j=1}^3 d_{jk} \partial_j u'_0 + (\Delta d_k u'_0 + \Delta d \partial_k u'_0) = 2e_1 \partial_k u'_0.$$

Si on note : $u'_0 = (u_{01}, u_{02})$ avec $u_{0j} \in \mathbb{C}$ et $D = (d_{jk} |_{x=0})$, on déduit de (4.10) que :

$$(4.12) \quad \begin{pmatrix} \partial_1 u_{0j} \\ \partial_2 u_{0j} \\ \partial_3 u_{0j} \end{pmatrix} = -1/2 D^{-1} \begin{pmatrix} \Delta d_1 \\ \Delta d_2 \\ \Delta d_3 \end{pmatrix} u_{0j}, \quad j = 1, 2, \quad \text{en } x = 0.$$

Dérivant (4.3) par rapport à x_k, x_m , on obtient, en notant : $d_{jkm} = \partial_j \partial_k \partial_m d$,

$$(4.13) \quad -h^2 \Delta \partial_{km} u' + 2h \sum_j (d_{jkm} \partial_j + d_{jm} \partial_{jk} + d_{jk} \partial_{jm}) u' \\ + h(\Delta d_m \partial_k u' + \Delta d_k \partial_m u' + \Delta d_{km} u' + \Delta d \partial_{km} u') \\ + \frac{h}{2 + E} (\partial_k L_1 \cdot \partial_m L_0 + \partial_m L_1 \cdot \partial_k L_0) u' \\ + \frac{h^2}{2 + E} (\partial_k L_1 \cdot L \partial_m u' + \partial_m L_1 L \partial_k u' + \partial_{km} L_1 L u') \\ = E(E + 2) \partial_{km} u' - 2E V_{km} u', \quad \text{en } x = 0.$$

En principe, on peut obtenir les $\Delta u'_j |_{x=0}$ à partir de (4.13). Pour u'_0 , on a :

$$(4.14) \quad 2 \sum_j (d_{jkm} \partial_j + d_{jm} \partial_{jk} + d_{jk} \partial_{jm}) u'_0 + (\Delta d_m \partial_k u'_0 + \Delta d_k \partial_m u'_0) \\ + (\Delta d_{km} u'_0 + \Delta d \partial_{km} u'_0) + 1/2 (\partial_k L_1 \partial_m L_0 + \partial_m L_1 \partial_k L_0) u'_0 \\ = 2e_1 \partial_{km} u'_0 - 2e_1 V_{km} u'_0.$$

D'après (4.12), on peut écrire (4.14) sous la forme :

$$2 \sum_{j=1}^3 (d_{jm} \partial_{kj} + d_{jk} \partial_{jm}) u'_{0,l} = b_{mk} u'_{0,l} + v_{mk}^l, \quad l = 1, 2, \quad x = 0$$

où b_{km} sont des constantes réelles et v_{mk}^l est la l -ième composante du vecteur : $-1/2(\partial_k L_1 \partial_m L_0 + \partial_m L_1 \partial_k L_0) u'_0$, en $x = 0$. Maintenant on note :

$$X_l = (\partial_{jk} u'_{0,l}), \quad B = (b_{mk}), \quad C_l = (v_{mk}^l).$$

On a alors :

$$2(DX_l + X_l D) = B u'_{0,l} + C_l$$

$$\text{ou} \quad 2(X_l + D^{-1} X_l D) = D^{-1} B u'_{0,l} + D^{-1} C_l.$$

D'où on déduit que :

$$(4.15) \quad \Delta u'_{0,l} = \text{tr } X_l = 1/4(\text{tr}(D^{-1} B) u'_{0,l} + \text{tr}(D^{-1} C_l)), \quad \text{en } x = 0.$$

Pour calculer $\text{tr}(D^{-1} C_l)$. Rappelons d'abord que d'après les définitions des σ_j (voir (2.2)), on a :

$$\partial_k L_1 \partial_m L_0 + \partial_m L_1 \partial_k L_0 = \begin{pmatrix} \alpha_{mk} & \beta_{mk} \\ -\bar{\beta}_{mk} & \bar{\alpha}_{mk} \end{pmatrix}$$

où
$$\alpha_{mk} = \sum_{j=1}^3 (V_{jk}d_{jm} + V_{jm}d_{jk}) + i(d_{2m}V_{ik} + d_{2k}V_{1m} - V_{2k}d_{1m} - V_{2m}d_{1k})$$

$$\beta_{mk} = V_{3k}d_{1m} - V_{1k}d_{3m} + V_{3m}d_{1k} - V_{1m}d_{3k} + i(V_{2k}d_{3m} - V_{3k}d_{2m} + V_{2m}d_{3k} - V_{3m}d_{2k})$$

D'où

$$v_{mk}^1 = \alpha_{mk}u'_{0,1} + \beta_{mk}u'_{0,2}, \quad v_{mk}^2 = -\bar{\beta}_{mk}u'_{0,1} + \bar{\alpha}_{mk}u'_{0,2}.$$

On note : $F = (\alpha_{mk}), G = (\beta_{mk}), D^{-1} = (D^{jk})$. D'après la relation évidente :

$$\sum_{k=1}^3 D^{jk}d_{km} = \delta_{jm}, \quad \sum_{k=1}^3 D^{kj}d_{mk} = \delta_{jm}$$

on déduit :

$$\begin{aligned} \text{tr}(D^{-1}F) &= \sum_{k,m} D^{km}\alpha_{km} = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^3 D^{km}(V_{jk}d_{jm} + V_{jm}d_{jk}) \\ &\quad + i \sum_{k=1}^3 \left\{ V_{1k} \sum_{m=1}^3 D^{km}d_{2m} - V_{2k} \sum_{m=1}^3 D^{km}d_{1m} \right\} \\ &\quad + i \sum_{m=1}^3 \left\{ V_{1m} \sum_{k=1}^3 D^{mk}d_{2k} - V_{2m} \sum_{k=1}^3 D^{km}d_{1k} \right\} \\ &= 2 \sum_{k=1}^3 V_{kk}, \quad \text{en } x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(D^{-1}G) &= \sum_{k,m} D^{km}\beta_{km} = \sum_{k=1}^3 \left\{ V_{3k} \left(\sum_{m=1}^3 D^{km}d_{jm} \right) - V_{1k} \left(\sum_{m=1}^3 D^{mk}d_{3m} \right) \right. \\ &\quad \left. + iV_{2k} \sum_{m=1}^3 D^{km}d_{3m} - iV_{3k} \sum_{m=1}^3 D^{km}d_{2m} \right\} \\ &\quad + \sum_{m=1}^3 \left\{ V_{3m} \sum_{k=1}^3 D^{km}d_{1k} - V_{1m} \sum_{k=1}^3 D^{km}d_{3k} \right. \\ &\quad \left. + iV_{2m} \sum_{k=1}^3 D^{km}d_{3k} - iV_{3m} \sum_{k=1}^3 D^{km}d_{2k} \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'après (4.15), on déduit :

$$\Delta u'_{0,1} = 1/4 \left(\text{tr}(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}) + 2 \sum_{j=1}^3 V_{jj} \right) u'_{0,1}.$$

De même, on a :

$$\Delta u'_{0,2} = 1/4 \left(\text{tr}(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}) + 2 \sum_{j=1}^3 V_{jj} \right) u'_{0,2}.$$

Utilisant (4.7), on obtient :

$$(4.16) \quad e_2 = -1/2 \left(1/4 \left(\text{tr}(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}) + 2 \sum_{j=1}^3 V_{jj} \right) + e_1^2 \right)$$

e_2 est indépendant du choix de $u'_0 \neq 0$. Cela prouve que les deux premiers termes des deux plus petites valeurs propres positives de $\mathbf{D}(h)$ sont les mêmes : $|E_1(h) - E_2(h)| = O(h^3)$. On verra qu'en fait elles sont asymptotiquement égales. Pour obtenir les $e_j, j \geq 3$, on a besoin des informations sur les u'_j . Utilisant l'écriture $u' \sim \sum_{j \geq 0} h^j u'_j$, on déduit de (4.3) :

$$(4.17) \quad 2 \left(\sum_{j=1}^3 d_j \partial_j \right) u'_0 + (2e_1 \mathbf{V} + \Delta d) u'_0 + \frac{1}{1-\mathbf{V}} \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_0 u'_0 = 0$$

$$(4.18)_n \quad 2 \left(\sum_{j=1}^3 d_j \partial_j \right) u'_n + (\Delta d + 2e_1 \mathbf{V}) u'_n + \frac{1}{1-\mathbf{V}} \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_0 u'_n \\ = \Delta u'_{n-1} + \frac{e_1}{1-\mathbf{V}} \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_0 u'_{n-1} - \frac{1}{1-\mathbf{V}} \mathbf{L}_1 \mathbf{L} u'_{n-1} \\ + \sum_{j+k=n} e_j \left(\frac{1}{1-\mathbf{V}} \mathbf{L}_1 - \frac{e_1}{1-\mathbf{V}} \mathbf{L}_0 + \mathbf{L} \right) u''_k + \sum_{\substack{k+j=n \\ k \geq 1}} e_{k+1} (\mathbf{L}_0 u''_j + (1-\mathbf{V}) u'_j)$$

