

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

PATRICK IGLESIAS

## **Classification géométrique des structures internes des systèmes dynamiques à deux spins**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 39, n° 1 (1983), p. 55-83

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1983\\_\\_39\\_1\\_55\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1983__39_1_55_0)

© Gauthier-Villars, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

## **Classification géométrique des structures internes des systèmes dynamiques à deux spins**

par

**Patrick IGLESIAS**

Centre de Physique Théorique, CNRS Marseille

---

**RÉSUMÉ.** — Grâce à une méthode axiomatique (mettant en jeu structures symplectiques et actions de groupe), nous classons les structures internes des systèmes dynamiques ponctuels à deux spins. Nous montrons que :

a) Si les spins sont différents, la structure dynamique est entièrement caractérisée par leurs valeurs et c'est la structure de produit direct.

b) Si les spins sont identiques, la structure dynamique est caractérisée par leur valeur commune et par un angle que nous appelons « angle de couplage », c'est la structure de produit direct si et seulement si cet angle est nul. Nous intégrons ensuite les équations du mouvement.

**ABSTRACT.** — The internal structures of point dynamical systems with two spins are classified by an axiomatic method using symplectic structures and group actions. It is proved that:

1) If the spins are different, the dynamical structure is completely characterized by their values and is the direct product structure.

2) If the spins are identical, the dynamical structure is characterized by their common value and by an angle, called « coupling angle ». It reduces to the direct product structure if and only if that angle is zero. The equations of motion are then integrated.

---

CNRS, Luminy, Case 907. Centre de Physique Théorique, F-13288 Marseille, Cedex 9, France.

## I. INTRODUCTION

Le cadre mathématique le mieux adapté, actuellement, à la description de la mécanique est celui de la géométrie symplectique (cf. [7]). Durant ces dernières années ce formalisme a remporté de nombreux succès (en particulier dans l'étude de l'application moment [5] [6] [9]). Et les espoirs sont grands de voir se réaliser le programme de la quantification dans ce cadre. La réalisation de ce programme nécessite d'abord une bonne connaissance des systèmes dynamiques classiques (Galiléens ou Relativistes). Dans ce sens les travaux de Kirilov Kostant et Souriau [3] [4] [7] ont achevé l'étude des systèmes dynamiques élémentaires (i. e. : leur variété des mouvements est un espace homogène du groupe de Galilée ou de Poincaré), et leur classification est donnée grâce à la théorie des orbites coadjointes des groupes de Lie. Bien évidemment de nombreuses questions restent posées. L'une d'entre elles est la classification des systèmes dynamiques non élémentaires au sens ci-dessus, c'est celle à laquelle nous nous intéressons dans cet article.

Certaines variétés sont susceptibles de représenter l'espace des mouvements de systèmes dynamiques différents suivant qu'elles sont munies de telle ou telle structure dynamique (i. e. : d'une action  $r$  du groupe de Galilée et d'une forme symplectique  $\Sigma$  invariante sous cette action). Nous avons alors à faire à différents modèles de systèmes dynamiques relatifs à un même espace des mouvements, ils constituent ce que nous appelons l'espace des modèles de systèmes dynamiques isolés définis sur  $\mathcal{U} : \text{Mod}(\mathcal{U})$ . D'autre part, l'action canonique du groupe  $\text{Diff}(\mathcal{U})$  sur  $\text{Mod}(\mathcal{U})$  définit un isomorphisme de modèles et nous permet d'énoncer le principe de covariance générale de la mécanique (analogue de celui de la relativité générale [8]) : L'espace des structures dynamiques  $\text{Struct}(\mathcal{U})$ , définies sur une variété  $\mathcal{U}$  est l'espace quotient  $\text{Mod}(\mathcal{U})/\text{Diff}(\mathcal{U})$ . Ainsi la véritable structure d'un système dynamique n'est pas le couple  $(r, \Sigma)$  mais son orbite par  $\text{Diff}(\mathcal{U})$ . Caractériser ces orbites, c'est-à-dire « réaliser » l'espace-quotient  $\text{Struct}(\mathcal{U})$  est donc l'objet de la classification des structures dynamiques définies sur  $\mathcal{U}$  relativement au principe de covariance générale. La première partie de cet article est consacrée à poser explicitement ce problème et à esquisser une méthode d'approche pour les systèmes dynamiques galiléens massifs.

La deuxième partie de cet article est consacrée à l'exemple particulier de la classification des structures internes des « systèmes dynamiques ponctuels à deux spins », définis par :

- H1) l'espace des mouvements internes  $\mathcal{U}$  est la variété  $S^2 \times S^2$
- H2) le groupe  $\text{SO}(3)$  y agit de la façon diagonale standard.

Le nom donné à cette classe de systèmes dynamiques admet un certain nombre de justifications :

a) *a priori* : L'espace des mouvements internes de la particule à spin est la sphère  $S^2$  (orbite coadjointe de  $SO(3)$ ), un système dynamique dont l'espace des mouvements internes est la variété  $S^2 \times S^2$  (orbite coadjointe de  $SO(3) \times SO(3)$ ) peut s'interpréter comme un système dynamique ponctuel à deux spins. Nous interprétons alors  $SO(3)$  comme le groupe des rotations spatiales et le choix de l'action diagonale (induit par l'injection diagonale de  $SO(3)$  dans  $SO(3) \times SO(3)$  et par l'action coadjointe de ce dernier) comme la traduction du principe de relativité galiléenne.

b) *a posteriori* : Les calculs montrent que deux scalaires  $s_1$  et  $s_2$ , sur lesquels va porter la condition de préquantification ( $2s_1$  et  $2s_2 \in \mathbb{N}$ ), sont des éléments caractéristiques des structures internes définies sur  $S^2 \times S^2$ . Ils seront interprétés comme les spins du système.

Deux situations radicalement différentes apparaissent alors dans la classification :

a) si les spins sont différents, la structure symplectique du système est entièrement caractérisée par leurs valeurs, c'est la structure triviale de produit direct ; elle possède un groupe dynamique plus grand :  $SO(3) \times SO(3)$ .

b) si les spins sont égaux, la structure symplectique du système est caractérisée par leur valeur commune et par un angle  $\phi \in [0, \pi]$  que nous appelons « angle de couplage », c'est la structure triviale si et seulement si cet angle est nul.

La structure dynamique complète est obtenue ensuite grâce au choix supplémentaire d'un hamiltonien (variable dynamique vérifiant une condition d'invariance). Il est important de distinguer deux aspects du problème : l'aspect « interaction » défini par le choix d'un hamiltonien et l'aspect « couplage structural » qui se situe au niveau de la structure symplectique ; cet aspect n'apparaît que lorsqu'il y a égalité des spins et il est indépendant du choix du hamiltonien. Il est bien clair que, par construction même, ce couplage structural ne peut pas être intégré dans le hamiltonien d'interaction. L'intégration des équations du mouvement s'effectue ensuite grâce à l'introduction d'un vecteur de précession  $\Omega$  parallèle au moment cinétique. Lorsque le couplage structural est nul, les vecteurs  $(X_1, X_2) \in S^2 \times S^2$  et  $L$ , moment cinétique, sont coplanaires lors du mouvement, alors qu'ils ne le sont pas lorsque  $\phi$  est non nul.

En conclusion, nous ferons plusieurs remarques :

a) La possibilité d'un couplage structural uniquement lors de l'égalité des spins est peut-être à mettre en relation avec le fait que les systèmes composés de deux particules à spins ne sont observés dans des états liés que lorsque les spins des deux particules sont identiques (deutéron, postroonium, protonium) et que lorsque les spins sont différents on a à faire à des résonances.

b) Si un système physique (le deuteron ?) peut être décrit par une telle structure, l'angle  $\phi$  devrait pouvoir être mesuré.

c) Enfin, il faut remarquer que les caractéristiques des structures dynamiques : spins et angle de couplage, sont définies à partir du comportement de la structure symplectique (ici uniquement le moment) sur les orbites singulières de  $SO(3)$ . Ceci est probablement un aspect général de la classification des structures dynamiques, dû à la structure particulière des variétés sur lesquelles peuvent être définies des actions de  $SO(3)$  (cf. [1]).

## II. PROBLÈME DE LA CLASSIFICATION DES STRUCTURES INTERNES D'UN SYSTÈME DYNAMIQUE PAR LE PRINCIPE DE COVARIANCE GÉNÉRAL

### II.1. Rappel du cadre géométrique de la mécanique.

Le cadre géométrique de la mécanique (classique galiléenne) est défini par les axiomes suivants : ([7], §13) :

A1 : L'ensemble des mouvements d'un système dynamique est une variété symplectique connexe.

A2 : Si un système dynamique est isolé, la variété de ses mouvements admet le groupe de Galilée comme groupe dynamique.

A3 : Si un système dynamique est isolé, le groupe de Galilée possède un moment défini sur la variété de ses mouvements.

Rappelons que :

La structure symplectique de la variété des mouvements  $\tilde{\mathcal{U}}$  d'un système dynamique est définie par un champ symplectique  $\tilde{\Sigma} = [\tilde{x} \mapsto \tilde{\sigma}]$  où  $\tilde{\sigma}$  est une deux-forme régulière :  $\ker(\tilde{\sigma}) = \{0\}$  et  $\tilde{\Sigma}$  est fermée :  $d\tilde{\sigma} = 0$ .

L'action du groupe de Galilée, noté Gal, est définie grâce à un homomorphisme différentiel  $\tilde{r}$  défini sur Gal à valeur dans le groupe des symplectomorphismes de  $\tilde{\mathcal{U}}$  :  $\text{Sympl}(\tilde{\mathcal{U}})$ .

$$\forall a \in \text{Gal} \quad [\tilde{r}(a)]^*(\tilde{\sigma}) = \tilde{\sigma}$$

Un moment du groupe de Galilée est une application  $\tilde{\Psi}$  définie sur la variété des mouvements  $\tilde{\mathcal{U}}$  du système dynamique à valeur dans le dual de l'algèbre de Lie de Gal :  $\mathcal{G}^*$ , telle que pour tout vecteur Z de l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  de Gal :

$$\tilde{\sigma}(Z_{\tilde{\mathcal{U}}}(\tilde{x})) = -d[\tilde{\Psi}(\tilde{x}) \cdot Z]$$

où  $Z_{\tilde{\mathcal{U}}}$  désigne le champ de vecteur associé à Z défini sur  $\tilde{\mathcal{U}}$  par l'action infinitésimale du groupe de Galilée, la parenthèse après  $\tilde{\sigma}$  désignant l'opération de contraction.

Rappelons encore que l'action du groupe de Galilée sur  $\tilde{\mathcal{U}}$  définit, par l'intermédiaire du moment  $\tilde{\Psi}$ , un cocycle symplectique  $\theta$  :

$$\theta(a) = (\tilde{\Psi} \circ \tilde{r})(a)(\tilde{x}) - (a_{\mathcal{G}^*} \circ \tilde{\Psi})(\tilde{x})$$

où  $a_{\mathcal{G}^*}$  désigne l'action coadjointe d'un élément  $a$  de Gal sur  $\mathcal{G}^*$ . La classe de cohomologie symplectique de  $\theta$  s'interprète comme la masse totale du système dynamique ([7], § 13).

## II.2. Classification des structures dynamiques par le principe de covariance générale

D'après les axiomes de la mécanique, un système dynamique est caractérisé d'abord par son espace des mouvements  $\tilde{\mathcal{U}}$  et par un couple  $(\tilde{r}, \tilde{\Sigma})$ , vérifiant A2 et A3, qui définit la dynamique du système. Ceci nous conduit à poser les définitions suivantes :

DÉFINITIONS. — a) Nous appellerons *modèle de système dynamique isolé* (MSDI) tout triplet  $(\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{r}, \tilde{\Sigma})$  vérifiant A1, A2 et A3.

b) Nous appellerons ensemble des modèles de systèmes dynamiques isolés définis sur  $\tilde{\mathcal{U}}$ , l'ensemble Mod  $(\tilde{\mathcal{U}})$  des couples  $(\tilde{r}, \tilde{\Sigma})$  tels que  $(\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{r}, \tilde{\Sigma})$  soit un MSDI.

