MICHEL BAUDERON

Le problème inverse du calcul des variations

Annales de l'I. H. P., section A, tome 36, nº 2 (1982), p. 159-179
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1982__36_2_159_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XXXVI, n° 2, 1982, p. 159-179.

Section A :
Physique théorique.

Le problème inverse du calcul des variations

par

Michel BAUDERON
I. U. T. A, Université Bordeaux I,
33405 Talence Cedex

RÉSUMÉ. — L'extension aux puissances extérieures de l'opérateur d'Euler-Lagrange fournit une suite exacte d'espaces vectoriels différentiels gradués, constituant une synthèse des diverses approches du problème inverse. Nous montrons que cette construction est tout à fait naturelle et redonne beaucoup plus simplement les résultats usuels. Elle nous donne de plus une preuve immédiate d'un résultat global conjecturé par Takens.

ABSTRACT. — Extending to higher exterior powers the Euler-Lagrange operator gives an exact sequence of graded differential vectors spaces, which unifies the various approaches to the inverse problem of the calculus of variations. We show that this construction is quite natural and gives much simpler proofs of the usual results. Moreover we obtain a straightforward proof of a global result conjectured by Takens.

I. INTRODUCTION

Le problème inverse du Calcul des Variations consiste à déterminer des conditions pour qu'un système d'équations aux dérivées partielles puisse être considéré comme les équations d'Euler-Lagrange associées à un certain problème variationnel, et si possible, à déterminer le lagrangien correspondant.

Des techniques d'analyse fonctionnelle (Vainberg, 1964) ont mis en évidence une condition dite d'auto-adjonction (cf. Tonti [*12*]) qui s'exprime à l'aide d'un nouveau système d'équations aux dérivées partielles portant sur les coefficients du système initial. Un résultat du type « lemme de Poincaré » montre que cette condition est suffisante localement (sur un ouvert simplement connexe). Pour plus de détails on pourra consulter Santilli [*9*] qui fait une analyse approfondie des diverses méthodes et propose une résolution explicite du cas classique (problème variationnel d'ordre un à une variable).

Une autre approche consiste à construire un complexe différentiel dont on prouve l'exactitude locale, toujours grâce à un « lemme de Poincaré » : c'est celle de Horndecki [*6*], qui sur un cas particulier construit effectivement un lagrangien. Elle a été renouvelée récemment par divers auteurs, dont Takens ([*10*] et [*11*]) et Tulczyjew ([*13*] et [*14*]).

Nous nous placerons ici dans le même contexte que ces derniers, utilisant le formalisme des espaces de jets de sections d'un fibré pour définir la notion de problème variationnel d'ordre quelconque à n variables. Nous rappelons les traits essentiels de ce formalisme aux § II et § IV.

La construction proposée au § III constitue une synthèse de ces différentes approches. Basée essentiellement sur la « naturalité » de l'opérateur qui à un champ de vecteurs sur l'espace total associe son extension aux jets de sections, elle permet, par un procédé élémentaire de « transposition » ou « d'adjonction », puis par une extension naturelle aux puissances extérieures, de retrouver les opérateurs définis *a priori* par Tulczyjew [*13*] ou par Takens (seulement pour le premier cf. [*10*]). Ces opérateurs que nous notons D^{p*}, définissent un homomorphisme de complexes de cochaînes et donc une suite exacte noyau-image : $0 \to G \to \mathfrak{A} \to \Lambda \to 0$ (suite d'Euler-Lagrange) réunissant les complexes G et Λ définis respectivement par Takens et Tulczyjew. L'obtention de cette suite exacte d'espaces vectoriels différentiels rend triviale la démonstration du « lemme de Poincaré » que les auteurs précédents n'obtiennent qu'au moyen de considérations élaborées de topologie algébrique (suites spectrales...) ou de restrictions sur le domaine considéré. De plus, elle nous permet de prouver en même temps un résultat global conjecturé par Takens : la nullité du $(n + 1)$-ième espace de cohomologie de de Rham de l'espace total du fibré assure que tout problème localement variationnel l'est globalement. Enfin, nous montrons dans les derniers paragraphes que la condition que nous donnons est exactement celle de Tonti et retrouvons bien les systèmes d'équations aux dérivées partielles donnés dans le cas classique par Santilli [*9*].

Nous reprenons ici des résultats exposés dans [*2*]. Depuis, nous avons pris connaissance de plusieurs articles prouvant le même résultat local (Olver [*8*], Kuperschmidt [*7*], Vinogradov [*15*] et [*16*]) ainsi que d'un preprint de Takens [*11*] prouvant sa conjecture globale. Toutes ces démonstrations utilisent des suites spectrales et sont relativement longues.

II. ESPACES DE JETS

Les notations que nous ne précisons pas sont les notations usuelles (cf. par exemple [*1*]). Toutes les variétés et applications différentiables que nous considérons sont de classe C^∞.

1. Notations.

Soit $M = (M, B, \pi)$ un espace fibré de base B et de projection π. Si U est un ouvert de B, on note $\Gamma_U(\pi)$ l'ensemble des sections de π au-dessus de U ; $\Gamma(\pi)$ est le faisceau des sections locales du fibré (M, B, π). Lorsque M est un fibré vectoriel, on peut se contenter d'étudier l'espace vectoriel $\Gamma_B(\pi)$ des sections globales du fibré.

Le fibré tangent vertical à M (relativement à la projection π) est le sous-fibré du fibré (TM, M, τ_M) tangent à M, noyau de l'application $T\pi : TM \to TB$ tangente à π ; nous le noterons (T^vM, M, τ_M^v).

Nous utiliserons par la suite les fibrés vectoriels suivants, tous de base M :

$T_qM = \Lambda^q(TM)$ fibré des q-vecteurs tangents à M, et le sous-fibré : $T_q^vM = \Lambda^q(T^vM)$ des q-vecteurs tangents verticaux;

$\Lambda^p(TM)^*$ fibré des p-covecteurs, ainsi que :

$(\Lambda^i(T^vM)^*) \wedge (\pi^*\Lambda^j(TB)^*)$ fibré des $(i + j)$-covecteurs s'annulant par produit intérieur avec au moins $i + 1$ vecteurs verticaux. C'est un sous-fibré du fibré $\Lambda^{i+j}(TM)^*$.

A chacun de ces fibrés vectoriels sur M est associé un espace vectoriel réel de sections globales au-dessus de M ; nous les noterons respectivement :

τ_qM et τ_q^vM espaces de champs de q-vecteurs,

A^qM et A_j^iM espaces de formes différentielles.

Il est bien clair que τ_q^vM est un sous-espace vectoriel de τ_qM et que A_j^iM est un sous-espace vectoriel de $A^{i+j}M$.

2. Fibré affine.

Un fibré affine E de base B modelé sur un fibré vectoriel (V, B, ζ) est un fibré (E, B, ξ) muni d'un morphisme de fibrés au-dessus de B : $V \times_B E \to E$ qui à un couple (v, e) associe $v + e$ appartenant à E, tel que pour tout point b de B, la fibre $E_b = \xi^{-1}(b)$ soit un espace affine modelé sur l'espace vectoriel $V_b = \zeta^{-1}(b)$ par l'application $V_b \times E_b \to E_b$ qui à (v, e) associe $v + e$. Pour tout point e de E_b, l'application $v \to v + e$ de V_b dans E_b est un difféomorphisme (pour plus de détails et des démonstrations, cf. Goldschmidt [*4*]).

Le fibré V étant vectoriel, sa fibre type est difféomorphe à un certain $\mathbb{R}^N$

(N entier désignant le rang du fibré) et il en est de même pour la fibre type de E. Il existe donc une section globale $s : B \to E$ de ξ et l'application de E dans V qui à un point e associe $e - s(\xi(e))$ est un isomorphisme de fibrés. En particulier, elle définit un difféomorphisme entre les espaces totaux E et V, qui induit en cohomologie un isomorphisme entre les espaces de cohomologie de de Rham de E et V. Comme de plus V est un fibré vectoriel, sa cohomologie est identique à celle de la base. Nous avons donc, en désignant par H_{dR} le foncteur « cohomologie de de Rham » :

$$H_{dR}(E) = H_{dR}(V) = H_{dR}(B).$$

3. Jets de sections.

On note $J_x^r(\pi)$ l'ensemble des r-jets de sections de π de source x, et $J^r(\pi)$ l'ensemble de tous les r-jets de sections de π. Pour $r \geqslant s \geqslant 0$, on note $\pi_r^s : J^r(\pi) \to J^s(\pi)$ l'application qui à un r-jet associe le s-jet qu'il détermine ; π_r^0 est l'application qui à un r-jet associe son but, et $\pi_r : J^r(\pi) \to B$ celle qui à un r-jet associe sa source. Les résultats suivants nous seront utiles : (pour plus de détails et des démonstrations, on pourra consulter Bourbaki [*3*] et Goldschmidt [*4*]).

