Annales de l'I. H. P., section A

J.-C. Houard

Sur la description intrinsèque des grandeurs dimensionnelles

Annales de l'I. H. P., section A, tome 35, nº 3 (1981), p. 225-252

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1981__35_3_225_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XXXV, n° 3, 1981, p. 225-252.

Section A :
Physique théorique.

Sur la description intrinsèque des grandeurs dimensionnelles

par

J.-C. HOUARD

Laboratoire de Physique Théorique et Mathématique,
Université Paris 7, 75251 Paris Cedex 05, France

RÉSUMÉ. — On définit une structure algébrique dans laquelle la description des grandeurs dimensionnelles, ainsi que l'expression mathématique des lois physiques, sont intrinsèques, c'est-à-dire indépendantes de tout choix de système d'unités.

1. INTRODUCTION

L'invariance de l'expression des lois physiques par les changements du système d'unités se réalise, comme on sait, par les notions de *dimension physique* et d'*homogénéité.* A chaque espèce de grandeur physique mesurable est attaché un symbole de dimension de la forme $L^{\alpha}T^{\beta}M^{\gamma}$ ... qui détermine le coefficient par lequel est multipliée la mesure, ou l'unité, des grandeurs de l'espèce considérée en fonction des coefficients multiplicatifs qui définissent un changement dans la mesure, ou l'unité, des grandeurs fondamentales de longueur, temps, masse, etc. La condition d'homogénéité signifie que l'on ne peut ajouter entre elles, ou égaler, que des grandeurs ayant le même symbole de dimension, le symbole de dimension d'un produit de deux grandeurs étant le produit de leurs symboles respectifs considérés comme des monômes.

Suivant ce schéma, les formules que l'on écrit d'ordinaire représentent des *égalités numériques* qui relient entre elles les *mesures* de certaines grandeurs, c'est-à-dire des nombres, un système d'unités défini, quoique partiellement arbitraire, étant supposé choisi. Cette conception se manifeste plus nettement dès qu'interviennent des notions géométriques. Soit, par exemple, $t \to M(t)$ le mouvement d'un point dans l'espace ordinaire E à trois dimensions, exprimé en fonction du temps. La vitesse de ce point est, à chaque instant, définie par $\vec{v} = \frac{d\vec{M}}{dt}$, et l'on considère habituellement ce vecteur comme appartenant à l'espace vectoriel associé à E. Cela n'a de sens que si le paramètre t est sans dimension, ce qu'on ne peut obtenir qu'en désignant par t la mesure du temps par rapport à une unité donnée. Plus généralement, la nécessité de considérer divers champs de vecteurs dont l'intensité possède une dimension (champs électrique, magnétique, etc.) amène à réduire toutes les grandeurs physiques à des données purement numériques par le choix d'un système d'unités.

Ainsi, dans le point de vue qui est usuellement adopté, implicitement ou explicitement ([1]), les lois ne sont formulées qu'après qu'un système d'unités ait été choisi [*1*] [*3*]. Malgré l'invariance de la théorie vis-à-vis du choix de ce système, la description ainsi obtenue n'est pas intrinsèque. On peut comparer cette situation à celle dans laquelle les opérateurs linéaires sur un espace vectoriel sont décrits à l'aide d'une base : l'équation $y^i = a^i_j x^j$, qui représente l'action d'un opérateur linéaire, est invariante par changement de base, moyennant des lois de transformation déterminées des composantes des vecteurs et des éléments de matrice des opérateurs, mais ceux-ci ne définissent pas intrinsèquement les vecteurs ou les opérateurs. De même que l'équation matricielle n'est invariante que par certaines transformations, dès qu'ont été adoptées les conventions, dites conventions de coordination [*2*], qui fixent les facteurs numériques figurant dans les expressions des lois physiques, celles-ci ne sont invariantes que par des changements d'un type déterminé du système d'unités. Ces changements sont gouvernés par les symboles de dimension, ainsi qu'il a été rappelé plus haut.

A l'expression mathématique des lois, de même qu'à la notion de dimension physique, on n'accorde donc généralement qu'une valeur relative, subordonnée au choix du système d'unités. La notion de dimension physique est même souvent considérée comme entièrement conventionnelle [*1*] [*3*]. S'il est vrai, en effet, qu'un certain arbitraire puisse toujours être introduit dans l'expression des lois, cette opinion paraît excessive, à moins que la notion de dimension n'ait aucun sens physique. Pourtant, il est aussi reconnu qu'elle joue un rôle indispensable, le premier réflexe d'un physicien étant, en principe, de vérifier l'homogénéité des formules qu'il utilise.

([1]) Par exemple, dans son Cours de Magnétisme et d'Électricité [*1*], H. Bouasse conclut le premier paragraphe du chapitre XIV, consacré aux unités, par la phrase soulignée suivante : « Bref, il n'entre dans les formules que des nombres : les opérations arithmétiques et algébriques ne sont définies que pour des nombres ».

On peut, au contraire, estimer que la notion de dimension physique tire sa raison d'être des lois physiques elles-mêmes, précisément parce que, en dépit de la diversité des descriptions qu'on a pu donner de ces lois (principalement en Électromagnétisme), elle subsiste avec la même valeur dans chacune de ces descriptions. Le but de cet article est de montrer la possibilité d'une formulation intrinsèque des lois physiques, c'est-à-dire d'une formulation qui ne fasse intervenir que les grandeurs elles-mêmes et non leur représentation dans un système d'unités. La notion de dimension en est un élément essentiel. Toutefois, il n'est pas nécessaire d'attribuer une signification physique fondamentale à ce que nous appellerons le *groupe des dimensions*, les développements purement techniques des Sections 3, 4 et 5, qui constituent l'objet principal de l'article, ne dépendant pas d'une telle interprétation.

La Section 2 est consacrée à une discussion générale, fondée sur la notion de grandeur mesurable, qui définit le principe de construction d'une structure algébrique permettant une expression intrinsèque des lois. Le type de structure ainsi introduit est alors défini en général, et étudié, dans la Section 3. L'exposé, limité jusque-là à la description des grandeurs scalaires, est ensuite étendu, dans la Section 4, à celle des grandeurs vectorielles, vecteurs et formes différentielles. Enfin, deux exemples sont développés dans la Section 5, celui des notions qui se rattachent à la notion de longueur, et celui de l'Électromagnétisme.

2. GRANDEURS MESURABLES ET LOIS PHYSIQUES

La description des phénomènes physiques est basée sur la notion de grandeurs mesurables et sur l'existence des lois physiques. Les grandeurs sont les éléments de la caractérisation de ces phénomènes, pour chacun desquels les lois constituent des relations entre les grandeurs qui le définissent.

La notion classique de grandeur mesurable [*2*] revient à supposer que, pour chaque espèce de grandeur, l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les grandeurs de cette espèce forme une demi-droite, c'est-à-dire la partie positive d'un espace vectoriel réel orienté à une dimension ([2]).

([2]) La notion de somme n'est pas nécessaire pour définir une demi-droite, il suffit d'attribuer un sens au rapport de deux grandeurs quelconques de même espèce différentes de zéro (l'existence de ce rapport signifiant précisément l'identité d'espèce de ces grandeurs), les relations $\frac{a}{a} = 1$ et $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$ étant satisfaites, les rapports dont le dénominateur est fixé pouvant prendre une valeur réelle strictement positive quelconque. Cela permet, en particulier, d'inclure la température thermodynamique parmi les grandeurs mesurables, le rapport de deux températures ayant un sens physique direct, mais non leur somme.

Pour certaines espèces, par exemple pour la charge électrique, il est même directement attribué un sens physique à tous les éléments de cet espace vectoriel, tant négatifs que positifs. Si $\mathcal{G}$ désigne une espèce de grandeur mesurable, nous noterons $\mathbb{R}_{\mathcal{G}}$ l'espace vectoriel constitué des valeurs possibles des grandeurs de l'espèce $\mathcal{G}$. La définition de $\mathbb{R}_{\mathcal{G}}$ ainsi que celle de sa structure vectorielle ont un sens intrinsèque, même si, pour des raisons pratiques, la mesure du rapport de deux grandeurs données de même espèce nécessite souvent l'emploi d'une grandeur de référence, ou unité provisoire. Par exemple, si T désigne l'espèce de grandeur constituée par le temps, des éléments de $\mathbb{R}_{\mathrm{T}}$ sont définis par la période de révolution de la terre autour du soleil, le temps de propagation dans le vide de la lumière sur une base donnée, la période des vibrations du fondamental de l'atome d'hydrogène, etc. L'établissement du caractère mesurable des grandeurs est en fait inséparable de l'existence des lois, car c'est par celles-ci, ou du moins par les plus générales d'entre elles, que ce caractère se manifeste. Par exemple, la mesurabilité de la longueur repose sur les propriétés des objets indéformables, qui, par la suite, permettent d'attribuer à l'espace physique une structure d'espace euclidien (ou riemannien). De même, celle de la charge électrique est prouvée par la proportionnalité des forces exercées par toute distribution de charges sur deux charges d'épreuve arbitrairement données, successivement placées en un même point quelconque de l'espace. Plus généralement, la mesurabilité des diverses grandeurs est établie de proche en proche par la constatation expérimentale de certaines proportionnalités. Une telle constatation atteint des propriétés intrinsèques des grandeurs, elle n'exige l'écriture d'aucune formule, et est donc, en particulier indépendante de tout choix d'unités.

