ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

M. BRAY

Quelques solutions du système d'Einstein correspondant à la métrique de Taub

Annales de l'I. H. P., section A, tome 38, nº 3 (1983), p. 243-253
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1983__38_3_243_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XXXVIII, n° 3, 1983, p. 243-253.

Section A :
Physique théorique.

Quelques solutions du système d'Einstein correspondant à la métrique de Taub

par

M. BRAY
657, rue de Robbé, 02120 Guise

RÉSUMÉ. — L'intégration du système complet d'Einstein montre que diverses distributions d'impulsion-énergie (fluide parfait, poussière thermodynamique, champ mésonique vectoriel) peuvent engendrer un champ gravitationnel possédant la symétrie plane de Taub (existence d'un groupe de mouvements à trois paramètres).

SUMMARY. — For several energy-momentum distributions (perfect fluid, thermodynamic dust, meson vector field) the integration of the complete Einstein system of field equations leads to some exact solutions possessing the « plane symmetry » defined by A. H. Taub (existence of a three parameter group of motions).

INTRODUCTION

En 1951, A. H. Taub fit connaître un tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$ (solution des équations $R_{\alpha\beta} = 0$) admettant un groupe d'isométries à trois paramètres [*1*]

$$ds^2 = e^{2\alpha}[(dx^0)^2 - (dx^1)^2] - e^{2\tilde{\gamma}}[(dx^2)^2 + (dx^3)^2] ; \qquad \alpha, \tilde{\gamma}(x^0, x^1).$$

Ultérieurement quelques auteurs se proposèrent d'étendre cette propriété de « symétrie plane » par intégration du système complet d'Einstein où le champ gravitationnel $g_{\alpha\beta}$ serait couplé à certaines distributions d'impulsion-énergie. Citons par exemple les travaux de T. Singh choisissant comme tenseur $T_{\alpha\beta}$ une expression décrivant un champ scalaire de masse au repos nulle [*2*].

Singh étudia ensuite les champs scalaires à masse non nulle ainsi que les relations entre les deux types de solutions. En dépit de certaines difficultés d'interprétation signalées par l'auteur ces solutions constituaient une généralisation de la métrique de Taub du vide.

Le présent article tente d'obtenir des solutions exactes pour des schémas $T_{\alpha\beta}$ plus généraux en adoptant une forme particulière (séparation des variables) de la métrique de Taub:

$$\alpha \equiv \alpha(x^1)\,; \qquad \tilde{\gamma} \equiv \omega(x^0) + \gamma(x^1), \qquad \omega' \neq 0$$

Après avoir signalé brièvement une solution du vide, l'étude du fluide parfait est abordée. Quelques solutions sans singularité essentielle accessible sont obtenues.

Si le cas de la matière pure ne paraît pas fournir — dans les hypothèses examinées — de solution du type considéré, le schéma poussière thermodynamique $T_{\alpha\beta} = \rho U_\alpha U_\beta + 2U_{(\alpha}Q_{\beta)}$ conduit à quelques résultats intéressants, la congruence des lignes de courant possédant simultanément expansion déformation et rotation. Il existe enfin des solutions champ mésonique vectoriel non triviales dont l'une correspond à un méson temporel.

I

La métrique initiale est une forme particulière de celle de Taub :

$$ds^2 = e^{2\alpha}[(dx^0)^2 - (dx^1)^2] - e^{2\tilde{\gamma}}[(dx^2)^2 + (dx^3)^2]$$

définie par $\alpha = \alpha(x^1)$; $\tilde{\gamma} = \omega(x^0) + \gamma(x^1)$.

Les composantes du tenseur de Ricci

$$R_{\alpha\beta} = R^{\nu}{}_{.\alpha\beta\nu} = -\,\partial_\beta(\Gamma_\alpha{}^\nu{}_\nu) + \partial_\nu(\Gamma_\alpha{}^\nu{}_\beta) - \Gamma_\alpha{}^\rho{}_\nu\Gamma_\rho{}^\nu{}_\beta + \Gamma_\alpha{}^\rho{}_\beta\Gamma_\rho{}^\nu{}_\nu$$

sont dans ce cas $R_{\alpha\alpha}$ et R_{01} ; $\alpha = 0, 1, 2, 3$.

I

Tout champ gravitationnel du vide satisfait les équations $R_{\alpha\beta} = 0$. $R_{01} = 0 \rightleftarrows \omega'(\alpha' - \gamma') = 0$ impose l'alternative $\omega' = 0$ ou $\omega' \neq 0$. Délibérément nous négligerons l'hypothèse $\omega' = 0$ qui nous limiterait aux champs stationnaires.