— Les applications π_r^s et π_r déterminent des fibrés $\left(J^r(\pi), J^s(\pi), \pi_r^s\right)$ et $(J^r(\pi), B, \pi_r)$. Si (M, B, π) est un fibré vectoriel, les derniers sont aussi des fibrés vectoriels.

— Si s est une section de M au-dessus d'un ouvert U de B, l'application $x \to j_x^r s$ est une section de $J^r(\pi)$ au-dessus de U, notée $j^r s$. L'application $s \to j^r s$ induit un morphisme de faisceaux $j^r : \Gamma(\pi) \to \Gamma(J^r(\pi))$. Lorsque M est un fibré vectoriel, elle définit une application linéaire j^r de $\Gamma_B(\pi)$ dans $\Gamma_B(J^r(\pi))$. Nous noterons parfois : $j^r s(x) = j_x^r s$.

— Pour tout entier r, le fibré $\left(J^{r+1}(\pi), J^r(\pi), \pi_{r+1}^r\right)$ est un fibré affine modelé sur le fibré vectoriel $\pi_r^* S^{r+1}(TB^*) \otimes J^r(\pi)\pi_r^{0*}T^vM$ de base $J^r(\pi)$ où $S^{r+1}(TB^*)$ désigne la $(r+1)$-ième puissance symétrique de TB^*. Ce résultat prouve en particulier que quel que soit l'entier r, nous avons : $H_{dR}(J^{r+1}(\pi)) = H_{dR}(J^r(\pi))$ et donc que pour tout r :

$$H_{dR}(J^r(\pi)) = H_{dR}(M)$$

4. Espace des ∞-jets.

Pour $r \geqslant s \geqslant 0$, on associe à π_r^s son application linéaire tangente $T\pi_r^s : TJ^r(\pi) \to TJ^s(\pi)$. Les familles $\left(J^r(\pi), \pi_r^s\right)$ et $\left(TJ^r(\pi), T\pi_r^s\right)$ forment des systèmes projectifs dont les limites, notées $(J(\pi), \pi^s)$ et $(TJ(\pi), T\pi^s)$, sont par définition, l'espace des ∞-jets de sections de π et l'espace tangent à $J(\pi)$.

Notons $AJ^r(\pi) = \bigoplus_p A^pJ^r(\pi)$ l'algèbre différentielle graduée des formes différentielles sur $J^r(\pi)$. Les applications π_r^s induisent des applications π_r^{s*} de $AJ^s(\pi)$ dans $AJ^r(\pi)$, telles que la famille $(AJ^r(\pi), \pi_r^{s*})$ forme un système inductif dont la limite notée $(AJ(\pi), \pi^s)$ sera par définition, l'algèbre différentielle graduée des formes différentielles sur $J(\pi)$ (le produit extérieur et la différentielle définis par passage à la limite inductive, sont notés de la même façon et vérifient les propriétés usuelles, cf. Tulczyjew [*13*] et [*14*]). La différentielle extérieure fait de $AJ(\pi)$ un complexe de cochaînes A, dont $\bigoplus_p A_n^pJ(\pi)$ est un sous-complexe de cochaînes que nous noterons $\mathfrak{A}$.

Pour tous $r \geqslant s \geqslant 0$, nous identifierons systématiquement $AJ^s(\pi)$ à son image dans $AJ(\pi)$ et dans $AJ^r(\pi)$.

5. Cohomologie.

Nous noterons H le foncteur qui à un complexe de cochaînes (C, d) (espace vectoriel gradué muni d'une différentielle de degré 1) associe son espace vectoriel de cohomologie $H(C) = \ker d/\mathrm{Im}\, d$.

A l'espace $J(\pi)$ (qui *a priori* n'est pas une variété) nous avons associé le complexe $A = (AJ(\pi), d)$ et donc un espace de cohomologie $H(AJ(\pi))$. Le complexe A est la limite du système inductif (A_r, π_r^{s*}) de complexes de cochaînes $A_r = (AJ^r(\pi), d)$ dont l'espace de cohomologie $H(A_r)$ est par définition, l'espace vectoriel de cohomologie de de Rham de la variété $J^r(\pi)$. Le foncteur cohomologique H commutant avec les limites inductives, nous pouvons écrire :

$$H(A) = H(\varinjlim A_r) = \varinjlim H(A_r) = \varinjlim H_{dR}(J^r(\pi)).$$

Nous appellerons espace de cohomologie de de Rham de $J(\pi)$ l'espace vectoriel $H(A) : H_{dR}(J(\pi)) = H(A) = \varinjlim H_{dR}(J^r(\pi))$.

Les remarques faites au § II.3 prouvent la

PROPOSITION 1. — La cohomologie de de Rham de $J(\pi)$ est identique à celle de E, i. e. : $H_{dR}(J(\pi)) = H_{dR}(E)$.

6. Champs projetables.

Nous dirons qu'un champ de vecteurs $X_r \in \tau J^r(\pi)$ est projetable, si pour tout entier $s \leqslant r$, il existe un champ de vecteurs $X_s \in \tau J^s(\pi)$ tel que, pour tout $\bar{s}_r \in J^r(\pi)$ on ait : $X_s(\pi_r^s(\bar{s}_r)) = T\pi_r^s(X_r(\bar{s}_r))$. Notons $PJ^r(\pi)$ le sous-espace vectoriel de $\tau J^r(\pi)$ formé des champs de vecteurs projetables. L'application $T\pi_r^s$ induit une application linéaire $\tau\pi_r^s$ de $PJ^r(\pi)$ dans $PJ^s(\pi)$ telle que le système $(PJ^r(\pi), \tau\pi_r^s)$ soit projectif. L'espace vectoriel des champs projetables sur $J(\pi)$ est la limite projective $PJ(\pi)$ de ce système.

Le produit intérieur $i(X)\omega$ d'un champ de vecteurs projetable X et d'une p-forme ω sur $J(\pi)$ est défini par passage à la limite à partir du produit intérieur usuel. La proposition suivante (évidente) nous permettra de limiter toutes nos constructions aux seuls champs projetables :

PROPOSITION 2. — Soit ω une p-forme de $A^pJ(\pi)$. Si pour tout q-uplet de champs projetables $X_1, \ldots, X_q$ sur $J(\pi)$ avec $q \leqslant p$, on a $i(X_1) \ldots i(X_q)\omega = 0$ la forme ω est identiquement nulle.

Enfin, la dérivée de Lie d'une p-forme par un champ projetable X, notée L(X), est elle aussi définie par passage à la limite et vérifie naturellement : $L(X) = di(X) + i(X)d$ (cf. [*10*] ou [*13*]).

7. Expression en coordonnées locales.

Nous fixons ici les notations que nous utiliserons par la suite.

Soit (M, B, π) un fibré avec $\dim B = n$ et $\dim M = n + m$. A un système (x_i, y^j) de coordonnées locales sur M (avec $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant m$) tel que les (x_i) soient des coordonnées sur B, est associé un système de coordonnées locales (x_i, y^j, y_α^j) sur $J^r(\pi)$ (avec $|\alpha| \leqslant r$) où y_α^j est défini par : si s est une section locale de π, s'écrivant dans ces coordonnées $(x_i, \sigma^j(x_1, \ldots, x_n))$, et $\bar{s}_r$ son r-jet, on a : $y_\alpha^j(\sigma^j(x_1, \ldots, x_n)) = D^\alpha\sigma^j(x_1, \ldots, x_n)$, D^α désignant la dérivation partielle d'ordre $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leqslant r$.