Pour faciliter le travail, on choisit d'abord des coordonnées locales, pour lesquelles $d(x)$ est de la forme $1/2 \sum \mu_j x_j^2$, où $\mu_j = \sqrt{\lambda_j}$. On introduit les espaces \mathbf{S}^m , qui ont pour éléments des fonctions \mathbf{C}^∞ , à valeurs dans \mathbf{C}^2 , admettant un développement formel : $\sum_{|\alpha| \geq m} \mathbf{C}_\alpha x^\alpha$. On considère (4.17).

Dans les coordonnées choisies ci-dessus, (4.17) s'écrit sous la forme :

$$(4.19) \quad 2 \sum \mu_j x_j \partial_j u'_0 + (-2e_1 + \Delta d(0)) u'_0 + \mathbf{R}_1 u'_0 = 0$$

où R_1 applique S^m dans S^{m+1} . Si l'on cherche u'_0 , la solution de (4.19), de la forme $x^\alpha \Sigma P_m(x)$, $P_m \in S^m$ et $P_0(0) \neq 0$, e_1 doit vérifier :

$$e_1 = \Sigma \alpha_j \mu_j + 1/2 \Sigma \mu_j.$$

On retrouve le premier terme des valeurs propres de $D(h)$ (voir le théorème 3.6). Pour les deux premières valeurs propres, on a : $\alpha = 0$ et e_1 est donnée par (4.6). (4.19) devient :

$$(4.20) \quad 2 \Sigma \mu_j x_j \partial_j u'_0 + R_1 u'_0 = 0$$

ou encore si $u'_0 \sim \sum_{m \geq 0} P_m(x)$, alors on a

$$(4.21) \quad 2 \Sigma \mu_j x_j \partial_j P_m(x) + R_1 P_{m-1}(x) = 0 \quad \text{modulo } S^{m+1}$$

pour $m \geq 1$. L'équation (4.21) se résout facilement modulo S^{m+1} , car les μ_j sont positifs. Si on note : $S^\infty = \bigcap_m S^m$, on a résolu l'équation (4.11)

modulo S^∞ . En choisissant les données initiales P_0 , on obtient deux solutions de (4.17) modulo S^∞ , qui sont linéairement indépendantes, on les note par u_0^1, u_0^2 . On prend pour u'_0 une combinaison linéaire de u_0^1, u_0^2 : $u'_0 = C_1 u_0^1 + C_2 u_0^2$. Pour $n = 1$, (4.18)₁ donne :

$$(4.22) \quad 2 \Sigma d_j \partial_j u'_1 + (2e_1 V + \Delta d) u'_1 + \frac{1}{1-V} L_1 L_0 u'_1 = \\ = \Delta u'_0 + \frac{e_2}{1-V} L_1 L_0 u'_0 - \frac{1}{1-V} L_1 L u'_0 + e_1 \left(\frac{1}{1-V} L_1 - \frac{e_1}{1-V} L_0 + L \right) u''_0 \\ + e_2 (L_0 u''_0 + (1-V) u'_0).$$

Pour e_2 donné par (4.16), le second membre de (4.22) est dans S^1 . Un changement de coordonnées comme précédent donne :

$$(4.23) \quad 2 \sum_{j=1}^3 \mu_j x_j \partial_j u'_1 + R_1 u'_1 = f, \quad \text{où } f \in S^1.$$

Notons que si u'_1 satisfait l'équation (4.23), alors pour toutes constantes b_1 et b_2 , $b_1 u_0^1 + b_2 u_0^2 + u'_1$ satisfait encore (4.23). Donc quitte à modifier u'_0 dès le départ, on peut supposer $u'_1(0) = 0$. Utilisant la méthode esquissée pour u'_0 , on peut obtenir u'_1 tel que u'_1 répond au (4.23) modulo S^∞ . u'_1 est uniquement déterminé par u'_0 .

Supposons maintenant que l'on ait déjà déterminé e_1, e_2, \dots, e_{n+1} et pour tout $u'_0(0)$ une famille de solutions u'_0, u'_1, \dots, u'_n qui résolvent les équations (4.8) modulo $O(|x|^\infty)$, où $n \geq 1$. Pour déterminer e_{n+2} , on

remarque d'abord que par la même raison indiquée pour $u'_1(0)$, on peut toujours supposer $u'_{n+1}(0) = 0$. En $x = 0$, (4.5)_n devient :

$$(4.24) \quad -\Delta u'_n = \left(\sum_{k+j=n+2} e_j e_k + 2e_{n+2} \right) u'_0.$$

PROPOSITION 4.2. — *Toutes les dérivées de u'_j , $0 \leq j \leq n$, en $x = 0$, s'expriment sous la forme :*

$$(4.25) \quad \partial_x^\alpha u'_j(0) = \left(C_{j0}^\alpha + i \sum_{k=1}^3 C_{jk}^\alpha \sigma_k \right) u'_0(0), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^3$$

où les C_{jk}^α , $k = 0, \dots, 4$, sont des constantes réelles indépendantes de $u'_0(0)$.

Preuve. — On démontre d'abord (4.25), pour $j = 0$. Comme u'_0 vérifie (4.17) modulo $O(|x|^\infty)$, on peut écrire formellement :

$$2 \left(\sum_{j=1}^3 d_j \partial_j u'_0 \right) + (2e_1 V + \Delta d) u'_0 + \frac{1}{1-V} L_1 L_0 u'_0 = 0$$

ou encore :

$$(4.26) \quad \sum_{j=1}^3 d_j \partial_j u'_0 + \left(f_1 + \sum_{k,m=1}^3 f_1^{km} \sigma_k \sigma_m \right) u'_0 = 0$$

où les f_1 et f_1^{km} sont des fonctions C^∞ , à valeurs réelles, qui s'annulent en $x = 0$. Utilisant les propriétés des matrices de Pauli (voir (2.3)) et un changement des coordonnées locales, on peut écrire (4.26) sous la forme suivante :

$$(4.27) \quad \sum_{j=1}^3 \mu_j x_j \partial_j \tilde{u}'_0 + \sum_{j=1}^3 C_j(x) \partial_j \tilde{u}'_0 + g_1 \tilde{u}'_0 + i \sum_{k=1}^3 g_{1k} \sigma_k \tilde{u}'_0 = 0$$

au sens des séries formelles, où les $C_j(x)$ s'annulent d'ordre 2 en $x = 0$ et les g_1 et g_{1k} s'annulent en $x = 0$, et qu'on a noté par \tilde{u}'_0 la transformée de u'_0 par le changement des coordonnées locales.