L'expression détaillée des lois (la loi de Coulomb, par exemple) demande ensuite la définition du produit de deux grandeurs. Nous voulons montrer maintenant qu'une telle définition peut être obtenue par un double processus comportant, d'une part, une définition canonique abstraite, et, d'autre part, un principe d'identification de certaines grandeurs entre elles reposant sur les lois elles-mêmes. A côté des espèces de grandeurs directement mises en évidence par l'expérience ([3]), que nous avons seules considérées jusqu'à présent, et que, pour les distinguer, nous appellerons espèces de grandeurs *physiques* mesurables, ce processus fait apparaître des espèces de grandeurs nouvelles abstraitement définies. Les espèces de l'un ou l'autre type seront appelées espèces de grandeurs générales.

([3]) La restriction apportée par le mot *directement* n'a pas un sens suffisamment précis pour assurer une détermination unique de l'ensemble, noté plus loin γ, des espèces de grandeurs physiques mesurables. Nous montrerons à la fin de cette section que cette imprécision n'est d'aucune conséquence pour le résultat que nous avons en vue. Il faut seulement que γ contienne assez d'éléments pour permettre la description des lois.

A priori, la définition du produit ne peut être qu'abstraite : si $g_1 \in \mathbb{R}_{\mathcal{G}_1}$ et $g_2 \in \mathbb{R}_{\mathcal{G}_2}$ sont les valeurs de deux grandeurs physiques mesurables, le produit de g_1 par g_2 est l'élément $g_1 \otimes g_2$ de l'espace produit tensoriel $\mathbb{R}_{\mathcal{G}_1} \otimes \mathbb{R}_{\mathcal{G}_2}$. Ce nouvel espace est encore de dimension un, et peut être orienté par la condition que si g_1 et g_2 sont positifs, il en est de même de $g_1 \otimes g_2$. On le considérera comme l'espace des valeurs d'une espèce nouvelle de grandeur notée $\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2$. Avant de généraliser cette construction, nous définissons, pour chaque espèce de grandeur physique $\mathcal{G}$ l'espèce de grandeur inverse $\mathcal{G}^{-1}$ comme prenant ses valeurs dans l'espace dual $\mathbb{R}^*_{\mathcal{G}}$ de $\mathbb{R}_{\mathcal{G}}$ orienté de telle sorte que la valeur d'une forme positive sur un élément positif de $\mathbb{R}_{\mathcal{G}}$ soit positive ; de plus, on identifie les produits tensoriels $\mathbb{R}^*_{\mathcal{G}} \otimes \mathbb{R}_{\mathcal{G}} = \mathbb{R}_{\mathcal{G}^{-1}} \otimes \mathbb{R}_{\mathcal{G}}$ et $\mathbb{R}_{\mathcal{G}} \otimes \mathbb{R}^*_{\mathcal{G}}$ à $\mathbb{R}$ par les relations

$$g' \otimes g \cong g \otimes g' \cong \langle g', g \rangle, \qquad g' \in \mathbb{R}^*_{\mathcal{G}}, \qquad g \in \mathbb{R}_{\mathcal{G}}$$

où $\langle\, ,\, \rangle$ désigne le crochet de dualité ; enfin, on note I l'espèce de grandeur dont les valeurs sont les nombres réels et on réalise les identifications $\mathbb{R}^*_{\mathrm{I}} \cong \mathbb{R}_{\mathrm{I}} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_{\overline{\mathcal{G}}} \otimes \mathbb{R}_{\mathrm{I}} = \mathbb{R}_{\overline{\mathcal{G}}} \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R}_{\overline{\mathcal{G}}}$ où $\overline{\mathcal{G}}$ représente $\mathcal{G}$ ou $\mathcal{G}^{-1}$ pour toute espèce de grandeur physique mesurable $\mathcal{G}$. Les espèces de grandeurs les plus générales sont alors définies comme étant les produits formels du type $\overline{\mathcal{G}}_1\overline{\mathcal{G}}_2 \ldots \overline{\mathcal{G}}_k$, $k \in \mathbb{N}$, où l'on pose $\mathcal{G}\mathcal{G}^{-1} = \mathcal{G}^{-1}\mathcal{G} = \mathrm{I}$ et où I est élément neutre, l'espace des valeurs associé $\mathbb{R}_{\overline{\mathcal{G}}_1 \ldots \overline{\mathcal{G}}_k}$ étant le produit tensoriel $\mathbb{R}_{\overline{\mathcal{G}}_1} \otimes \ldots \otimes \mathbb{R}_{\overline{\mathcal{G}}_k}$, orienté par la condition que le produit tensoriel de grandeurs toutes positives soit positif. Si γ désigne l'ensemble des espèces de grandeurs physiques mesurables, l'ensemble Γ des espèces de grandeurs générales, muni du produit défini par la juxtaposition des produits formels est simplement le groupe libre engendré par γ [*4*]. L'ensemble des valeurs des grandeurs générales de toutes les espèces est la réunion $\mathcal{V} = \bigcup_{\mathcal{G}' \in \Gamma} \mathbb{R}_{\mathcal{G}'}$.
Dans $\mathcal{V}$ le produit de deux grandeurs quelconques est leur produit tensoriel ; il est associatif et tel que le produit de deux grandeurs positives soit positif. En outre, munie de ce produit, la partie de $\mathcal{V}$ constituée des éléments non nuls est un groupe isomorphe au produit direct du groupe Γ par le groupe multiplicatif $\mathbb{R} - \{ 0 \}$. Cela résulte de ce que si, pour tout $\mathcal{G} \in \gamma$, on fait choix d'un élément positif non nul $u_{\mathcal{G}}$, en définissant $u_{\mathcal{G}^{-1}}$ par $\langle u_{\mathcal{G}^{-1}}, u_{\mathcal{G}} \rangle = 1$, puis en posant $u_{\mathrm{I}} = 1$ et $u_{\overline{\mathcal{G}}_1 \ldots \overline{\mathcal{G}}_k} = u_{\overline{\mathcal{G}}_1} \otimes \ldots \otimes u_{\overline{\mathcal{G}}_k}$, on a, pour tout couple $(\mathcal{G}', \mathcal{G}'')$ de grandeurs générales, la relation $u_{\mathcal{G}'} \otimes u_{\mathcal{G}''} = u_{\mathcal{G}'\mathcal{G}''}$. A la construction précédente, il faut enfin ajouter la condition de commutativité du produit. Celle-ci se réalise par l'identification des produits tensoriels formés à l'aide d'éléments des $\mathbb{R}_{\overline{\mathcal{G}}}$, $\mathcal{G} \in \gamma$, qui se ramènent à un même produit par permutation de leurs termes. Il en résulte une identification analogue dans Γ, qui conduit à un groupe commutatif Γ_c. L'ensemble des valeurs $\mathcal{V}_c$ correspondant est encore tel que la partie de $\mathcal{V}_c$ constituée des éléments

non nuls est un groupe isomorphe au produit direct de Γ_c par $\mathbb{R} - \{ 0 \}$ (4).

C'est un fait expérimental que les lois physiques trouvent leur expression dans le cadre déterminé par la seule structure qui vient d'être construite, laquelle ne dépend, tout compte fait, que de la donnée de l'ensemble γ des grandeurs physiques mesurables et des espaces $\mathbb{R}_{\mathscr{G}}$, $\mathscr{G} \in \gamma$. Pour le prouver, il suffit de considérer les lois les plus fondamentales, dont les autres sont déduites. Nous nous limiterons ici à une illustration par quelques exemples. La loi donnant l'aire $a(l_1, l_2) \in \mathbb{R}_A$ (5) d'un rectangle en fonction des longueurs l_1, $l_2 \in \mathbb{R}_L$ de ses côtés s'exprime par la relation

$$l_1^{-1} l_2^{-1} a(l_1, l_2) = \text{constante} \in \mathbb{R}_{AL^{-2}}$$

où l'on a repris la notation habituelle pour le produit. En des termes plus usuels, cette relation ne signifie rien d'autre que l'égalité

$$\frac{a(l_1, l_2)}{a(l'_1, l'_2)} = \left(\frac{l_1}{l'_1}\right)\left(\frac{l_2}{l'_2}\right)$$

dans laquelle n'entrent que des rapports de grandeurs physiques de même espèce (6). La constante appartenant à $\mathbb{R}_{AL^{-2}}$ qui y figure est une grandeur d'espèce générale. Ce n'est certainement pas une grandeur physique au sens précédemment adopté, l'appellerait-on le pouvoir inducteur surfacique du plan, car la détermination de son rapport à des grandeurs de même espèce ne paraît pas susceptible d'une expérimentation directe. Évidemment les constantes définies, par exemple, par $l_1^{-1} l_2^{-1} a'(l_1, l_2)$ ou $R^{-2} a''(R)$, où $a'(l_1, l_2)$ est l'aire d'un losange de diagonales l_1 et l_2 et $a''(R)$ celle d'un disque de rayon R, sont de même espèce que celle-là, dans les rapports respectifs $\frac{1}{2}$ et π avec elle. Mais la connaissance de ces rapports résulte

---

(4) Une structure du type de celle qui vient d'être construite (plus exactement, un quotient de celle-ci, analogue à ceux qui seront introduits plus loin) a déjà été considérée, d'une façon plus axiomatique, par R. Fleischmann [*5*] et W. Quade [*6*]. La présente définition, ainsi que la définition plus générale qui sera donnée dans la Section 3, se distingue de celle de ces auteurs par l'introduction systématique du produit tensoriel. Cela nous permettra, dans la Section 4, d'obtenir une extension directe du formalisme au cas des grandeurs vectorielles.