Ces applications coordonnées permettent de définir des repères des divers espaces de p-vecteurs et de formes grâce aux applications : $\frac{\partial}{\partial x_j}$, $\partial_j = \frac{\partial}{\partial y^j}$, $\partial_j^\alpha = \frac{\partial}{\partial y_\alpha^j}$ et dx_i, dy^j, dy_α^j (on posera $\partial_j^0 = \partial_j$ et $dy_0^j = dy^j$). Nous obtenons alors les repères $\partial_{j_1 \ldots j_p}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = \partial_{j_1}^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \partial_{j_p}^{\alpha_p}$ pour l'espace des p-vecteurs verticaux, et pour l'espace des $(n+p)$-formes $A_r^pJ^r(\pi)$: $dy_{\alpha_1}^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy_{\alpha_p}^{j_p} \wedge dx$ (les indices sont tels que $1 \leqslant j_k \leqslant m$ et $|\alpha_k| \leqslant r$; les sommations sont toujours restreintes à des ensembles d'indices tels que les familles ci-dessus forment des bases des espaces vectoriels correspondants).

La suppression de la restriction $|\alpha| \leqslant r$ dans tout ce qui précède, définit un système de coordonnées locales sur l'espace des jets d'ordre infini et sur les divers espaces de champs de vecteurs et de formes qui lui sont associés, bien que ce dernier ne soit pas une variété au sens usuel du terme (en fait, seules les expressions pour les jets d'ordre fini seront utilisées dans les démonstrations).

III. LA SUITE D'EULER-LAGRANGE

Dans la suite, nous considérons toujours un même fibré (M, B, π) avec dim B $= n$ et dim M $= m + n$.

1. Relèvement d'un champ de vecteurs verticaux.

Soit $\tilde{X}$ un élément de $\tau^v M$, i. e. un champ de vecteurs verticaux sur M. Soit d'autre part $\bar{s}_r$ un r-jet de section de π et $s \in \bar{s}_r$ (s est une section vérifiant $\bar{s}_r = j^r_x s$, $x \in B$ désignant la source de $\bar{s}_r$). Le r-jet de $\tilde{X} \circ s$ au point x ne dépend pas de s, mais seulement de $\bar{s}_r$, car, d'après la règle de composition des jets : $j^r_x(\tilde{X} \circ s) = j^r_{s(x)}\tilde{X} \circ \bar{s}_r$. On définit ainsi une application de classe C^∞ sur $J^r(\pi)$: $\bar{s}_r \to \bar{X}_r(\bar{s}_r) = j^r_{s(x)}\tilde{X} \circ \bar{s}_r$ dont la valeur en un point de $J^r(\pi)$ ne dépend en fait que du r-jet de $\tilde{X}$ au point $y = s(x)$ but de $\bar{s}_r$. Cette application est *a priori* à valeurs dans l'espace $J^r(T^v M, B)$ des r-jets de sections de $T^v M$ au-dessus de B. Cependant :

PROPOSITION 3. — Cette application définit un champ de vecteurs verticaux sur $J^r(\pi)$, i. e. $\bar{X}_r \in \tau^v J^r(\pi)$.

Démonstration. — Soit s un représentant de $\bar{s}_r$ défini dans un voisinage ouvert U de x dans B. Dans un voisinage V de $y = s(x)$, le champ vertical $\tilde{X}$ sur M définit un flot vertical $t \to f_t$, t appartenant à un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, tel que : $\left.\dfrac{d}{dt} f_t(y)\right|_{t=0} = \tilde{X}(y)$. Nous pouvons ainsi construire une famille à un paramètre de sections de π au-dessus d'un voisinage U′ de x par : $(t, x') \to s_t(x') = f_t \circ s(x')$ pour $x' \in U'$. Cette famille vérifie naturellement $s_0 = s$ et : $\tilde{X}(s(x)) = \left.\dfrac{d}{dt} s_t(x)\right|_{t=0}$. La définition de $\bar{X}_r(\bar{s}_r)$ s'écrit :

$$\bar{X}_r(\bar{s}_r) = j^r_x(\tilde{X} \circ s) = j^r\left(\left.\frac{d}{dt} s_t(x)\right|_{t=0}\right) = \left.\frac{d}{dt}(j^r s_t(x))\right|_{t=0}.$$

Or, l'application $t \to j^r_x s_t$ définit une courbe différentiable dans $J^r(\pi)$ vérifiant $j^r_x s_0 = \bar{s}_r$, ce qui permet de considérer $\bar{X}_r(\bar{s}_r)$ comme un vecteur tangent vertical à $J^r(\pi)$ au point $\bar{s}_r$ (la courbe ainsi définie est dans la fibre au-dessus de $x = \pi_r(\bar{s}_r)$).

Nous avons ainsi défini un opérateur linéaire de relèvement aux r-jets $\Delta_r : \tau^v M \to \tau^v J^r(\pi)$ par $\Delta_r \tilde{X} = \bar{X}_r$, ceci pour un entier r quelconque. Les éléments de $I_r = \mathrm{Im}\ \Delta_r$ qui proviennent par « dérivation » d'un champ vertical sur M, sont les champs de vecteurs (verticaux) intégrables de Takens [*10*]. Ce sont des champs projetables.

D'autre part, l'application $\tau\pi_s^0 : PJ^s(\pi) \to \tau M$ définit une application surjective $\tau^v\pi_s^0 : P^vJ^s(\pi) \to \tau^v M$ (où $P^vJ^s(\pi)$ est le sous-espace des champs de vecteurs verticaux projetables) dont le noyau est le sous-espace des champs de vecteurs projetables sur $J^s(\pi)$ verticaux relativement à la fibration $(J^s(\pi), M, \pi_s^0)$; c'est la construction même de Δ_r qui assure la surjectivité de $\tau^v\pi_s^0$, puisque : $\tau^v\pi_s^0 \circ \Delta_s = \mathrm{Id}$. Ceci, pour un entier s quelconque.

Nous noterons D_r^1 l'application linéaire définie par : $D_r^1 = \Delta_r \circ \tau\pi_{2r}^0$ de $P^vJ^{2r}(\pi)$ dans $P^vJ^r(\pi)$. On a bien sûr $\mathrm{Im}\ D_r^1 = I_r$.

2. **Extension aux champs de p-vecteurs.**

Notons $P_p^vJ^r(\pi)$ le sous-espace vectoriel de $\tau_p^vJ^r(\pi)$ formé des champs de p-vecteurs verticaux projetables. La p-ième puissance extérieure de D_r^1 est l'application linéaire $\Lambda^pD_r^1$ définie sur les champs de p-vecteurs simples par : $X_{2r}^1 \wedge \dots \wedge X_{2r}^p \to \overline{X}_r^1 \wedge \dots \wedge \overline{X}_r^p$ puis étendue par linéarité (avec $X_{2r}^i \in P^vJ^{2r}(\pi)$ et $\overline{X}_r^i = D_r^1X_{2r}^i$). Cette application possède la factorisation remarquable suivante. Soit X un p-champ simple de $P_p^vJ^{2r}(\pi)$ possédant la décomposition $X = X_{2r}^1 \wedge \dots \wedge X_{2r}^p$; le champ

$$F_{2r}^p(X) = \frac{1}{p} \sum_{1 \leqslant q \leqslant p}^{p} \overline{X}_{2r}^1 \wedge \dots \wedge X_{2r}^q \wedge \dots \wedge \overline{X}_{2r}^p$$

(où on a posé $\overline{X}_{2r}^i = \Delta_{2r} \circ \tau\pi_{2r}^0(X_{2r}^i)$) est entièrement défini par la donnée de X, à un terme π_{2r}^0-vertical près. En étendant par linéarité, on peut ainsi construire une application F_{2r}^p sur $P_p^vJ^{2r}(\pi)$ à valeurs dans l'espace vectoriel quotient de $P_p^vJ^{2r}(\pi)$ par le sous-espace des champs π_{2r}^0-verticaux. Son noyau étant inclus dans celui de $\Lambda^pD_r^1$, elle permet de factoriser cette dernière à travers $\mathrm{Im}\ F_{2r}^p$, au moyen d'une application D_r^p vérifiant : $\Lambda^pD_r^1 = D_r^p \circ F_{2r}^p$, à valeurs dans $P_p^vJ^r(\pi)$.