Compte tenu de $\alpha' = \gamma'$ et de $R_{22} = R_{33}$ il reste :

$$-\,2\omega'' - 2\omega'^2 + \gamma'' + 2\gamma'^2 = 0 \quad (R_{00} = 0)\,; \qquad \gamma'' = 0 \quad (R_{11} = 0)$$

$$\omega'' + 2\omega'^2 - \gamma'' - 2\gamma'^2 = 0 \quad (R_{22} = R_{33} = 0)$$

Donc $\omega = kt\,(t \equiv x^0)$; $\gamma = lx^1$ avec $k^2 = l^2$

$$ds^2 = e^{2lx^1}[(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - e^{2kt}\{(dx^2)^2 + (dx^3)^2\}]$$

Établissant la correspondance $\{0k\} \to k$; $k = 1, 2, 3$ et $\{23\} \to 4$; $\{31\} \to 5$; $\{12\} \to 6$ nous pouvons décrire l'ensemble des composantes du tenseur de courbure $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ sous forme d'une matrice symétrique Ω_{AB} ; A, B = 1 ... 6 dont les éléments sont :

$$\Omega_{11} = e^{2\alpha}\alpha'' ; \quad \Omega_{22} = e^{2(\gamma+\omega)}[-\omega'' - \omega'^2 + \alpha'\gamma'] ; \quad \Omega_{26} = e^{2(\gamma+\omega)}\omega'(\alpha' - \gamma') ;$$
$$\Omega_{33} = \Omega_{22} ; \quad \Omega_{35} = -\Omega_{26} ; \quad \Omega_{44} = -e^{-2\alpha+4\omega+4\gamma}[\gamma'^2 - \omega'^2] ;$$
$$\Omega_{55} = \Omega_{66} = -e^{2(\gamma+\omega)}[\gamma'' + \gamma'^2 - \alpha'\gamma']$$

L'invariant de courbure $2\mathscr{K} \equiv (\Omega^{AB}\Omega_{AB})$ s'écrit

$$2e^{4\alpha}\mathscr{K} = (\alpha'')^2 + 2[-\omega'' - \omega'^2 + \alpha'\gamma']^2 + [\gamma'^2 - \omega'^2]^2 + 2[\gamma'' + \gamma'^2 - \alpha'\gamma']^2 - 4\omega'^2[\alpha' - \gamma']^2$$

L'expression se réduit pour $\omega' = k$; $\alpha' = \gamma' = l$ à $2e^{4\alpha}\mathscr{K} = 3(l^2 - k^2) = 0$ d'où l'absence de singularité essentielle.

II

Considérons maintenant le système d'Einstein

$$R_{\alpha\beta} = \chi\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T\right) + \Lambda g_{\alpha\beta} ; \qquad \chi > 0$$

pour un schéma fluide parfait $T_{\alpha\beta} = (\rho + p)U_\alpha U_\beta - pg_{\alpha\beta}$; $U^\alpha U_\alpha = 1$.

Nécessairement $U_2 = U_3 = 0$. Seules subsistent les équations $E_{\alpha\alpha}$ et E_{01} avec $E_{22} = E_{33}$.

On en tire

$$2\chi p = (g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11}) - 2\Lambda ; \quad 2\chi\rho = (g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} - 4g^{22}R_{22}) + 2\Lambda$$
$$\chi(\rho + p)U_0^2 = R_{00} - g_{00}(g^{22}R_{22}) ; \quad \chi(\rho + p)U_1^2 = R_{11} - g_{11}(g^{22}R_{22})$$

soit en explicitant

$$\chi p = e^{-2\alpha}\{-[\omega'' + \omega'^2] + \alpha'' + \gamma'' + \gamma'^2\} - \Lambda ;$$
$$\chi\rho = e^{-2\alpha}\{[\omega'' + 3\omega'^2] + \alpha'' - \gamma'' - 3\gamma'^2\} + \Lambda$$
$$\mathscr{D}U_0^2 = -\omega'' + (\alpha'' - \gamma'') + 2\gamma'(\alpha' - \gamma') ; \quad \mathscr{D}U_1^2 = -\omega'' - 2\omega'^2 - \alpha'' - \gamma'' + 2\alpha'\gamma'$$

avec $$\mathscr{D} \equiv \chi(\rho + p) = 2e^{-2\alpha}[\omega'^2 + \alpha'' - \gamma'^2]$$

Il reste à satisfaire l'équation E_{01} : $(R_{01})^2 = (\mathscr{D}U0^2)(\mathscr{D}U1^2)$

$$4\omega'^2(\alpha' - \gamma')^2 = [\omega'' + 2\omega'^2][\omega'' - (\alpha'' - \gamma'') - 2\gamma'(\alpha' - \gamma')] + [-\alpha'' - \gamma'' + 2\alpha'\gamma'][(\alpha'' - \gamma'') + 2\gamma'(\alpha' - \gamma') - \omega'']$$

Les expressions obtenues pour ρ, p, ${U_0}^2$, ${U_1}^2$ doivent être positives. Dans E01 posons $\omega' = k$; $\alpha' - \gamma' = l$; k, $l = c^{tes}$. Il vient en supposant $l \neq 0$:

$$(\gamma' + l)(k^2 - \gamma'^2) = -\gamma'\gamma''$$

Si $k^2 - l^2 \neq 0$ cette relation peut être mise sous la forme

$$\frac{-\gamma'\gamma''}{(\gamma'+l)(k^2-\gamma'^2)} = \left\{\frac{l}{(k^2-l^2)(\gamma'+l)} - \frac{1}{2(k-l)(k+\gamma')} - \frac{1}{2(k+l)(k-\gamma')}\right\}\gamma''=1$$

On en tire

$$\frac{(\gamma' + l)^{\frac{l}{\Delta}}(k - \gamma')^{\left(\frac{k-l}{2\Delta}\right)}}{(k + \gamma')^{\left(\frac{k+l}{2\Delta}\right)}} = e^{x^1} ; \qquad \Delta \equiv (k^2 - l^2)$$

Équivalemment, avec $l = nk$ et $n^2 \neq 1$: $\dfrac{(\gamma' + l)^{2n}(k - \gamma')^{1-n}}{(k + \gamma')^{1+n}} = e^{2k(1-n^2)x^1}$.