(5) La partie positive de l'espace $\mathbb{R}_A$, constituée des valeurs des aires planes, est définie par la théorie de la mesure de Lebesgue dans le plan euclidien. Ainsi qu'il a été indiqué plus haut, l'emploi d'une unité d'aire provisoire dans la construction de cette mesure ne retire rien au caractère intrinsèque du *rapport* de deux aires, ce qui définit $\mathbb{R}_A$ intrinsèquement.

(6) Cette dernière relation fonde l'opinion, la plus courante, suivant laquelle les aires sont de dimension 2 par rapport aux longueurs. Certains auteurs soutiennent une opinion contraire, basant la notion de dimension sur la possibilité d'un changement dans les unités [*1*] [*3*]. Il reste cependant vrai que, dans une homothétie de rapport λ, les aires sont multipliées par λ^2.

d'un calcul plutôt que d'une expérience directe. Dans tous les cas il ne s'agit toujours que du plan, et d'utiliser le rectangle au lieu du losange ou du disque pour distinguer un élément de $\mathbb{R}_{AL^{-2}}$ n'est le fait que d'une convention. Nous verrons plus loin comment le choix de l'une de ces figures intervient dans la réduction de la structure algébrique définie par γ. Considérons encore l'exemple de la vitesse. La vitesse d'un mouvement uniforme, c'est-à-dire tel que les longueurs parcourues pendant des temps égaux sont égales, peut être abstraitement considérée comme une caractéristique de ce mouvement, exprimant son « intensité ». Si $v(l, t)$ est la vitesse du mouvement pour lequel la longueur l est parcourue pendant le temps t, on doit avoir $v(\lambda l, \lambda t) = v(l, t)$, $\forall \lambda > 0$, par définition du mouvement uniforme. On définit alors le rapport de deux vitesses par $\dfrac{v(l, t)}{v(l', t)} = \dfrac{l}{l'}$. Cela permet de considérer l'espèce de grandeur vitesse comme un élément de γ. Soit $\mathbb{R}_v$ l'espace des valeurs correspondant. De la définition de $v(l, t)$ on déduit alors la relation

$$l^{-1}tv(l, t) = \text{constante} \in \mathbb{R}_{L^{-1}Tv}$$

qui fait apparaître une nouvelle constante universelle. La loi horaire d'un mouvement uniforme de vitesse $v \in \mathbb{R}_v$ s'écrit donc $l^{-1}tv = \text{constante}$, où la constante est la même que ci-dessus. Une autre façon d'introduire la vitesse serait, sans ranger dans γ cette espèce de grandeur, de la définir directement par $v(l, t) = lt^{-1} \in \mathbb{R}_{LT^{-1}}$. Les deux définitions de la vitesse peuvent être rendues identiques par le processus de réduction déjà mentionné que nous définirons plus loin. Il est clair que des résultats analogues sont obtenus pour les différentes lois, et nous ne donnerons plus comme dernier exemple que celui de la loi de Coulomb. Soit $f(q_1, q_2, r)$ la force de répulsion qui s'exerce entre deux charges électriques ponctuelles q_1 et q_2 situées à une distance r l'une de l'autre dans le vide ; la loi de Coulomb s'exprime par

$$q_1^{-1}q_2^{-1}r^2f(q_1, q_2, r) = \text{constante} \in \mathbb{R}_{fL^2Q^{-2}}$$

La constante, celle qu'on note actuellement $1/4\pi\varepsilon_0$, joue évidemment un rôle semblable à celui des constantes introduites dans les deux exemples précédents. Soulignons enfin que les notions de dimension physique et d'homogénéité, qui apparaissent dans ces exemples, sont générales, et ne sont que des conséquences de la structure algébrique de l'ensemble $\mathscr{V}_c$ des valeurs des grandeurs : la dimension d'un élément de $\mathscr{V}_c$ est l'élément du groupe Γ_c auquel il se rapporte ; les équations algébriques dans $\mathscr{V}_c$ sont nécessairement homogènes, puisque l'addition n'y est défini que pour des éléments appartenant à un même espace $\mathbb{R}_{\mathscr{G}'}$, $\mathscr{G}' \in \Gamma_c$, donc de même dimension, et que la projection $\mathscr{V}_c \to \Gamma_c$ conserve le produit.

Dans la description précédente, chaque loi fait apparaître une constante universelle. Le nombre de ces constantes peut cependant être réduit par l'application d'un principe général qui consiste à identifier à 1 (ou à des nombres réels donnés) certaines d'entre elles. Il en résulte une réduction de la structure algébrique de $\mathscr{V}_c$, qui s'exprime mathématiquement par la projection de celle-ci sur une structure quotient. En particulier, au groupe des dimensions Γ_c se substitue un groupe quotient. Par exemple, si l'on identifie à 1 la constante de la loi des rectangles, on doit poser la relation $A = L^2$, qui exprime l'identification qualitative des aires aux grandeurs qui sont des produits de deux longueurs, et la relation $a(l_1, l_2) = l_1 l_2$ qui réalise quantitativement cette identification. L'opération ainsi effectuée peut être conçue de façons différentes. Elle revient formellement à supprimer l'espèce de grandeur aire de l'ensemble γ des grandeurs qualifiées plus haut, par commodité, de physiques, et à *définir* l'aire d'un rectangle par la formule écrite ci-dessus. Mais, si l'on adopte ce point de vue d'exclure d'emblée l'espèce aire de γ, cela ne dispense évidemment pas d'établir la mesurabilité des aires, ni de justifier la définition de $a(l_1, l_2)$ en prouvant la bilinéarité de l'application $(l_1, l_2) \to a(l_1, l_2)$. Cette dernière propriété (qui est en réalité la seule en cause dans tous les aspects de cette discussion, et qui est la loi physique proprement dite) justifie aussi une façon inverse de concevoir l'identification $\mathbb{R}_A \cong \mathbb{R}_{L^2}$, si on la regarde comme fournissant une définition *concrète* du produit de deux longueurs. Une discussion analogue peut être faite pour les différentes lois. Dans le cas de la Mécanique, on peut, comme il est usuel, réduire le groupe des dimensions au groupe abélien libre engendré par les espèces longueur (L), temps (T) et masse (M). Examinons enfin le cas de la loi de Coulomb. Dans la structure associée au groupe abélien libre engendré par L, T, M, Q, la constante ε_0 a la dimension $L^{-3}T^2M^{-1}Q^2$. C'est le choix actuel de conserver cette constante, avec cette dimension. Si, au contraire, on identifie ε_0 à 1, le groupe des dimensions est réduit par la relation $Q^2 = L^3T^{-2}M$, et la loi de Coulomb permet de définir le produit de deux charges q_1 et q_2 comme un élément de la structure basée sur L, T, M par

$$(q_1, q_2) \to 4\pi r^2 f(q_1, q_2, r) \in \mathbb{R}_{L^3T^{-2}M}$$

Mais la relation de dimension ne permet pas, *dans le groupe libre*, d'éliminer le générateur Q ([7]). Cette élimination devient possible, si l'on généralise la construction de $\mathscr{V}_c$ effectuée plus haut, en ajoutant aux espèces contenues dans le groupe libre engendré par γ celles dont les exposants de dimension par rapport aux éléments de γ sont fractionnaires. La construction du nouvel ensemble des valeurs est encore canonique, et, si γ possède N éléments, le nouveau groupe des dimensions est isomorphe à $\mathbb{Q}^N$, plutôt

([7]) Elle permettrait seulement l'élimination de M, ce qui laisserait subsister le groupe libre construit sur L, T, Q.

qu'à $\mathbb{Z}^N$. Dans la structure ainsi construite sur L, T, M, l'espèce charge électrique s'identifie alors à l'espèce $L^{3/2}T^{-1}M^{1/2}$. Quel que soit le mode de réduction adopté, la structure algébrique résultante appartient à un type bien déterminé, qui sera caractérisé directement, d'une façon un peu plus générale, dans la section suivante. Elle comporte en particulier un groupe G, quotient du groupe des dimensions initial, que l'on appellera désormais le *groupe des dimensions*. Les éléments de ce groupe représentent les espèces de grandeurs qui subsistent après la réduction, avec chacune desquelles plusieurs espèces de grandeurs physiques ou générales sont éventuellement identifiées. Pour cette raison on les appellera espèces de grandeurs *abstraites*. La même structure peut évidemment être obtenue à partir d'une donnée initiale de l'ensemble γ des espèces de grandeurs physiques présentant une large indétermination. Il est seulement nécessaire que γ comporte suffisamment d'espèces pour que le groupe des dimensions (à exposants fractionnaires en général) construit sur γ contienne toutes les espèces abstraites. Des choix différents de γ imposent alors simplement d'effectuer des identifications différentes pour aboutir à la même structure finale.