3. **Opérateurs adjoints.**

Les résultats qui suivent reposent sur le :

THÉORÈME 1. — Pour tout entier r positif ou nul et pour tout entier p supérieur ou égal à 1, il existe une unique application linéaire D_r^{p*} de $A_n^pJ^r(\pi)$ dans $A_n^pJ^{2r}(\pi)$ telle que : pour toute $(n+p)$-forme ω appartenant à $A_n^pJ^r(\pi)$, pour toute n-chaîne N de B, pour toute section s définie sur un voisinage ouvert de N, pour tout champ de p-vecteurs X de $P_p^v J^{2r}(\pi)$ nul sur un voisinage de $j^{2r}s(\partial N)$ on ait :

$$\int_N j^r s^*(i(\Lambda^p D_r^1 X)\omega) = \int_N j^r s^*(i(D_r^p \circ F_{2r}^p X)\omega) = \int_N j^{2r} s^*(i(F_{2r}^p X)D^{p*}\omega)$$

(pour $p = 1$, F_{2r}^1 est l'identité et les deux premiers termes sont identiques).

Démonstration. — *a*) Si D et D' sont deux opérateurs vérifiant la relation désirée, leur différence T est telle que, sous les hypothèses du théorème, on ait : $\int_N j^{2r}s^*(i(X)T\omega) = 0$. L'unicité est donc une conséquence du lemme suivant :

LEMME 1. — Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Si pour toute application g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞, on a (pour tout U relativement compact) :

$$\int_U f(x)g(x)dx = 0, \qquad \text{alors pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}^n,\ f(x) = 0,$$

dont la démonstration est bien connue.

b) Dans le cas $p = 1$, nous allons prouver le résultat plus précis : il existe une application bilinéaire G_r^1 de $P^1J^{2r}(\pi) \times A_r^1 J^r(\pi)$ dans $A_{n-1}^0 J^{2r}(\pi)$ telle que, avec les mêmes notations :

$$j^r s^*(i(D_r^1 X)\omega) - j^{2r}s^*(i(X)D_r^{1*}\omega) = dG_r^1(X, \omega).$$

Pour ceci, la proposition étant de nature essentiellement locale, nous allons utiliser un système de coordonnées locales. La projection $\tilde{X}$ de X sur $\tau^v M$ (qui seule nous est utile d'après la définition de D_r^1) et la $n+1$-forme ω ont pour écritures : $X(x, \sigma(x)) = \sum_{j=1}^{m} X^j(x, \sigma(x))$ au point $(x, \sigma(x))$ et $\omega(\sigma_r(x)) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|=0}^{r} \omega_j^\alpha(\sigma_r(x))\ dy_\alpha^j \wedge dx$ en $\sigma_r(x)$. Le relèvement de X aux r-jets, s'écrit : $\overline{X}(\sigma_r) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|=0}^{r} D^\alpha X^j(x, \sigma(x))\partial_j^\alpha$ et son produit intérieur avec ω :

$\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|=0}^{r} D^\alpha X^j(x, \sigma(x))\omega_j^\alpha(\sigma_r(x))dx$. Le résultat annoncé est obtenu en appliquant aux fonctions $x \to X^j(x, \sigma(x))$ et $x \to \omega_j^\alpha(\sigma_r(x))$ le :

LEMME 2. — Soit f et g deux applications de classe C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

En tout point $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ on a : $D^\alpha f(x) \cdot g(x)dx - f(x)(-1)^{|\alpha|}D^\alpha g(x)dx = dG(f, g)(x)$ où l'on a posé :

$$H(f, g)(x) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_{j-1}} \sum_{k=1}^{\alpha_j} \frac{\partial^{\alpha_j + \ldots + \alpha_p}}{\partial x_j^{\alpha_j - k} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} f(x) \cdot \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_{j-1} + k - 1}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_j^{k-1}} g(x)$$

et $G(f, g)(x) = H(f, g)(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n$, le $\hat{}$ indiquant l'omission. De plus, l'application $G : (f, g) \to G(f, g)$ est bilinéaire.

La démonstration du lemme consiste en une simple vérification. En appliquant ce résultat, puis en sommant sur les indices j et α, nous obtenons pour expression locale de $D_r^{1*}\omega$:

$$D_r^{1*}\omega(\sigma_{2r}(x)) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{j=0}^{r} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \omega_j^\alpha \right) dy^j \wedge dx ,$$

l'expression de G_r^1 (qui est d'ailleurs sans grand intérêt) pouvant être obtenue à partir de celle de H.

c) Passons maintenant au cas $p > 1$. Remarquons tout d'abord, que la définition même de D_r^p nous permet de ne considérer que des champs de p-vecteurs appartenant à Im F_{2r}^p, et même de nous restreindre aux images par F_{2r}^p des champs de p-vecteurs simples de $P_p^v J^{2r}(\pi)$, qui engendrent cette image, et dont les images par $\Lambda^p D_r^1$ engendrent l'ensemble I_r^p des champs de p-vecteurs intégrables simples.

Soit donc $X = \frac{1}{p} \sum_{q=1}^{p} \overline{X}_{2r}^1 \wedge \ldots \wedge X_{2r}^q \wedge \ldots \wedge \overline{X}_{2r}^p$ un tel champ. Pour q compris entre 1 et p, la première partie du théorème nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} i(D_r^p X) \cdot \omega = & (-1)^q i(X_{2r}^q) D_r^{1*}(i(\overline{X}_r^2 \wedge \ldots \wedge \widehat{\overline{X}_r^q} \wedge \ldots \wedge \overline{X}_r^p) \cdot \omega) \\ & + dG^1\big(X_{2r}^q, i(\overline{X}_r^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\overline{X}_r^q} \wedge \ldots \wedge \overline{X}_r^p) \cdot \omega\big) . \end{aligned} \quad (1)$$

Nous allons montrer, en coordonnées locales, le résultat suivant :

LEMME 3. — Il existe une forme ω' de $A_n^p J^{2r}(\pi)$ telle que pour $1 \leqslant q \leqslant p$:

$$D_r^{1*}\big(i(\overline{X}_r^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\overline{X}_r^q} \wedge \ldots \wedge \overline{X}_r^p) \cdot \omega\big) = i\big(\overline{X}_{2r}^1 \wedge \ldots \wedge \overline{X} \wedge \ldots \wedge \overline{X}_{2r}^p\big) \cdot \omega'$$

La relation (1) s'écrira alors, pour $1 \leqslant q \leqslant p$:

$$\begin{aligned} i(D_r^p X) \cdot \omega &= (-1)^q i(X_{2r}^q \wedge \overline{X}_{2r}^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\overline{X}_r^q} \wedge \ldots \wedge \overline{X}_{2r}^p) \cdot \omega' + dG_r^1 \\ &= i(\overline{X}_{2r}^1 \wedge \ldots \wedge X_{2r}^q \wedge \ldots \wedge \overline{X}_{2r}^p) \cdot \omega' + dG_r^1 \end{aligned}$$

soit, en sommant sur q et en divisant par p :

$$i(D_r^p X) \cdot \omega = i(X) \cdot \omega' + dG_r^p(X, \omega)$$

où l'on a posé : $G_r^p(X, \omega) = \frac{1}{p} \sum_{q=1}^{p} dG_r^1(X_{2r}^q, i(\overline{X}_r^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\overline{X}_r^q} \ldots \overline{X}_r^q) \cdot \omega)$

d'où, finalement : $D_r^{p*}\omega = \omega'$.