Par contre si $k = l$ les transformations $e^{-\gamma} = e^{lx^1}\mathrm{Y}$ puis $k\mathrm{Y} = \operatorname{ch}\theta$ nous donnent $\operatorname{sh}\theta\cdot\theta' = k[-\operatorname{ch}\theta \pm \operatorname{sh}\theta]$ d'où les relations $e^{2\theta} - 2\theta = -4kx^1$ ou $e^{-2\theta} + 2\theta = -4kx^1$.

Le choix $\alpha = 0$; $\omega'' + 2\omega'^2 = 0$; $\gamma'' + 2\gamma'^2 = 0$ réduit E_{01} à une identité. Dans ces conditions $2\omega = \log t$; $2\gamma = \log x^1$ et

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (x^0x^1)^2[(dx^2)^2 + (dx^3)^2]$$

$$\chi p = \omega'^2 - \gamma'^2 - \Lambda ; \quad \chi\rho = \omega'^2 - \gamma'^2 + \Lambda ; \quad \mathrm{U}_0^2 = \frac{\omega'^2}{[\omega'^2 - \gamma'^2]} ; \quad \mathrm{U}_1^2 = \frac{\gamma'^2}{[\omega'^2 - \gamma'^2]} .$$

On doit prendre $\Lambda > 0$ et $\omega'^2 - \gamma'^2 \geqslant \Lambda \rightleftharpoons (x^1)^2 - (x^0)^2 - 4\Lambda(x^0x^1)^2 \geqslant 0$

$$\left(\frac{\mathrm{U}^1}{\mathrm{U}^0}\right)^2 = \frac{\gamma'^2}{\omega'^2} .$$

La condition de positivité $\omega'^2 - \gamma'^2 > 0 \rightleftharpoons 1 - \left(\dfrac{\gamma'}{\omega'}\right)^2 > 0$ traduit le fait que la vitesse matérielle est inférieure à celle de la lumière.

En vertu des contraintes imposées, l'invariant de courbure s'écrit :

$$2\mathscr{K} = 3(\omega'^2 - \gamma'^2)^2 = \frac{3}{16}\left[\frac{(x^1)^2 - (x^0)^2}{(x^0x^1)^2}\right]^2 .$$

Essentiellement positif il s'annule pour $x^1 = \pm x^0$ et ne devient infini que pour $x^0 = 0$, $x^1 = 0$, valeurs interdites puisque $g_{22} = g_{23} = 0$ si x^0 ou $x^1 = 0$.

Examinons maintenant l'hypothèse $\alpha = 0$, $\gamma' = l$. E_{01} fournit alors

$$\omega''[\omega'' + 2\omega'^2 + 2l^2] = 0$$

Donc $\omega = kx^0$ ou $2\omega = \log[\cos(2lx^0)]$. Il vient en posant $\Lambda = \mathrm{K}l^2$

$$\chi p = l^2\left\{\frac{(3-\mathrm{K})\cos^2(2lt) + \sin^2(2lt)}{\cos^2(2lt)}\right\} ; \quad \chi\rho = l^2\left\{\frac{(\mathrm{K}-5)\cos^2(2lt) + \sin^2(2lt)}{\cos^2(2lt)}\right\}$$

$$\mathrm{U}_0^2 = \frac{\sin^2(2lt)}{[2\sin^2(2lt) - 1]} ; \qquad \mathrm{U}_1^2 = \frac{\cos^2(2lt)}{[2\sin^2(2lt) - 1]}$$

Les conditions de positivité exigent $(3-\mathrm{K})+\operatorname{tg}^2(2lt)\geqslant 0$; $(\mathrm{K}-5)+\operatorname{tg}^2(2lt)>0$

$$2\sin^2(2lt) > 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\mathrm{U}^1}{\mathrm{U}^0}\right)^2 = \operatorname{cotg}^2(2lt) < 1 \rightleftharpoons \operatorname{tg}^2(2lt) > 1$$

Il faut en outre $\cos(2lt) \neq 0$.

[En adoptant la condition $3p \leqslant \rho$ on obtient $\operatorname{tg}^2(2lt) < (2\mathrm{K}-7) \equiv \mathrm{A}^2$. Ceci fait apparaître une limite supérieure du temps].

$p \geqslant 0$ se traduit par $\operatorname{tg}^2(2lt) \geqslant \dfrac{(\mathrm{A}^2+1)}{2}$ tandis que $\rho > 0$ demande $\operatorname{tg}^2(2lt) > \dfrac{(3-\mathrm{A}^2)}{2}$ si $\mathrm{A}^2 < 3$.