Pour conclure cette section, il n'est peut-être pas inutile d'insister sur le fait que les développements qui précèdent sont indépendants de toute considération impliquant un choix d'unités ou de système d'unités. Les équations qui expriment les lois sont construites uniquement à l'aide des valeurs des grandeurs et des opérations sur ces valeurs, intrinsèquement définies les unes et les autres, et ont donc une signification intrinsèque. Les identifications de grandeurs, qui sont éventuellement réalisées, n'affectent pas ce caractère, car elles reposent sur les lois elles-mêmes. On a vu que ces identifications peuvent s'interpréter comme des définitions concrètes de certains produits de grandeurs en fonction d'autres grandeurs. Ces définitions comportent évidemment une part d'arbitraire (comme toutes les définitions), mais cela ne remet pas en cause la nature intrinsèque du schéma général. Par exemple, le produit de deux longueurs l_1 et l_2 aurait pu être défini comme étant égal à l'aire d'un losange de diagonales de longueurs l_1 et l_2 ; il s'agirait alors seulement d'un *autre produit*, différent de celui défini à partir du rectangle, mais tout aussi intrinsèque que ce dernier. Remarquons encore que le choix du rectangle pour définir le produit $l_1 l_2$ n'impose *a priori* aucun lien entre l'unité de longueur u_L et l'unité d'aire u_A ; la relation $u_A = u_L^2$, établie à l'aide de ce produit, a seulement pour effet de donner à la relation entre les mesures $\overline{l_1}$ et $\overline{l_2}$ des longueurs des côtés et celle $\overline{a}$ de l'aire du rectangle la même forme qu'à celle existant entre les grandeurs elles-mêmes, soit $\overline{a} = \overline{l_1}\,\overline{l_2}$. Le produit restant le même, un choix différent de l'unité d'aire conduirait à une relation de la forme $\overline{a} = \alpha\overline{l_1}\,\overline{l_2}$, où α est un nombre réel positif. La même remarque s'applique à la loi de Coulomb pour laquelle, l'espèce charge électrique étant identifiée à l'espèce $L^{3/2}T^{-1}M^{1/2}$, un choix quelconque (ou conventionnel) de l'unité de charge conduit à l'expression $\overline{f} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\overline{q}_1\overline{q}_2}{\overline{r}^2}$ entre les mesures, ε_0 désignant cette fois un *nombre* réel positif [*2*]. Les autres formules de base de l'Électromagnétisme seront considérées dans la Section 5.

3. ALGÈBRE DES GRANDEURS SCALAIRES

On suppose la donnée d'un groupe G, et, pour tout $A \in G$, d'un espace vectoriel réel, orienté, à une dimension, noté $\mathbb{R}_A$. Le groupe G sera appelé le *groupe des dimensions*, et les éléments de $\mathbb{R}_A$ les *scalaires de dimension* A. Suivant la discussion générale de la section précédente, les éléments de G représentent les différentes espèces de grandeurs abstraites, et les éléments de $\mathbb{R}_A$ (ou seulement ceux de sa partie positive $\mathbb{R}_A^+$) les valeurs possibles des grandeurs physiques identifiées aux grandeurs de l'espèce A.

On donne aussi, pour chaque couple (A, B) d'éléments de G, un isomorphisme $\varphi_{A,B} : \mathbb{R}_A \otimes \mathbb{R}_B \to \mathbb{R}_{AB}$. Le groupe G étant fixé, la structure déterminée par la donnée des $\mathbb{R}_A$ et des $\varphi_{A,B}$ sera appelée une *structure dimensionnelle basée sur* G. A une telle structure on associe l'ensemble des scalaires $\mathcal{S} = \bigcup_A \mathbb{R}_A$, et, sur cet ensemble, le produit défini par

$$\mathbb{R}_A \times \mathbb{R}_B \ni (a, b) \to ab = \varphi_{A,B}(a \otimes b) \in \mathbb{R}_{AB}$$

Restreint à $\mathbb{R}_A \times \mathbb{R}_B$, le produit est une application bilinéaire, et, si l'on note 0_A l'élément nul de $\mathbb{R}_A$, la relation $ab = 0_{AB}$ entraîne $a = 0_A$ ou $b = 0_B$. La donnée d'un tel produit est équivalente à celle des $\varphi_{A,B}$. Soit, de plus, I l'élément neutre de G ; les propriétés précédentes et la relation $\varphi_{I,I}(\mathbb{R}_I \otimes \mathbb{R}_I) = \mathbb{R}_I$ impliquent que $\mathbb{R}_I$, muni de l'addition vectorielle et du produit, est un corps isomorphe à $\mathbb{R}$, l'élément unité e étant défini par $\varphi_{I,I}(e \otimes e) = e$. L'isomorphisme $\mathbb{R}_I \to \mathbb{R}$ se réalise de façon unique, puisque tout automorphisme du corps $\mathbb{R}$ se réduit à l'identité, de sorte que l'on identifiera désormais $\mathbb{R}_I$ à $\mathbb{R}$; c'est l'espace des *scalaires sans dimension* (ou de dimension zéro). Deux structures dimensionnelles respectivement définies par la donnée des espaces et des applications $(\mathbb{R}_A, \varphi_{A,B})$ et $(\mathbb{R}'_A, \varphi'_{A,B})$ seront dites isomorphes s'il existe des isomorphismes [8] $f_A : \mathbb{R}_A \to \mathbb{R}'_A$ assurant la commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_A \otimes \mathbb{R}_B & \xrightarrow{f_A \otimes f_B} & \mathbb{R}'_A \otimes \mathbb{R}'_B \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_{A,B}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi'_{A,B}} \\ \mathbb{R}_{AB} & \xrightarrow{f_{AB}} & \mathbb{R}'_{AB} \end{array}$$

[8] L'orientation des espaces $\mathbb{R}_A$ et $\mathbb{R}'_A$ est, pour l'instant, laissée de côté.

On vérifie que cette dernière condition équivaut à la conservation du produit des scalaires dans l'application de $\mathcal{S} = \bigcup_{A} \mathbb{R}_A$ sur $\mathcal{S}' = \bigcup_{A} \mathbb{R}'_A$ déduite des f_A. En particulier, f_I est réduite à l'identité.

On impose maintenant aux isomorphismes $\varphi_{A,B}$ de remplir les conditions suivantes :

a) Les deux applications de $\mathbb{R}_A \otimes \mathbb{R}_B \otimes \mathbb{R}_C$ dans $\mathbb{R}_{ABC}$, qui résulte de l'existence de ces isomorphismes et de l'associativité du produit tensoriel, sont identiques, $\forall(A, B, C)$; en d'autres termes, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}_A \otimes \mathbb{R}_{BC} \arrow[dr, "\varphi_{A,BC}"] & \\
\mathbb{R}_A \otimes \mathbb{R}_B \otimes \mathbb{R}_C \arrow[ur, "\mathrm{id}_{\mathbb{R}_A} \otimes \varphi_{B,C}"] \arrow[dr, "\varphi_{A,B} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{R}_C}"'] & & \mathbb{R}_{ABC} \\
 & \mathbb{R}_{AB} \otimes \mathbb{R}_C \arrow[ur, "\varphi_{AB,C}"'] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif, $\forall(A, B, C)$.

b) $\qquad \varphi_{A,B}(\mathbb{R}_A^+ \otimes \mathbb{R}_B^+) = \mathbb{R}_{AB}^+$

c) $\qquad \varphi_{A,B}(a \otimes b) = \varphi_{B,A}(b \otimes a)\,, \qquad a \in \mathbb{R}_A\,, \qquad b \in \mathbb{R}_B$

La première et la troisième de ces conditions expriment respectivement que le produit des scalaires défini sur $\mathcal{S}$ est associatif et commutatif, et la seconde que le produit de deux scalaires positifs est positif. Si l'on ne retient que la condition *a*), on a :

PROPOSITION. — A des isomorphismes près, les structures dimensionnelles basées sur G, qui satisfont la condition *a*), sont en correspondance bijective avec les extensions centrales du groupe G par le groupe multiplicatif $\mathbb{R} - \{0\}$.

Démonstration. — Soit donnés les $\mathbb{R}_A$ et les $\varphi_{A,B}$ vérifiant *a*). Le produit des scalaires qui leur correspond est associatif. Pour $i \in \mathbb{R}_I$ et $a \in \mathbb{R}_A$, on a nécessairement $ia = \alpha_A(i)a$ et $ai = \beta_A(i)a$, où α_A et β_A sont des formes linéaires non nulles sur $\mathbb{R}_I$; si $b \in \mathbb{R}_B$, l'associativité du produit implique

$$aib = \beta_A(i)ab = \alpha_B(i)ab$$

et, par suite,

$$\beta_A = \alpha_B = \alpha \in \mathbb{R}_I^*\,, \qquad \forall(A, B)$$

L'unique élément e de $\mathbb{R}_I$ défini par $\alpha(e) = 1$ est donc élément neutre pour le produit. Il coïncide évidemment avec l'élément déjà noté e plus haut, l'identification $\mathbb{R}_I \to \mathbb{R}$ s'exprimant ici par l'application $i \to \alpha(i)$. Par ailleurs, puisque $\varphi_{A^{-1},A}$ est un isomorphisme, tout élément non nul $a \in \mathbb{R}_A$ admet un inverse $a^{-1} \in \mathbb{R}_{A^{-1}}$. Il en résulte que l'ensemble

$$\mathcal{G} = \bigcup_A (\mathbb{R}_A - \{ 0_A \})$$

muni du produit est un groupe. Le sous-ensemble $H = \mathbb{R}_I - \{ 0_I \}$ en est un sous-groupe invariant central, isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{R} - \{ 0 \}$ par l'application α. De plus, les classes de $\mathcal{G}$ suivant H sont les ensembles $\mathbb{R}_A - \{ 0_A \}$, ce qui implique l'isomorphisme $\mathcal{G}/H \cong G$. Enfin, tout isomorphisme $\mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ de deux structures dimensionnelles se restreint en un isomorphisme des extensions correspondantes.