Preuve du lemme. — En conservant toujours les mêmes notations, nous pouvons écrire les expressions locales de la projection $\tilde{X}^i$ de X_{2r}^i, de la forme ω et du relèvement $\overline{X}_r^i$:

$$\tilde{X}^i = \sum_{j=1}^{m} X^{i,j}\partial_j ; \qquad \omega = \sum_{\substack{j=1 \\ 0 \leqslant |\alpha| \leqslant r}}^{m} \omega_{j_1 \ldots j_p}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} dy_{\alpha_1}^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy_{\alpha_p}^{j_p} \wedge dx$$

$$\overline{X}_k^i = \sum \sum D\alpha X^{i,j}\partial_j^\alpha \qquad (\text{pour } 1 \leqslant j \leqslant m \text{ et } 0 \leqslant |\alpha| \leqslant r).$$

En mettant en évidence le terme $\overline{X}_r^q$ le produit extérieur $\overline{X}_r^1 \wedge \ldots \wedge \overline{X}_r^p$ a pour expression locale :

$$\sum (-1)^{\varepsilon(\sigma)}(-1)^q D^\alpha X^{q,j} \cdot D^{\alpha_1}X^{i_1,j_1} \ldots D^{\alpha_{p-1}}X^{i_{p-1},j_{p-1}}\partial_{jj_1 \ldots j_{p-1}}^{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}}$$

la sommation se fait sur les p-uplets $(j, j_1, \ldots, j_{p-1})$ et $(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})$ tels que $\partial_{jj_1 \ldots j_{p-1}}^{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}} = \partial_j^\alpha \wedge \partial_{j_1}^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \partial_{j_{p-1}}^{\alpha_{p-1}}$ forment une base de $\tau_p^v J^r(\pi)$ et les permutations σ de l'ensemble $\{1, \ldots, q-1, q+1, \ldots, p\}$ dont $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature. Nous obtenons ainsi pour $i(D_p^r X) \cdot \omega$ l'expression :

$$\sum (-1)^{\varepsilon(\sigma)}(-1)^q DX^{q,j} \cdot D^{\alpha_1}X^{i_1,j_1} \ldots D^{\alpha_{p-1}}X^{i_{p-1},j_{p-1}^p} \cdot \omega_{jj_1 \ldots j_{p-1}}^{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}} dx$$

Le passage à l'adjoint donne pour le premier membre de l'expression du lemme :

$$(-1)^q \sum (-1)^{\varepsilon(\sigma)}(-1)^{|\alpha|} D^\alpha(D^{\alpha_1}X^{i_1,j_1} \ldots D^{\alpha_{p-1}}X^{i_{p-1},j_{p-1}} \cdot \omega_{jj_1 \ldots j_{p-1}}^{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}}) dy^j \wedge dx$$

Développant le terme $D^\alpha(\ldots)$, nous obtenons :

$$\sum \Gamma_{\beta,\gamma}^\alpha D^{\alpha_1+\beta_1}X^{i_1,j_1} \ldots D^{\alpha_{p-1}+\beta_{p-1}}X^{i_{p-1},j_{p-1}} \cdot D^\gamma \omega_{jj_1 \ldots j_{p-1}}^{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}}$$

où la sommation est étendue cette fois aux p-uplets $(\beta_1, \ldots, \beta_{p-1}, \gamma) = (\beta, \gamma)$ tels que $\beta_1 + \ldots + \beta_{p-1} + \gamma = \alpha$, le coefficient $\Gamma_{\beta,\gamma}^\alpha$ étant un nombre entier naturel s'exprimant à l'aide des coefficients du binôme.

Appelons ω' la forme :

$$\sum(-1)^{\varepsilon(\sigma)}(-1)^{|\alpha|}\sum\Gamma^{\alpha}_{\beta,\gamma}\mathrm{D}^{\gamma}\omega^{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}}_{jj_1\ldots j_{p-1}}dy^{j_1}_{\alpha_1+\beta_1}\wedge\ldots\wedge dy^{j_{p-1}}_{\alpha_{p-1}+\beta_{p-1}}\wedge dy^j\wedge dx$$

(la première sommation se fait sur les p-uplets $(j, j_1, \ldots, j_{p-1})$ et $(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})$ et sur les permutations σ, la seconde sur les couples (β, γ), dans les conditions précédemment définies).

La forme que nous venons de définir vérifie bien la relation du lemme (en effet, on ne la modifie pas en remplaçant les permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, q-1, q+1, \ldots, p\}$ par celles de l'ensemble $\{1, \ldots, p-1\}$, ce qui montre que l'expression que nous avons obtenue pour ω' est indépendante du choix de l'indice q grâce auquel nous l'avons calculée).

d) Notons enfin, l'expression explicite de D^{2*}_r qui nous sera utile plus loin; pour une $n+2$-forme ω s'écrivant :

$$\omega = \sum\omega^{\alpha\beta}_{ij}dy^i_\alpha\wedge dy^j_\beta\wedge dx$$

nous obtenons l'expression suivante de $\mathrm{D}^{2*}_r\omega$:

$$\sum\left[(-1^{|\alpha|}\sum_{\gamma\leqslant\alpha}\mathrm{C}^{\gamma}_{\alpha}\mathrm{D}^{\alpha-\gamma}\omega^{\alpha\beta}_{ij}dy^j_{\beta+\gamma}-(-1)^{|\beta|}\sum_{\gamma\leqslant\beta}\mathrm{C}^{\gamma}_{\beta}\mathrm{D}^{\beta-\gamma}\omega^{\alpha\beta}_{ji}dy^j_{\alpha+\gamma}\right]\wedge dy^i\wedge dx$$

où les sommations non explicitées sont étendues aux indices i et j compris entre 1 et m et aux multi-indices α et β de $\mathbb{N}^n$ de longueur comprise entre 0 et r, les $\mathrm{C}^{\gamma}_{\alpha}$ désignant ici les coefficients du binôme.

4. Passage aux ∞-jets.

On vérifie sans peine la commutativité du diagramme suivant :

i)
$$\begin{tikzcd} & \mathrm{P}^v\mathrm{J}^r(\pi) \arrow[d, "\tau\pi^s_r"] \\ \tau^v\mathrm{M} \arrow[ur, "\Delta_r"] \arrow[r, "\Delta_s"] & \mathrm{P}^v\mathrm{J}^s(\pi) \end{tikzcd} \qquad (\text{pour } r \geqslant s \geqslant 0)$$

qui entraîne celle du diagramme :

ii)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{P}^r\mathrm{J}^{2r}(\pi) \arrow[r, "\mathrm{D}^1_r"] \arrow[d, "\tau\pi^{2s}_{2r}"'] & \mathrm{P}^v\mathrm{J}^r(\pi) \arrow[d, "\tau\pi^s_r"] \\ \mathrm{P}^v\mathrm{J}^{2s}(\ ) \arrow[r, "\mathrm{D}^1_s"] & \mathrm{P}^v\mathrm{J}^s(\pi) \end{tikzcd} \qquad (r \geqslant s \geqslant 0).$$

Nous pouvons donc par passage à la limite projective sur r, définir des applications linéaires Δ de $\tau^v\mathrm{M}$ dans $\mathrm{P}^v\mathrm{J}(\pi)$ et D^1 de $\mathrm{P}^v\mathrm{J}(\pi)$ dans lui-même, limites projectives des familles d'applications linéaires (Δ_r) et (D^1_r). Nous noterons $\mathrm{I} = \mathrm{Im}\,\Delta = \mathrm{Im}\,\mathrm{D}^1 = \varprojlim \mathrm{I}_r$.

Le diagramme (*ii*) s'étend bien entendu aux puissances extérieures et nous donne par passage à la limite, une application $\Lambda^p D^1 = \varprojlim \Lambda^p D_r^1$. La construction de l'application F_{2r}^p commutant aussi avec les projections $\tau\pi_r^s$, la factorisation de l'opérateur $\Lambda^p D_r^1$ passe à la limite projective, i. e., il existe des applications linéaires $F^p = \varprojlim F_{2r}^p$ et $D^p = \varprojlim D_r^p$ telles que : $\Lambda^p D^1 = D^p \circ F^p$, D^p étant défini sur $\operatorname{Im} F^p = \varprojlim \operatorname{Im} F_{2r}^p$, sous-espace vectoriel de l'espace quotient de $P_p^v J(\pi)$ par le sous-espace formé des vecteurs π^0-verticaux.

Les propriétés précédentes et la définition du produit intérieur sur $J(\pi)$ prouvent la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} A_n^p J^s(\pi) & \xrightarrow{D_s^{p*}} & A_n^p J^{2s}(\pi) \\ {\scriptstyle \pi_r^{s*}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{2r}^{2s*}} \\ A_n^p J^r(\pi) & \xrightarrow{D_r^{p*}} & A_n^p J^{2r}(\pi) \end{array} \qquad (\text{pour} : r \geqslant s \geqslant 0 \text{ et } p \geqslant 1).$$

qui nous permet donc de définir pour tout entier p supérieur ou égal à 1, une application D^{p*} linéaire, de $A_n^p J(\pi)$ dans lui-même, limite inductive de la famille d'applications linéaires (D_r^{p*}).