Le principe de covariance générale <sup>(1)</sup> exprime l'idée suivant laquelle un système dynamique peut être décrit indifféremment par *des modèles isomorphes*. L'isomorphisme entre modèles étant définie naturellement par :

DÉFINITION. — c) Deux modèles  $(\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{r}, \tilde{\Sigma})$  et  $(\tilde{\mathcal{U}}', \tilde{r}', \tilde{\Sigma}')$  sont isomorphes s'il existe un difféomorphisme  $\mathcal{A}$  de  $\tilde{\mathcal{U}}'$  sur  $\tilde{\mathcal{U}}$  tel que :

$$\begin{aligned} i) \quad & \tilde{\sigma}' = \mathcal{A}^*(\tilde{\sigma}) \\ ii) \quad & \tilde{r}' = \mathcal{A}^*(\tilde{r}), \quad \forall a \in \text{Gal} \quad \tilde{r}'(a) = \mathcal{A}^{-1} \circ r(a) \circ \mathcal{A} \end{aligned}$$

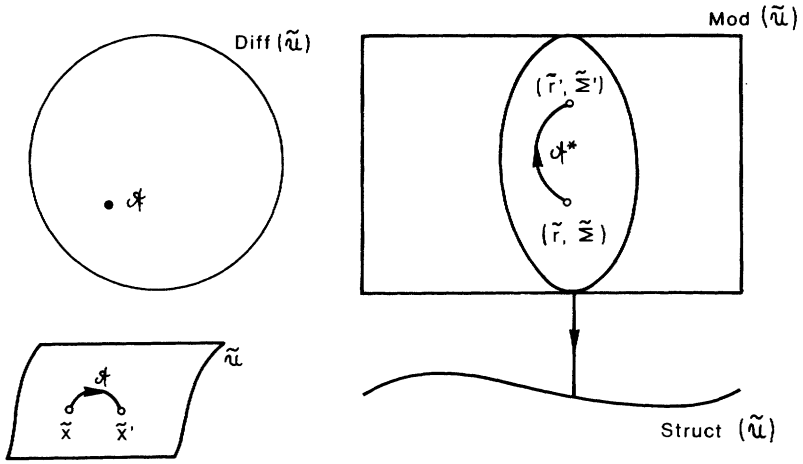
L'application du principe de covariance générale à l'ensemble Mod  $(\tilde{\mathcal{U}})$  se traduit par l'action du groupe Diff  $(\tilde{\mathcal{U}})$  sur cet ensemble et conduit aux définitions suivantes :

DÉFINITIONS. — d) Nous appellerons *structure dynamique* d'un MSDI, défini sur  $\tilde{\mathcal{U}}$ , son orbite par Diff  $(\tilde{\mathcal{U}})$ ; l'action de Diff  $(\tilde{\mathcal{U}})$  sur Mod  $(\tilde{\mathcal{U}})$  étant définie par i) et ii).

e) Nous appellerons *espace des structures dynamiques*, définies sur  $\tilde{\mathcal{U}}$ , l'ensemble quotient Mod  $(\tilde{\mathcal{U}})/\text{Diff}(\tilde{\mathcal{U}})$ ; nous le noterons Struct  $(\tilde{\mathcal{U}})$  :

$$\text{Struct}(\tilde{\mathcal{U}}) = \text{Mod}(\tilde{\mathcal{U}})/\text{Diff}(\tilde{\mathcal{U}}).$$

<sup>(1)</sup> Ceci est une définition adaptée du principe de covariance générale proposée par J. M. Souriau [8], pour la relativité générale.



*Problème de la Classification des structures dynamiques définies sur  $\tilde{\mathcal{U}}$*

Étant donné un ensemble  $E$  et une relation d'équivalence  $\sim$  définie sur  $E$ , l'ensemble quotient  $E/\sim$  peut être considéré comme un sous-ensemble de l'ensemble de ses parties  $\mathcal{P}(E)$  :

$$E/\sim = \{t \in \mathcal{P}(E) \mid \forall x \in t, \forall y \in t : x \sim y\}.$$

Une réalisation de  $E/\sim$  est définie par un couple  $(F, \gamma)$  où  $F$  est un ensemble et  $\gamma$  une application surjective définie sur  $E$  à valeurs dans  $F$  telle que, si  $\pi$  désigne la projection naturelle de  $E$  sur  $E/\sim$ , on ait

$$\pi(x) = \pi(x') \Leftrightarrow \gamma(x) = \gamma(x').$$

*Le problème de la classification des structures dynamiques définie sur  $\tilde{\mathcal{U}}$  par le principe de covariance générale consiste à trouver une réalisation « plus ou moins naturelle » de l'espace  $\text{Struct}(\tilde{\mathcal{U}})$ .*

### II.3. Dynamique interne d'un système massif isolé

Il existe une obstruction à l'existence de MSDI définis sur une variété  $\tilde{\mathcal{U}}$ , elle est donnée par le théorème de décomposition barycentrique ([7], § 13) :

Si la masse totale d'un système dynamique isolé est non nulle (au sens du § II.1 :  $\theta \neq 0$ ), sa variété des mouvements  $\tilde{\mathcal{U}}$  est difféomorphe au produit direct symplectique de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^6$ , muni de sa forme symplectique canonique multipliée par la masse totale du système, par une

variété symplectique  $\mathcal{U}$  possédant le groupe  $\text{SO}(3) \times \mathbb{R}$  comme groupe dynamique <sup>(2)</sup>.

Plaçons-nous dans le cadre de cette hypothèse  $\theta \neq 0$ .

1) Nous appellerons *espace des mouvements internes* la variété  $\mathcal{U}$ .

2) Nous noterons  $r = (\mathcal{R}, -u)$  l'action de  $\text{SO}(3) \times \mathbb{R}$  sur  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{R}$  est l'action relative à  $\text{SO}(3)$ , et  $-u$  est l'action relative à  $(\mathbb{R}, +)$ .

3) Nous noterons  $\Sigma = [x \mapsto \sigma]$  le champ symplectique défini sur  $\mathcal{U}$  :

$$\forall A \in \text{SO}(3) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad [\mathcal{R}(A)]^*(\sigma) = \sigma \quad \text{et} \quad (t_{\mathcal{U}})^*(\sigma) = \sigma$$

4) Nous noterons  $\Psi = (\mathcal{L}, \mathcal{H})$  le moment relatif à  $\text{SO}(3) \times \mathbb{R}$ .  $\mathcal{L} = [x \mapsto L]$  est le *moment cinétique interne* (relatif à l'action de  $\text{SO}(3)$ ), c'est une application différentiable définie sur  $\mathcal{U}$  à valeur dans  $\mathbb{R}^3$  (nous identifions  $\text{SO}(3)$  avec  $\text{SO}(3)^*$  par la forme de Killing et  $\text{SO}(3)$  avec  $\mathbb{R}^3$  par l'opérateur produit vectoriel  $j : j(V)(W) = V \wedge W$ ). Puisque la cohomologie de  $\text{SO}(3)$  est nulle  $\mathcal{L}$  peut toujours être choisi de façon à vérifier l'équation :

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{R}(A) = A \cdot \mathcal{L}, \quad \forall A \in \text{SO}(3)$$

Nous dirons que  $\mathcal{L}$  est le moment équivariant du système.  $\mathcal{H} = [x \mapsto h]$  est l'*énergie interne* (ou *hamiltonien interne*), c'est le moment relatif à l'action de  $\mathbb{R}$  ; il vérifie :

$$[\mathcal{R}(A)]^*(\mathcal{H}) \equiv \mathcal{H} \circ \mathcal{R}(A) = \mathcal{H}, \quad \forall A \in \text{SO}(3)$$

Posons  $\text{grad}(\mathcal{H}) = [x \mapsto \text{grad}(h)]$  le champ de vecteur défini sur  $\mathcal{U}$  par [7] :

$$\text{grad}(h) = -\sigma^{-1}(dh)$$

Ce champ est complet (on dit que la variable dynamique  $\mathcal{H}$  est complète) et l'action de  $(\mathbb{R}, +)$  sur  $\mathcal{U}$  s'identifie à :

$$t_{\mathcal{U}}(x) = e^{t \text{grad}(\mathcal{H})}(x), \quad \forall x \in \mathcal{U} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Rappelons que  $\mathcal{H}$ , contrairement à  $\mathcal{L}$  équivariant, est défini à une constante près.

Ainsi un MSDI défini sur  $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \times \mathbb{R}^5$  est équivalent à un quadruplet  $(\mathcal{U}, \mathcal{R}, \Sigma, \mathcal{H})$  vérifiant 1), 2), 3) et 4). Ceci nous conduit, dans le cas des systèmes massifs isolés, à modifier légèrement nos définitions précédentes.

**DÉFINITIONS.** — a) Nous appellerons *modèle de structure interne* (MSI)

<sup>(2)</sup> Quand la masse totale du système dynamique est non nulle,  $\theta \neq 0$ , le sous-groupe invariant  $(\mathbb{R}^6, +)$  du groupe de Galilée agit librement sur  $\tilde{\mathcal{U}}$ , de plus cette action le munit d'une structure de variété fibrée principale de groupe structural  $(\mathbb{R}^6, +)$ ,  $\tilde{\mathcal{U}}$  est alors un fibré trivial ([2], tome III).  $\mathcal{U}$  est la base de ce fibré :  $\mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}}/\mathbb{R}^6$ .  $\mathcal{U}$  peut aussi s'interpréter, grâce à la réduction de Marsden-Weinstein [5], comme l'espace des mouvements du système à moment, relatif à  $(\mathbb{R}^6, +)$ , constant ; c'est-à-dire les mouvements autour du centre de gravité.



d'un système dynamique massif isolé, tout quadruplet  $(\mathcal{U}, \mathcal{R}, \Sigma, \mathcal{H})$  tel que :  $\mathcal{U}$  est une variété de dimension paire,  $\mathcal{R}$  un homomorphisme différentiel de  $\text{SO}(3)$  dans  $\text{Diff}(\mathcal{U})$ ,  $\Sigma = [x \mapsto \sigma]$  un champ symplectique défini sur  $\mathcal{U}$  invariant sous l'action de  $\text{SO}(3)$ ,  $\mathcal{H}$  une variable dynamique complète définie sur  $\mathcal{U}$  invariante sous l'action de  $\text{SO}(3)$ .

b) Nous appellerons  $\text{Mod}(\mathcal{U})$  l'ensemble des MSI défini sur  $\mathcal{U}$ .

Le principe de covariance générale se traduit naturellement à partir de l'action de  $\text{Diff}(\mathcal{U})$  sur  $\text{Mod}(\mathcal{U})$  induite de l'action de  $\text{Diff}(\mathcal{U})$  sur  $\text{Mod}(\tilde{\mathcal{U}}) : \Sigma \mapsto \mathcal{A}^*(\Sigma)$ ,  $\mathcal{R} \mapsto \mathcal{A}^*(\mathcal{R})$ ,  $\mathcal{H} \mapsto \mathcal{A}^*(\mathcal{H})$ , et conduit aux nouvelles définitions.

DÉFINITIONS. — c) Nous appellerons *structure dynamique interne* d'un MSI, défini sur  $\mathcal{U}$ , son orbite par  $\text{Diff}(\mathcal{U})$ .

d) Nous appellerons *espace des structures dynamiques internes*, définies sur  $\mathcal{U}$ , l'ensemble quotient  $\text{Mod}(\mathcal{U})/\text{Diff}(\mathcal{U})$ , nous le noterons  $\text{Struct}(\mathcal{U})$ .

$$\text{Struct}(\mathcal{U}) = \text{Mod}(\mathcal{U})/\text{Diff}(\mathcal{U}).$$

Le problème de la classification des structures de système dynamique d'un système dynamique massif isolé se réduit à la classification de ses structures internes, c'est-à-dire : trouver une réalisation de l'espace  $\text{Struct}(\mathcal{U})$ .

#### II.4. Éléments de classifications des SDI définies sur $\mathcal{U}$

Il existe une hiérarchie à l'intérieur de  $\text{Mod}(\mathcal{U})$  :  $\mathcal{R}$  est défini relativement à  $\mathcal{U}$ ,  $\Sigma$  relativement au couple  $(\mathcal{U}, \mathcal{R})$  et enfin  $\mathcal{H}$  au triplet  $(\mathcal{U}, \mathcal{R}, \Sigma)$ . Cette hiérarchie se traduit par des fibrations successives que nous allons expliciter. Auparavant, définissons les espaces auxiliaires suivants :

a)  $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\text{SO}(3))$  est l'ensemble des homomorphismes différentiels de  $\text{SO}(3)$  dans  $\text{Diff}(\mathcal{U})$ .  $\text{Diff}(\mathcal{U})$  agit sur  $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\text{SO}(3))$  nous noterons  $\text{Act}_{\mathcal{U}}(\text{SO}(3))$  l'ensemble quotient :  $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\text{SO}(3))/\text{Diff}(\mathcal{U})$  et nous poserons  $\Pi_{\text{AH}}$  la projection canonique de  $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\text{SO}(3))$  sur  $\text{Act}_{\mathcal{U}}(\text{SO}(3))$  qui s'interprète comme l'ensemble des actions inéquivalentes de  $\text{SO}(3)$  sur  $\mathcal{U}$ .

b)  $\text{Mod}^0(\mathcal{U})$  est le sous-ensemble de  $\text{Mod}(\mathcal{U})$  défini par  $\mathcal{H} = 0$ ,  $\text{Diff}(\mathcal{U})$  agit sur  $\text{Mod}^0(\mathcal{U})$ , nous noterons  $\text{Struct}^0(\mathcal{U})$  le quotient  $\text{Mod}^0(\mathcal{U})/\text{Diff}(\mathcal{U})$ . Nous noterons  $\Pi_{\text{SM}}^0$  la projection canonique de  $\text{Mod}^0(\mathcal{U})$  sur  $\text{Struct}^0(\mathcal{U})$ ,  $\Pi_{\text{MH}}$  la projection naturelle de  $\text{Mod}(\mathcal{U})$  sur  $\text{Mod}^0(\mathcal{U})$ .

c) Nous noterons  $\Pi_{\text{SM}}$  la projection canonique de  $\text{Mod}(\mathcal{U})$  sur  $\text{Struct}(\mathcal{U})$  ( $\text{Struct}(\mathcal{U}) = \text{Mod}(\mathcal{U})/\text{Diff}(\mathcal{U})$ ).