Réciproquement, soit $\mathcal{G}$ une extension centrale de G par $H = \mathbb{R} - \{ 0 \}$. En considérant H comme sous-groupe de $\mathcal{G}$, soit C_A la classe suivant H qui se projette sur $A \in G$, et soit $\mathbb{R}_A = C_A \cup \{ 0_A \}$, si $A \neq I$, et

$$\mathbb{R}_I = H \cup \{ 0 \} = \mathbb{R} .$$

Le sous-groupe H opère dans $\mathbb{R}_A$ par $(x, a) \to xa = ax$, si $a \neq 0_A$, et $(x, 0_A) \to 0_A$; posons aussi $0a = 0_A$, $\forall a \in \mathbb{R}_A$; on obtient ainsi une multiplication externe associative des éléments de $\mathbb{R}_A$ par les nombres réels telle que $1a = a$; il en résulte une structure vectorielle unique sur $\mathbb{R}_A$, si l'on y définit l'addition par $xa + ya = (x + y)a$, $x, y \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_A$. Enfin, la loi de groupe de $\mathcal{G}$ s'étend en un produit sur $\mathcal{S} = \bigcup_A \mathbb{R}_A$ en posant $0_A b = a 0_B = 0_{AB}$, $a \in \mathbb{R}_A$, $b \in \mathbb{R}_B$. Ce produit est associatif, et, si l'on note en particulier que H est central dans $\mathcal{G}$, on vérifie qu'il est aussi bilinéaire sur $\mathbb{R}_A \times \mathbb{R}_B$, $\forall (A, B)$, pour la structure vectorielle définie ci-dessus. Il est clair que, par cette construction, les structures dimensionnelles associées à des extensions de G isomorphes sont isomorphes. cqfd.

Le résultat précédent ne fait pas intervenir l'orientation des espaces $\mathbb{R}_A$. L'existence de cette orientation restreint d'abord la notion d'isomorphisme des structures dimensionnelles, en imposant aux isomorphismes de respecter, pour chaque $A \in G$, l'orientation de l'espace des scalaires de dimension A, c'est-à-dire de conserver le signe des scalaires. L'orientation de ces espaces est ensuite soumise à la condition *b*). Cette condition seule impose que l'orientation de $\mathbb{R}_I$ coïncide avec l'orientation usuelle de $\mathbb{R}$. Ajoutée à la condition *a*), elle implique, par un prolongement de la démonstration faite plus haut, l'existence d'une bijection entre les classes de structures dimensionnelles isomorphes, ainsi restreintes, et les classes d'extensions centrales de G par $\mathbb{R}_+ - \{ 0 \}$.

Remarque. — En fait, si les conditions *a*) et *b*) sont remplies, à tout isomorphisme $(f_A)_{A \in G}$ de structures dimensionnelles dans le sens défini initialement on peut faire correspondre un isomorphisme $(g_A)_{A \in G}$ respectant l'orientation : en effet, soit K le sous-ensemble des $A \in G$ tels que f_A respecte l'orientation ; si $K \neq G$, c'est un sous-groupe invariant d'indice 2 de G ; en désignant par ε l'homomorphisme $G \to \{ +1, -1 \}$ de noyau K, on vérifie que les applications $g_A = \varepsilon(A) f_A$, $A \in G$, réalisent un isomorphisme des structures dimensionnelles données qui respecte l'orientation.

Notons encore que la condition *c*) demande en particulier que le groupe G soit commutatif. Dans la suite on supposera que les trois conditions *a*), *b*) et *c*) sont remplies.

Parmi les structures dimensionnelles basées sur G figurent toujours celles dont le groupe $\mathcal{G}$ associé est isomorphe au produit direct $G \times (\mathbb{R} - \{0\})$, dans lequel le sous-groupe $G \times (\mathbb{R}_+ - \{0\})$ est l'image de l'ensemble des scalaires positifs. Elles sont caractérisées par l'existence d'au moins un système d'éléments non nuls $u_A \in \mathbb{R}_A^+$, $A \in G$, tels que $u_A u_B = u_{AB}$, $\forall (A, B)$. On dira que les u_A constituent un *système cohérent d'unités.* Notons qu'on a alors nécessairement $u_I = 1$ (9). Les structures dimensionnelles basées sur le groupe additif $\mathbb{Q}^n$, $n \in \mathbb{N}$, sont nécessairement de ce type, un système d'unités cohérent associé comportant n unités indépendantes. C'est le cas rencontré en Physique, où l'entier n est le nombre des grandeurs choisies comme fondamentales (10).

Dans le cas général, le produit des scalaires détermine de façon unique une structure d'algèbre associative et commutative sur l'espace $\mathcal{A} = \bigoplus_A \mathbb{R}_A$.

On appellera $\mathcal{A}$ *l'algèbre des scalaires ;* c'est une algèbre graduée par le groupe G ; quand $\mathcal{G}$ est isomorphe au produit direct $G \times (\mathbb{R} - \{0\})$, elle est isomorphe à l'algèbre du groupe G. De plus, à tout isomorphisme de structures dimensionnelles correspond un isomorphisme des algèbres de scalaires associées, et réciproquement.

Enfin, des notions précédentes dérive celle d'homogénéité. Soit une structure dimensionnelle donnée. Tout automorphisme $(f_A)_{A \in G}$ de cette structure détermine dans chacun des espaces de la forme $\prod_{i=1}^{N} \mathbb{R}_{A_i}$ un isomorphisme vectoriel $\prod_{i=1}^{N} f_{A_i}$ défini par

$$\left(\prod_{i=1}^{N} f_{A_i}\right)(a_1, \ldots, a_N) = (f_{A_1}(a_1), \ldots, f_{A_N}(a_N))$$

(9) Si la mole, définie par le Système International [7], est considérée comme une unité de nombre entier, c'est-à-dire en fait de scalaire sans dimension, ce système n'est donc pas cohérent.

(10) En réalité, si les trois conditions *a*), *b*) et *c*) sont remplies, le groupe $\mathcal{G}$ est toujours, d'un point de vue purement algébrique, un produit direct. C'est une conséquence d'un théorème de R. Baer (voir par exemple : L. FUCHS, *Abelian Groups*, Pergamon Press, 1960). Nous remercions G. Rideau qui nous a indiqué ce théorème. Au sujet des conditions imposées, ajoutons que seules les conditions *a*) et *c*) sont nécessaires pour justifier les développements de la Section 4.

Une application $\Phi : \prod_{i=1}^{N} \mathbb{R}_{A_i} \to \mathbb{R}_B$ est dite homogène si elle est invariante par ces transformations, c'est-à-dire si l'on a

$$\Phi \circ \left(\prod_{i=1}^{N} f_{A_i} \right) = f_B \circ \Phi$$

pour tout automorphisme $(f_A)_{A \in G}$. Les isomorphismes f_A sont évidemment de la forme $a \to \lambda_A a$, $\lambda_A > 0$, de sorte que la propriété d'homogénéité de Φ s'exprime par

$$\text{(H)} \qquad \Phi(\lambda_{A_1} a_1, \ldots, \lambda_{A_N} a_N) = \lambda_B \Phi(a_1, \ldots, a_N)$$

De plus, la condition que les f_A définissent un automorphisme de structure dimensionnelle équivaut aux relations $\lambda_A \lambda_B = \lambda_{AB}$, $\forall (A, B)$, qui doivent donc être satisfaites par les multiplicateurs figurant dans (H). Ces relations signifient que l'application $A \to \lambda_A$ est un homomorphisme de G dans le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+ - \{ 0 \}$.

La condition d'homogénéité est usuellement exprimée en relation avec le choix des systèmes d'unités. Si $\{ u_A \}_{A \in G}$ est un tel système (cohérent ou non), la mesure d'une grandeur a appartenant à $\mathbb{R}_A$ est le nombre $\bar{a}$ défini par $a = \bar{a} u_A$, la fonction Φ introduite ci-dessus étant décrite par la fonction $\overline{\Phi}_{(u)} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(a_1, \ldots, a_N) = u_B \overline{\Phi}_{(u)}(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_N)$$

Pour un second système $\{ u'_A \}_{A \in G}$ défini en fonction du premier par les relations $u'_A = \mu_A u_A$, $\mu_A > 0$, la fonction $\overline{\Phi}_{(u')}$ correspondante s'exprime en fonction de $\overline{\Phi}_{(u)}$, par la formule

$$\text{(U)} \qquad \overline{\Phi}_{(u')}(x_1, \ldots, x_N) = \mu_B^{-1} \overline{\Phi}_{(u)}(\mu_{A_1} x_1, \ldots, \mu_{A_N} x_N), \qquad x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}$$

La fonction $\overline{\Phi}_{(u)}$ dépend donc en général du système d'unités choisi, au contraire de Φ dont la signification est intrinsèque. La condition d'homogénéité (H) équivaut maintenant à la suivante

$$(\overline{\text{H}}) \qquad \overline{\Phi}_{(u)}(\lambda_{A_1} x_1, \ldots, \lambda_{A_N} x_N) = \lambda_B \overline{\Phi}_{(u)}(x_1, \ldots, x_N), \qquad x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}$$

Cette dernière relation exprime l'invariance de $\overline{\Phi}_{(u)}$, par un changement du système d'unités de la forme précédente avec $\mu_A = \lambda_A$, $\forall A \in G$. Les conditions du type $\lambda_A \lambda_B = \lambda_{AB}$, qui restreignent les changements de ce système, correspondent aux conventions de coordination, qui, dans la présentation usuelle, sont considérées comme servant à réduire le nombre des unités indépendantes [*2*]. Dans le point de vue exposé ici, l'existence de ces relations repose sur la donnée du groupe G, que celui-ci soit conçu comme fondamental ou non.