Les diverses applications que nous venons de construire vérifient naturellement la relation :

$$\int_N js^*(i(\Lambda^p D^1 X) \cdot \omega) = \int_N js^*(i(D^p \circ F^p X) \cdot \omega) = \int_N js^*(i(F^p X) \cdot D^{p*}\omega)$$

du théorème I, sous les mêmes hypothèses (en supprimant simplement les indices précisant l'ordre du jet considéré).

5. **Suite Noyau-Image.**

Pour tout entier r, notons par $G_n^p J^r(\pi)$ et par Λ_r^p respectivement, le noyau et l'image de l'application linéaire D_r^{p*}. Notant toujours par suppression de r, les limites des systèmes inductifs associés à $G_n^p J^r(\pi)$ et Λ_r^p et aux projections π_r^{s*}, nous pouvons écrire, pour tout entier p supérieur ou égal à 1, la suite exacte d'espaces vectoriels réels :

$$0 \to G_n^p J(\pi) \to A_n^p J(\pi) \overset{D^{p*}}{\to} \Lambda^p \to 0$$

suite noyau-image associée à D^{p*}. Le noyau de D^{p*} est caractérisé par la propriété suivante :

une $(n + p)$-forme ω de $A_n^p J(\pi)$ appartient à $G_n^p J(\pi)$ si et seulement si, pour tout champ de p-vecteurs intégrable simple $\overline{X}^1 \wedge \ldots \wedge \overline{X}^p$ et pour tous N et s vérifiant les hypothèses du théorème I, on a :

$$\int_N js^*(i(\overline{X}^1 \wedge \ldots \wedge \overline{X}^p) \cdot \omega) = 0 .$$

On retrouve ainsi les ensembles $G_n^p(\pi)$ définis par Takens [*10*].

D'autre part, nous pouvons remarquer que l'espace Λ^1 est très exactement l'espace vectoriel des formes semi-basiques sur $J(\pi)$ relativement à la projection π^0 de $J(\pi)$ sur M. En effet, la définition de D_r^{1*} prouve que pour toute $(n+1)$-forme ω, son image s'annule sur le noyau de l'opérateur D_r^1, i. e., sur le sous-espace vectoriel des champs projetables π_{2n}^0-verticaux. Λ_r^1 est donc un sous-espace de l'espace des formes π_{2r}^0-semi-basiques. L'inclusion inverse est fausse à un ordre r donné. Cependant, soit ω une $(n+1)$-forme π^0-semi-basique. Une telle forme s'écrit comme limite inductive d'une famille (ω_r) de formes π_r^0-semi-basiques. Moyennant l'identification de $A_n^1J^k(\pi)$ avec son image, sous-espace vectoriel de $A_n^1J^{k'}(\pi)$ pour k' supérieur ou égal à k, l'expression de D_r^{1*} montre que $D_r^{1*}\omega_r = \omega_r$. Par passage à la limite inductive sur r, il vient : $D^{1*}\omega = \omega$, ce qui prouve bien que ω appartient à Λ^1.

Nous allons enfin étendre nos constructions à $p = 0$. Soit $G_n^0J^r(\pi)$ le sous-espace vectoriel de $A_n^0J^r(\pi)$ des n-formes π_r-semi-basiques vérifiant : $\int_N j^r s_1^* \omega = \int_N j^r s_2^* \omega$ pour toute n-chaîne de B et pour tout couple de sections s_1 et s_2 homotopes et identiques sur un voisinage du bord de N. Notant Λ_r^0 le quotient de $A_n^0J^r(\pi)$ par $G_n^0J^r(\pi)$ et D_r^0 la projection associée, nous obtenons par passage à la limite inductive sur r, une nouvelle suite exacte d'espaces vectoriels réels :

$$0 \to G_n^0J(\pi) \to A_n^0J(\pi) \xrightarrow{D^0} \Lambda^0 \to 0 .$$

6. La suite d'Euler-Lagrange.

PROPOSITION 4. — Pour tout entier p positif ou nul, il existe une unique application δ^p de Λ^p dans Λ^{p+1} telle que :

i) $\delta^p \circ D^p = D^{p+1} \circ d$
ii) $\delta^{p+1} \circ \delta^p = 0$.

Démonstration. — Elle repose en partie sur le résultat suivant : munie de la différentielle extérieure, la famille d'espaces vectoriels $G_n^pJ(\pi)$ est un sous-complexe de co-chaînes du complexe $\mathfrak{A} = (A_n^pJ(\pi), d)$, dont la démonstration se trouve dans Takens [*10*] (théorème 3.6.*d*).

Soit $\omega \in \Lambda^p$ et soient $\omega_i (i = 1, 2)$ deux $(n+p)$-formes différentielles telles que : $D^{p*}\omega_i = \omega (i = 1, 2)$. La différence $\omega_1 - \omega_2$ appartient à $G_n^pJ(\pi)$, et donc $d(\omega_1 - \omega_2) \in G_n^{p+1}J(\pi)$, i. e. : $D^{p+1*} \circ d(\omega_1 - \omega_2) = 0$ d'où par linéarité : $D^{p+1*} \circ d(\omega_1) = D^{p+1*} \circ d(\omega_2)$.

On peut donc définir δ^p comme étant l'application linéaire de Λ^p dans Λ^{p+1} qui à $\omega \in \Lambda^p$ associe la forme $\delta^p(\omega) = D^{p+1*} \circ d(\omega_1)$ où ω_1 est un antécédent quelconque de ω par D^{p*}.

La propriété *a*) est vérifiée par construction.

Calculons $\delta^{p+1} \circ \delta^p(\omega) = D^{p+2*} \circ d(\delta^p(\omega))$. Par définition, $\delta^p(\omega) = D^{p+1*} \circ d\omega$, i. e., $d\omega$ est un antécédent de $\delta^p(\omega)$ par D^{p+1*}. On a donc :

$$\delta^{p+1} \circ \delta^p(\omega) = D^{p+2*} \circ d(d\omega)$$

i. e. : $\delta^{p+1} \circ \delta^p(\omega) = 0$.

Les applications $\delta^p (p \geqslant 0)$ définissent donc un complexe de cochaînes (Λ^p, δ^p) et les résultats précédents montrent que les opérateurs D^{p*} forment un homomorphisme de complexes de cochaînes, de $(A_n^p J(\pi), d)$ dans (Λ^p, δ^p), de noyau $(G_n^p J(\pi), d)$.

Notons $\mathfrak{A}$, G et Λ les complexes de cochaînes (espaces vectoriels différentiels gradués) associés respectivement à $(A_n^p J(\pi), d)$, $(G_n^p J(\pi), d)$ et (Λ^p, δ^p), et D^* l'homomorphisme de complexes associé à D^{p*}.

Les résultats de ce numéro se résument dans le :

THÉORÈME II. — La suite de complexes de cochaînes (d'espaces vectoriels)

$$0 \to G \to \mathfrak{A} \xrightarrow{D^*} \Lambda \to 0$$

est exacte (suite exacte d'Euler-Lagrange).

qui traduit l'existence d'un diagramme à lignes exactes et carrés commutatifs :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
0 & \to & G_n^0 J(\pi) & \to & A_n^0 J(\pi) & \xrightarrow{D^{0*}} & \Lambda^0 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle \delta^0} & & \\
0 & \to & G_n^1 J(\pi) & \to & A_n^1 J(\pi) & \xrightarrow{D^{1*}} & \Lambda^1 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle \delta^1} & & \\
0 & \to & G_n^2 J(\pi) & \to & A_n^2 J(\pi) & \xrightarrow{D^{2*}} & \Lambda^2 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & G_n^p J(\pi) & \to & A_n^p J(\pi) & \xrightarrow{D^{p*}} & \Lambda^p & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Remarque (Takens [*10*] Remark (4.3)) :

La colonne de droite du diagramme est exacte en Λ^0, i. e., l'application δ^0 est injective. Soient en effet ω_1 et ω_2 deux n-formes appartenant à $A_n^0 J(\pi)$, telles que : $D^{1*} \circ d(\omega_1) = D^{1*} \circ d(\omega_2)$. Choisissons une famille s_t à un paramètre de sections de π, définie sur un voisinage de $\overline{N}$ (pour une certaine n-chaîne N) et constante sur un voisinage du complémentaire de N. Nous pouvons alors écrire, en désignant par $\overline{X}_t$ le champ vertical intégrable associé à la famille de sections s_t $\left(\text{il est défini par : } \overline{X}_t(js(w)) = \frac{d}{dt}(js_t(w))\right)$.

$$\begin{aligned}\int_N js_1^*(\omega_1 - \omega_2) - \int_N js_0^*(\omega_1 - \omega_2) &= \int_0^1 \left(\frac{d}{dt}\int_N js_t^*(\omega_1 - \omega_2)\right)dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_N js_t^*(i(\overline{X}_t)\cdot(d\omega_1 - d\omega_2))\right)dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_N js_t^*(i(X_t)\cdot(D^{1*}\circ d\omega_1 - D^{1*}\circ d\omega_2))\right)dt = 0\end{aligned}$$

ce qui prouve que la différence $\omega_1 - \omega_2$ appartient au sous-espace vectoriel $G_n^0 J(\pi)$. Leurs images dans Λ^0 par l'application D^{0*} sont donc égales, ce qui montre bien que δ^0 est injective (on a noté ici X_t un champ vertical sur $J(\pi)$ tel que $\overline{X}_t = D^1 X_t$).