On peut vérifier immédiatement qu'il existe deux projections :

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{SS}} &: \text{Struct}(\mathcal{U}) \rightarrow \text{Struct}^0(\mathcal{U}) \\ \Pi_{\text{AS}}^0 &: \text{Struct}^0(\mathcal{U}) \rightarrow \text{Act}_{\mathcal{U}}(\text{SO}(3)) \end{aligned}$$

telles que les diagrammes suivants commutent.

$$(D) \quad \Pi_{\widehat{HM}} \left( \begin{array}{ccc} \text{Mod}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\Pi_{SM}} & \text{Struct}(\mathcal{U}) \\ \Pi_{HM} \downarrow & & \downarrow \Pi_{SS} \\ \text{Mod}^0(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\Pi_{SM}} & \text{Struct}^0(\mathcal{U}) \\ \Pi_{HM} \downarrow & & \downarrow \Pi_{AS} \\ \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\text{SO}(3)) & \xrightarrow{\Pi_{AH}} & \text{Act}_{\mathcal{U}}(\text{SO}(3)) \end{array} \right) M_{AS}$$

c'est-à-dire, telles que :

$$\begin{cases} \Pi_{SS} \circ \Pi_{SM} = \Pi_{SM}^0 \circ \Pi_{HM} \\ \Pi_{AS}^0 \circ \Pi_{SH}^0 = \Pi_{AH} \circ \Pi_{HM}^0 \end{cases}$$

Ainsi  $\text{Struct}(\mathcal{U})$  possède une structure d'ensemble fibré sur  $\text{Act}_{\mathcal{U}}(\text{SO}(3))$ . Le problème de la classification des structures internes définies sur  $\mathcal{U}$  se traduit donc par la classification successive des structures dynamiques définies sur  $\mathcal{U}$  relativement à une action de  $\text{SO}(3)$  sur  $\mathcal{U}$ , c'est-à-dire à la réalisation successive des fibres  $S_{[\mathcal{R}]}$  de  $\text{Struct}(\mathcal{U})$  au-dessus des points  $[\mathcal{R}] = \Pi_{AM}(\mathcal{R})$  de  $\text{Act}_{\mathcal{U}}(\text{SO}(3))$ . Cette réalisation nécessite donc en premier lieu la réalisation de  $S_{[\mathcal{R}]}^0$ , fibre de  $\text{Struct}^0(\mathcal{U})$  au-dessus de  $[\mathcal{R}]$ , c'est-à-dire la classification, relativement au principe de covariance générale, des structures symplectiques définies sur  $\mathcal{U}$  invariantes sous l'action  $[\mathcal{R}]$  de  $\text{SO}(3)$  sur  $\mathcal{U}$ . Mais la fibre  $S_{[\mathcal{R}]}$ , ensemble des structures dynamiques internes définies sur  $\mathcal{U}$  relativement à l'action  $[\mathcal{R}]$  de  $\text{SO}(3)$ , est elle-même fibrée sur  $S_{[\mathcal{R}]}^0$  par la projection  $\Pi_{SS} : [\mathcal{R}, \Sigma, \mathcal{H}] \mapsto [\mathcal{R}, \Sigma] ([\mathcal{R}, \Sigma, \mathcal{H}] = \Pi_{SM}(\mathcal{R}, \Sigma, \mathcal{H})$  et  $[\mathcal{R}, \Sigma] = \Pi_{SH}^0(\mathcal{R}, \Sigma))$ , la connaissance complète de  $S_{[\mathcal{R}]}$  nécessite donc enfin les réalisations successives des fibres  $S_{[\mathcal{R}, \Sigma]}$  de  $S_{[\mathcal{R}]}$  au-dessus des points  $[\mathcal{R}, \Sigma]$  de  $S_{[\mathcal{R}]}^0$ ; c'est-à-dire : la classification, relativement au principe de covariance générale, des hamiltoniens définis sur  $\mathcal{U}$  invariants par  $\mathcal{R}$  et complets relativement à  $\Sigma$ .

Ces étapes successives de la réalisation de  $\text{Struct}(\mathcal{U})$  peuvent se résumer pratiquement par les formules, que l'on déduit immédiatement du diagramme (D) :

$$\begin{cases} S_{[\mathcal{R}]} = M_{\mathcal{A}} / \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \\ S_{[\mathcal{R}]}^0 = M_{\mathcal{A}}^0 / \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \\ S_{[\mathcal{R}, \Sigma]} = M_{(\mathcal{R}, \Sigma)} / \mathcal{D}_{(\mathcal{R}, \Sigma)} \end{cases}$$

où :

d)  $M_{\mathcal{A}}$  est la fibre de  $\text{Mod}(\mathcal{U})$  au-dessus de  $\mathcal{R}$ ,  $M_{\mathcal{A}}^0$  est la fibre de  $\text{Mod}^0(\mathcal{U})$  au-dessus de  $\mathcal{R}$  et  $M_{(\mathcal{R}, \Sigma)}$  est la fibre de  $M_{\mathcal{A}}$  au-dessus de  $(\mathcal{R}, \Sigma)$ .

e)  $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$  est le stabilisateur dans  $\text{Diff}(\mathcal{U})$ , de  $\mathcal{R}$ , c'est-à-dire le sous-groupe des difféomorphismes de  $\mathcal{U}$  qui commutent avec  $\mathcal{R}$  :

$$\mathcal{A} \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \forall A \in \text{SO}(3) \quad \mathcal{A} \circ \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A) \circ \mathcal{A}$$

f)  $\mathcal{D}_{(\mathcal{R}, \Sigma)}$  est le stabilisateur, dans  $\text{Diff}(\mathcal{U})$ , de  $(\mathcal{R}, \Sigma)$ , c'est-à-dire le sous-groupe défini par :

$$\mathcal{D}_{(\mathcal{R}, \Sigma)} = \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \cap \text{Sympl}_{\Sigma}(\mathcal{U})$$

Ces éléments de classifications des structures dynamiques internes définis sur  $\mathcal{U}$  nous conduisent à plusieurs remarques :

**REMARQUE 1.** — Comme nous l'avons vu, une réalisation de  $\text{Struct}(\mathcal{U})$  nécessite une réalisation de  $\text{Act}_{\mathcal{U}}(\text{SO}(3))$ , c'est-à-dire une classification des actions inéquivalentes de  $\text{SO}(3)$  sur  $\mathcal{U}$ . Ce problème est en soi une question délicate et difficile (voir à ce sujet l'ouvrage de G. E. Bredon [1]). Pour cette raison, on peut se contenter de classifier, dans un premier temps, les structures dynamiques internes d'un système relativement à une action particulière de  $\text{SO}(3)$ , que l'on peut choisir arbitrairement par des arguments de simplicité.

**REMARQUE 2.** — On peut toutefois restreindre l'arbitraire d'un tel choix. Nous proposons un problème moins général, mais qui peut, dans une certaine mesure, être interprété comme une généralisation de la méthode des orbites de Kostant-Kirillov Souriau [3] [4] [7]. Il consiste premièrement à choisir pour  $\mathcal{U}$  une orbite coadjointe d'un groupe de Lie  $G$ , défini comme *le groupe structural interne* du système ; deuxièmement à restreindre au sous-groupe de  $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\text{SO}(3))$  des homomorphismes différentiels définis par l'action coadjointe de  $G$  sur  $\mathcal{U}$  et par  $\text{Hom}(\text{SO}(3), G)$ . L'exemple que nous traitons ensuite se situe dans ce cadre, mais d'autres exemples de systèmes dynamiques complexes, par exemple le problème de Kepler régularisé, s'y situent aussi.

**REMARQUE 3.** — Enfin remarquons que cette classification fait apparaître un aspect nouveau quant au choix du hamiltonien des systèmes dynamiques qui semble être absent des autres formulations de la mécanique symplectique, c'est le caractère équivalent de deux hamiltoniens liés entre eux par l'action d'un élément du groupe  $\mathcal{D}_{\mathcal{A}} \cap \text{Sympl}_{\Sigma}(\mathcal{U})$ .

### III. CLASSIFICATION DES STRUCTURES INTERNES DÉFINIES SUR $S^2 \times S^2$ RELATIVES A L'ACTION DIAGONALE DE $\text{SO}(3)$

Comme nous venons de l'indiquer, nous traitons ici le cas particulier de la classification des structures internes définies sur une orbite coadjointe  $\mathcal{U}$  d'un groupe de Lie  $G$  relativement à une action induite

par un homomorphisme  $i$  particulier de  $SO(3)$  dans  $G$  et par l'action coadjointe de  $G$  sur  $\mathcal{U}$ . Nous choisissons :

$$\begin{cases} G = SO(3) \times SO(3) \\ i = [A \mapsto (A, A)] \quad A \in SO(3) \\ \mathcal{U} = S^2 \times S^2 \end{cases}$$

L'action de  $SO(3)$  sur  $\mathcal{U}$  est donc l'action diagonale :

$$\forall A \in SO(3) \quad \forall x = (X_1, X_2) \in \mathcal{U} : \mathcal{R}(A)(x) = (AX_1, AX_2)$$

### III.1. Action diagonale de $SO(3)$ et topologie de $S^2 \times S^2$

Nous donnons ici quelques propriétés particulières relatives à  $(\mathcal{U}, \mathcal{R})$  qui seront utilisées par la suite.

a) Le segment  $[-1, +1]$  réalise le quotient  $\mathcal{U}/SO(3)$ , muni de la projection  $\Pi : (X_1, X_2) \mapsto \rho = \langle X_1, X_2 \rangle$ .

b) L'image réciproque  $\mathcal{U}^* \equiv \Pi^{-1}(]-1, +1[)$  est un ouvert dense de  $\mathcal{U}$ ; c'est la réunion des orbites de  $SO(3)$  de dimension 3. L'action de  $SO(3)$  le munit d'une structure de fibré différentiel principal pour lequel  $\Pi|_{\mathcal{U}^*}$  est une submersion.

c) Une trivialisatation particulière de  $\mathcal{U}^*$  est donnée par le difféomorphisme  $\varphi$  de  $\mathcal{U}^*$  à  $SO(3) \times ]-1, +1[$  défini par :

$$\varphi(X_1, X_2) = (g, \rho)$$

avec

$$\begin{cases} \rho = \Pi(X_1, X_2) \\ g = [g_1 g_2 g_3] \end{cases} \begin{cases} g_1 = [2(1 + \rho)]^{-1/2}(X_1 + X_2) \\ g_2 = [2(1 - \rho)]^{-1/2}(X_1 - X_2) \\ g_3 = -[1 - \rho^2]^{-1/2}X_1 \wedge X_2 \end{cases}$$

$$\varphi_0 \mathcal{R}(A) = \underline{A} \circ \varphi, \quad \underline{A}(g, \rho) = (A \cdot g, \rho)$$

d) Les images réciproques par  $\Pi$  des points  $+1$  et  $-1$  sont notées  $S^+$  et  $S^-$ ; ce sont les deux orbites singulières de  $SO(3)$ ; elles sont de dimension 2, difféomorphes chacune à la sphère et définies par les équations :

$$\begin{aligned} S^+ &= \{ x \in \mathcal{U} \mid X_1 = X_2 \} \\ S^- &= \{ x \in \mathcal{U} \mid X_1 = -X_2 \} \end{aligned}$$

### III.2. Structures symplectiques définies sur $S^2 \times S^2$ invariantes par l'action diagonale de $SO(3)$ et moments

Soit  $M_{\mathcal{R}}^0$  l'ensemble des structures symplectiques définies sur  $S^2 \times S^2$  invariantes sous l'action diagonale  $\mathcal{R}$  de  $SO(3)$ . Puisque  $\mathcal{U} = S^2 \times S^2$  est simplement connexe, on a le résultat (cf. [7]) :

a) Toute structure symplectique  $\Sigma = [x \mapsto \sigma]$ , élément de  $M_{\mathcal{A}}^0$ , possède un moment.

Et puisque la cohomologie symplectique de  $SO(3)$  est nulle, on a le résultat

b) Toute structure symplectique  $\Sigma$  élément de  $M_{\mathcal{A}}^0$ , possède un moment équivariant unique  $\mathcal{L}$  (cf. § II, 3.4) :

$$\begin{cases} \mathcal{L} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{L} \circ \mathcal{R}(A) = A \cdot \mathcal{L} \end{cases} \quad (1)$$

Nous noterons  $\mathcal{E}q.$  l'ensemble des applications différentiables définies sur  $\mathcal{U}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$  vérifiant (1). On a les résultats suivants :

c) Si  $\mathcal{L}$  est un élément de  $\mathcal{E}q.$  alors il existe trois applications  $(f_1, f_2, f_{12})$  définies sur  $[-1, +1]$  à valeur dans  $\mathbb{R}$  telles que

$$\mathcal{L}(x) = aX_1 + bX_2 + cX_1 \wedge X_2$$

avec

$$a = f_1 \circ \pi(x), \quad b = f_2 \circ \pi(x), \quad c = f_{12} \circ \pi(x)$$

La vérification est immédiate.

d) Soit  $\Lambda$  l'application définie sur  $M_{\mathcal{A}}^0$  à valeurs dans  $\mathcal{E}q.$  qui à chaque élément associe son mouvement équivariant  $\mathcal{L}$  :

$$\begin{aligned} \Lambda : M_{\mathcal{A}}^0 &\mapsto \mathcal{E}q. \\ \Sigma &\mapsto \Lambda(\Sigma) = \mathcal{L} \end{aligned}$$

$\Lambda$  est une injection.