Nous affirmons d'abord que en remplaçant u'_0 par \tilde{u}'_0 , (4.25) est valide pour $j = 0$. On démontre cette affirmation par une récurrence en $s = |\alpha|$. Pour $s = 0$, c'est trivial. Supposons que notre affirmation soit prouvée pour tout α , $|\alpha| \leq s-1$, $s \geq 1$. Pour β , $|\beta| = s$, appliquant l'opérateur $\partial_x^\beta = \partial_{x_1}^{\beta_1} \partial_{x_2}^{\beta_2} \partial_{x_3}^{\beta_3}$

à (4.27), utilisant le fait que $C_j(x)$ s'annulent d'ordre 2 en $x = 0$ et que les g_1 et $g_{1,k}$ s'annulent en $x = 0$, on obtient :

$$(4.28) \quad \left(\sum_{j=1}^3 \mu_j \beta_j \right) \partial_x^\beta \tilde{u}'_0 + \sum_{|\alpha| \leq s-1} g_{\beta,\alpha} \partial_x^\alpha \tilde{u}'_0 + i \sum_{|\alpha| \leq s-1} \sum_{k=1}^3 g_{k,\beta\alpha} \sigma_k \partial_x^\alpha \tilde{u}'_0 = 0, \quad \text{en } x = 0$$

Utilisant encore une fois les propriétés des σ_j (voir (2.3)) et l'hypothèse de récurrence, on déduit de (4.28) :

$$(4.29) \quad \partial_x^\beta \tilde{u}'_0 = \left(\tilde{C}_0^\beta + i \sum_{k=1}^3 \tilde{C}_k^\beta \sigma_k \right) u'_0, \quad \text{en } x = 0$$

car $\sum_{j=1}^3 \mu_j \beta_j$ est supérieur à 0. Par récurrence, cela prouve notre affirmation.

Maintenant pour démontrer (4.25) avec $j = 0$, il suffit de remarquer que $\partial_x^\alpha u'_0$ est une combinaison linéaire des dérivées $\partial_x^\beta u'_0$, $|\beta| \leq |\alpha|$, en $x = 0$.

Supposons (4.25) prouvé pour l , $0 \leq j \leq l-1$. Pour u'_l , d'après (4.3) et (4.18)_l, on a :

$$2 \sum_{j=1}^3 d_j \partial_j \tilde{u}'_l + (\Delta d + 2e_1 V) u'_l + \frac{1}{1-V} L_1 L_0 u'_l = \sum_{j=0}^{l-1} \left\{ C_{j0} u'_j + \sum_{k=1}^3 C_{jk} \partial_k u'_j + i \sum_{k=1}^3 \sigma_j \left(b_{kj} u_j + \sum_{r=1}^3 b_{kj\lambda} \partial_{x_r} u'_j \right) \right\}$$

au sens des séries formelles. Par un changement de coordonnées locales utilisées dans (4.27), par le même argument que celui utilisé pour démontrer (4.29), on peut montrer :

$$(4.30) \quad \partial_x^\beta \tilde{u}'_l = \left(\tilde{C}_{l0}^\beta + i \sum_{k=1}^3 \tilde{C}_{lk}^\beta \sigma_k \right) u'_0, \quad x = 0$$

où \tilde{u}'_l est la transformée de u'_l par le changement de coordonnées locales. Puisque les $\partial_x^\beta u'_l$ s'expriment comme combinaison linéaire des $\partial_x^\alpha \tilde{u}'_l$ avec $|\alpha| \leq \beta$, on obtient (4.25) pour $j = l$. Ceci finit donc la démonstration de la proposition. C. Q. F. D.

COROLLAIRE 4.3. — En $x = 0$, $\Delta u'_n$ est de la forme $C_n u'_0$ où C_n est réel.

Preuve. — D'après la proposition 4.2, on peut écrire $\Delta u'_n$ comme :

$$\Delta u'_n = \left(C_n + i \sum_{j=1}^3 C_{nj} \sigma_j \right) u'_0, \quad \text{en } x = 0.$$

Posons : $B_n = \sum_{j=1}^3 C_{nj} \sigma_j$. Il suffit de prouver $B_k = 0$ pour tout k . Si cela n'était pas vrai, soit n le plus petit k tel que $B_k \neq 0$. Notons que B_n est hermitien. Donc il existe une valeur propre non nulle de B_n , notée $\lambda_n \in \mathbb{R}$. D'après (4.24), on peut prendre pour $u'_0(0)$ le vecteur propre associé de B_n et e_{n+2} est de la forme :

$$e_{n+2} = e'_{n+2} - \frac{i}{2} \lambda_n, \quad \text{où } e'_{n+2} \in \mathbb{R}.$$

En résolvant l'équation (4.18)_{n+1} modulo $0(|x|^\infty)$, on obtient u'_{n+1} . Posons :

$$E_n = \sum_{j=1}^{n+2} h^j e_j$$

$$\varphi'_{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} h^j u_j, \quad \varphi''_{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} h^j u''_j$$

où les u''_j sont déterminés par :

$$(4.31) \quad u''_0 = \frac{1}{1-\sqrt{V}} L_0 u'_0, \quad u''_{j+1} = \frac{1}{1-\sqrt{V}} \left(L_0 u'_{j+1} + L u'_j - \sum_{m+k=j} e_m u''_k \right),$$

$j=0, 1, \dots$

On note : $\varphi_{n+1} = (\varphi'_{n+1}, \varphi''_{n+1})$. Revenons à l'équation (4.7). Nous obtenons une fonction C^∞ , notée Ψ_{n+1} , qui admet le même développement asymptotique que φ_{n+1} , tel que :

$$(P_0(x) + hP_1(D))\Psi_{n+1} = E_n \Psi_{n+1} + 0(h^{n+3}), \quad \text{dans } \Omega.$$

Prenons une fonction $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, qui vaut 1 dans un voisinage de 0. Alors $\varphi = e^{-d/h} \chi \Psi_{n+1}$ vérifie :

$$D(h)\varphi = E_n \varphi + e^{-d/h} r(h)$$

où $\|r(h)\| = 0(h^{n+3})$ et $r(h)$ est à support dans Ω . D'où on obtient $\|e^{-d/h} r(h)\| = 0(h^{n+3+3/2})$. Comme $\Psi_{n+1}(0) \neq 0$, on a aussi $\|\varphi\| \geq Ch^{3/2}$ pour certain $C > 0$. Posons maintenant $f = \varphi / \|\varphi\|$. f est un vecteur propre approché de $D(h)$:

$$D(h)f = E_n(h)f + 0(h^{n+3}).$$

Par la méthode utilisée dans la section 3, on en conclut que pour $h > 0$ assez petit, le spectre de $D(h)$ existe en dehors de l'axe réel \mathbb{R} . C'est contradictoire avec le fait que $D(h)$ est auto-adjoint dans H . Donc le corollaire est prouvé. C. Q. F. D.

Le corollaire 4.3 montre que e_{n+2} est réel et déterminé d'une manière unique par (4.24) :

$$(4.24)_{n+2} \quad e_{n+2} = \frac{-1}{2} \left(C_n + \sum_{k+j=n+2} e_j e_k \right)$$

e_{n+2} étant déterminé, on peut résoudre (4.18) $_{n+1}$ modulo $O(|x|^\infty)$. Ainsi de suite, en prenant deux données linéairement indépendantes en $x = 0$ (voir $u'_0(0)$ dans (4.19)), on obtient $\tilde{E}(h)$, $\tilde{u}_1(h)$ et $\tilde{u}_2(h)$, où

$$\begin{aligned} \tilde{E}(h) &\sim \sum_{j \geq 1} h^j e_j \\ \tilde{u}_j(h) &\sim \sum_{k \geq 0} h^k u_{kj}, \quad j = 1, 2 \end{aligned}$$

telles que :

$$(P_0 + hP_1)\tilde{u}_j(h) = \tilde{E}(h)\tilde{u}_j(h) + O(|x|^\infty + h^\infty) \quad \text{dans } \Omega$$

au sens formel. A partir de ces éléments formels, on peut construire des fonctions $\hat{E}(h)$, $\hat{u}_j(h)$, telles que :

$$\hat{u}_j(h) \sim \sum_{k \geq 0} h^k \hat{u}_{kj}, \quad \hat{E}(h) \sim \sum_{j \geq 1} h^j e_j$$

où \hat{u}_{kj} ont les mêmes développements de Taylor que u_{kj} en $x = 0$. On a évidemment :

$$(P_0 + hP_1)\hat{u}_j(h) = \hat{E}(h)\hat{u}_j(h) + O(h^\infty) \quad \text{dans } \Omega.$$

Revenons à l'équation de Dirac. On obtient :

$$(4.32) \quad D(h)(e^{-d/h}\hat{u}_j(h)) = \hat{E}(h)e^{-d/h}\hat{u}_j(h) + b_j(h)e^{-d/h}$$

où les $b_j(h)$ admettent un développement de Taylor de la forme $\sum h^j b_{kj}$ avec $b_{kj} = O(|x|^\infty)$ dans un voisinage de 0. On constate que l'on peut modifier les \hat{u}_{kj} par un terme d'ordre $O(|x|^\infty)$, de sorte que les b_{kj} sont nuls dans un voisinage de 0. En effet, cela revient à résoudre les équations de transport de la forme

$$(4.33) \quad (X - F(x))u = g(x)$$

où $X = (\sum d_j(x)\partial_{x_j})I_2$ et $F(x)$ est une matrice 2×2 nulle en $x=0$, $g(x) = O(|x|^\infty)$.