$\mathrm{A}^2 < 1$ entraînant $p > \rho$ on doit choisir $\mathrm{A}^2 > 1 \rightleftharpoons \mathrm{K} > 4$.

Revenant à la condition relativiste $3p \leqslant \rho$ ou a $\dfrac{(\mathrm{A}^2+1)}{2} \leqslant \operatorname{tg}^2(2lt) < \dfrac{2\mathrm{A}^2}{2}$

soit un domaine de validité $\mathscr{D}\left\{\sin^2(2lt) > \dfrac{1}{2};\ 1 \leqslant 2\operatorname{tg}^2(2lt) < \dfrac{(2\mathrm{A}^2)}{\mathrm{A}^2+1}\right\}$

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - \cos(2lx^0)\cdot e^{2lx^1}[(dx^2)^2 + (dx^3)^2].$$

Dans ce cas l'invariant de courbure a pour valeur

$$2\mathscr{K} = l^4[3\operatorname{tg}^4(2lt) + 2\operatorname{tg}^2(2lt) + 11].$$

$2lt = \dfrac{\pi}{2}$ étant exclue de $\mathscr{D}$ il n'y a pas de singularité essentielle.

On peut essayer de satisfaire E_{01} en posant

$$\omega'' + 2\omega'^2 = 0\,; \qquad (\alpha'' - \gamma'') + 2\gamma'(\alpha' - \gamma') \equiv \mathscr{A} = 0$$

il vient alors

$$4\omega'^2(\alpha'-\gamma')^2 = -\omega''[-\alpha''-\gamma''+2\alpha'\gamma'] = 2\omega'^2[-\alpha''-\gamma''+2\alpha'\gamma'] \equiv 2\omega'^2\mathscr{B}$$

D'après $\mathscr{A} = 0$, $(\alpha' - \gamma')e^{2\gamma} = \mathrm{c^{te}}$ soit $\alpha' = \gamma' + ce^{-2\gamma}$; $c \neq 0$.
Ensuite $\mathscr{A} - \mathscr{B} + 2(\alpha'-\gamma')^2 = 0 \rightleftharpoons \alpha'' + \alpha'^2 - 2\alpha'\gamma' = 0 \to e^{\alpha}\alpha' = \mathrm{M}e^{2\gamma}$; M: c^{te}.
D'autre part $\alpha'' = \gamma'' - 2c\gamma' e^{-2\gamma}$. Portant ces valeurs dans $\mathscr{B}$ nous avons

$$-\gamma'' + \gamma'^2 + 2ce^{-2\gamma}\gamma' - c^2e^{-4\gamma} = 0 \rightleftharpoons e^{-\gamma}[-\gamma'' + \gamma'^2] + 2ce^{-3\gamma}\gamma' - c^2e^{-5\gamma} = 0.$$

Soit $\mathrm{Z}'' - 2c\mathrm{Z}^2\mathrm{Z}' - c^2\mathrm{Z}^5 = 0$ avec $e^{-\gamma} \equiv \mathrm{Z}$ (et $c > 0$).
Cette équation admet l'intégrale $\mathrm{Z}' = \mathrm{K}\mathrm{Z}^n$ si $n = 3$. Dans ce cas nous avons

$$3\mathrm{K}^2 - 2c\mathrm{K} - c^2 = 0 \to \mathrm{K} = c \quad \text{ou} \quad -\frac{c}{3}.$$

Pour $\mathrm{K} = c$, $\mathrm{Z} = (2\Delta)^{-1/2}$; $\Delta \equiv (\mathrm{D} - cx^1)$, D : $\mathrm{c^{te}}$ d'où la condition $\Delta > 0$.

Puis $e^{\alpha}=2\mathrm{M}\left[\mathrm{D}x^1-\frac{c}{2}(x^1)^2+\mathrm{L}\right]$, L: c^{te} soit $e^{\alpha}\equiv 2\mathrm{M}\delta$, p et ρ s'expriment alors sous la forme $\chi p = \mathscr{H} - \Lambda$; $\chi\rho = \mathscr{H} + \Lambda$

$$\mathscr{H} \equiv e^{-2\alpha}\left\{\omega'^2 - \frac{c^2}{4\Delta^2} - \left(\frac{c\delta+\Delta^2}{\delta^2}\right)\right\}$$

Si l'on impose la condition $3p \leqslant \rho$, il faut $0 < \Lambda \leqslant \mathscr{H} \leqslant 2\Lambda$.
Alors $\chi(\rho+p)\mathrm{U}_0^2 = 2\omega'^2 - \left(\frac{2c\delta+\Delta^2}{\delta^2}\right)$; $\chi(\rho+p)\mathrm{U}_1^2 = \frac{c^2}{2\Delta^2}+\frac{\Delta^2}{\delta^2}$.
Le domaine de validité est l'intersection des ensembles

$$\mathscr{D}_1(\Delta > 0)\,; \qquad \mathscr{D}_2(\mathrm{M}\delta > 0),$$
$$\mathscr{D}_3(0 < \Lambda \leqslant \mathscr{H} \leqslant 2\Lambda)\,; \qquad \mathscr{D}_4\left(\left[2\omega'2 - \left(\frac{2c\delta+\Delta^2}{\delta^2}\right)\right] > 0\right).$$