En effet : soient  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  deux structures symplectiques, éléments de  $M_{\mathcal{A}}^0$  telles que  $\Lambda(\Sigma_1) = \Lambda(\Sigma_2)$ , alors on a

$$\sigma_1(Z_u(x)) = \sigma_2(Z_u(x)) \quad \forall Z \in SO(3)$$

donc en posant  $\sigma_{12} = \sigma_1 - \sigma_2$ , on a

$$\begin{cases} \sigma_{12}(Z_u(x)) = 0 & \forall Z \in SO(3) \\ \mathcal{L}_{Z_u}(\sigma_{12}) = 0 & \forall Z \in SO(3) \end{cases}$$

ainsi  $\sigma_{12}|_{\mathcal{U}^*}$  est invariante par  $SO(3)$  et s'annule sur les vecteurs verticaux, donc  $\sigma_{12}|_{\mathcal{U}^*}$  est l'image réciproque par  $\pi|_{\mathcal{U}^*}$  d'une deux-forme définie sur  $] -1, +1[$ ; donc  $\sigma_{12}|_{\mathcal{U}^*} = 0$  et par continuité ( $\mathcal{U}^*$  est dense dans  $\mathcal{U}$ )  $\sigma_{12} = 0 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$ . ■

Nous noterons  $\mathcal{M}$  l'ensemble  $\text{Val}(\Lambda)$ ,  $\Lambda$  est alors une bijection de  $M_{\mathcal{A}}^0$  à  $\mathcal{M}$ ; on a le résultat :

e) Soit  $\mathcal{L}$  un élément de  $\mathcal{M}$  défini par les fonctions  $(f_1, f_2, f_{12})$  :

$$\mathcal{L}(x) = aX_1 + bX_2 + cX_1 \wedge X_2.$$

Soient :  $\Sigma = \Lambda^{-1}(\mathcal{L})$ ;  $\delta_1 x$  et  $\delta_2 x$  deux vecteurs tangents en  $x$  à  $\mathcal{U}$ ; on a :

$$\sigma(\delta_1 x)(\delta, x) = (a\rho + b)\gamma \langle X_1, \delta_2 X_1 \wedge \delta_1 X_1 \rangle + (a + b\rho)\gamma \langle X_2, \delta_2 X_2 \wedge \delta_1 X_2 \rangle \\ + \langle a'X_1 + b'X_2, \delta_1 X_1 \wedge \delta_2 X_2 - \delta_2 X_1 \wedge \delta_1 X_2 \rangle \\ + dW(\delta_1 x)(\delta_2 x)$$

où  $W$  est la 1-forme définie par :  $W(\delta x) = (c/2) \cdot [ \langle X_2, \delta X_1 \rangle - \langle X_1, \delta X_2 \rangle ]$   
et le signe ' désigne la dérivée par rapport à  $\rho$ .

En effet : écrivons l'action infinitésimale de  $SO(3)$  sur  $\mathcal{U}$ ; posons  $Z = j(\Omega)$ ,  $Z \in SO(3)$ ;  $j$  est l'opérateur produit vectoriel (§ II. 3). On a :

$$Z_u(x) = (\Omega \wedge X_1, \Omega \wedge X_2)$$

et posons  $\omega$  la connexion plate définie sur  $\mathcal{U}^*$  par :

$$\omega(\delta x) = \delta g \cdot g^{-1} \quad (g, \rho) = \varphi(x)$$

Définissons  $\varpi$  la 1-forme sur  $\mathcal{U}^*$  par :

$$\varpi(\delta x) = -\frac{1}{2} \text{Tr} [j(L) \cdot \omega(\delta x)], \quad L = \mathcal{L}(x)$$

$\varpi$  est invariante par  $SO(3)$  et  $d\varpi$  vérifie l'équation du moment :

$$d\varpi(Z_u(x)) = -d \langle L, \Omega \rangle \quad \forall Z = j(\Omega) \in SO(3)$$

par un raisonnement analogue à celui de la démonstration de  $d$  on déduit que  $\sigma|_{\mathcal{U}^*} = d\varpi$  et donc que  $d\varpi$  se prolonge sur  $\mathcal{U}$  par  $\sigma$ . La détermination de  $\sigma$  s'obtient en écrivant  $\varpi$  dans les variables  $(X_1, X_2)$  :

$$\varpi(\delta x) = \frac{a\rho + b}{1 - \rho^2} \langle X_2 \wedge X_1, \delta X_1 \rangle \\ + \frac{a + b\rho}{1 - \rho^2} \langle X_1 \wedge X_2, \delta X_2 \rangle + \frac{c}{2} [ \langle X_2, \delta X_1 \rangle - \langle X_1, \delta X_2 \rangle ]$$

Le calcul élémentaire mais fastidieux de  $d\varpi$  donne le résultat. ■

Soit  $\Sigma$  un élément de  $M_{\mathcal{A}}^0$  et  $\mathcal{L}$  son moment; posons  $\mathcal{L}^2$  l'application définie par :

$$\mathcal{L}^2(x) = \langle \mathcal{L}(x), \mathcal{L}(x) \rangle$$

$\mathcal{L}^2$  est évidemment invariante sous l'action de  $SO(3)$ , il existe donc une application  $l^2$  définie sur  $[-1, +1]$ , unique, telle que :

$$\mathcal{L}^2 = l^2 \circ \Pi$$

On a le résultat suivant :

f) Soit  $\mathcal{L} \in \mathcal{M}$  alors l'application  $l^2 = [\rho \mapsto \langle L, L \rangle]$  est strictement monotone :

$$\frac{\partial \langle L, L \rangle}{\partial \rho} \neq 0 \quad \forall \rho \in [-1, +1]$$

En effet : Écrivons d'abord la condition de régularité de  $\Sigma = \Lambda^{-1}(\mathcal{L})$  sur  $\mathcal{U}^*$  (i. e. :  $\ker(\sigma) = \{0\}$ ). On a vu (e) que  $\sigma|_{\mathcal{U}^*} = d\omega$  où

$$\omega(\delta x) = -\frac{1}{2} \text{Tr} [j(L) \cdot \omega(\delta x)], \quad L = \mathcal{L}(x).$$

Mais  $L$  s'écrit en termes de variables  $(g, \rho)$  de la façon suivante :

$$L = g \cdot \lambda(\rho) \quad \text{où} \quad \lambda(\rho) = \begin{pmatrix} (a+b)[(1+\rho)/2]^{1/2} \\ (a-b)[(1-\rho)/2]^{1/2} \\ -c[1-\rho^2] \end{pmatrix}$$

et donc

$$d\omega(\delta_1 x)(\delta_2 x) = \langle \lambda'(\rho), \delta_1 \rho \Omega_2 - \delta_2 \rho \Omega_1 \rangle - \langle \lambda(\rho), \Omega_1 \wedge \Omega_2 \rangle$$

où  $\Omega_i \in \mathbb{R}^3$  et  $j(\Omega_i) = g^{-1} \cdot \delta_i$ .

On a alors

$$\delta_1 x \in \ker(\sigma) \Leftrightarrow \langle \lambda'(\rho), \Omega_1 \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \lambda'(\rho) \delta_1 \rho - \lambda(\rho) \wedge \Omega_1 = 0$$

On déduit de  $\delta_1 x = 0$  la condition  $\langle \lambda'(\rho), \lambda(\rho) \rangle = 0$ , ce qui s'écrit encore

$$\frac{\partial \langle L, L \rangle}{\partial \rho} \neq 0 \quad \forall \rho \in ]-1, +1[$$

Soit  $x$  un point de  $S^+$ ,  $\delta_1 x \in \ker(\sigma)$  s'écrit :

$$\begin{bmatrix} H'_{(1)} j(X_1) - G'(1) j(X_1) \\ F'_{(1)} j(X_1) - H'(1) j(X_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta, X_1 \\ \delta, X_2 \end{bmatrix} = f_{12}(1) \cdot \begin{bmatrix} \delta_1 X_1 \\ \delta_1 X_2 \end{bmatrix}$$

où  $F(\rho) = \rho \cdot f_1(\rho) + f_2(\rho)$ ,  $G(f) = f_1(\rho) + \rho f_2(\rho)$  et  $H(\rho) = f_1(\rho) + f_2(\rho)$ , donc  $\ker(\sigma) = \{0\}$  implique que la valeur  $f_{12}(1)$  n'annule pas son polynôme caractéristique le calcul donne alors :

$$[f_{12}(1)]^2 + (H'(1))^2 - F'(1) \cdot G'(1) \neq 0,$$

c'est-à-dire  $\left. \frac{\partial \langle L, L \rangle}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} \neq 0$ . De même, on obtient pour  $x \in S^-$  la

condition  $\left. \frac{\partial \langle L, L \rangle}{\partial \rho} \right|_{\rho=-1} \neq 0$ .

En conclusion, on a  $\ker(\sigma) = \{0\} \forall x \in \mathcal{U} \Rightarrow \frac{\partial \langle L, L \rangle}{\partial \rho} \neq 0 \forall \rho \in [-1, +1]$ . ■

Soit  $\mathcal{A}$  un élément de  $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$  et  $\mathcal{L}$  un élément de  $\mathcal{M}$ , il est immédiat de vérifier que  $\mathcal{A}^*(\mathcal{L}) \equiv \mathcal{L} \circ \mathcal{A}$  est encore un élément de  $\mathcal{E}_q$ ; de plus on a le résultat :

g)  $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$  agit à l'intérieur de  $\mathcal{M}$ , le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} M_{\mathcal{A}}^0 & \xrightarrow{\Lambda} & \mathcal{M} \\ \mathcal{A}^* \downarrow & & \downarrow \mathcal{A}^* \\ M_{\mathcal{A}}^0 & \xrightarrow{\Lambda} & \mathcal{M} \end{array} \quad \mathcal{A} \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$$

En effet : soit  $\Sigma = [x \mapsto \sigma]$  un élément de  $M_{\mathcal{A}}^0$  et  $\mathcal{L} = \Lambda(\Sigma)$  son moment. On a :  $\mathcal{A}^*(\sigma)(Z_u(x)) = \mathcal{A}^*[\sigma(Z_u(x))] \forall Z \in \text{SO}(3)$ , grâce à la commutation  $\mathcal{A} \circ \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A) \circ \mathcal{A}$ . Or  $\mathcal{A}^*(\sigma(Z_u(x))) = \mathcal{A}^*[-d \langle \mathcal{L}(x), \Omega \rangle]$  avec  $Z = j(\Omega)$ . Donc  $\mathcal{A}^*(\sigma)(Z_u(x)) = -d \langle \mathcal{A}^*(\mathcal{L})(x), \Omega \rangle$ , c'est-à-dire

$$\Lambda(\mathcal{A}^*(\Sigma)) = \mathcal{A}^*(\Lambda(\Sigma)). \quad \blacksquare$$

Avant de conclure ce paragraphe donnons encore quelques définitions qui nous seront utiles par la suite :

#### DÉFINITIONS :

α) Nous dirons qu'un moment  $\mathcal{L}$  est croissant (resp. décroissant) si l'application  $l^2$  définie sur  $[-1, +1]$  associée à  $\mathcal{L}$  par :  $\mathcal{L}^2 = l^2 \circ \Pi$  est croissante (resp. décroissante). Nous noterons  $\mathcal{M}^\uparrow$  (resp.  $\mathcal{M}^\downarrow$ ) le sous-ensemble de  $\mathcal{M}$  des moments croissants (resp. décroissants).

β) Nous noterons  $\mathcal{M}_0^\uparrow$  le sous-ensemble, de  $\mathcal{M}^\uparrow$ , des moments croissants tels que  $\mathcal{L}$  s'annule sur  $S^-$  et  $\mathcal{M}_*^\uparrow$  son complémentaire.

γ) Nous appellerons *spins* d'un modèle de structure dynamique interne définie sur  $\mathcal{U}$  les deux scalaires positifs  $s_1$  et  $s_2$  définis par :

$$\begin{cases} s_1 = \frac{1}{2} [(L_M^2)^{1/2} - (L_m^2)^{1/2}] \\ s_2 = \frac{1}{2} [(L_M^2)^{1/2} + (L_m^2)^{1/2}] \end{cases}$$

où  $L_M^2$  et  $L_m^2$  sont définis par :

$$L_M^2 = \text{Sup}(l^2(-1), l^2(+1)) \quad \text{et} \quad L_m^2 = \text{Inf}(l^2(-1), l^2(+1)).$$

Notons que  $s_2 > s_1 > 0$  si  $\mathcal{L} \in \mathcal{M}_*^\uparrow$  et  $s_1 = s_2 \equiv s > 0$  si  $\mathcal{L} \in \mathcal{M}_0^\uparrow$ .