Remarque. — Les expressions des lois physiques font intervenir deux sortes de grandeurs : des paramètres, essentiellement variables, qui caractérisent les conditions ou les résultats d'un phénomène, et des constantes physiques. Ces expressions sont homogènes si on les considère comme fonctions de l'*ensemble* de ces grandeurs. En d'autres termes, les expressions des lois sont invariantes si l'on transforme simultanément les paramètres et les constantes par un automorphisme quelconque de la structure dimensionnelle. Pour les structures décrivant la Physique, le groupe de base étant isomorphe à $\mathbb{Q}^n$, les seules grandeurs invariantes par tous les automorphismes sont les grandeurs sans dimension. Cela implique que la Physique est invariante par tout changement de valeur des constantes fondamentales (par exemple, la vitesse de la lumière dans le vide) qui laisse invariantes les combinaisons sans dimension de ces constantes. Ces combinaisons de constantes (par exemple, la constante de structure fine) sont alors les seules constantes ayant un sens absolu. Cela justifie les considérations dans lesquelles on admet des variations de certaines constantes fondamentales, en particulier celles qui consistent à faire tendre ces constantes vers zéro ou l'infini ([11]).

4. GRANDEURS VECTORIELLES

Les notions géométriques dépendant d'une structure dimensionnelle donnée généralisent celles que l'on obtient à partir des seuls nombres réels, le rôle de $\mathbb{R}$ pouvant être tenu par l'un quelconque des espaces $\mathbb{R}_A$. Elles dérivent essentiellement de la notion de vecteur, dont sont déduites les autres notions de tenseur, forme différentielle, etc. Dans ce qui suit, on se limitera à la considération de variétés, fonctions, etc., indéfiniment différentiables. Du point de vue algébrique, on regardera généralement comme identiques deux espaces entre lesquels le produit des scalaires permet d'établir un isomorphisme *canonique*, c'est-à-dire invariant par les automorphismes de la structure dimensionnelle donnée. Par exemple, l'isomorphisme $\varphi_{A,B}$ permet d'identifier $\mathbb{R}_A \otimes \mathbb{R}_B$ à $\mathbb{R}_{AB}$, et, si $a \in \mathbb{R}_A$ et $b \in \mathbb{R}_B$, on pourra écrire indifféremment $a \otimes b$ ou ab. De même, le dual de $\mathbb{R}_A$ s'identifie à $\mathbb{R}_{A^{-1}}$, le crochet de dualité étant simplement le produit ; plus généralement, le dual de $\mathbb{R}_A$ à valeurs dans $\mathbb{R}_B$, défini comme étant l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}_A$ dans $\mathbb{R}_B$, s'identifie grâce au produit à $\mathbb{R}_A^* \otimes \mathbb{R}_B \cong \mathbb{R}_{A^{-1}} \otimes \mathbb{R}_B \cong \mathbb{R}_{A^{-1}B}$.

a) Vecteurs.

Soit M une variété de dimension n, éventuellement attachée à la description d'un système physique. Les vecteurs tangents au sens ordinaire au

([11]) Une discussion générale sur la nature des constantes physiques ainsi que sur la signification de telles limites, a été donnée par J.-M. Lévy-Leblond [*8*] [*9*].

point $x \in M$, constituant l'espace TM_x, sont, par définition, les dérivations au point x à valeurs dans $\mathbb{R}$ agissant dans l'espace $\mathscr{F}(M, \mathbb{R})$ des fonctions sur M à valeurs réelles. Dans une carte $\{ x^i \}$ *sans dimension*, c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, ces vecteurs sont les combinaisons linéaires à coefficients réels des opérateurs différentiels $\frac{\partial}{\partial x^i}$ au point x [*10*].

Pour chaque espèce de grandeur $A \in G$, on introduit de même l'espace $(TM_x)_A$ des dérivations au point x à valeurs dans $\mathbb{R}_A$ agissant dans $\mathscr{F}(M, \mathbb{R})$. Si $a \in \mathbb{R}_A$ et $v \in TM_x$, on note av l'élément de $(TM_x)_A$ défini par $(av)(f) = a(v(f))$, $f \in \mathscr{F}(M, \mathbb{R})$; l'application $\mathbb{R}_A \otimes TM_x \to (TM_x)_A$ définie par $a \otimes v \to av$ est un isomorphisme canonique au sens défini plus haut, et l'on identifie donc $(TM_x)_A$ avec $\mathbb{R}_A \otimes TM_x$. Dans la carte $\{ x^i \}$ un élément w de $(TM_x)_A$ est de la forme

$$w = w^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x , \qquad w^i \in \mathbb{R}_A$$

En particulier, on obtient le symbole de av en multipliant par a celui de $v \in TM_x$. L'action de $w \in (TM_x)_A$ peut être étendue à toute fonction $f \in \mathscr{F}(M, \mathbb{R}_B)$ par la formule de définition

$$w(f) = uw(u^{-1}f) , \qquad u \in \mathbb{R}_B - \{ 0_B \}$$

le second membre ne dépendant pas de u. A l'aide des coordonnées on obtient $w(f)$ en appliquant simplement le symbole de w à f. Le vecteur w applique ainsi $\mathscr{F}(M, \mathbb{R}_B)$ dans $\mathbb{R}_{AB}$. La propriété de dérivation de w s'exprime alors en général par la formule :

$$w(fg) = f(x)w(g) + w(f)g(x)$$

dans laquelle, si $f \in \mathscr{F}(M, \mathbb{R}_B)$ et $g \in \mathscr{F}(M, \mathbb{R}_C)$, on a

$$w(f) \in \mathbb{R}_{AB} , \qquad w(g) \in \mathbb{R}_{AC} , \qquad w(fg) \in \mathbb{R}_{ABC}$$

La notion de dimension physique introduit donc, à côté de l'espace tangent usuel TM_x, les espaces tangents $(TM_x)_A \cong \mathbb{R}_A \otimes TM_x$. Si $B \neq A$, il n'y a pas en général d'isomorphisme canonique de $(TM_x)_A$ sur $(TM_x)_B$, un tel isomorphisme ne pouvant exister que si, pour tout homomorphisme λ de G dans $\mathbb{R}_+ - \{ 0 \}$, la relation $\lambda_A = \lambda_B$ est satisfaite. Cette condition n'est jamais remplie dans le cas physique où $G = \mathbb{Q}^m$, $m > 0$. Il est utile de rassembler les espaces tangents $(TM_x)_A$, $A \in G$, dans la somme directe

$$\tau M_x = \bigoplus_A (TM_x)_A \cong \bigoplus_A (\mathbb{R}_A \otimes TM_x) \cong \left(\bigoplus_A \mathbb{R}_A \right) \otimes TM_x = \mathscr{A} \otimes TM_x$$

Ce nouvel espace est naturellement muni d'une structure de module sur $\mathscr{A}$, le produit $\mathscr{A} \times \tau M_x \to \tau M_x$ étant défini à partir de la relation

$$\alpha(\beta \otimes v) = (\alpha\beta) \otimes v , \qquad \alpha, \beta \in \mathscr{A} , \qquad v \in TM_x$$

Restreint à $\mathbb{R}_I \times \tau M_x = \mathbb{R} \times \tau M_x$, ce produit se réduit à la multiplication externe de l'espace vectoriel réel τM_x. Le module τM_x interviendra plus loin dans la considération des cartes dimensionnelles.

Enfin, la différentielle usuelle $d\Phi_x : TM_x \to TN_{\Phi(x)}$ d'une application $\Phi : M \to N$ détermine immédiatement pour tout $A \in G$, une application $(TM_x)_A \to (TN_{\Phi(x)})_A$, puis une application $\tau M_x \to \tau N_{\Phi(x)}$. Celles-ci seront encore notées $d\Phi_x$; elles sont définies par la relation $d\Phi_x(av) = ad\Phi_x(v)$, $a \in \mathbb{R}_A$, $v \in TM_x$.

Appliquons ces notions à $M = \mathbb{R}_A$. On a, en chaque point a de $\mathbb{R}_A$, l'identification $(T\mathbb{R}_A)_a = \mathbb{R}_A$ par la formule classique

$$v_a(f) = \lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-1}(f(a+\lambda v) - f(a)), \quad v \in \mathbb{R}_A, \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}_A, \mathbb{R})$$

L'espace $((T\mathbb{R}_A)_a)_{A^{-1}}$ est donc canoniquement isomorphe à

$$\mathbb{R}_{A^{-1}} \otimes \mathbb{R}_A \cong \mathbb{R}.$$

Pour $a' \in \mathbb{R}_{A^{-1}}$ et $v \in \mathbb{R}_A$, l'élément $a' \otimes v_a = a'v_a \cong a'v$ agit sur $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}_A, \mathbb{R})$ suivant la formule

$$(a' \otimes v_a)(f) = \lim_{\lambda \to 0} a'\lambda^{-1}(f(a + \lambda v) - f(a))$$

En particulier, l'élément $v^{-1} \otimes v_a \cong 1$, $\forall v \neq 0$, sera noté $\left(\frac{d}{da}\right)_a$; son action sur $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}_A, \mathbb{R})$ est donnée par

$$\left(\frac{d}{da}\right)_a f = \lim_{\alpha \to 0} \alpha^{-1}(f(a + \alpha) - f(a)), \qquad \alpha \in \mathbb{R}_A - \{0_A\}$$

Le champ de vecteurs $\frac{d}{da}$ sur $\mathbb{R}_A$ est canoniquement défini ; il constitue en chaque point a de $\mathbb{R}_A$ une base naturelle du module $(\tau\mathbb{R}_A)_a$, un vecteur sur $\mathbb{R}_A$ à valeurs dans $\mathbb{R}_B$ étant, au point a, de la forme $\beta\left(\frac{d}{da}\right)_a$, $\beta \in \mathbb{R}_{AB}$.