La linéarisation en $x = 0$ de X a seulement des valeurs propres positives. Si on note :

$$\phi^t = \exp(tX)(x)$$

pour $x \in \Omega'$, un voisinage assez petit de 0, on a $\phi^t(x) \in \Omega'$ pour tout t , $t \leq 0$ et il existe $C > 0$ tel que :

$$|\partial_x^\alpha \phi^t(x)| \leq C_\alpha e^{-|t|C'} |x|.$$

Notons : $F(t) = F \circ \phi^t$, qui est une matrice 2×2 . Considérons le problème :

$$(4.34) \quad \frac{d}{dt} \varphi(t) = F(t)\varphi(t), \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \text{dans } \Omega'.$$

Comme $\|F(x)\| \leq C|x|$ pour $x \in \bar{\Omega}'$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme de matrice 2×2 , on a : $\|F(t)\| \leq C_1 e^{-|t|C'} |x|$ pour $x \in \bar{\Omega}'$ et $t \leq 0$. D'où il vient que la série de Dyson pour $F(t)$ définie par :

$$(4.35) \quad \varphi_0 + \sum_{j \geq 1} \int_0^t \int_0^{t_{j-1}} \dots \int_0^{t_1} F(t_j) F(t_{j-1}) \dots F(t_1) \varphi_0 dt_1 dt_2 \dots dt_{j-1} dt_j$$

converge uniformément pour $t \leq 0$ et $x \in \bar{\Omega}'$ où Ω' pourrait être diminué en raison de la convergence. Évidemment,

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \sum_{j \geq 1} \int_0^t \int_0^{t_{j-1}} \dots \int_0^{t_1} F(t_j) \dots F(t_1) \varphi_0 dt_j \dots dt_1$$

répond au problème (4.34). On désigne par $A(t)$ l'application $\varphi_0 \rightarrow \varphi(t)$. D'après l'expression (4.35), il existe une constante C_2 telle que

$$\|A(t)\varphi\| \leq C_2 \|\varphi\|, \quad \varphi \in C(\bar{\Omega}'), \quad t \leq 0,$$

où la norme est prise dans $C(\bar{\Omega}')$. D'où on déduit que la solution de (4.33) s'écrit sous la forme :

$$(4.36) \quad U(x) = \int_{-\infty}^0 A^{-1}(\tau) g \circ \phi^\tau(x) d\tau \quad x \in \Omega'.$$

Remarquons que d'après (4.34), on peut montrer qu'il existe $C_3 > 0$ tel que $\|A^{-1}(\tau)\| \leq C_3$. Comme $g(x) = 0(|x|^\infty)$, l'intégrale du deuxième membre de (4.34) est convergente. Il est donc évident que $u(x) = 0(|x|^\infty)$. (4.33) est résolu. En résumant, on a trouvé deux solutions $\hat{u}_j(h)$, $j = 1, 2$,

telles que $(D(h) - \hat{E}(h))(\hat{u}_j(h)e^{-d/h}) = \hat{b}_j(h)e^{-d/h}$

où $\hat{b}_j(h) = 0(h^\infty)$ uniformément en $x \in \Omega'$. Prenons une fonction de troncature $\chi \in C_0^\infty(\Omega')$ qui vaut 1 dans un voisinage de 0. Posons : $\hat{f}_j = c_j(h)e^{-d/h}\chi\hat{u}_j(h)$,

où les $c_j(h)$ sont des constantes de normalisation. Alors les f_j admettent un développement de la forme

$$(4.36)' \quad \hat{f}_j \sim e^{-d/h} \sum_{k \geq 0} h^{k-3/2} f_{kj}.$$

Comme dans la section 2, on peut montrer le résultat suivant :

THÉORÈME 4.4. — *Sous les conditions (3.1) et (3.4), les deux premières valeurs propres positives de $D(h)$, nommées $E_1(h)$, $E_2(h)$, sont asymptotiquement doubles et elles sont données par :*

$$(4.37) \quad E_j(h) = \hat{E}(h) + O(h^\infty), \quad j = 1, 2$$

où $\hat{E}(h)$ admet un développement asymptotique de la forme $\sum_{j \geq 1} h^j e_j$ avec

les e_j déterminés par (4.24)_j. Si on note par f_j le vrai vecteur propre de $D(h)$ associé à $E_j(h)$, $j = 1, 2$, $F = \{ f_1, f_2 \}$ et $\hat{F} = \{ \hat{f}_1, \hat{f}_2 \}$, on a :

$$\vec{d}(F, \hat{F}) = \vec{d}(\hat{F}, F) = O(h^\infty).$$

Preuve. — Par le choix de \hat{f}_j , on a :

$$(D(h) - \hat{E}(h))\hat{f}_j = O(h^\infty), \quad j = 1, 2.$$

Pour appliquer la proposition 2.4, il faut estimer les valeurs propres de la matrice $S(h) = ((\hat{f}_j, \hat{f}_k))$. Rappelons que $f_{01}(0)$ et $f_{02}(0)$ sont linéairement indépendants par la construction des $\hat{U}_j(h)$. Un calcul direct donne que :

$$S(h) = C + R(h)$$

où C est une matrice de la forme $(C' \langle f_{0k}(0), f_{0j}(0) \rangle)$ avec $C' > 0$ et $R(h)$ est une matrice hermitienne pour laquelle on a une majoration :

$$\| R(h) \| \leq ch^{1/2}$$

ici $\| \cdot \|$ est la norme de matrice 2×2 . Les valeurs propres de la matrice C sont faciles à calculer : comme $f_{01}(0)$ et $f_{02}(0)$ sont linéairement indépendants, elles sont minorées par une constante positive $C_1 > 0$. Donc au moins pour h assez petit, les valeurs propres de $S(h)$ admettent une minoration $C_1/2$. D'après les résultats des § 2 et § 3, on conclut par un argument du théorème 2.5 que :

$$E_j(h) = \hat{E}(h) + O(h^\infty), \quad j = 1, 2.$$

Le reste de la démonstration est le même qu'au théorème 2.5. On omet les détails. C. Q. F. D.

REMARQUE 4.5. — En dehors d'un voisinage de 0, on peut résoudre les

équations de transport (4.18) globalement. En effet, supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées :

(4.38) Ω est un ouvert contenant 0 et $d(x)$ est C^2 dans Ω ;

(4.39) Posons $\Lambda = \{ (x, \nabla d(x)), x \in \Omega \}$. Supposons que $(x, \xi) \in \Lambda$ entraîne que $\exp tH_\lambda(x, \xi) \in \Lambda$ pour $t \leq 0$ et que $\exp tH_\lambda(x, \xi) \rightarrow 0$ lorsque

$$t \rightarrow +\infty, \text{ où } \lambda = -\lambda_+\lambda_- = 1 - |\xi|^2 - V(x)^2.$$

Comme $d(x)$ est C^∞ dans un petit voisinage de 0, $d(x)$ est C^∞ dans Ω . Soit W un voisinage de 0 avec ∂W régulier. Supposons que l'on ait résolu (4.18) dans W . Alors pour $x \in \Omega$, il existe une courbe bicaractéristique de λ qui joint x et un point $x_0 \in \partial W$. Le long de cette courbe bicaractéristique, le champ $X = \Sigma d_j \partial_{x_j}$ se transforme en $1/2 \frac{d}{dt}$, la dérivation étant par rapport au système hamiltonien de λ . Alors (4.18) devient un problème de Cauchy et on peut le résoudre dans Ω . Ainsi les \hat{f}_j du théorème 4.4 peuvent être définis dans Ω . Il existe une matrice $(C_{jk}(h))$ telle que les vrais vecteurs propres s'expriment comme :

$$f_j = \sum_k C_{jk} \hat{f}_k + o(h^\infty), \quad j = 1, 2.$$

Posons $f'_j = \sum_k C_{jk} \hat{f}_k$. Comme dans [11], on peut montrer que pour

tout compact $K \subset \Omega$, on a :

$$(4.40) \quad \|\nabla [e^{d/h}(f_j - f'_j)]\|_{L^2(K)}^2 + \|e^{d/h}(f_j - f'_j)\|_{L^2(K)} = o(h^\infty).$$

REMARQUE 4.6. — Le théorème 4.4 montre que pour l'opérateur de Dirac à un puits non-dégénéré, il existe un phénomène de dégénérescence asymptotique. Selon les calculs faits pour les premiers termes dans le développement de la valeur propre, cette dégénérescence pourrait venir d'une part de l'hypothèse sur le potentiel, c'est-à-dire il n'est pas assez fort par rapport au « mass gap » pour entraîner l'interaction entre le spectre positif et le spectre négatif de l'opérateur de Dirac libre (voir le lemme 3.1); d'autre part des symétries internes de l'opérateur de Dirac qui entraîne l'annulation mystérieuse dans le calcul direct de (4.16). On peut aussi poser la même question de dégénérescence pour les valeurs propres au niveau plus haut. Mais la question plus intéressante serait d'estimer le décalage exact entre les deux valeurs propres asymptotiquement égales.