δ) Soit  $\mathcal{L}$  un élément de  $\mathcal{M}_0^\uparrow$ ; nous appellerons *angle de couplage structural du modèle*, l'angle  $\phi$  défini par

$$\begin{aligned} \phi &\in [0, \Pi] \\ \cos \phi &= \text{Sg}[(f_1 + f_2)(1)] \frac{f_1(-1)}{[f_1(-1)^2 + f_{12}(-1)^2]^{1/2}} \end{aligned}$$

Notons que  $f_1(-1)^2 + f_{12}(-1)^2 = \frac{1}{2}(l^2)(-1)$  est donc différent de zéro.



### III.3. Quelques propriétés du groupe $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$

Nous donnons dans ce paragraphe quelques propriétés du groupe  $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$  qui nous seront utiles pour les réalisations de  $S_{[\mathcal{R}]}$  et  $S_{[\mathcal{R}]}$ . On notera  $\text{Aut}(\mathcal{U}^*)$  le groupe des automorphismes de  $\mathcal{U}^*$  et  $\mathbb{J}$  le sous-groupe des transformations de jauge. Rappelons que  $\text{Aut}(\mathcal{U}^*)/\mathbb{J} = \text{Diff}(\mathcal{U}^*)$  pour la projection  $\chi : \mathcal{A} \mapsto \alpha$  tel que  $\Pi|_{\mathcal{U}^*} \circ \mathcal{A} = \alpha \circ \Pi|_{\mathcal{U}^*}$ ,  $\mathcal{A} \in \text{Aut}(\mathcal{U}^*)$  et  $\alpha \in \text{Diff}(\mathcal{U}^*)$ , que  $\mathbb{J} = \chi^{-1}(\mathbb{1}_{]-1, +1[})$  et que  $\text{Aut}(\mathcal{U}^*) = \mathbb{J} \times \text{Diff}(\mathcal{U}^*)$ . On a le résultat suivant :

a)  $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$  est un sous-groupe de  $\text{Aut}(\mathcal{U}^*)$  :

$$\mathcal{D}_{\mathcal{R}} = \mathbb{J}_{\mathcal{R}} \times \text{Val}(\chi|_{\mathcal{D}_{\mathcal{R}}}), \quad \mathbb{J}_{\mathcal{R}} = \mathbb{J} \cap \mathcal{D}_{\mathcal{R}}$$

En effet : un élément  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$  commutant avec l'action  $\mathcal{R}$  de  $\text{SO}(3)$  ne peut que permuter les orbites, nécessairement des mêmes dimensions, de  $\text{SO}(3)$ .  $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$  agit donc à la fois à l'intérieur de  $\mathcal{U}^*$  et de  $S^+ \cup S^-$ , puisque  $\mathcal{U}^*$  est dense dans  $\mathcal{U}$ , l'application  $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}|_{\mathcal{U}^*}$  est une injection et donc  $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$  s'identifie naturellement à un sous-groupe de  $\text{Aut}(\mathcal{U}^*)$  auquel appartient  $\mathcal{A}|_{\mathcal{U}^*}$ . D'autre part, il est immédiat de vérifier que la suite exacte  $1 \rightarrow \mathbb{J} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{U}^*) \rightarrow \text{Diff}(\mathcal{U}^*) \rightarrow 1$  induit par restriction la suite exacte  $1 \rightarrow \mathbb{J}_{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{R}} \rightarrow \text{Val}(\chi|_{\mathcal{D}_{\mathcal{R}}}) \rightarrow 1$  et donc que

$$\mathcal{D}_{\mathcal{R}} = \mathbb{J}_{\mathcal{R}} \times \text{Val}(\chi|_{\mathcal{D}_{\mathcal{R}}}). \quad \blacksquare$$

Nous définirons le groupe  $\mathring{\mathcal{D}}_{\mathcal{R}}$  par :  $\mathring{\mathcal{D}}_{\mathcal{R}} = \{ \mathcal{A} \in \mathcal{D}_{\mathcal{R}} \mid \mathcal{A}|_{S^+ \cup S^-} = \mathbb{1}_{S^+ \cup S^-} \}$ , et le groupe  $\tilde{\text{O}}(2, \mathbb{Z})$  comme le groupe des matrices  $2 \times 2$  telles que

$$M^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a le résultat suivant :

b)  $\mathbb{J}_{\mathcal{R}}$  est égal au produit semi-direct de  $\mathbb{J}_{\mathcal{R}} = \mathring{\mathcal{D}}_{\mathcal{R}} \cap \mathbb{J}$  par  $\tilde{\text{O}}(2, \mathbb{Z})$

$$\mathbb{J}_{\mathcal{R}} = \mathbb{J}_{\mathcal{R}} \rtimes \tilde{\text{O}}(2, \mathbb{Z})$$

En effet : le groupe  $\tilde{\text{O}}(2, \mathbb{Z})$  est le groupe abélien à quatre éléments :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

posons  $\tau$  l'homomorphisme défini par :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\mapsto \mathbb{1}_{\mathcal{U}} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto -\mathbb{1}_{\mathcal{U}}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &\mapsto [(X_1, X_2) \mapsto (X_2, X_1)] \end{aligned}$$

et  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto [(X_1, X_2) \mapsto (-X_2, -X_1)]$ ,  $\tau$  est à valeur dans  $\mathbb{J}_{\mathcal{A}}$ . Il est immédiat de vérifier que la relation d'équivalence définie sur  $\mathbb{J}_{\mathcal{A}}$  par :  $\mathcal{H} \sim \mathcal{H}' \Leftrightarrow \mathcal{H}|_{S^+ \cup S^-} = \mathcal{H}'|_{S^+ \cup S^-}$  partage  $\mathbb{J}_{\mathcal{A}}$  en quatre classes chacune représentée par un élément de  $\text{Val}(\tau)$ , et que  $\mathbb{J}_{\mathcal{A}}$ , classe de  $\mathbb{1}_{\mathcal{A}}$ , est un sous-groupe invariant de  $\mathbb{J}_{\mathcal{A}}$ . On peut alors poser pour tout élément  $\mathcal{H}$  de  $\mathbb{J}_{\mathcal{A}}$  équivalent à  $\tau \in \text{Val}(\tau)$  :  $\mathcal{H} = \mathcal{H} \circ \mathcal{C}$ , c'est-à-dire  $\mathcal{H} = \mathcal{H} \circ \mathcal{C}$ ,  $\mathcal{H} \sim \mathbb{1}_{\mathcal{A}}$ . Il est immédiat ensuite de vérifier que cette décomposition :  $\mathcal{H} = (\mathcal{C}, \mathcal{H})$  est celle d'un produit semi-direct. ■

Notons  $\text{Diff}^{\uparrow} ]-1, +1[$  le groupe des difféomorphismes croissants de  $] -1, +1[$ ,  $\text{Diff}^{\uparrow} ([-1, +1])$  le groupe des difféomorphismes croissants de  $] -1, +1[$  différentiables à gauche en  $+1$  et à droite en  $-1$ ,  $C^{\infty} ([-1, +1], \text{SO}(3))$  le groupe des chemins différentiables définis de  $[-1, +1]$  à valeur dans  $\text{SO}(3)$  différentiables à gauche en  $+1$  et à droite en  $-1$ , et prenant  $\mathbb{1}$  comme valeur en ces points. Définissons encore  $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}^{\uparrow}$  le sous-groupe des éléments  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$  tels que  $\chi(\mathcal{A}) \in \text{Diff} (]-1, +1[)$ ; on a alors les deux théorèmes :

THÉORÈME 1 :

$$\text{Diff}^{\uparrow} ([-1, +1]) \subset \text{Val} (\chi|_{\mathcal{D}_{\mathcal{A}}})$$

THÉORÈME 2 :

$$C^{\infty} ([-1, +1], \text{SO}(3)) \subset \mathring{\mathbb{J}}_{\mathcal{A}}$$

La démonstration de ces théorèmes étant assez longue nous la donnons en annexe. ■

Avant de conclure ce paragraphe donnons la loi de multiplication définie sur  $\text{Aut}(\mathcal{U}^*)$  :  $\mathcal{A} \in \text{Aut}(\mathcal{U}^*)$ ,  $\mathcal{A} \sim (\alpha, K)$  où  $\alpha \in \text{Diff} (]-1, +1[)$  et  $K \in C^{\infty} ([-1, +1], \text{SO}(3))$ .

$$(\alpha, K) \cdot (\alpha', K') = (\alpha'', K'') \Leftrightarrow \alpha'' = \alpha \circ \alpha' \quad \text{et} \quad K''(\rho) = K'(\rho) \cdot K \circ \alpha'(\rho)$$

Notons encore que les éléments de  $\text{Val}(\tau)$  sont définies respectivement dans la trivialisations  $\varphi$  par les matrices constantes :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

### III.4. Réalisation de $S_{[\mathcal{A}]}$

Étant donnée la propriété *d*) du § III.2, toute réalisation de  $\mathring{S}_{[\mathcal{A}]}$  est une réalisation de  $\mathcal{M}/\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ ; il est facile de vérifier que c'est aussi une réalisation de  $\mathcal{M}^{\uparrow}/\mathcal{D}_{\mathcal{A}}^{\uparrow}$  :

$$\mathring{S}_{[\mathcal{A}]} \sim \mathcal{M}^{\uparrow}/\mathcal{D}_{\mathcal{A}}^{\uparrow}$$

Puisque  $\mathcal{M}^\dagger = \mathcal{M}_0^\dagger \cup \mathcal{M}_*^\dagger$ , on a :

$$\mathring{S}_{[\mathcal{A}]} \sim [\mathcal{M}_0^\dagger / \mathcal{D}_{\mathcal{A}}^\dagger] \cup [\mathcal{M}_*^\dagger / \mathcal{D}_{\mathcal{A}}^\dagger]$$

Nous allons voir que cette décomposition correspond à deux situations radicalement différentes.

DÉFINITIONS. — On note  $\mathcal{O}$  l'ouvert de  $\mathbb{R}^2$  défini par :

$$\mathcal{O} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y \}$$

On pose  $F_*$  l'application définie sur  $\mathcal{M}_*^\dagger$  à valeur dans  $\mathcal{O}$  par (cf. § III.1,  $\gamma$ ) :

$$F_*(\mathcal{L}) = (s_1, s_2)$$

On pose  $F_0$  l'application définie sur  $\mathcal{M}_0^\dagger$  à valeur dans  $\mathbb{R}_+^* \times [0, \Pi]$  définie par (cf. § III.1 ;  $\gamma, \delta$ ) :

$$F_0(\mathcal{L}) = (s, \phi)$$

On a alors les théorèmes :

THÉORÈME 1. — *Le couple  $(\mathcal{O}, F_*)$  est une réalisation de  $\mathcal{M}_*^\dagger / \mathcal{D}_{\mathcal{A}}^\dagger$ .*

THÉORÈME 2. — *Le couple  $(\mathbb{R}_+^* \times [0, \Pi], F_0)$  est une réalisation de  $\mathcal{M}_0^\dagger / \mathcal{D}_{\mathcal{A}}^\dagger$ .*

Démonstration. — Étant données  $\Pi_0$  et  $\Pi_*$  les projections canoniques de  $\mathcal{M}_0^\dagger$  et  $\mathcal{M}_*^\dagger$  sur  $\mathcal{M}_0^\dagger / \mathcal{D}_{\mathcal{A}}^\dagger$  et  $\mathcal{M}_*^\dagger / \mathcal{D}_{\mathcal{A}}^\dagger$ , il suffit de démontrer que

$$\Pi_0(\mathcal{L}) = \Pi_0(\mathcal{L}') \Leftrightarrow F_0(\mathcal{L}) = F_0(\mathcal{L}')$$

(de même pour  $\Pi_*$  et  $F_*$ ) et que  $F_0$  et  $F_*$  sont surjectives (cf. § II.2).

Th. 1 :

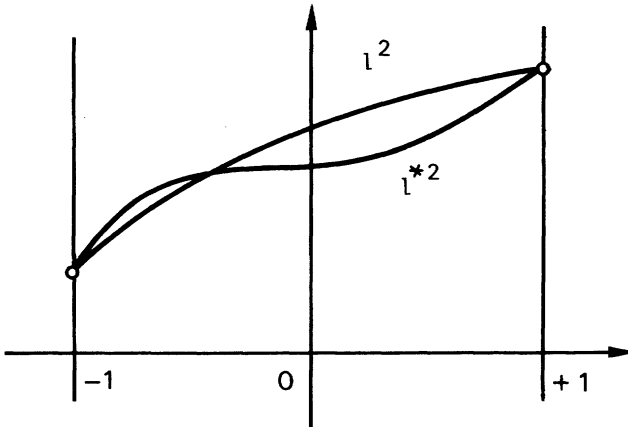
$$a) \quad \Pi_*(\mathcal{L}) = \Pi_*(\mathcal{L}^*) \Rightarrow F_*(\mathcal{L}) = F_*(\mathcal{L}^*)$$

Soit  $\mathcal{A}$  un élément de  $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}^\dagger$  et  $\alpha = \chi(\mathcal{A})$ ,  $\alpha \in \text{Diff}^1([-1, +1])$  et  $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \circ \mathcal{A}$ . Premièrement :  $\mathcal{A}$  n'agit sur  $l^2$  (cf. II.2) que par l'intermédiaire de  $\alpha$ , c'est-à-dire  $\mathcal{L}^2 = l^2 \circ \Pi \leq \mathcal{L}^{*2} = l^{*2} \circ \Pi$  avec  $l^{*2} = l^2 \circ \alpha$ . Or  $\alpha \in \text{Diff}^1([-1, +1])$  et donc  $\alpha(-1) = -1$  et  $\alpha(+1) = +1$  donc  $l^{*2}(-1) = l^2(-1)$  et  $l^{*2}(+1) = l^2(+1)$  d'où  $s_i = s_i^*$  c'est-à-dire  $F_*(\mathcal{L}) = F_*(\mathcal{L}^*)$ .

$$b) \quad F_*(\mathcal{L}) = F_*(\mathcal{L}^*) \Rightarrow \Pi_*(\mathcal{L}) = \Pi_*(\mathcal{L}^*)$$

$$F_*(\mathcal{L}) = F_*(\mathcal{L}^*) \Rightarrow l^2(-1) = l^{*2}(-1) \quad \text{et} \quad l^2(+1) = l^{*2}(+1)$$

puisque  $\mathcal{L} \in \mathcal{M}_*^\dagger$  donc  $l^2$  et  $l^{*2}$  sont deux applications strictement croissantes définies sur  $[-1, +1]$  prenant les mêmes valeurs au bord.