A titre d'exemple, supposons que A soit le temps T, et considérons la trajectoire $\Gamma : \mathbb{R}_T \to M$ sur une variété M quelconque ; la vitesse à l'instant t est définie par

$$\dot{\Gamma}(t) = d\Gamma\left(\left(\frac{d}{dt}\right)_t\right), \qquad t \in \mathbb{R}_T$$

C'est un élément de $(TM_{\Gamma(t)})_{T^{-1}}$. Sa définition est indépendante de tout choix d'une unité de temps.

Notons enfin que, du fait de l'identification $(T\mathbb{R}_A)_a = \mathbb{R}_A$, les éléments de $\mathbb{R}_A$, ou $\mathbb{R}_{A^{-1}}$, jouent, dans les formules précédentes un double rôle, soit comme vecteurs, tel v_a, soit comme scalaires, tel a', agissant par multiplication : dans le symbole $v^{-1} \otimes v_a$, le même élément v de $\mathbb{R}_A$ apparaît à droite comme vecteur et à gauche comme scalaire. Cette distinction sera précisée plus loin par l'attribution de dimensions aux différentes grandeurs scalaires et vectorielles.

b) **Formes différentielles.**

Nous définissons maintenant les 1-formes sur la variété M. Les 1-formes ordinaires prennent, au point x, leurs valeurs dans le dual T^*M_x de TM_x. Les 1-formes à valeurs dans $\mathbb{R}_A$ sont alors définies comme prenant leurs valeurs en x dans le dual de TM_x à valeurs dans $\mathbb{R}_A$, noté $(T^*M_x)_A$ et isomorphe à $\mathbb{R}_A \otimes T^*M_x$. La valeur d'une telle 1-forme φ au point x peut également être considérée comme appartenant au dual de $(TM_x)_B$ à valeurs dans $\mathbb{R}_{AB}$, $\forall B$, par la formule de définition

$$\varphi_x(v) = u\varphi_x(u^{-1}v), \qquad v \in (TM_x)_B, \qquad u \in \mathbb{R}_B - \{ 0_B \}$$

dans laquelle le membre de droite est indépendant de u. Dans un système de coordonnées sans dimension $\{ x^i \}$, pour un champ de vecteurs v à valeurs dans $\mathbb{R}_B$, on a

$$\varphi_x = \varphi_i(x)dx^i, \qquad \varphi_i \in \mathscr{F}(M, \mathbb{R}_A)$$

$$v_x = v^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad v^i \in \mathscr{F}(M, \mathbb{R}_B)$$

et $\varphi(v) = \varphi_i v^i \in \mathscr{F}(M, \mathbb{R}_{AB})$. En particulier, pour $B = A^{-1}$, les 1-formes à valeurs dans $\mathbb{R}_A$ sont identifiées, au point x, aux éléments du dual ordinaire de $(TM_x)_{A^{-1}}$; on a donc $(T^*M_x)_A \cong ((TM_x)_{A^{-1}})^*$; cette identification est aussi conséquence des conventions faites précédemment par les relations $\mathbb{R}_A \otimes T^*M_x \cong \mathbb{R}^*_{A^{-1}} \otimes T^*M_x \cong (\mathbb{R}_{A^{-1}} \otimes TM_x)^*$.

La différentielle d'une fonction $f \in \mathscr{F}(M, \mathbb{R}_A)$ peut être considérée comme une 1-forme à valeurs dans $\mathbb{R}_A$, puisqu'à l'application entre variétés $f : M \to \mathbb{R}_A$ correspond une différentielle $df_x : TM_x \to (T\mathbb{R}_A)_{f(x)} = \mathbb{R}_A$: si v est un champ de vecteurs sur M à valeurs dans $\mathbb{R}_B$, le vecteur sur $\mathbb{R}_A$ à valeurs dans $\mathbb{R}_B$ donné par $df_x(v_x)$ est identifié à l'élément correspondant de $\mathbb{R}_{AB}$. Il en est ainsi quand $M = \mathbb{R}_A$, $f = a : \mathbb{R}_A \to \mathbb{R}_A$ l'application identique, et $B = A^{-1}$; si l'on considère a comme une application entre variétés, on a $da = id$, et donc la formule $da\left(\frac{d}{da}\right) = \frac{d}{da}$; si da est considérée comme forme à valeurs dans $\mathbb{R}_A$, on a au contraire $da\left(\frac{d}{da}\right) = 1$; ces deux formules sont bien en accord puisque, dans l'identification de $((T\mathbb{R}_A)_a)_{A^{-1}}$ avec $\mathbb{R}$, le vecteur $\left(\frac{d}{da}\right)_a$ correspond à 1.

Les deux dernières formules paraissent contradictoires du fait de la confusion des notations pour la différentielle da et pour la 1-forme da.

La première semble même non homogène si on laisse agir sans discernement les réflexes habituels concernant la notion de dimension. En fait, les considérations classiques peuvent s'appliquer avec la règle suivante : on attribue la dimension A à tout élément de $\mathbb{R}_A$ agissant par multiplication, ainsi qu'à toute fonction, tout vecteur et toute forme à valeurs dans $\mathbb{R}_A$, et la dimension zéro à toute application entre variétés ; la dimension d'un produit, ou du résultat de l'application d'un des objets précédents sur un autre, est le produit des dimensions de ses termes.

Il faut prendre garde qu'avec ces conventions un élément de $\mathbb{R}_A$ a la dimension A s'il intervient comme scalaire, et la dimension zéro s'il intervient comme vecteur ordinaire de $\mathbb{R}_A$. La raison de cette dernière règle se trouve dans la définition des vecteurs comme dérivations. Elle est illustrée par le fait que, si une unité u est choisie dans $\mathbb{R}_A$, ce qui détermine une carte *sans dimension* sur $\mathbb{R}_A$, la composante sur u d'un vecteur ordinaire de $\mathbb{R}_A$, c'est-à-dire sa composante dans cette carte, est un *nombre réel*. Explicitement, la carte associée à u est définie par l'application $a = xu \to x \in \mathbb{R}$, et si $v = \mathrm{X}u$, $\mathrm{X} \in \mathbb{R}$, le symbole de v est $v = \mathrm{X}\dfrac{d}{dx}$; l'application de ce symbole à une fonction ne change pas la dimension de celle-ci. Notons enfin que, dans ces notations, on a

$$\frac{d}{da} = u^{-1}\frac{d}{dx}, \qquad da = u\,dx$$

Dans ces deux dernières formules, u figure comme scalaire appartenant à $\mathbb{R}_A$, et a donc, dans nos conventions, la dimension A. Par contre, dans la formule $v = \mathrm{X}u$, il y figure comme vecteur et a la dimension zéro.

Remarque. — L'expression $v = \mathrm{X}\dfrac{d}{dx}$ écrite plus haut apparaît bien sans dimension, si l'on invoque le point de vue usuel, puisque X et x varient proportionnellement quand l'unité u est changée. Toutefois, il faut noter que, le symbole de u lui-même étant $\dfrac{d}{dx}$, la même raison, appliquée inconsidérément, attribuerait à ce dernier la dimension A^{-1}. C'est la conséquence de ce que le point de vue usuel juge des dimensions sur des formules écrites à l'aide des *mesures* des grandeurs, et non à l'aide des grandeurs elles-mêmes, la dimension étant en quelque sorte considérée comme portée par la lettre qui désigne ces mesures. Cela implique que les considérations usuelles ne peuvent s'appliquer qu'à la condition que ces mesures soient traitées comme des indéterminées. Cette conception apparaît peu cohérente puisqu'elle demande qu'un système d'unités soit choisi, pour permettre l'écriture des équations, et en même temps que ce système présente une part d'arbitraire. Dans le point de vue présenté ici, les équations portent sur les grandeurs elles-mêmes, la dimension étant attachée aux différents espaces constitués par ces grandeurs : dans l'équation $a = xu$ la dimension est portée par a et u.