L'étude de $\mathrm{K} = -\frac{c}{3}$ est entièrement analogue.

$$e^{2\gamma}=2\Delta\,; \qquad \Delta\equiv\left(\frac{c}{3}x^1+\mathrm{D}\right); \qquad e^{\alpha}=2\mathrm{M}\left[\frac{c}{6}(x^1)^2+\mathrm{D}x^1+\mathrm{L}\right]\equiv 2\mathrm{M}\delta$$

$$\chi p=\mathscr{Y}-\Lambda\,; \qquad \chi\rho=\mathscr{Y}+\Lambda\,; \qquad \mathscr{Y}\equiv e^{-2\alpha}\left\{\omega'^2+\left(\frac{c\delta/3-\Delta^2}{\delta^2}\right)-\frac{c^2}{36\Delta^2}\right\}$$

$$\chi(\rho+p)\mathrm{U}_0^2=2\omega'^2+\frac{\frac{2}{3}c\delta-\Delta^2}{\delta^2}\,; \qquad \chi(\rho+p)\mathrm{U}_1^2=\left(\frac{c^2}{18\Delta^2}+\frac{\Delta^2}{\delta^2}\right)$$

Le ds^2 s'écrit

$$\begin{aligned} ds^2 = 4\mathrm{M}^2\left[\frac{c}{6}(x^1)^2+\mathrm{D}x^1+\mathrm{L}\right]^2[(dx^0)^2-(dx^1)^2] \\ -\ [2x^0+a]\left[2\left(\frac{c}{3}x^1+\mathrm{D}\right)\right][(dx^2)^2+(dx^3)^2] \end{aligned}$$

III

Le schéma $\mathrm{T}_{\alpha\beta} = \rho\mathrm{U}_\alpha\mathrm{U}_\beta$; $\mathrm{U}^\alpha\mathrm{U}_\alpha = 1$ avec $\mathrm{U}_2 = \mathrm{U}_3 = 0$ fournit le système

$$\chi\rho = g^{00}\mathrm{R}_{00} + g^{11}\mathrm{R}_{11} - 2g^{22}\mathrm{R}_{22}$$
$$\chi\rho\mathrm{U}_0^2 = \mathrm{R}_{00} - g_{00}(g^{22}\mathrm{R}_{22})\,; \qquad \chi\rho\mathrm{U}_1^2 = \mathrm{R}_{11} - g_{11}(g^{22}\mathrm{R}_{22})$$
$$(\mathrm{R}_{01})^2 = [\mathrm{R}_{00} - g_{00}g^{22}\mathrm{R}_{22}][\mathrm{R}_{11} - g_{11}g^{22}\mathrm{R}_{22}]$$
$$g^{00}\mathrm{R}_{00} + g^{11}\mathrm{R}_{11} = 2\Lambda$$

Explicitement

$$\chi\rho = 2e^{-2\alpha}[\omega'^2 + \alpha'' - \gamma'^2]$$

$$\chi\rho U_0^2 = -\omega'' + A\,; \qquad \chi\rho U_1^2 = -(\omega'' + 2\omega'^2) + B$$

$$\Lambda = e^{-2\alpha}[-(\omega'' + \omega'^2) + \alpha'' + \gamma'' + \gamma'^2]$$

$$4\omega'^2(\alpha'-\gamma')^2 = [\omega''+2\omega'^2][\omega''-A]-B[\omega''-A] = [\omega''-A][\omega''+2\omega'^2-B]$$

$$A \equiv (\alpha'' - \gamma'') + 2\gamma'(\alpha' - \gamma')\,; \qquad B \equiv -(\alpha'' + \gamma'') + 2\alpha'\gamma'$$

Posant $\omega' = k$; $(\alpha' - \gamma') = l \neq 0$ nous avons $ZZ' = (Z + l)(Z^2 - k^2)$; $Z \equiv \gamma'$ d'où, en supposant $(k^2 - l^2) \neq 0$

$$\left\{ \frac{l}{(Z + l)} - \frac{(k + l)}{2(Z + k)} + \frac{(k - l)}{2(Z - k)} \right\} dZ = (k^2 - l^2)dx^1$$

$$\frac{(\gamma' + l)^l(\gamma' - k)^{\frac{k-l}{2}}}{(\gamma' + k)^{\frac{k+l}{2}}} = ce^{(k^2-l^2)x^1}\,; \qquad c : c^{te}$$

Si $l = \pm k$ on a $\left(\dfrac{\gamma' - k}{\gamma' + k}\right)e^{-\frac{2k}{\gamma' \pm k}} = ce^{4kx^1}$.

Il faut en outre satisfaire la relation $\Lambda e^{2\alpha} = -[\omega''+\omega'^2]+\alpha''+\gamma''+\gamma'^2$ soit

$$\Lambda e^{2\alpha} = -k^2 + 2\gamma'' + \gamma'^2.$$

Si $k^2 \neq l^2$, $\gamma'\gamma'' = (\gamma'+l)(\gamma'^2-k^2) \rightarrow \gamma'^2-k^2 = \tilde{c}e^{2(\gamma+lx^1)}$.