On utilise le lemme suivant :

LEMME 1. — Étant donnée une fonction réelle  $f$  différentiable définie sur  $[-1, +1]$  positive strictement croissante, différentiable à gauche en  $+1$  et à droite en  $-1$ , il existe un difféomorphisme  $\alpha \in \text{Diff}^+([-1, +1])$  tel que

$$f \circ \alpha(\rho) = \frac{1}{2} [(f(1) - f(-1))\rho + f(1) + f(-1)]$$

En effet posons

$$\beta(\rho) = [f(1) - f(-1)]^{-1} [2f(\rho) - f(1) - f(-1)], \quad f(1) - f(-1) > 0$$

du fait que  $f$  est strictement croissante

$$\beta \in \text{Diff}^+([-1, +1]) \quad \beta'(\rho) = 2[f(1) - f(-1)]^{-1} \cdot f'(\rho) > 0,$$

$\beta(\pm 1) = \pm 1$  et  $\beta$  est différentiable en  $\pm 1$ .

Posons alors  $\alpha = \beta^{-1}$ , on a :

$$f \circ \alpha(\rho) = \frac{1}{2} [(f(1) - f(-1)) \cdot \rho + f(1) + f(-1)]$$

Une conséquence immédiate de ce lemme est l'existence d'un difféomorphisme  $\alpha \in \text{Diff}([-1, +1])$  tel que  $l^{*2} = l^2 \circ \alpha$ . Nous poserons alors  $\tilde{\mathcal{L}}$  le moment défini par  $\mathcal{L} \circ \mathcal{A}$  où  $\mathcal{A}$  est le difféomorphisme de  $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$  défini par le couple  $(\alpha, 1)$  en application du Théorème 1 du § III.3.

Donc  $\mathcal{L}^*$  et  $\tilde{\mathcal{L}}$  sont deux moments possédant même module :  $l^{*2} = \tilde{l}^2$ . On utilise alors le lemme suivant :

LEMME 2. — Étant donnés deux moments  $\mathcal{L}^*$  et  $\tilde{\mathcal{L}}$  tels que  $l^{*2} = \tilde{l}^2$ , il existe une transformation de jauge  $\mathcal{H} \in \mathbb{J}_{\mathcal{A}}$  telle que :

$$\mathcal{L}^* = \tilde{\mathcal{L}} \circ \mathcal{H}$$

En effet : posons  $\mathcal{L}^*(X_1, X_2) = a^*X_1 + b^*X_2 + C^*X_1 \wedge X_2$  et

$\tilde{\mathcal{L}}(X_1, X_1) = \tilde{a}X_1 + \tilde{b}X_2 + \tilde{c}X_1 \wedge X_2$ .  $\mathcal{L}^*$  et  $\tilde{\mathcal{L}}$  s'écrivent dans la trivialisatation  $\varphi$  (cf. § III.2.f) :  $\mathcal{L}^*(X_1, X_2) = g\lambda^*(\rho)$  et  $\tilde{\mathcal{L}}(X_1, X_1) = g\tilde{\lambda}(\rho)$  avec

$$\lambda(\rho) = \begin{pmatrix} (a+b)[(1+\rho)/2]^{1/2} \\ (a-b)[(1-\rho)/2]^{1/2} \\ -c[1-\rho^2]^{1/2} \end{pmatrix}$$

On pose  $u^*$  et  $\tilde{u}$  les vecteurs unitaires de  $\mathbb{R}^3$  définis par :

$$u^*(\rho) = \lambda^*(\rho)/\|\lambda^*(\rho)\| \quad \text{et} \quad \tilde{u}(\rho) = \tilde{\lambda}(\rho)/\|\tilde{\lambda}(\rho)\|,$$

$\|\lambda(\rho)\| = |l^2(\rho)|$  ne s'annulent nulle part sur  $[-1, +1]$ ; on a

$$\left\{ \begin{array}{l} u^*(+1) = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \tilde{u}(+1) = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u^*(-1) = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \tilde{u}(-1) = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

C'est-à-dire :  $u^*(+1) = \pm \tilde{u}(+1)$  et  $u^*(-1) = \pm \tilde{u}(-1)$ . C'est-à-dire, quatre possibilités. D'autre part  $\text{Val}(\tau)$  est le sous-groupe de transformations de jauge dont les matrices dans la trivialisatation  $\varphi$ , constantes, sont données au § III.3. Pour chaque situation possible, il existe une de ces matrices  $T$  telle que :

$$\begin{cases} u^*(+1) = T\tilde{u}(+1) \\ u^*(-1) = T\tilde{u}(-1) \end{cases}$$

Soit  $\tilde{\mathcal{C}}$  la transformation de jauge que définit  $T$ . Posons  $\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}} \circ \tilde{\mathcal{C}}$ ; on a donc  $u^*(+1) = \mathcal{U}^*(+1) = \mathcal{U}(+1)$  et  $u^*(-1) = \mathcal{U}(-1)$ . Ainsi  $\mathcal{U}$  et  $u^*$  sont deux chemins sur la sphère  $S^2$  ayant mêmes extrémités. Puisque la sphère  $S^2$  est l'espace homogène  $\text{SO}(3)/\text{SO}(2)$ , il existe deux chemins  $\underline{M}$  et  $\underline{M}^*$  définis dans  $\text{SO}(3)$ , tels que :  $\mathcal{U}(\rho) = \underline{M}(\rho) \cdot \mathcal{U}(-1)$  et  $u^*(\rho) = \underline{M}^*(\rho)u^*(-1)$  avec  $\underline{M}(-1) = \underline{M}^*(-1)$  et  $\underline{M}(+1) = \underline{M}^*(+1)$ ; donc en posant

$$\mathring{K}(\rho) = \underline{M}^*(\rho) \cdot \underline{M}(\rho)^{-1}$$

on a  $u^*(\rho) = \mathring{K}(\rho) \cdot \mathcal{U}(\rho)$  et  $\mathring{K}(\pm 1) = 1$ . En vertu du Théorème 2.III.3, il existe un élément  $\mathcal{H}$  de  $\mathbb{J}_{\mathcal{A}}$  représenté par  $\mathring{K}$  tel que  $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \circ \mathring{K}$  et donc  $\mathcal{L}^* = \tilde{\mathcal{L}} \circ \tilde{\mathcal{C}} \circ \mathcal{H}$ ; en posant  $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{C}} \circ \mathring{K}$ , on a  $\mathcal{L}^* = \tilde{\mathcal{L}} \circ \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A} \in \mathbb{J}_{\mathcal{A}}$ .

Ainsi en posant  $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}} \circ \mathcal{H}$ , on déduit des deux lemmes que  $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \circ \mathcal{A}$  et  $\mathcal{A} \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}^{\uparrow}$ , donc que  $\Pi_*(\mathcal{L}) = \Pi_*(\mathcal{L}^*)$ .

c)  $F_*$  est surjective.

En effet, soit  $(s_1, s_2) \in \mathcal{O}$ ; posons :  $\mathcal{L}(X_1, X_2) = s_1 X_1 + s_2 X_2$ , alors  $F_*(\mathcal{L}) = (s_1, s_2)$ . La structure symplectique  $\Sigma = \Lambda^{-1}(\mathcal{L})$  est la structure symplectique produit :

$$\Sigma = s_1 \text{Surf}_1 + s_2 \text{Surf}_2$$

où  $\text{Surf}_1$  et  $\text{Surf}_2$  sont les formes volumes canoniques définies sur chacune des deux sphères. ■

Th. 2 :

$$a) \quad \Pi_0(\mathcal{L}) = \Pi_0(\mathcal{L}^*) \Rightarrow F_0(\mathcal{L}) = F_0(\mathcal{L}^*)$$

Soient  $\mathcal{L}(X_1, X_2) = g \cdot \lambda(\rho)$  et  $\mathcal{L}^*(X_1, X_2) = g \cdot \lambda^*(\rho)$ , les vecteurs  $u$  et  $u^*$  sont définis sur  $] -1, +1 ]$  naturellement, on peut vérifier que  $\phi$  est donné par :

$$\cos \phi = \langle u(-1), u(+1) \rangle$$

où  $u(-1)$  est défini par <sup>(3)</sup> :

$$u(-1) \equiv \lim_{\rho \rightarrow -1} u(\rho) = \begin{pmatrix} f_1(-1)[f_1(-1)^2 + f_{12}(-1)^2]^{-1/2} \\ 0 \\ -f_{12}(-1)[f_1(-1)^2 + f_{12}(-1)^2]^{-1/2} \end{pmatrix}$$

( $l^2(-1) = 0 \Rightarrow f_1(-1) = f_2(-1)$ ), de même pour  $\phi^*$ . Soit  $\mathcal{A} \in \mathcal{D}_{\mathcal{R}}$  tel que  $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \circ \mathcal{A}$ ,  $\alpha = \chi(\mathcal{A})$  et  $\mathbf{K}$  le chemin défini dans  $\text{SO}(3)$  par  $\mathcal{A}$ . On a donc  $\cos \phi^* = \langle u^*(-1), u^*(+1) \rangle$  mais

$$u^*(\rho) = \lambda^*(\rho) / \|\lambda^*(\rho)\| = \mathbf{K}(\rho) \cdot \lambda \circ \alpha(\rho) / \|\lambda \circ \alpha(\rho)\|$$

et donc :

$$\cos \phi^* = \langle u(1), \lim_{\rho \rightarrow -1} [\lambda \circ \alpha(\rho) / \|\lambda \circ \alpha(\rho)\|] \rangle.$$

Utilisant alors les développements limités de  $l^2 \circ \alpha$  et de  $f_1 + f_2$  au voisinage de  $\rho = -1$ , on montre que  $\phi = \phi^*$ . D'autre part, pour des raisons analogues à celles données précédemment, le spin commun  $s$  est conservé. D'où  $F_0(\mathcal{L}) = F_0(\mathcal{L}^*)$ .

$$b) \quad F_0(\mathcal{L}) = F_0(\mathcal{L}^*) \Rightarrow \Pi_0(\mathcal{L}) = \Pi_0(\mathcal{L}^*)$$

puisque  $s = s^*$  on a  $l^2(1) = l^{*2}(1)$  et comme  $l^2(-1) = l^{*2}(-1) = 0$  on est ramené au cas traité dans Th. 1 et donc, il existe un difféomorphisme  $\tilde{\mathcal{A}} \in \mathcal{D}_{\mathcal{R}}$  tel que  $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \circ \tilde{\mathcal{A}}$  ait même module que  $\mathcal{L}^* : l^{*2} = \tilde{l}^2$ . Le calcul de  $\tilde{u}(-1)$  et  $\tilde{u}(+1)$  montre qu'il existe, ici encore, un élément  $\tilde{\mathcal{C}}$  de  $\text{Val}(\tilde{\mathcal{C}})$  tel que :  $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}} \circ \tilde{\mathcal{C}}$  vérifie  $\tilde{u}(-1) = u^*(-1)$  et  $\tilde{u}(+1) = u^*(+1)$  on est ainsi ramené au traitement précédent et on a :  $\Pi_0(\mathcal{L}) = \Pi_0(\mathcal{L}^*)$ .

c) Surjectivité de  $F_0$ .

<sup>(3)</sup>  $f_1(-1)$  et  $f_{12}(-1) < \infty$  car  $\Sigma$  est défini sur  $S^-$ .

Soit  $(s, \phi) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, \Pi[$ ; un calcul long permet de vérifier que l'application  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}q$ . définie par les fonctions :

$$\begin{cases} f_1(\rho) = \frac{s}{2} [(1 - \cos \phi)\rho + 1 + \cos \phi] \\ f_2(\rho) = f_1(\rho) \\ f_{12}(\rho) = s [\sin^2 \phi + \frac{1}{2}(1 - \cos \phi)^2(\rho + 1)]^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

est un moment vérifiant  $F_0(\mathcal{L}) = (s, \phi)$ . Pour  $\phi = \Pi$ , on peut choisir par exemple

$$\begin{cases} f_1(\rho) = s\rho \\ f_2(\rho) = f_1(\rho) \\ f_{12}(\rho) = s(1 + \rho) \end{cases}$$

Ceci achève la démonstration. ■

De ces deux théorèmes, on déduit le

**THÉORÈME 3.** — Soit  $\Sigma$  une structure symplectique définie sur  $S^2 \times S^2$  invariante sous l'action diagonale de  $SO(3)$ , si ses spins  $s_1$  et  $s_2$  sont différents, alors  $\Sigma$  est équivalente à la structure symplectique produit :

$$\sigma = s_1 \text{ Surf}_1 + s_2 \text{ Surf}_2$$

Le nom d'angle de couplage donné à  $\phi$  trouve toute sa signification dans la réciproque du théorème 3 :

**THÉORÈME 4.** — Soit  $\Sigma$  une structure symplectique définie sur  $S^2 \times S^2$  invariante sous l'action diagonale de  $SO(3)$ , de spins égaux  $s_1 = s_2$ .  $\Sigma$  est équivalente à la structure symplectique produit si et seulement si son angle de couplage  $\phi$  est nul.