5. ÉTUDE DE LA MATRICE D'INTERACTION

Dans cette section, on va étudier l'interaction des vecteurs propres associés à la première valeur propre d'oscillateur harmonique associé au

fond de puits. Revenons à l'opérateur de Dirac à puits multiples. Supposons que le potentiel V vérifie :

$$(5.1) \quad |V(x)| \leq 1 \text{ et } \overline{\lim}_{|x| \rightarrow +\infty} |V(x)| < 1, \text{ il existe un nombre fini des points } x_j, \\ j = 1, \dots, N \text{ tels que } |V(x_j)| = 1 \text{ et que le hessien } V''(x_j) \text{ soit non-dégénéré.}$$

A chaque puits, associons un opérateur de Dirac perturbé

$$D_j(h) = D_0(h) + V_j(x)$$

comme dans la section 2. On pose $S_0 = \min_{j \neq k} d(x_j, x_k)$. Pour $1 \leq j \leq N$, désignons par Ω_j la réunion de l'intérieur de toutes les géodésiques minimales par rapport à la métrique d'Agmon $(1 - V^2)dx^2$, joignant x_j à un point de \mathbb{R}^3 , de longueur inférieure à S_0 . En dehors d'un voisinage de x_j , la métrique $(1 - V^2)dx^2$ étant régulière, une telle géodésique minimale n'est autre que la projection sur l'espace des x d'une bicaractéristique nulle de $\lambda = 1 - |\xi|^2 - V(x)^2$ à un réparamétrage près. Comme dans [11], on peut montrer que

$$(5.2) \quad \Omega_j \text{ est ouvert et que les conditions (4.38) et (4.39) sont vérifiées pour } \Psi_j(x) = d(x, x_j).$$

Posons $\tilde{\Psi}_j(x) = d_j(x, x_j)$, où d_j est la distance associée à la métrique d'Agmon $(1 - V^2)_j$. Par la même méthode, on peut montrer que $\tilde{\Psi}_j(x)$ est C^∞ dans Ω_j . Pour obtenir un développement semi-classique des coefficients de la matrice d'interaction $(\hat{W}_{\alpha,\beta})$ de la section 2, on fait les hypothèses suivantes :

$$(5.3) \quad \text{Si } d(x_j, x_k) = S_0, \text{ il existe une géodésique unique } \gamma_{j,k}, \text{ de longueur } S_{0,1} \text{ joignant } x_j \text{ à } x_k \text{ et } \gamma_{j,k} \subset \Omega_k \cap \Omega_j;$$

$$(5.4) \quad \text{Soit } x_0 \in \gamma_{j,k} \cap \Omega_j \cap \Omega_k. \text{ Soit } \Gamma \subset \Omega_j \cap \Omega_k \text{ une hypersurface, qui coupe } \gamma_{j,k} \text{ transversalement en point } x_0 \text{ et } \Gamma \cap \gamma_{j,k} = \{x_0\}. \text{ Il existe une constante } C > 0 \text{ telle que}$$

$$d(x, x_j) + d(x, x_k) \geq S_0 + \frac{1}{C} d(x, x_0)^2, \quad x \in P.$$

LEMME 5.1. — *Sous les conditions (5.3) et (5.4), notons par $\gamma_{k,0}$ ($\gamma_{j,0}$ resp.) la partie de $\gamma_{k,j}$ qui joint x_k (x_j resp.) à x_0 . Alors $\gamma_{k,0}$ est l'unique géodésique minimale par rapport à la métrique $(1 - V^2_k)dx^2$ joignant x_k et x_0 . On a $\tilde{\Psi}_j(x_0) + \tilde{\Psi}_k(x_0) = S_0$.*

Preuve. — Quitte à modifier le choix de l'hypersurface P , on voit qu'il existe un voisinage $\gamma_{k,0}$ ($\gamma_{j,0}$ resp.) dans lequel $V_k = V$ ($V_j = V$ resp.) Donc il est évident que $\gamma_{k,0}$ ($\gamma_{j,0}$ resp.) est aussi une géodésique par rapport à la

métrique $(1 - V_k^2)dx^2$ ($(1 - V_j^2)dx^2$ resp.). L'unicité de $\gamma_{k,j}$ entraîne l'unicité de géodésique minimale par rapport à $(1 - V_k^2)dx^2$ (resp. $(1 - V_j^2)dx^2$) joignant x_0 à x_k (x_j resp.). En comparant les métriques, on voit facilement

$$\tilde{\Psi}_j(x_0) + \tilde{\Psi}_k(x_0) = S_0 \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Comme $\Psi_m(x) \leq \tilde{\Psi}_m(x)$, $m = 1, \dots, N$, de l'hypothèse (5.4), il vient

$$(5.5) \quad \tilde{\Psi}_j(x) + \tilde{\Psi}_k(x) \geq S_0 + \frac{1}{C} d(x, x_0)^2 \quad \text{pour } x \in P.$$

Soit E_0 l'une des plus petites valeurs propres des oscillateurs harmoniques localisés. Soit $E(h) = E_0(h) + O(h^{3/2})$ une valeur propre approchée construite pour certains puits. Pour $N_0 > 0$ assez grand, les μ_α dans l'intervalle $[E(h) - h^{N_0}, E(h) + h^{N_0}]$ admettent le même développement asymptotique que $E(h)$. Pour poursuivre notre étude, on suppose

$$(5.6) \quad \mu_\alpha = \mu_\beta \quad \text{si } j(\alpha) = j(\beta).$$

Alors les f'_α construits dans la remarque 4.5 admettent un développement de la forme

$$f'_\alpha \sim e^{-d/h} \sum_{k \in \mathbb{N}} h^{k - v(\alpha)} f_{k\alpha}.$$

Soit Γ l'hypersurface donnée dans (5.4). Quand $d(x_{j(\alpha)}, x_{j(\beta)}) = S_0$, on a :

$$\hat{W}_{\alpha,\beta} = ih \int_{\Gamma} \langle \alpha_n f_\alpha, f_\beta \rangle dS + O(h^\infty e^{-S_0/h})$$

où $\alpha_n = \sum_j \alpha_j n_j$ et $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ est la normale de Γ vers $x_{j(\beta)}$ (voir la remarque 2.10). Maintenant on applique (4.38). Alors :

$$\hat{W}_{\alpha,\beta} = ih \int_{\Gamma} \langle \alpha_n f'_\alpha, f'_\beta \rangle dS + O(h^\infty e^{-S_0/h}).$$

Par le lemme (5.1) et (5.5), en utilisant la méthode de phase stationnaire, on obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 5.2. — *Sous les conditions (5.1), (5.3), (5.4) et (5.6), pour $I(h) = [E(h) - Ch^{N_0}, E(h) + Ch^{N_0}]$, on a :*

$$\hat{W}_{\alpha,\beta} = b_{\alpha,\beta}(h) e^{-S_0/h} + O(h^\infty e^{-S_0/h}).$$

lorsque $d(x_{j(\alpha)}, x_{j(\beta)}) = S_0$ et μ_α, μ_β appartiennent à $I(h)$. De plus, $b_{\alpha,\beta} = b_{\beta,\alpha}$ et :

$$(5.7) \quad b_{\alpha\beta} \sim h^{-N(\alpha,\beta)} \sum_{k \in \mathbb{N}} h^k b_{\alpha\beta}^{(\alpha)}$$

REMARQUE 5.3. — On peut calculer les $N(\alpha, \beta)$ explicitement. En fait, comme il s'agit de l'interaction entre les vecteurs propres admettant un développement de la forme (4.36)', on a : $N(\alpha, \beta) = 3/2$.