Or $2\alpha = 2(\gamma+lx^1)+2m$, m : c^{te}; donc $e^{2(\gamma+lx^1)}[\Lambda e^{2m} - \tilde{c}] = 2\gamma''$.

En particulier si $\gamma' = n$ on a $n = -l, -k$ ou $+k$.

Aucune de ces hypothèses n'est acceptable ($n = -l \rightarrow U_1{}^2 < 0$; $n = \pm K \rightarrow \vec{U}$ isotrope).

Abandonnant $\gamma'' = 0$ et posant $e^{-2\gamma} = e^{2lx^1}Y$ il vient $-\mathscr{A} = Y'' - \dfrac{Y'^2}{Y}$ avec $\mathscr{A} \equiv (\Lambda e^{2m} - \tilde{c})$.

L'équation admet la solution $Y = \dfrac{\mathscr{A}}{2}(x^1)^2$; toutefois les conditions $U_0{}^2$ et $U_1{}^2 > 0$ conduisent à $-k^2 - l^2 > 0$ d'où l'impossibilité d'une solution telle que $\omega' = k$, $(\alpha' - \gamma') = l$.

L'hypothèse $\alpha'-\gamma'=l$; $\omega''+2\omega'^2=0$ entraîne $\gamma'=n$, $\omega'=k$ c'est-à-dire nous ramène au cas précédent.

Le choix $\alpha = 0$ exige $\gamma'' = 0$ ou $\gamma'' + 2\gamma'^2 + 2k^2 = 0$. Chacune de ces équations conduit à une impossibilité.

Si l'on pose $\alpha = -\gamma$, il vient $e^Y\dfrac{(Y - 1)}{Y + 1} = e^{-2kx^1}$, $Y \equiv \dfrac{k}{\gamma'}$ puis $X'^2 = \Lambda + k^2X^2$; $X \equiv e^\gamma$ équation dont l'intégrale s'écrit $X = a\,\mathrm{sh}\,(kx^1)$ ou $a\,\mathrm{ch}\,(kx^1)$ selon que $\Lambda = \pm a^2k^2$ respectivement.

Mais alors l'équation $\gamma''(\gamma'^2+k^2) = 2\gamma'^2(k^2-\gamma'^2)$ (contrainte E_{01}) n'est pas satisfaite.

Pour $\alpha = n\gamma$ nous avons

$$(n+1)\gamma'' = -(\gamma'^2 + k^2) \pm [(\gamma'^2 + k^2)^2 - 4n(n+1)\gamma'^2(k^2 - \gamma'^2)]^{1/2}.$$

Le radical est un carré parfait si $1 - 2n(n+1) = \pm(1+2n)$ soit $n = \pm 1, n = -2$. Les deux premières valeurs étant exclues, il reste $n = -2$ d'où

$$\gamma'' = 2(k^2 - \gamma'^2) \qquad \text{ou} \qquad \gamma'' = 4\gamma'^2.$$

Donc $$\gamma = \frac{1}{2}\log[\operatorname{ch}(2kx^1)] \qquad \text{ou} \qquad \gamma = -\frac{1}{4}\log(x^1).$$

La première de ces solutions fournit $\Lambda = -3k^2$ mais donne des valeurs négatives à ρ et $U_0{}^2$.

La seconde ne satisfait par la contrainte en Λ.

Avec $\Lambda = 0$; $\omega'' + \omega'^2 = K = \alpha'' + \gamma'' + \gamma'^2$ on aboutit aussi à des impossibilités.

Le système étudié (matière pure) n'admet donc aucune solution du type considéré.

IV

Un schéma poussière thermodynamique serait décrit par le tenseur

$$T_{\alpha\beta} = \rho U_\alpha U_\beta + U_\alpha Q_\beta + U_\beta Q_\alpha\,; \qquad U^\alpha U_\alpha = 1\,; \qquad U^\alpha Q_\alpha = 0.$$

Les équations d'Einstein

$$R_{\alpha\beta} = \chi\left\{\rho U_\alpha U_\beta - \frac{\rho}{2}g_{\alpha\beta} + 2U_{(\alpha}Q_{\beta)}\right\} + \Lambda g_{\alpha\beta}$$

écrites en coordonnées comobiles ($U^k = U_k = 0$; $U_0{}^2 = e^{2\alpha}$; $Q_0 = 0$) montrent que seule la composante Q_1 peut différer de 0. On obtient

$$g^{00}R_{00} = \chi\frac{\rho}{2} + \Lambda\,; \quad g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} = 2\Lambda\,; \quad g^{11}R_{11} = g^{22}R_{22}\,; \quad R_{01} = \chi U_0 Q_1$$

Soit de manière explicite

$$\chi\rho = 2e^{-2\alpha}\{-[\omega'' + \omega'^2] - \gamma'' - \gamma'^2 + 2\alpha'\gamma'\}\,; \qquad Q_1 = \frac{2}{x}e^{-\alpha}\omega'(\alpha' - \gamma')$$

$$\Lambda = e^{-2\alpha}\{-[\omega'' + \omega'^2] + \alpha'' + \gamma'' + \gamma'^2\}\,; \quad [\omega'' + 2\omega'^2] + \alpha'' + \gamma'' - 2\alpha'\gamma' = 0.$$