### III.5. Réalisation de $S_{[\mathcal{R}]}$

Nous avons vu au § II.4 que  $S_{[\mathcal{R}]}$  est un espace fibré sur  $S_{[\mathcal{R}]}^0$ , une fibre  $S_{[\mathcal{R}, \Sigma]}$  de  $S_{[\mathcal{R}]}$  au-dessus d'un point  $[\mathcal{R}, \Sigma]$  de  $S_{[\mathcal{R}]}^0$  étant donné par :  $S_{[\mathcal{R}, \Sigma]} = M_{(\mathcal{R}, \Sigma)} / \mathcal{D}_{(\mathcal{R}, \Sigma)}$ . Rappelons que  $M_{(\mathcal{R}, \Sigma)}$  est l'ensemble des variables dynamiques définies sur  $\mathcal{U}$  (i. e.  $S^2 \times S^2$ ) invariantes sous l'action  $\mathcal{R}$  (i. e. action diagonale de  $SO(3)$ ) et complets relativement à  $\Sigma$ . D'autre part,  $\mathcal{D}_{(\mathcal{R}, \Sigma)} = \mathcal{D}_{\mathcal{R}} \cap \text{Sympl}_{\Sigma}(\mathcal{U})$  est le groupe des symplectomorphismes qui commutent avec l'action  $\mathcal{R}$ . Notons d'abord que

a) Toute variable dynamique définie sur  $\mathcal{U}$  est complète. En effet  $\mathcal{U}$  est compact et donc tout champ de vecteurs défini sur  $\mathcal{U}$  est complet.

Deuxièmement :

b) Si  $\mathcal{H} \in M_{(\mathcal{A}, \Sigma)}$ , alors  $\mathcal{H} \in C^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  et il existe une application  $\eta$  définie sur  $[-1, +1]$  à valeurs réelles telle que :

$$\mathcal{H} = \eta \circ \Pi$$

On a la propriété suivante :

c) Le groupe  $\mathcal{D}_{(\mathcal{A}, \Sigma)}$  agit trivialement sur  $M_{(\mathcal{A}, \Sigma)}$

$$\forall \mathcal{A} \in \mathcal{D}_{(\mathcal{A}, \Sigma)} \quad \forall \mathcal{H} \in M_{(\mathcal{A}, \Sigma)} : \mathcal{A}^*(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$$

En effet :  $\mathcal{A}^*(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \circ \mathcal{A} = \eta \circ \Pi \circ \mathcal{A}$ , mais  $\mathcal{A} \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$  donc  $\Pi \circ \mathcal{A} = \alpha \circ \Pi$ ,  $\alpha = \chi(\mathcal{A})$ ; donc  $\mathcal{A}^*(\mathcal{H}) = \eta \circ \alpha \circ \Pi$ . Mais  $\mathcal{A} \in \text{Sympl}_\Sigma(\mathcal{U})$ , donc si  $\mathcal{L} = \Lambda(\Sigma)$  on a  $\mathcal{A}^*(\mathcal{L}) = \mathcal{L} \circ \mathcal{A} = \mathcal{L}$ . Ceci implique en particulier  $l^2 \circ \alpha = l^2$ , or  $l^2$  est strictement monotone; c'est un difféomorphisme de  $] -1, +1 [$  dans  $\text{Val}(l^2)$  donc  $\alpha = \mathbb{1}_{[-1, +1]}$ . D'où  $\mathcal{A}^*(\mathcal{H}) = \eta \circ \Pi = \mathcal{H}$ . ■

On a le résultat :  $M_{(\mathcal{A}, \Sigma)} / \mathcal{D}_{(\mathcal{A}, \Sigma)} = M_{(\mathcal{A}, \Sigma)}$ , ainsi grâce à la propriété a) et en posant  $C_{\mathcal{A}}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  l'ensemble des variables dynamiques vérifiant la condition donnée par b), on a le théorème :

**THÉORÈME.** — L'ensemble  $S_{[\mathcal{A}]}$  est le produit direct de  $C_{\mathcal{A}}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  par  $S_{[\mathcal{A}]}^0$

$$S_{[\mathcal{A}]} = C_{\mathcal{A}}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \times S_{[\mathcal{A}]}^0$$

Ainsi une structure interne d'un système dynamique définie sur  $S^2 \times S^2$  invariante sous l'action diagonale de  $\text{SO}(3)$  est définie par un triplet  $(s_1, s_2, \eta)$  ou bien  $(s, \phi, \eta)$ , où  $\eta$  est une application définie sur l'intervalle  $[-1, +1]$  à valeur réelle telle que  $\eta \circ \Pi \in C^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ .

### III.6. Intégration des équations du mouvement

Soit  $\hat{\mathcal{L}}$  le champ de vecteur défini sur  $\mathcal{U}$  grâce à l'action infinitésimale de  $J(L)$ ,  $L = \mathcal{L}(x)$  par :

$$\hat{\mathcal{L}}(x) = j(L)_{\mathcal{U}}(x) = (L \wedge X_1, L \wedge X_2)$$

où  $\mathcal{L}$  est le moment de la structure  $\Sigma : \Lambda(\Sigma) = \mathcal{L}$ . Posons alors  $\mathcal{H}_\Sigma$  l'hamiltonien défini comme l'« énergie cinétique » :

$$\mathcal{H}_\Sigma = \eta_\Sigma \circ \Pi, \quad \eta_\Sigma = \frac{1}{2} l^2$$

On a alors le résultat :

$$a) \quad \text{grad}(\mathcal{H}_\Sigma) = \hat{\mathcal{L}}$$

D'autre part, étant donné un hamiltonien  $\mathcal{H} = \eta \circ \Pi$ , il est facile de vérifier qu'on a :

$$b) \quad \text{grad}(\mathcal{H})(x) = \frac{\eta'(\rho)}{\eta'_\Sigma(\rho)} \text{grad}(\mathcal{H}_\Sigma)(x)$$



l'intégration des équations du mouvement se résumant à intégrer un champ de vecteur du type  $f(\rho)\tilde{\mathcal{L}}(x)$ . Il est facile de vérifier que le mouvement s'effectue à  $\rho = \text{cste}$  :  $\mathcal{D}(\Pi)(x) (\text{grad } \mathcal{H}) = 0$ . Le calcul donne alors :

c) Soit  $(\Sigma, \mathcal{H})$  un élément de  $M_{\mathcal{Q}}$  :

$$e^{t \text{ grad } \mathcal{H}}(x) = (e^{tj(\mathcal{H})} \cdot X_1, e^{tj(\mathcal{H})} \cdot X_2)$$

avec

$$\Omega = \frac{\eta'(\rho)}{\eta'_2(\rho)} L, \quad L = \mathcal{L}(x)$$

Nous appellerons  $\Omega$  le vecteur de précession du système. Le mouvement est un mouvement de précession autour de  $\Omega$ . Le vecteur de précession est justement le vecteur moment cinétique si l'hamiltonien est l'énergie cinétique.

### III.7. Préquantification de $S^2 \times S^2$

Une variété symplectique  $(\mathcal{U}, \Sigma)$  est préquantifiable si il existe un fibré principal de base  $\mathcal{U}$  de groupe  $SO(2)$  muni d'une connexion dont la courbure est  $\Sigma$  [7]. La condition de préquantification s'écrit :

$$\Sigma \in H^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$$

c'est-à-dire que pour tout 2-cycle  $C$  défini sur  $\mathcal{U}$  ( $C$  est une application différentiable définie sur  $S^2$  à valeur dans  $\mathcal{U}$ ), on a :  $(1/2\Pi) \int_{S^2} C^*(\Sigma) \in \mathbb{Z}$  ; mais il suffit que cette condition soit vérifiée sur les 2-cycles générateurs du groupe  $H_2(\mathcal{U})$ . Or, ici  $\mathcal{U} = S^2 \times S^2$  et le groupe  $H_2(S^2 \times S^2)$  est le groupe libre à deux générateurs donnés par

$$C_1 : X \mapsto (X, U) \quad \text{et} \quad C_2 : X \mapsto (U, X),$$

où  $U$  est un vecteur fixe (cf. [10]). Ainsi la condition de préquantification s'écrit, en utilisant la formule  $e$ ) du § III.2 et en posant  $F_1(\rho) = \rho f_1(\rho) + f_2(\rho)$  et  $F_2(\rho) = \rho f_2(\rho) + f_1(\rho)$   $(1/2\Pi) \int_{S^2} F_1(\rho) \text{ Surf} \in \mathbb{Z}$  et  $(1/2\Pi) \int_{S^2} F_2(\rho) \text{ Surf} \in \mathbb{Z}$ .

On a le résultat :

a) La structure dynamique définie par  $(s_1, s_2, \eta)$ , (resp.  $(s, \phi, \eta)$ ), est quantifiable si et seulement si  $2s_1$ , et  $2s_2$  sont entiers (resp.  $2s$  entier).

Le calcul est immédiat.

La recherche des états stationnaires s'effectue au moyen de la méthode de réduction de Marsden-Weinstein [5]. Étant donnée une structure dynamique interne avec  $\mathcal{H} = \eta \circ \Pi$  comme hamiltonien les états stationnaires sont définis par les variétés  $\mathcal{H}^{-1}(h_0)/\ker [\sigma|_{\mathcal{H}^{-1}(h_0)}]$  préquantifi-

fiables. Puisque  $\mathcal{H} = \eta \circ \Pi$  la sous-variété définie par  $\mathcal{H}^{-1}(h_0)$  est définie par  $\rho = \rho_0$ . Et donc pour  $\rho_0 \in ]-1, +1[$

$$\mathcal{H}^{-1}(h_0) \sim \text{SO}(3) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^{-1}(h_0)/\ker [\sigma|_{\mathcal{H}^{-1}(h_0)}] \sim \text{S}^2 ;$$

le calcul en termes de variable  $(g, \rho)$ , donne

$$\sigma|_{\mathcal{H}^{-1}(h_0)}(\delta_1 x)(\delta_2 x) = -\langle \lambda(\rho), \Omega_1 \wedge \Omega_2 \rangle$$

(notations § III.2), et  $\sigma_{\text{S}^2} = -\|\mathbf{L}\| \text{Surf}$ .

Les états stationnaires (préquantiques) sont donc définis par :  $2\|\mathbf{L}\| \in \mathbb{N}$ . Le cas  $\rho_0 = \pm 1$  se traite immédiatement ; les états stationnaires préquantifiables varient donc de  $s_2 - s_1$  à  $s_2 + s_1$  par valeur demi-entière. Il semble donc que cette procédure ne permette pas de retrouver la règle quantique d'addition des spins selon laquelle le spin des états stationnaires varie bien de  $s_2 - s_1$  à  $s_2 + s_1$ , mais par valeur entière.

#### REMERCIEMENTS

Je remercie J. M. Souriau et C. Duval pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et pour les discussions précieuses qu'ils ont bien voulu m'accorder.

## ANNEXE

*Th. 1 :*

Tout difféomorphisme croissant  $\alpha$  de  $] - 1, + 1 [$  différentiable à droite en  $\frac{0}{\rho} 1$  et à gauche en  $+ 1$  se relève sur  $\mathcal{U}$  en un difféomorphisme au moins  $C_1$  (non unique)  $\mathcal{A} \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ .

En effet :

Posons :  $\alpha^*(g, \rho) = (g, \alpha(\rho))$  et soit  $\varphi$  la trivialisaton de  $\mathcal{U}^*$  choisie au § 1 ; posons  $\mathcal{A}^*$  le difféomorphisme de  $\mathcal{U}^*$  défini par :

$$\mathcal{A}^* = \varphi_0^{-1} \alpha^* \circ \varphi$$

$\mathcal{A}^*$  se projette par construction sur  $\alpha$  ; il suffit de démontrer qu'il se prolonge en un difféomorphisme (unique) de  $\mathcal{U}$ . Posons

$$(X_1^*, X_2^*) = \mathcal{A}^*(X_1, X_2)$$

on a  $(X_1^*, X_2^*) = \varphi^{-1}(g, \alpha(\rho))$ , c'est-à-dire

$$\begin{cases} X_1^* = \left[ \frac{1 + \alpha(\rho)}{2} \right]^{1/2} g_1 + \left[ \frac{1 - \alpha(\rho)}{2} \right]^{1/2} g_2 \\ X_2^* = \left[ \frac{1 - \alpha(\rho)}{2} \right]^{1/2} g_1 - \left[ \frac{1 + \alpha(\rho)}{2} \right]^{1/2} g_2 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} X_1^* = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{1 + \alpha(\rho)}{1 + \rho} \right]^{1/2} (X_1 + X_2) + \left[ \frac{1 - \alpha(\rho)}{1 - \rho} \right]^{1/2} (X_1 - X_2) \right\} \\ X_2^* = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{1 + \alpha(\rho)}{1 + \rho} \right]^{1/2} (X_1 + X_2) - \left[ \frac{1 - \alpha(\rho)}{1 - \rho} \right]^{1/2} (X_1 - X_2) \right\} \end{cases}$$

Puisque  $\alpha$  est un difféomorphisme de  $] - 1, + 1 [$  différentiable aux bornes il peut se prolonger sur un voisinage de  $[- 1, + 1]$  en une fonction strictement croissante et différentiable. Il existe alors une fonction différentiable  $u$ , une fonction  $v$  telles qu'au voisinage de  $\rho = - 1$  on ait :

$$1 + \alpha(\rho) = (1 + \rho)u(\rho)$$

et au voisinage de  $\rho = + 1$ , on ait :

$$1 - \alpha(\rho) = (1 - \rho)v(\rho)$$

puisque  $\alpha(- 1) = - 1$  et  $\alpha(+ 1) = + 1$ .

D'autre part,  $u(- 1) = u'(- 1)$  et  $v(+ 1) = v'(1)$  ces deux nombres étant non nuls puisque  $\alpha$  est un difféomorphisme c'est-à-dire puisque  $\alpha^{- 1}$  est dérivable :  $(\alpha^{- 1})(\pm 1) = [1/\alpha'(\pm 1)] \in \mathbb{R}$ . On a donc sur un voisinage de  $S^+$  :

$$\begin{cases} X_1^* = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{2 - (1 - \rho)v(\rho)}{1 + \rho} \right]^{1/2} (X_1 + X_2) + [v(\rho)]^{1/2} (X_1 - X_2) \right\} \\ X_2^* = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{2 - (1 - \rho)v(\rho)}{1 + \rho} \right]^{1/2} (X_1 - X_2) - [v(\rho)]^{1/2} (X_1 - X_2) \right\} \end{cases}$$

et donc :

$$\lim_{X_2 \rightarrow X_1} X_1^* = X_1 \quad \text{et} \quad \lim_{X_2 \rightarrow X_1} X_2^* = X_2$$

D'autre part, l'application linéaire tangente de  $\mathcal{A}^*$  admet une limite quand  $X_2 \rightarrow X_1$ , puisque  $[v(\rho)]'_{\rho=1} = \frac{1}{2} v'(1) \cdot [v(1)]^{-1/2}$  et que  $v(1) = \alpha'(1) \neq 0$ .

Sur un voisinage de  $S^-$ , on a :

$$X_1^* = \frac{1}{2} \left\{ [u(\rho)]^{1/2}(X_1 + X_2) + \left[ \frac{2 - (1 + \rho)u(\rho)}{1 - \rho} \right]^{1/2} (X_1 - X_2) \right\}$$

$$X_2^* = \frac{1}{2} \left\{ [u(\rho)]^{1/2}(X_1 + X_2) - \left[ \frac{2 - (1 + \rho)u(\rho)}{1 - \rho} \right]^{1/2} (X_1 - X_2) \right\}$$

on a :

$$\lim_{X_2 \rightarrow X_1} X_1^* = X_1 \quad \text{et} \quad \lim_{X_2 \rightarrow X_1} X_2^* = X_2$$

La question de la différentiabilité est résolue de la même façon que précédemment.

Donc le difféomorphisme  $\mathcal{A}^*$  se prolonge par l'identité sur  $\mathcal{U}$  et définit ainsi un difféomorphisme de  $\mathcal{U}$  se projetant sur  $\alpha$ . Il est clair que ce relevé n'est pas unique. ■

Th. 2 :

Toute transformation de jauge pure définie sur  $\mathcal{U}^*$  par un chemin  $K: ]-1, +1[ \rightarrow SO(3)$  tel que :

$$\lim_{\rho \rightarrow \pm 1} K(\rho) = 1$$

se prolonge en un difféomorphisme au moins  $C_1$  unique de  $\mathbb{J}_{\mathcal{A}}$ .

En effet :

Évidemment, la façon de définir la transformation de jauge à partir du chemin  $K$  se fait grâce à la trivialisations donnée au § 1. Posons  $\mathcal{A}^*$  défini sur  $\mathcal{U}^*$  par :

$$\mathcal{A}^*(X_1, X_2) = \varphi^{-1}(g \cdot K(\rho) \cdot \rho), \quad \varphi(X_1, X_2) = (g, \rho)$$

Posons

$$K(\rho) = [VWV \wedge W] \quad \text{et} \quad g^* = [g_1^* g_2^* g_3^*] = g \cdot K(\rho)$$

on a :

$$\begin{cases} g_1^* = V^1 g_1 + V^2 g_2 + V^3 g_3 \\ g_2^* = W^1 g_1 + W^2 g_2 + W^3 g_3 \end{cases}$$

où les  $V^i$  et  $W^i$  sont les coordonnées de  $V$  et  $W$ . Donc :

$$\varphi^{-1}(g \cdot K(\rho), \rho) = \begin{cases} X_1^* = \left[ \frac{1 + \rho}{2} \right]^{1/2} g_1^* + \left[ \frac{1 - \rho}{2} \right]^{1/2} g_2^* \\ X_2^* = \left[ \frac{1 + \rho}{2} \right]^{1/2} g_1^* - \left[ \frac{1 - \rho}{2} \right]^{1/2} g_2^* \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} X_1^* = \left( V^1 + W^1 \left[ \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \right]^{1/2} \right) \frac{X_1 + X_2}{2} + \left( V^2 \left[ \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \right]^{1/2} + W^2 \right) \frac{X_1 - X_2}{2} \\ \quad + \left( \frac{V^3}{[1 - \rho]^{1/2}} + \frac{W^3}{[1 - \rho]^{1/2}} \right) \frac{X_2 \wedge X_1}{\sqrt{2}} \\ X_2^* = \left( V^1 - W^1 \left[ \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \right]^{1/2} \right) \frac{X_1 + X_2}{2} + \left( V^2 \left[ \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \right]^{1/2} - W^2 \right) \frac{X_1 - X_2}{2} \\ \quad + \left( \frac{V^3}{[1 - \rho]^{1/2}} - \frac{W^3}{[1 - \rho]^{1/2}} \right) \frac{X_2 \wedge X_1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Pour des raisons de différentiabilité, on peut écrire au voisinage de  $\rho = 1$

$$\begin{cases} V^1 = 1 + (1 - \rho)v_1(\rho) & V^{2'} = (1 - \rho)v_2(\rho) & V^3 = (1 - \rho)v_3(\rho) \\ W^1 = (1 - \rho)w_1(\rho) & W^2 = 1 + (1 - \rho)w_2(\rho) & W^3 = (1 - \rho)w_3(\rho) \end{cases}$$

puisque  $\lim_{\rho \rightarrow 1} K(\rho) = 1$  et que les composantes de  $K(\rho)$  sont des fonctions différentiables de  $\rho$ .

Donc au voisinage de  $\rho = 1$ , on a :

$$\begin{cases} X_1^* = \alpha_1 \frac{X_1 + X_2}{2} + \beta_1 \frac{X_1 - X_2}{2} + \gamma_1 \frac{X_2 \wedge X_1}{\sqrt{2}} \\ X_2^* = \alpha_2 \frac{X_1 + X_2}{2} + \beta_2 \frac{X_1 - X_2}{2} + \gamma_2 \frac{X_2 \wedge X_1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 + (1 - \rho)v_1(\rho) + (1 - \rho) \left[ \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \right]^{1/2} w_1(\rho) \\ \beta_1 = [1 - \rho^2]^{1/2} v_2(\rho) + 1 + (1 - \rho)w_2(\rho) \\ \gamma_1 = (1 - \rho)^{1/2} v_3(\rho) + \frac{1 - \rho}{[1 + \rho]^{1/2}} w_3(\rho) \\ \alpha_2 = 1 + (1 - \rho)v_1(\rho) - (1 - \rho) \left[ \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \right]^{1/2} w_1(\rho) \\ \beta_2 = [1 - \rho^2]^{1/2} v_2(\rho) - 1 - (1 - \rho)w_2(\rho) \\ \gamma_2 = [1 - \rho]^{1/2} v_3(\rho) - \frac{1 - \rho}{[1 + \rho]^{1/2}} w_3(\rho) \end{cases}$$

Donc au voisinage de  $S^+$ , quand  $X_2 \rightarrow X_1$ , on a :

$$\begin{cases} \alpha_1 \rightarrow 1 & \beta_1 \rightarrow 1 & \gamma_1 \rightarrow 0 \\ \alpha_2 \rightarrow 1 & \beta_2 \rightarrow -1 & \gamma_2 \rightarrow 0 \end{cases}$$

et donc  $X_1^* \rightarrow X_1$  et  $X_2^* \rightarrow X_2$ .

On calcule ensuite l'application linéaire tangente de  $\mathcal{A}^*$  au voisinage de  $S^+$  et on pose :

$$X_2 = X_1 + \varepsilon$$

On obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial X_1^*}{\partial X_1} = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1)\mathbb{1} + \alpha_1' X_1 \bar{\varepsilon} + \frac{1}{2} \alpha_1' \varepsilon \bar{\varepsilon} - \frac{1}{2} \beta_1' \varepsilon \bar{\varepsilon} + \frac{\gamma_1'}{\sqrt{2}} (\varepsilon \wedge X_1) \bar{\varepsilon} + \frac{\gamma_1}{\sqrt{2}} j(X_1 + \varepsilon) \\ \frac{\partial X_1^*}{\partial X_2} = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \beta_1)\mathbb{1} - \alpha_1' X_2 \bar{\varepsilon} + \frac{1}{2} \alpha_1' \varepsilon \bar{\varepsilon} - \frac{1}{2} \beta_1' \varepsilon \bar{\varepsilon} + \frac{\gamma_1'}{\sqrt{2}} (X_2 \wedge \varepsilon) \bar{\varepsilon} - \frac{\gamma_1}{\sqrt{2}} j(X_2 - \varepsilon) \end{cases}$$

Donc à la limite  $X_2 \rightarrow X_1$ , c'est-à-dire  $\varepsilon \rightarrow 0$  et  $\rho \rightarrow 1$ , les termes délicats sont ceux qui contiennent  $\beta_1'$  et  $\gamma_1'$ ; or ils sont quadratiques en  $\varepsilon$ ; on a :

$$\| \beta_1' \varepsilon \bar{\varepsilon} dX_1 \| < | \beta_1' | \| \varepsilon \|^2 \| dX_1 \|$$

et

$$\| \gamma_1' (\varepsilon \wedge X_1) \bar{\varepsilon} dX_1 \| < | \gamma_1' | \| \varepsilon \|^2 \| dX_1 \|$$

Mais  $\|\varepsilon\|^2 = 2(1 - \rho)$ ; donc  $\|\beta_1 \varepsilon \bar{\varepsilon} dX_1\|$  et  $\|\gamma'_1(\varepsilon \wedge X_1) \bar{\varepsilon} dX_1\|$  sont de l'ordre de  $[1 - \rho]^{1/2}$ , qui tend vers zéro quand  $\rho$  tend vers 1.

Donc  $\partial X_1^*/\partial X_1$  et  $\partial X_1^*/\partial X_2$  convergent, le premier vers 1 et le second vers 0 quand  $X_2$  tend vers  $X_1$ ; de même on peut démontrer que  $\partial X_2^*/\partial X_1$  et  $\partial X_2^*/\partial X_2$  convergent. Le résultat est similaire au voisinage de  $S^-$ .

Donc la transformation de jauge se prolonge bien de façon unique en un difféomorphisme de  $\mathcal{U}$ , valant l'identité sur  $S^+ \cup S^-$ . ■

## RÉFÉRENCES

- [1] G. E. BREDON, Introduction to compact transformation groups, *Academic Press*, 1972.
- [2] J. DIEUDONNÉ, *Éléments d'analyse*, Gauthier-Villars, 1970.
- [3] A. A. KIRILLOV, *Éléments de la théorie des représentations*, Ed. de Moscou, 1974.
- [4] B. KOSTANT, Orbits, symplectic structures and representation theory, *Proc. of US-Japan seminar on Differential Geometry*, Kyoto, 1965.
- [5] J. MARSDEN, A. WEINSTEIN, On reduction of symplectic manifold, *Rep. on Math. Phys.*, t. 5, p. 421, 1974.
- [6] M. A. OLSHANETSKY, A. M. PERELOMOV, Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras, (*à paraître*).
- [7] J. M. SOURIAU, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, 1970.
- [8] J. M. SOURIAU, Modèle de particules à spin dans le champ électromagnétique et gravitationnel, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. XX, n° 4, 1974.
- [9] G. ROSENSTEEL, Geometric quantization and nuclear structure physics, *Proc. of the Winter Research Institute of Geometric Quantization Univ. of Alberta*, Canada, 1981, Gotay Ed.
- [10] J. W. VICK, Homology Theory, *Academic Press*, 1973.

(Manuscrit reçu le 21 juin 1982)