6. ÉTUDE DE CAS PARTICULIERS

La condition (5.6) est beaucoup plus forte que l'égalité asymptotique entre les valeurs propres. Mais sous certaines conditions de symétrie sur le potentiel V , on va montrer que cette condition est vérifiée par les plus petites valeurs propres attachées à un puits. En effet, lorsque V possède des symétries, il existe un groupe fini commutant avec l'opérateur de Dirac associé, qui représente les symétries internes de cet opérateur. La théorie des groupes finis et les résultats du § 4 permettent d'obtenir des informations sur la multiplicité des valeurs propres.

Considérons un opérateur P défini dans un espace hilbertien H . Soit G un groupe fini des opérateurs continus de H dans H tels que :

- (6.1) i) G agit isométriquement sur $H : \forall M \in G, \forall u \in H, (Mu, Mu) = (u, u)$;
- ii) G commute avec $P : \forall M \in G, \forall u \in D(P)$, on a : $Mu \in D(P)$ et $MPu = PMu$.

Désignons par (R, E) une représentation régulière de G , qui se décompose en une somme directe des représentations irréductibles :

$$R = n_1 \rho_1 \oplus n_2 \rho_2 \oplus \dots \oplus n_h \rho_h$$

où $\sum n_j^2 = g$, g étant l'ordre du groupe G . On a le résultat classique suivant :

LEMME 6.1. — Soit F un sous-espace de H , de dimension finie n_k , invariant par P . Supposons que (ρ_k, F) soit une représentation matricielle irréductible pour G . Alors, la représentation de $P|_F$ dans une base de F est de la forme λI_{n_k} , où $\lambda \in \mathbb{C}$.

Le lemme 6.1 montre que λ est une valeur propre de P , de multiplicité au moins n_k . On remarque aussi que pour étudier la multiplicité des valeurs propres de P , ce sont des groupes non commutatifs qui nous intéressent.

1) Étude du problème à un puits.

On fait les hypothèses suivantes sur le potentiel V :

(6.2) V vérifie les conditions du théorème 4.4 ; V est symétrique par rapport à $x_j=0, j=1, 2$. On note : $H=L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$, $D(h)=D_0(h)+VI_4$. Posons :

$$(M_1u)(x) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 \end{pmatrix} u(-x_1, x_2, x_3),$$

$$(M_2u)(x) = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix} u(x_1, -x_2, x_3),$$

$$(M_{12}u)(x) = i \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} u(-x_1, -x_2, x_3), \quad u \in H.$$

Alors $M_{12}=M_1M_2=-M_2M_1$. Les M_j engendrent un groupe G d'ordre 8 :

$$G = \begin{pmatrix} I & M_1 & M_2 & M_{12} \\ -I & -M_1 & -M_2 & -M_{12} \end{pmatrix}.$$

Les conditions (6.1) sont satisfaites par G et $D(h)$. On va étudier la multiplicité de la plus petite valeur propre positive de $D(h)$, notée $E(h)$:

$$D(h)u(h) = E(h)u(h), \quad \|u(h)\| = 1.$$

Pour cela, en procédant comme dans la démonstration du théorème 4.4, on construit deux « solutions approchées » :

$$D(h)\hat{u}_j(h) = \hat{E}(h)\hat{u}_j(h) + 0(h^\infty), \quad \hat{E}(h) = E(h) + 0(h^\infty), \quad j = 1, 2,$$

où $\hat{u}_j(h)$ est de la forme $e^{-d/h}(\chi a_j(h))$, $a_1(h)$ et $a_2(h)$ sont linéairement indépendants et χ est une fonction de troncature adaptée au groupe G . On note par \hat{F} l'espace engendré par les $\hat{u}_j(h)$.

LEMME 6.2. — *En choisissant $a_1(h)$ et $a_2(h)$ convenablement, \hat{F} est un espace G -stable :*

$$G\hat{F} \subset \hat{F}.$$

Preuve. — On revient aux équations de transport qui déterminent les éléments formels de $a_j(h)$. On écrit (4.18)_n et (4.31) sous la forme :

$$(4.18)'_n \quad A_0 u'_n = \sum_{j=0}^{n-1} A_{n,j} u'_j$$

$$(4.31)' \quad u''_n = \sum_{j=0}^n B_{n,j} u'_j, \quad \text{où } A_0 \text{ est un opérateur différentiel d'ordre 1.}$$

On décompose $M \in G$ d'une manière évidente en somme directe : $M = M' \oplus M''$. Par exemple, pour M_1 , on a :

$$(M'_1 f)(x) = \sigma_1 f(-x_1, x_2, x_3), \quad (M''_1 f)(x) = -(\sigma_1 f)(-x_1, x_2, x_3),$$

$f \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$

alors on peut vérifier facilement que :

$$[M', A_0] = 0, \quad [M', A_{n,j}] = 0, \quad \forall M';$$

$$M''_k B_{n,j} = -B_{n,j} M''_k, \quad k = 1, 2, \quad \forall n, j \geq 0.$$

Maintenant si on écrit : $a_j(h) \sim \sum_{k \geq 0} h^k a_{kj}$ avec a'_{kj} et a''_{kj} vérifiant (4.18)'_n

et (4.31)', on voit que Ma_{kj} vérifie les mêmes équations. Donc on a :

$$Ma_{kj} = \sum_{l=1}^2 m_{jl} a_{kl}, \quad j = 1, 2, \quad M \in G.$$

Il est important de remarquer ici que les constantes m_{ji} sont indépendantes de k , car la solution de (4.18) avec $u'_0(0) = 0, n \geq 1$, est uniquement déterminée par le deuxième membre, donc par une récurrence on peut montrer que (m_{ji}) est déterminé d'une manière unique par la relation :

$$Ma_{0j}(0) = \sum_{l=1}^2 m_{jl} a_{0l}(0).$$

En donnant une réalisation convenable aux éléments formels a_{kj} , on obtient :

$$Ma_j(h) = \sum_{l=1}^2 m_{jl} a_l(h), \quad \forall M \in G.$$

Par notre choix de χ , on a prouvé : $M\hat{F} \subset \hat{F}, \forall M \in G.$ C. Q. F. D.

Pour trouver une représentation irréductible de G de la forme (R, \hat{F}) , choisissons une base (e_1, e_2) de \hat{F} telle que $e_1(0) = (C_1, 0, C_3, C_4)^T$ avec $C_1 \neq 0$ et $e_2 = M_1 e_1$. Dans cette base, la représentation matricielle est donnée par :

$$R(M_1) = \sigma_1, \quad R(M_2) = \sigma_2, \quad R(M_{12}) = i\sigma_3, \quad R(I) = I_2$$

$$R(-M_1) = -\sigma_1, \quad R(-M_2) = -\sigma_2, \quad R(-M_{12}) = -i\sigma_3, \quad R(-I) = -I_2.$$

On vérifie facilement que cette représentation est irréductible : si $\alpha \in \mathbb{C}^2, \alpha \neq 0$, alors $\{\sigma_1 \alpha, \sigma_2 \alpha, i\sigma_3 \alpha, \alpha\}$ engendre \mathbb{C}^2 .

Désignons : $I(h) = [0, Ch]$ avec $C > 0$ assez petit, de sorte que si $\lambda \in \sigma(D(h)) \cap I, \lambda = E(h) + 0(h^\infty)$. Notons par F l'espace propre de $D(h)$

associé aux valeurs propres dans I et par Π_F la projection de H sur F . Par la méthode utilisée avant, on peut montrer que Π_{Fe_1} et Π_{Fe_2} forment une base de F pour $h > 0$ assez petit. Comme $D(h)M = MD(h)$, on a : $\Pi_F M = M \Pi_F \forall M \in G$. Si on note par γ' l'isomorphisme de \hat{F} sur F défini par :

$$\gamma : e_j \rightarrow \Pi_F e_j, \quad j = 1, 2.$$

(R', F) est une représentation irréductible, où $R'(M) = \gamma \circ R(M) \circ \gamma^{-1}$, $\forall M \in G$.