Ceci nous amène à poser $[\omega'' + \omega'^2] = c^{te}$; $[\omega'' + 2\omega'^2] = c^{te} \rightarrow \omega' = k$. Supposons d'abord $\Lambda = 0$; en soustrayant les deux équations nous avons

$$\gamma'^2 + 2\alpha'\gamma' - 3k^2 = 0.$$

On en tire

$$2\alpha' = \left(\frac{3k^2 - \gamma'^2}{\gamma'}\right); \qquad 2\alpha'' = -\gamma''\left(\frac{\gamma'^2 + 3k^2}{\gamma'^2}\right).$$

Portant ces valeurs dans l'équation $\Lambda = 0$ il vient

$$\gamma''(\gamma'^2 - 3k^2) + 2\gamma'^4 - 2k^2\gamma'^2 = 0 \qquad \text{soit avec} \qquad \gamma' \equiv \mathrm{Y}^{-1}$$

$$\left[3 - \left(\frac{2}{1 - k^2\mathrm{Y}^2}\right)\right] d\mathrm{Y} = 2dx^1 \; ; \qquad \gamma' = k \coth\left[\frac{3k}{2\gamma'} - kx^1\right]$$

Dans ces conditions

$$\chi\rho = 12k^2e^{-2\alpha}\left(\frac{\gamma'^2 - k^2}{\gamma'^2 - 3k^2}\right) = \frac{12k^2e^{-2\alpha}}{\mathrm{ch}^2(\zeta)[1 - 3\mathrm{th}^2(\zeta)]} \; ; \quad \mathrm{Q}_1 = \frac{6k^2}{\chi}e^{-3\alpha}[\mathrm{sh}(\zeta)]^{-1}$$

On a posé $\zeta \equiv \left(\frac{3k}{2\gamma'} - kx^1\right)$.

La condition de positivité s'écrit $\mathrm{th}^2(\zeta) < \frac{1}{3}$.

Nous avons $\theta \equiv \nabla_\nu(\mathrm{U}^\nu) = 2ke^{-\alpha}$; $\dot{\mathrm{U}}_0 = \dot{\mathrm{U}}_2 = \dot{\mathrm{U}}_3 = 0$; $\dot{\mathrm{U}}_1 = -\alpha'$; $\dot{\mathrm{U}}_\alpha \equiv \mathrm{U}^\nu\nabla_\nu(\mathrm{U}_\alpha)$.

Les définitions

$$\sigma_{\alpha\beta} \equiv \mathrm{U}_{(\alpha;\beta)} - \mathrm{U}_{(\alpha}\dot{\mathrm{U}}_{\beta)} - \frac{\theta}{3}\pi_{\alpha\beta} \; ; \qquad \omega_{\alpha\beta} \equiv \mathrm{U}_{[\alpha;\beta]} + \mathrm{U}_{[\alpha}\dot{\mathrm{U}}_{\beta]}$$

$$\pi_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta} - \mathrm{U}_\alpha\mathrm{U}_\beta$$

fournissent les composantes non nulles

$$\begin{cases} \sigma_{01} = e^\alpha\alpha' \; ; \quad \sigma_{11} = \dfrac{2k}{3}e^\alpha \; ; \\ \qquad \sigma_{22} = \sigma_{33} = -\dfrac{k}{3}e^{-\alpha+2\omega+2\gamma} \rightarrow (\sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}) = 2e^{-2\alpha}\left(\dfrac{3k^2}{9} - \alpha'^2\right) \\ \omega_{01} = -e^\alpha\alpha' \; ; (\omega^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta}) = -2e^{-2\alpha}\alpha'^2. \end{cases}$$

V

Nous étudierons finalement le cas du champ mésonique vectoriel

$$\mathrm{T}_{\alpha\beta} = \theta_\alpha\theta_\beta - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(\theta^\nu\theta_\nu) \rightarrow \mathrm{R}_{\alpha\beta} = \chi\theta_\alpha\theta_\beta + \Lambda g_{\alpha\beta}.$$

On suppose $\theta_2 = \theta_3 = 0$ (pour éviter $\omega' = 0$; $\alpha' = \gamma'$). Il vient

$$\chi\theta_0{}^2 = -\omega'' + \mathrm{A} \; ; \qquad \chi\theta_1{}^2 = -[\omega'' + 2\omega'^2] + \mathrm{B}$$

$$\begin{cases} \Lambda = -e^{-2\alpha}\{[\omega'' + 2\omega'^2] - \gamma'' - 2\gamma'^2\} \\ 4\omega'^2(\alpha' - \gamma')^2 = [\omega'' - \mathrm{A}][(\omega'' + 2\omega'^2) - \mathrm{B}] \end{cases}$$

$$\mathrm{A} \equiv (\alpha'' - \gamma'') + 2\gamma'(\alpha' - \gamma') \; ; \qquad \mathrm{B} \equiv -(\alpha'' + \gamma'') + 2\alpha'\gamma'.$$

Soit $\Lambda = 0$; nécessairement $\omega'' + 2\omega'^2 = \gamma'' + 2\gamma'^2 = 2\mathrm{K}$.