7. **Cohomologie.**

Notant toujours H le foncteur cohomologique, nous obtenons le :

THÉORÈME III. — La suite $0 \to H(G) \to H(\mathfrak{A}) \overset{D^*}{\to} H(\Lambda) \to 0$ d'espaces vectoriels gradués est exacte; autrement dit, pour tout entier p positif ou nul, la suite

$$0 \to H^p(G) \to H^p(\mathfrak{A}) \to H^p(\Lambda) \to 0 \qquad \text{est exacte}.$$

Ce théorème est une conséquence immédiate du fait que la suite d'Euler-Lagrange est une suite exacte d'espaces vectoriels, donc une suite exacte scindée. Il a d'autre part les deux corollaires suivants :

COROLLAIRE I. — (Lemme de Poincaré).

Si l'espace total M est contractile, le complexe (Λ, δ) est acyclique en toutes dimensions.

En effet, si M est contractile, $H_{dR}(M)$ est nul et $H_{dR}(J(\pi))$ l'est donc aussi. Or pour tout entier p positif ou nul $A_n^p J(\pi)$ est un sous-espace vectoriel de $A^{n+p}J(\pi)$, ce qui entraîne que l'espace vectoriel de cohomologie du complexe $(\mathfrak{A}, d)$ est un sous-espace vectoriel de $H(A) = H_{dR}J(\pi)$, et plus précisément que pour tout p, $H^p(C)$ est un sous-espace de $H_{dR}^{n+p}J(\pi)$. La nullité de $H_{dR}(M)$ entraîne donc celle de $H(\mathfrak{A})$ ainsi que celle de $H(\Lambda)$.

Cette même démonstration lorsque $p = 1$. prouve le :

COROLLAIRE II. — Si $H_{dR}^{n+1}(M) = 0$, l'espace $H^1(\Lambda)$ est nul lui aussi.

IV. LE PROBLÈME INVERSE

1. Calcul des variations.

Nous considérons toujours un fibré (M^{n+m}, B^n, π). Un *Lagrangien* sur M est une n-forme $\mathscr{L}$ appartenant à $A_n^0 J(\pi)$. Nous dirons qu'il est d'ordre r s'il est l'image par π^{r*} d'un élément de $A_n^0 J^r(\pi)$ (auquel nous l'identifierons).

Pour toute n-chaîne N de B, la donnée de $\mathscr{L}$ permet de définir une fonctionnelle I_N (« intégrale d'action ») sur l'ensemble des sections s de π définies sur un ouvert U contenant $\overline{N}$ en posant :

$$I_N(s) = \int_N js^*\mathscr{L} = \int_{js(N)} \mathscr{L}.$$

Si s est une telle section, nous appellerons déformation de s, toute famille à un paramètre $t \to s_t$ de sections de π au-dessus de U, définie sur un voisinage de N et telle que : $s_0 = s$. A toute déformation de s est associé un champ de vecteur vertical X sur M, défini par : $X(s(x)) = \frac{d}{dt} s_t(x)\Big|_{t=0}$ sur $s(U)$. Réciproquement nous avons vu (§ III) qu'à tout champ de vecteurs vertical X nul sur un voisinage de $s(\partial N)$ est associée une déformation de s.

Nous dirons que s est une extrêmale de l'intégrale d'action I_N, si pour toute déformation s_t de s on a : pour tout t, $I_N(s) \leqslant I_N(s_t)$. Une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi est que, pour toute déformation s_t de s, on ait : $\frac{d}{dt} I_N(s_t)\Big|_{t=0} = 0$. Or :

$$\frac{d}{dt} I_N(s_t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_N js_t^*\mathscr{L}\Big|_{t=0} = \int_N js^*(i(\overline{X})\cdot d\mathscr{L})$$

où l'on a posé : $\overline{X}(\overline{s}) = \frac{d}{dt} js_t(x)\Big|_{t=0}$ (avec $\overline{s} = js(x)$). Le champ $\overline{X}$ est un champ vertical intégrable et vérifie $\overline{X} = \Delta X$, où X est le champ associé à la déformation s_t. La condition nécessaire s'écrit maintenant : pour tout champ de vecteurs vertical intégrable $\overline{X}$ nul sur un voisinage de $js(\partial N)$ on a : $\int_N js^*(i(\overline{X})\cdot d\mathscr{L}) = 0$. (Cf. Takens [*10*] ou Goldschmidt et Sternberg [*5*]).

La forme d'Euler-Lagrange associée au Lagrangien $\mathscr{L}$ est la $(n+1)$-forme $\mathscr{E}$ définie sur $J(\pi)$ par : $\mathscr{E} = D^{1*} \circ d\mathscr{L} = \delta^0(D^0\mathscr{L})$. La généralisation à ce contexte des équations d'Euler-Lagrange s'exprime ainsi :

pour qu'une section s de π soit une extrêmale de I^N, il faut qu'elle vérifie l'équation : $js^*\mathscr{E}|_N = 0$.

Localement, pour un Lagrangien $\mathscr{L} = Ldx$ où L est une fonction différentiable sur $J(\pi)$, la forme d'Euler-Lagrange a pour expression :

$$\mathscr{E} = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\frac{\partial L}{\partial y_\alpha^j}\right)dy^j \wedge dx\,.$$

Dans le cas classique $n = r = 1$, on retrouve bien l'expression usuelle des équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{dy^j} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{dy_1^j}\right) = 0 \qquad \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant m\,.$$

2. Le problème inverse.

D'après le § III, la forme d'Euler-Lagrange associée à un Lagrangien donné $\mathscr{L}$ appartient à Λ^1 et ne dépend en fait que de la classe d'équivalence de $\mathscr{L}$ dans Λ^0.

Nous appellerons *équation source* (suivant Takens [*10*]) ou *équation de mouvement* (suivant Santilli [*9*]) une $(n + 1)$-forme différentielle sur $J(\pi)$ appartenant à Λ^1, i. e., π^0-semi-basique. Le problème inverse du calcul des variations consiste à rechercher des conditions pour qu'une équation source soit la forme d'Euler-Lagrange associée à un certain Lagrangien.

Nous dirons qu'une équation source ω est *variationnelle* (resp. *localement variationnelle*) s'il existe $\mathscr{L} \in \Lambda^0$ tel que $\omega = \delta^0\mathscr{L}$ (resp. « localement » $\omega = \delta^0\mathscr{L}$).

Traduisant dans le langage du calcul des variations les deux corollaires du théorème III, nous obtenons les deux théorèmes :

THÉORÈME IV. — Pour qu'une équation source ω soit localement variationnelle il faut et il suffit que : $\delta^1\omega = 0$ (« localement » signifie ici : sur tout ouvert simplement connexe de l'espace total M).

THÉORÈME V. — Pour que toute équation source localement variationnelle soit (globalement) variationnelle, il suffit que l'espace vectoriel $H^1(\Lambda)$ soit réduit à 0. En particulier, une condition suffisante est que le $(n + 1)$-ième espace de cohomologie de de Rham de l'espace total du fibré soit nul, i. e., $H_{dR}^{n+1}(M) = 0$.