F étant $D(h)$ -invariant, appliquant le lemme 6.1, on obtient :

(6.3) La matrice de $D(h)|_F$ dans la base (Π_{Fe_1}, Π_{Fe_2}) est de la forme λI_2 .

Comme $u \in F$, on a $\lambda = E(h)$, donc on a prouvé le :

LEMME 6.3. — *Sous les conditions (6.1), la plus petite valeur propre positive de $D(h)$ est de multiplicité 2.*

Notons que comme l'ordre du groupe G est 8, (R', F) est la seule représentation irréductible de degré 2 pour G à un isomorphisme près.

2) Étude du problème à puits multiples.

On se borne au cas où V admet deux puits symétriques. On fera les hypothèses suivantes sur V :

(6.4) i) V est symétrique en x_j par rapport à $x_j = 0$, $j = 1, 2, 3$;
 ii) V possède deux puits non dégénérés : $x'_1 = (b, 0, 0)$, $x'_2 = (-b, 0, 0)$, $b > 0$, et $V(x'_j) = -1$, $j = 1, 2$.

Le groupe fini G , qui commute avec $D(h)$, est donné par :

$$G = \begin{pmatrix} I & M_1 & M_2 & M_3 & M_{12} & M_{13} & M_{23} & M_{123} \\ -I & -M_1 & -M_2 & -M_3 & -M_{12} & -M_{13} & -M_{23} & -M_{123} \end{pmatrix}$$

où

$$(M_j u)(\cdot, x_j, \cdot) = \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & -\sigma_j \end{pmatrix} u(\cdot, -x_j, \dots) \quad \text{et} \quad M_{k_1 \dots k_j} = \prod_{l=1}^j M_{k_l}, \quad u \in H.$$

D'après la relation entre le degré de représentation irréductible pour G et l'ordre de G , (voir Serre [23]) on voit que si R est une représentation régulière de G , R se décompose comme :

$$R = \bigoplus_{j=1}^m n_j \rho_j, \quad \max_{1 \leq j \leq m} n_j = 2$$

où les ρ_j sont des représentations irréductibles deux à deux non isomorphes.

Introduisons une perturbation symétrique $W \in C_0^\infty(B(0, \eta))$ avec $\eta > 0$

assez petit, $W \geq 0$, $W(0) \neq 0$, et $W(x)$ est symétrique par rapport à x_1, x_2, x_3 .

$$W_1(x) = W(x_1 + b, x_2, x_3), \quad W_2(x) = W(x_1 - b, x_2, x_3).$$

Alors $M_1W_1 = W_2M_1$. Si on désigne $D_j(h) = D_0(h) + V + W_j$, $D_1(h)$ est unitairement équivalent à $D_2(h)$: $M_1D_1(h) = D_2(h)M_1$. Donc $D_1(h)$ et $D_2(h)$ ont le même spectre. On note par $E(h)$ la plus petite valeur propre positive de $D_1(h)$, qui est double d'après le lemme 6.3. Choisissons un vecteur propre correspondant, $u(h)$, tel que $u(h) = (c_1, 0, c_3, c_4)^t$ avec $c_1 \neq 0$ en $x = x_1$. Posons :

$$g_{1,1} = 1/2(u(h) + M_2u(h)), \quad g_{1,2} = 1/2(u(h) - M_2u(h))$$

$$g_{2,1} = M_1g_{1,1}, \quad g_{2,2} = M_1g_{1,2}.$$

Avec les notations du §2, on a : $g_\alpha \neq 0$ et

$$D_{j(\alpha)}(h)g_\alpha = E(h)g_\alpha, \quad \alpha = (j, k), \quad j, k = 1, 2.$$

On note par F' l'espace engendré par les g_α . Il est facile à vérifier que :

$$MF' \subset F', \quad \forall M \in G.$$

Pour calculer explicitement la représentation matricielle de G dans F' , on choisit une base de F' , $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ où $g_1 = g_{1,1}, g_2 = g_{1,2}, g_3 = g_{2,1},$

$g_4 = g_{2,2}$. En identifiant un vecteur de F' , $g = \sum_1^4 c_j g_j$ à un vecteur de \mathbb{C}^4

$g' = (c_1, c_2, c_3, c_4)^t$, on obtient une représentation matricielle (R', F') de G , où R' est un homomorphisme défini par :

$$R'(I) = I_4, \quad R'(M_1) = \begin{pmatrix} 0 & m_1 \\ m_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R'(M_2) = \begin{pmatrix} m_2 & 0 \\ 0 & -m_2 \end{pmatrix},$$

$$R'(M_3) = \begin{pmatrix} -m_3 & 0 \\ 0 & -m_3 \end{pmatrix}$$

où

$$m_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad m_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad m_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme on a déjà remarqué que le degré de représentations irréductibles est au plus 2, on peut décomposer la représentation (R', F') . Par un calcul direct, on peut vérifier :

$$F' = F'_1 \oplus F'_2, \quad \text{les } F'_j \text{ étant } G\text{-invariants}$$

où F'_1 est engendré par $e = g_1 + ig_2 + g_3 + ig_4, e_2 = g_1 - ig_2 - g_3 + ig_4$ et F'_2 est engendré par $e_3 = g_1 - ig_2 + g_3 - ig_4, e_4 = g_1 + ig_2 - g_3 - ig_4$. (R', F') se décompose en somme directe de deux représentations irréduc-

tibles : (R_1, F'_1) et (R_2, F'_2) . Dans la base \vec{e} , les R_j sont déterminés par :

$$(6.5) \quad R_j(M_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_j(M_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_j(M_3) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad j=1, 2.$$

Nous désignons par F l'espace propre de $D(h)$ associé aux valeurs propres de la forme $E(h) + 0(h^\infty)$, par Π la projection sur F . Pour h assez petit, $\{\Pi e_1, \Pi e_2, \Pi e_3, \Pi e_4\}$ forme une base de F . Comme $\Pi M = M\Pi, \forall M \in G$, l'isomorphisme $r : e_j \rightarrow \Pi e_j$ de F' sur F induit une représentation de G sur F' , qui est équivalente avec (R', F') . Dans la base $\Pi \vec{e}$, les matrices pour G sont encore de la forme :

$$R'(M) = \begin{pmatrix} R_1(M) & 0 \\ 0 & R_1(M) \end{pmatrix} \quad \forall M \in G.$$

où $R_1(M)$ est défini par (6.5). Notons par P la matrice de $D(h)|_F$ par rapport à la base $\Pi \vec{e}$. On écrit :

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{où } P_{jk} \text{ est une matrice } 2 \times 2.$$

Comme $D(h)M = MD(h), \forall M \in G$, on a $PR'(M) = R'(M)P$, cela entraîne que

$$P_{kj}R_1(M) = R_1(M)P_{kj}, \quad \forall M \in G, \quad \forall k, j = 1, 2.$$

La représentation (R_1, F'_1) étant irréductible, les seules matrices qui commutent avec tous $R_1(M)$ sont des matrices scalaires (voir Serre [23]). Donc P est de la forme :

$$P = \begin{pmatrix} c_1 I_2 & c_2 I_2 \\ c_3 I_2 & c_3 I_2 \end{pmatrix}$$

où les c_k sont des nombres complexes. D'où on conclut que l'opérateur $D(h)$ admet deux valeurs propres doubles. Pour déterminer plus précisément les c_k , on calcule la matrice :

$$((D(h)e_k, e_j)) = P + \hat{0}(e^{-2S_0/h}),$$

où S_0 est la distance entre les puits. Indiquons d'abord que les e_j satisfont :

$$(e_k, e_j) = 2 \|u\|^2 \delta_{jk} = \delta_{jk}, \quad \|u\|^2 = 1/2.$$

Par un calcul élémentaire mais un peu lourd, on obtient :

$$(6.6) \quad ((D(h)e_k, e_j)) = E(h)I_4 - \begin{pmatrix} a+d & 0 & b+ic & 0 \\ 0 & a+d & 0 & b+ic \\ b-ic & 0 & a-d & 0 \\ 0 & b-ic & 0 & a-d \end{pmatrix}$$

où on a :

$$\begin{aligned}
 a &= 2 \iint_{\mathbb{R}^3} \langle W_1 u, u \rangle dx \\
 (6.7) \quad d &= 2 \operatorname{Im} \left\{ \iint_{\mathbb{R}^3} \langle W_1 M_2 u, M_1 u \rangle dx + \iint_{\mathbb{R}^3} \langle u, M_1 M_2 u \rangle dx \right\} \\
 b &= 2(W_1 M_2 u, u) - 2E(h)(M_2 u, u), \quad c = 2(W_1 u, M_1 u) - 2E(h)(u, M_1 u).
 \end{aligned}$$