Pour $K=m^2$: $2\omega=\log \operatorname{ch}(2mt)$ ou $\omega'=\pm m$; $2\gamma=\log$ ch $(2mx^1)$ ou $\gamma'=\pm m$.

Portant dans E_{01} on obtient

$$2m^2\{(B-2m^2)+2(\alpha'-\gamma')^2\operatorname{sh}^2(2mt)\}=A(B-2m^2)\operatorname{ch}^2(2mt).$$

Si $(B-2m^2)=2(\alpha'-\gamma')^2$, il vient $A=2m^2$.

Soit $\mathscr{H}'+2\gamma'\mathscr{H}=2m^2$ avec $\mathscr{H}\equiv(\alpha'-\gamma')$.

L'équation admet la solution $\mathscr{H}=\gamma' \rightarrow \alpha=2\gamma$; $\gamma'=m$

$$\chi\theta_0{}^2=2m^2\operatorname{th}^2(2mt)\,;\qquad \chi\theta_1{}^2=2m^2[\operatorname{ch}^2(2mx^1)-5][\operatorname{ch}(2mx^1)]^{-2}$$

d'où la condition $\operatorname{ch}^2(2mx^1)>5$

$$\chi(\theta^\nu\theta_\nu)=\frac{2m^2}{\operatorname{ch}^2(2mx^1)}\left\{\frac{\operatorname{sh}^2(2mt)}{\operatorname{ch}^2(2mt)}+\left[\frac{4-\operatorname{sh}^2(2mx^1)}{\operatorname{ch}^2(2mx^1)}\right]\right\};\qquad t\equiv x^0.$$

Si $K=-m^2$, $2\omega=\log\cos(2mt)$; $2\gamma=\log\cos(2mx^1)$

$$2m^2\{2(\alpha'-\gamma')^2\sin^2(2mt)-(B+2m^2)\}=A(B+2m^2)\cos^2(2mt).$$

Pour $B+2m^2=2(\alpha'-\gamma')^2$, $A=-2m^2 \rightarrow \alpha=2\gamma$

$$\chi\theta_0{}^2=2m^2\operatorname{tg}^2(2mt)\,;\qquad \chi\theta_1{}^2=2m^2\left[\frac{5-\cos^2(2mx^1)}{\cos^2(2mx^1)}\right];$$

$$\chi(\theta^\nu\theta_\nu)=\frac{2m^2}{\cos^2(2mx^1)}\left\{\operatorname{tg}^2(2mt)-\left[\frac{5-\cos^2(2mx^1)}{\cos^2(2mx^1)}\right]\right\}.$$

L'hypothèse $\alpha=\gamma \rightarrow A=0$ entraîne $\omega''(2K-B)=0$

$$2K-B=0 \rightleftharpoons \gamma''-\gamma'^2+K=0\,;\qquad \gamma=\alpha=-\log\,[\operatorname{sh}(mx^1)]$$

$$\text{si } K=m^2 \text{ (ou } \gamma'=\pm m)$$

$$\gamma=\alpha=-\log\,[\cos(mx^1)]\qquad \text{si}\qquad K=-m^2.$$

La solution correspondant à $K=m^2$ est exclue par $\chi\theta_0{}^2=-2m^2[\operatorname{ch}(2mt)]^{-2}$.

Par contre $\chi\theta_0{}^2=\dfrac{2m^2}{\cos^2(2mt)}$, $\chi\theta_1{}^2=0$ si $K=-m^2$ (méson temporel).

De plus ces valeurs imposent $\Lambda=3m^2$.

Postulant $\alpha=\gamma$, $\omega''=0$ la seule équation à satisfaire est celle en Λ, à savoir $\Lambda=-e^{-2\gamma}\{2k^2-\gamma''-2\gamma'^2\}$ soit $X''-4k^2X-2\Lambda X^2=0$; $X\equiv e^{2\gamma}$

Ou
$$2k\dot{x}=\frac{\pm 1}{X\sqrt{1+\dfrac{\Lambda X}{3k^2}}}\,;\qquad \dot{x}\equiv\frac{dx}{dX}\,;\qquad x\equiv x^1$$

Par exemple $kdx=-\dfrac{d\theta}{\operatorname{sh}\theta}$ en choisissant le signe $+$ (avec $\Lambda=3k^2b^2$).

Dans ces conditions $\theta_0{}^2=\theta_1{}^2=0$.

La conclusion est la même pour $=-3k^2b^2$.

En conclusion on peut attirer l'attention sur le fait suivant :
alors que tous les schémas considérés (vide, fluide parfait, f. p. thermodynamique, champ mésonique vectoriel) fournissent des solutions acceptables, le cas de la matière pure conduit à des impossibilités (dans les hypothèses envisagées).

RÉFÉRENCES

[*1*] A. H. TAUB, Empty space-times admitting a three parameter group of notions, *Ann. Math.*, t. **53**, 1951, p. 472-490.

[*2*] T. SINGH, A plane symmetric solution of Einstein's field equations of General Relativity containing zero-rest mass scalar fields, *G. R. G.*, t. **5**, n° 6, 1974, p. 657-662.

(Manuscrit reçu le 11 février 1982)