Le théorème IV apparaît sous des formes diverses chez Tulczyjew [*13*] et [*14*] (sous les mêmes hypothèses) et chez Takens [*10*] et Horndecki [*6*] (mais sous des hypothèses plus restrictives). Le théorème V répond à une conjecture de Takens (cf. [*10*] conjecture 4.10, p. 598).

3. Auto-adjonction.

La condition nécessaire et suffisante du théorème IV peut s'écrire sous deux formes équivalentes :

$$d\omega \in G_n^2 J(\pi) \qquad \text{ou} \qquad D^{2*} \circ d(\omega) = 0 .$$

C'est la première forme, à l'aspect très « géométrique », qu'utilise Takens pour montrer que des équations sources présentant un nombre suffisant de symétries et de lois de conservation, sont, sous certaines conditions, localement variationnelles. Cette même expression est très exactement la condition d'auto-adjonction de Vainberg et Tonti [*12*]. Soit en effet une équation source ω vérifiant cette condition. C'est une forme semi-basique relativement à la projection π^0, i. e., une section du fibré $\pi^{0*}((T^vM)^* \wedge (\Lambda^n(TB)^*)$ de base $J(\pi)$. Sa différentielle extérieure est donc une section du fibré $(T^vJ(\pi)) \wedge \pi^{0*}((T^vM)^* \wedge (\Lambda^n(TB)^*)$ et vérifie (toujours avec les mêmes notations) : pour tout champ de 2-vecteurs intégrable simple $\overline{X} \wedge \overline{Y}$, on a :

$$i(\overline{X} \wedge \overline{Y}) \cdot d\omega = -\,(i(\overline{X} \wedge Y) \cdot d\omega + i(X \wedge \overline{Y}) \cdot d\omega) .$$

La propriété $d\omega \in G_n^2 J(\pi)$ s'écrit alors :

$$\int_{js(N)} i(\overline{X} \wedge \overline{Y}) \cdot d\omega = 0 \qquad \text{pour N}, s,$$

$\overline{X} \wedge \overline{Y}$ satisfaisant aux hypothèses du théorème I et devient donc :

$$\int_{js(N)} i(\overline{X} \wedge Y) \cdot d\omega = \int_{js(N)} i(\overline{Y} \wedge X) \cdot d\omega$$

ce qui est précisément la condition d'auto-adjonction de la forme ω telle qu'elle figure dans Santilli [*9*], p. 57, définition 2.1.1).

4. La deuxième forme de la condition se traduit en coordonnées locales par un système d'équations aux dérivées partielles. En effet, étant donnée $\omega = \sum_{j=1}^{m} \omega^j dy^j \wedge dx$ appartenant à Λ^1, le calcul de $D^{2*} \circ d\omega$ nous donne :

$$D^{2*} \circ d\omega = \sum_{\substack{i,j=1 \\ \alpha \in \mathbb{N}^n}}^{m} \left[\left((-1)^{|\alpha|} \sum_{\gamma \leqslant \alpha} C_\alpha^\gamma D^{\alpha-\gamma} \frac{\partial \omega^j}{\partial y^i} dy^j \right) - \frac{\partial \omega^i}{\partial y^j} dy_\alpha^j \right] \wedge dy^i \wedge dx$$

dont la nullité s'exprime bien à l'aide d'un système d'équations aux dérivées partielles portant sur les coefficients ω^j de la forme ω.

Pour vérifier que ce système généralise bien les équations classiques, écrivons-le dans le cadre de la mécanique classique, i. e., pour $n = r = 1$. Reprenons pour cela les notations traditionnelles : t, q^j, $\dot{q}^j(s) = \frac{ds^j}{dt}$ et $\ddot{q}^j(s) = \frac{d^2 s^j}{dt^2}$. Étant donnée une forme $\omega = \sum_{j=1}^{m} \omega^j dq^j \wedge dt$, le calcul de $D^{2*} \circ d\omega$ nous donne en regroupant les termes analogues :

$$
\begin{aligned}
D^{2*} \circ d\omega = \sum_{i,j=1}^{m} \Bigg[& \left(\frac{\partial \omega^j}{\partial q^i} - \frac{\partial \omega^i}{\partial q^j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \omega^j}{\partial \dot{q}^i} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \omega^j}{\partial \ddot{q}^i} \right) dq^j \wedge dq^i \wedge dt \\
& + \left(- \frac{\partial \omega^j}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \omega^i}{\partial \dot{q}^j} + 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial \omega^j}{\partial \ddot{q}^i} \right) d\dot{q}^j \wedge dq^i \wedge dt \\
& + \left(\frac{d\omega^j}{\partial \ddot{q}^i} - \frac{\partial \omega^i}{\partial \ddot{q}^j} \right) d\ddot{q}^j \wedge dq^i \wedge dt .
\end{aligned}
$$

En annulant les coefficients de cette forme, nous obtenons le système :

$$
\left\{
\begin{aligned}
& \frac{\partial \omega^j}{\partial \ddot{q}^i} - \frac{\partial \omega^i}{\partial \ddot{q}^j} = 0 \\
& \frac{\partial \omega^j}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial \omega^i}{\partial \dot{q}^j} = 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial \omega^j}{\partial \ddot{q}^i} \qquad \text{(pour } 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m) \\
& \frac{\partial \omega^j}{\partial q^i} - \frac{\partial \omega^i}{\partial q^j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \omega^j}{\partial \dot{q}^i} - \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \omega^j}{\partial \ddot{q}^i}
\end{aligned}
\right.
$$

Ce système est bien celui obtenu par Santilli (cf. [9], p. 59, équations 2.1.18) pour caractériser l'auto-adjonction et qui lui permet de donner une solution explicite du problème inverse sur un ouvert étoilé (du moins dans ce cas).

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] ABRAHAM et MARSDEN, *Foundations of Mechanics*, 2nd edition (Benjamin).

[2] BAUDERON, *Thèse de troisième cycle*, Université de Paris VI, 1980.

[3] BOURBAKI, *Variétés différentiables et analytiques. Fascicule de résultats*, Hermann. Paris.

[4] GOLDSCHMIDT, Integrability criteria for partial differential equations, *J. Diff. Geom.*, t. **I**, 1967, p. 269-307.

[5] GOLDSCHMIDT et STERNBERG, Hamiltonian formalism in the calculus of variations. *Ann. Ins. Fourier*, t. **23**, 1, 1973, p. 203-267.

[6] HORNDECKI, Differential operators associated with the Euler-Lagrange operator. *Tensor N. S.*, t. **28**, 1974.

[7] KUPERSCHMIDT, *Geometry of jet bundles and the structure of lagrangian and hamiltonian formalism*, Geometrical methods in Mathematical physics, Lect. Notes n° 775, Springer-Verlag, 1980.

[8] OLVER, On the hamiltonian structure of evolution equations, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. **88**, 1980, p. 71-88.

[9] SANTILLI, *Foundations of theoretical mechanics I*, Texts and monographs in physics, Springer-Verlag, 1978.

[10] TAKENS, *Symmetries, conservations laws and variation al principle*, Geometry and topology, Lect. Notes in Maths n° 597, Springer-Verlag.

[11] TAKENS, *A global version of the inverse problem of the calculus of variations* Preprint, Rijksuniversiteit Groningen, 1977.

[12] TONTI, Variational formulation of nonlinear differential equations (I), *Bull. Sci. Acad. Roy. Belg.*, t. **55**, 1969, p. 137-165.

[13] TULCZYJEW, The Lagrange Complex. *Bull. Soc. Math.*, France, t. **105**, 1977, p. 419-431.

[14] TULCZYJEW, *The Euler-Lagrange resolution* and TULCZYJEW et DEDECKER, *Spectral sequences and the inverse problem of the calculus of variations*, Differential Geometrical methods in Mathematical Physics, Lect. Notes in Maths n° 836, Springer-Verlag, 1980, p. 22-48 and p. 498-503.

[15] VINOGRADOV, On the algebro-geometric foundations of Lagrangian field Theory, *Soviet. Math. Dokl.*, t. **18**, 1977, p. 1200-1204.

[16] VINOGRADOV, A spectral sequence associated with a nonlinear differential equation, and algebro-geometric foundations of Lagrangian field theory with constraints, *Soviet Math. Dokl.*, t. **19**, 1977, p. 146-148.

(Manuscrit reçu le 5 juin 1981)