Les valeurs propres de $\tilde{P} = ((D(h)e_k, e_j))$ sont faciles à calculer : \tilde{P} admet deux valeurs propres de multiplicité 2 :

$$(6.8) \quad \tilde{E}_1(h) = E(h) - a - (b^2 + c^2 + d^2)^{1/2}, \quad \tilde{E}_2(h) = E(h) - a + (b^2 + c^2 + d^2)^{1/2}$$

Comme u et $M_1 u$ appartiennent aux puits différents, en appliquant le théorème 5.2 sous certaines conditions géométriques sur le fond des puits, on a :

$$(6.9) \quad c = e^{-S_0/h} c(h) + O(h^\infty e^{-S_0/h})$$

où $c(h)$ est un symbole admettant un développement en puissances de h :

$$c(h) \sim h^{-\nu(c)} \sum_{j \geq 0} h^j c_j.$$

$$\text{De même, on a aussi } d = e^{-S_0/h} \sum_{j \geq 0} h^{j-\nu(d)} d_j + O(h^\infty e^{-S_0/h}).$$

En résumant, on a prouvé le résultat suivant :

THÉORÈME 6.4. — *Sous les conditions (6.4), les deux premières valeurs propres sont toujours doubles et elles sont données par :*

$$E_j(h) = \tilde{E}_j(h) + \hat{O}(e^{-2S_0/h}), \quad j = 1, 2.$$

Si l'on définit f par $f = \frac{b - ic}{d + \sqrt{d^2 + b^2 + c^2}}$, si $b + ic \neq 0$, $f = 0$, si $b + ic = 0$ et si l'on désigne :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 + |f|^2}}, \quad \mu = \frac{f}{\sqrt{1 + |f|^2}}$$

alors les vecteurs propres associés sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 u_{1,1} &= \lambda e_1 + \mu e_3 + \hat{O}(e^{-S_0/h}), & u_{1,2} &= \lambda e_2 + \mu e_4 + \hat{O}(e^{-S_0/h}) \\
 u_{2,1} &= -\bar{\mu} e_1 + \lambda e_3 + \hat{O}(e^{-S_0/h}), & u_{2,2} &= -\bar{\mu} e_2 + \lambda e_4 + \hat{O}(e^{-S_0/h}).
 \end{aligned}$$

De plus sous les conditions du théorème 5.2, sauf annulation accidentelle, on a :

$$(6.10) \quad E_2(h) - E_1(h) = 2(b^2 + c^2 + d^2)^{1/2} + \hat{O}(e^{-S_0/h}) \geq Ch^{-\nu} e^{-S_0/h}$$

où $C > 0$ et $v \in \mathbb{R}$, S_0 est la distance entre les deux puits pour la métrique d'Agmon $(1 - V^2)dx^2$.

REMARQUE 6.5. — D'après (6.10) et l'estimation grossière sur la matrice d'interaction (voir § 2), on obtient :

$$(6.11) \quad \lim_{h \rightarrow 0} h \log |E_2(h) - E_1(h)| = -S_0.$$

Un résultat analogue pour l'opérateur de Schrödinger a été établi (voir par exemple Simon [24]). Mais la différence est que dans notre cas, chaque $E_j(h)$ est de multiplicité 2.

RÉFÉRENCES

- [1] R. ABRAHAM, J. MARSDEN, *Foundations of Mechanics*, 2nd Ed., Benjamin, Cumming Publ. Company, 1978.
- [2] S. AGMON, Lectures on exponential decay of solutions of second order elliptic equations, *Math. Notes*, t. 29, Princeton University Press, 1982.
- [3] A. M. BERTHIER, V. GEORGESCU, Sur le spectre ponctuel de l'opérateur de Dirac. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 297, 1983, Série I, p. 335-338.
- [4] R. CHERNOFF, Schrödinger and Dirac operators with singular potentials and hyperbolic equations, *Pac. J. Math.*, t. 72 (2), 1977, p. 361-383.
- [5] J. M. COMBES, P. DUCLOS, R. SEILER, Krein's formula and one dimensional multiple well, *J. Funct. Anal.*, t. 52, 1983, p. 257-301.
- [6] J. M. COMBES, P. DUCLOS, R. SEILER, Convergent Expansion for Tunneling, *Comm. Math. Phys.*, t. 92, 1982, p. 229-245.
- [7] E. M. HARRELL, Double Well, *Comm. Math. Phys.*, t. 75, 1980, p. 239-261.
- [8] E. M. HARRELL, M. KLAUS, On the double-well problem for Dirac operators, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. 38 (2), 1983, p. 153-166.
- [9] B. HELFFER, D. ROBERT, Calcul fonctionnel par la transformation de Mellin et applications, *J. Funct. Anal.*, t. 53 (3), 1983, p. 245-268.
- [10] B. HELFFER, D. ROBERT, Puits de potentiel généralisés et asymptotique semi-classique, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Sect. A, t. 41, 1984, p. 291-332.
- [11] B. HELFFER, J. SJÖSTRAND, Multiple wells in the semi-classical limit I, *Comm. P. D. E.*, t. 9 (4), 1984, p. 337-408.
- [12] B. HELFFER, J. SJÖSTRAND, Puits multiples et limites semi-classique II. Interaction moléculaire, symétries, perturbation, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, section Phys. Théorique, t. 42, 1985, p. 127-212.
- [13] B. HELFFER, J. SJÖSTRAND, Multiple wells in the semi-classical limit III. Interaction through non-resonant wells, à paraître *Mathematisch Nachrichten*.
- [14] M. KLAUS, On the point spectrum of Dirac operators, *Helv. Phys. Acta*, t. 53, 1980, p. 453-462.
- [15] M. KLAUS, R. WÜST, Spectral properties of Dirac operators with singular potentials, *J. Math. Anal. and Appl.*, t. 72, 1979, 206-214.
- [16] J. LERAY, *Analyse Lagrangienne*, Collège de France, 1976-1977.
- [17] J. LERAY, Solution Asymptotique de l'équation de Dirac, in *Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics*, Pitman, 1976, p. 233-240.
- [18] V. P. MASLOV, M. V. FEDORIUK, *Semi-classical Approximation in Quantum Mechanics*, D. Reidel, 1981.

- [19] B. MÜLLER, W. GREINER, The two centre Dirac equation; *Z. Naturforsch.*, t. **30** (1), 1976, p. 1-30.
- [20] J. C. NOSMAS, Approximation Semi-classique du spectre de systèmes asymptotiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **295**, 1982, p. 253-256.
- [21] D. ROBERT, Calcul fonctionnel sur les opérateurs admissibles et application, *J. Funct. Anal.*, t. **45** (1), 1982, p. 74-94.
- [22] D. ROBERT, *Autour de l'Approximation Semi-classique*, Notas de Curso, N° 21, Universidad Federal de Pernambuco, Recife, 1983.
- [23] J. P. SERRE, *Représentations Linéaires des Groupes Finis*, Hermann, Paris, 1967.
- [24] B. SIMON, Semi-classical analysis of low lying eigenvalues, I. Non-degenerate minima: Asymptotic expansions, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **38**, 1983, p. 295-307.
- [25] B. SIMON, Semi-classical analysis of low lying eigenvalues, II. Tunneling, *Ann. of Math.*, t. **120**, 1984, p. 89-118.
- [26] X. P. WANG, Asymptotic behavior of spectral means of pseudo-differential operators, *J. of Appr. Theory and Appl.*, t. **1**, 1985, p. 119-136.
- [27] E. WITTEN, Fermion Quantum Numbers in Kaluza-Klein Theory, préirage.
- [28] K. YAJIMA, The quasi-classical approximation to Dirac equation, *I. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, t. **29**, 1982, p. 161-194.

(Manuscrit reçu le 15 mars 1985)