c) **Cartes dimensionnelles.**

Les seules cartes considérées jusqu'à présent sur la variété M sont les cartes sans dimension, c'est-à-dire celles dont les fonctions coordonnées sont à valeurs réelles. Plus généralement, il est possible d'introduire des cartes $x \to \{ a^i(x) \}$, $a^i(x) \in \mathbb{R}_{A_i}$, à valeurs dans un produit quelconque $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{R}_{A_i}$. Une telle carte peut évidemment toujours être regardée comme construite à partir d'une carte sans dimension $x \to \{ x^i \}$ par des formules telles que $a^i(x) = x^i u_{A_i}$, $u_{A_i} \in \mathbb{R}_{A_i} - \{ 0_{A_i} \}$, mais il peut aussi être intéressant de la considérer directement, si, par exemple, les $a^i(x)$ ont une signification physique. Le repère naturel qui lui est associé, en chaque point x de son domaine, est constitué des vecteurs $\left(\frac{\partial}{\partial a^i}\right)_x \in (\mathrm{TM}_x)_{A_i^{-1}}$, qui généralisent le vecteur $\frac{d}{da}$ introduit sur $\mathbb{R}_A$: l'image en chaque point de $\frac{\partial}{\partial a^i}$ dans la carte considérée est, par définition, le vecteur

$$v_i^{-1} \otimes (0, \ldots, v_i, \ldots, 0), \qquad v_i \in \mathbb{R}_{A_i} - \{ 0_{A_i} \}$$

qui appartient à $\mathbb{R}_{A_i^{-1}} \otimes \prod_{j=1}^{n} \mathbb{R}_{A_j}$; il agit sur une fonction f définie sur M, exprimée comme une fonction des coordonnées a^i, selon la formule

$$\frac{\partial}{\partial a^i} f(a^1, \ldots, a^n) = \lim_{\alpha \to 0} \alpha^{-1}(f(a^1, \ldots, a^i + \alpha, \ldots, a^n) - f(a^1, \ldots, a^n)), \quad \alpha \in \mathbb{R}_{A_i} - \{ 0_{A_i} \}$$

En fonction des coordonnées réelles $x^i = u_{A_i}^{-1} a^i$ on a $\frac{\partial}{\partial a^i} = u_{A_i}^{-1} \frac{\partial}{\partial x^i}$. Cela montre que les $\frac{\partial}{\partial a^i}$ forment, en chaque point x, une base du module $\tau \mathrm{M}_x$; si $A_i = A$, $\forall i$, ils forment plus particulièrement une base au sens ordinaire de $(\mathrm{TM}_x)_{A^{-1}}$. Dans le cas général, les formes $da^i = u_{A_i} dx^i$ constituent, en chaque point x, la base duale de la base des $\frac{\partial}{\partial a^i}$ dans le module dual $\tau^* \mathrm{M}_x$.

Ce qui précède montre que, sur une variété abstraite, aucune dimension ne peut être privilégiée. Ce fait est illustré par la notion intuitive de vecteur joignant deux points de M infiniment voisins x et x' : si l'on note Δa^i

les différences des coordonnées de ces deux points dans une carte quelconque à valeurs dans $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{R}_{A_i}$, le vecteur joignant x à x' est, par définition, le vecteur $\Delta a^i \frac{\partial}{\partial a^i}$; il est, au deuxième ordre près, invariant par tout changement de carte et *sans dimension.* Certaines dimensions particulières peuvent toutefois jouer un rôle en raison de structures supplémentaires répondant à des conditions physiques. La notion de longueur, examinée dans la section suivante, en fournit un exemple.

5. DEUX EXEMPLES

a) Notion de longueur.

Soit M une variété quelconque. Une notion de longueur sur M, le terme de longueur étant compris dans le sens que lui donne la Physique, et la dimension correspondante étant désignée par L, est définie par la donnée d'une métrique riemannienne g sur M *à valeurs dans* $\mathbb{R}_{L^2}$. Outre les conditions de symétrie et de positivité, on a donc $g(x) \in \mathbb{R}_{L^2} \otimes T^*M_x \otimes T^*M_x$, $\forall x \in M$; le produit scalaire $v \cdot w = g(x)(v, w)$ de deux vecteurs v et w de TM_x appartient à $\mathbb{R}_{L^2}$, et la norme $\| v \| = (g(x)(v, v))^{1/2}$ à $\mathbb{R}_L$. La distance de deux points de M infiniment voisins est bien ainsi une longueur.

La forme bilinéaire $g(x)$ s'étend en une forme bilinéaire sur le module τM_x à partir de la relation

$$g(x)(\alpha v, \beta w) = \alpha\beta g(x)(v, w), \qquad v, w \in TM_x, \qquad \alpha, \beta \in \mathscr{A}$$

Si $V \in (TM_x)_A$ et $W \in (TM_x)_B$, on a donc $g(x)(V, W) \in \mathbb{R}_{ABL^2}$. En particulier, $g(x)$ définit une forme quadratique sur $(TM_x)_A$ à valeurs dans $\mathbb{R}_{A^2L^2}$; pour $A = L^{-1}$ on obtient une forme quadratique sur $(TM_x)_{L^{-1}}$ *à valeurs réelles ;* c'est dans cet espace seulement que les notions de vecteur normé ou de base orthonormée possèdent un sens intrinsèque. Plus explicitement, dans un système de coordonnées quelconque $x \to (x^i)$, on a la représentation classique

$$ds^2 \equiv g(x) = g_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j, \qquad g_{ij}(x) = g(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

Si $x^i \in \mathbb{R}_{A_i}$ la dimension du coefficient g_{ij} est égale à $A_i^{-1}A_j^{-1}L^2$, de sorte que, pour des coordonnées x^i à valeurs dans $\mathbb{R}_L$, on a $\frac{\partial}{\partial x^i} \in (TM_x)_{L^{-1}}$ et $g_{ij}(x) \in \mathbb{R}$.

Supposons, par exemple, que M soit l'espace euclidien de dimension 3 relatif à un observateur galiléen, et soit D_i, $i = 1, 2, 3$, trois droites orientées de M issues d'un point 0, orthogonales deux à deux. Désignons par x^i les longueurs, comptées algébriquement suivant les D_i, des segments d'origine 0 dont les extrémités sont les projections orthogonales du point x de M sur ces droites. On vérifie facilement que ces données sont équivalentes à celle des trois vecteurs $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, formant une base orthonormée de $(TM)_{L^{-1}}$, les coordonnées $x^i \in \mathbb{R}_L$ étant définies en fonction du vecteur Ox et de cette base par la décomposition $Ox = x^i e_i$. Notons encore que $\| Ox \| \in \mathbb{R}_L$, et que le vecteur $Ox/\| Ox \|$ appartient à $(TM)_{L^{-1}}$ et est normé : c'est le vecteur unitaire porté par Ox. Ces exemples illustrent la manière dont la notion de vecteur normé, porté par un axe ou par une direction quelconque, prend un sens intrinsèque, c'est-à-dire indépendant du choix d'une unité de longueur. La manière usuelle suppose au contraire la donnée d'une unité de longueur u_L, les coordonnées étant les nombres réels $u_L^{-1} x^i$, et les vecteurs « unitaires » des axes les vecteurs $u_L \frac{\partial}{\partial x^i} \in TM$; mais ces derniers ont pour norme u_L, et non 1, et ne sont donc unitaires que relativement à l'unité de longueur choisie.

Nous continuons l'examen des propriétés liées à la notion de longueur en supposant que la variété M est de dimension 3. On utilise des coordonnées à valeurs dans $\mathbb{R}_L$: les composantes g_{ij} du tenseur métrique, ainsi que leur déterminant g, sont, en chaque point, des nombres réels, tandis que les composantes contravariantes et covariantes d'un vecteur de dimension zéro sont de dimension L.

L'élément de volume est, au facteur 1/3! près, la pseudo-3-forme η de dimension L^3 définie par [12]

$$\eta = \eta_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \in \mathbb{R}_{L^3} \otimes (T^*M)^{\otimes 3}$$

et

$$\eta_{ijk} = \sqrt{g}\, \varepsilon_{ijk} \in \mathbb{R}$$

où ε_{ijk} est le symbole totalement antisymétrique usuel.

Le produit vectoriel $u \times v$ de deux vecteurs, tangents au même point de M, est alors défini par la relation

$$\eta(u, v, w) = (u \times v) \cdot w$$

ou directement par ses composantes

$$(u \times v)_i = \eta_{ijk} u^j v^k$$

[12] Pour ne pas compliquer les notations, on néglige le fait que l'espace des pseudo-vecteurs, formes, etc., est distinct de l'espace correspondant des vrais vecteurs, formes, etc. Ces espaces peuvent d'ailleurs être mis en bijection si M est orientable.

Si u et v appartiennent à TM, les composantes $(u \times v)_i$ sont de dimension L^2, et l'on a donc $u \times v \in (TM)_L$ et $\| u \times v \| \in \mathbb{R}_{L^2}$. Cette dernière quantité égale l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs u et v. Ce résultat est bien connu, mais n'est exprimé d'habitude que, relativement à des unités de longueur et d'aire reliées de façon cohérente, par l'égalité des mesures de l'aire du parallélogramme et de la norme du produit vectoriel, la définition de ce dernier comme élément de TM dépendant alors évidemment du choix de l'unité de longueur. Il implique en fait, comme cela est réalisé ici, que, sauf dans le cas où $u, v \in (TM)_{L^{-1}}$, les vecteurs u, v et $u \times v$ n'appartiennent pas en général au même espace tangent. Le lien qui existe entre la représentation étudiée ici et la représentation usuelle des vecteurs de toute dimension par des vecteurs de TM sera précisé à la fin de ce paragraphe.

Considérons maintenant les opérateurs gradient, rotationnel et divergence. Si f est une fonction sur M à valeurs réelles et u un champ de vecteurs de dimension zéro, on a, par définition,

$$\left\{ \begin{aligned} (\text{grad } f)_i &= \partial_i f \in \mathbb{R}_{L^{-1}} \\ (\text{rot } u)^i &= \eta^{ijk} \partial_j u_k \in \mathbb{R} \\ \text{div } u &= \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (u^i \sqrt{g}) \in \mathbb{R} \end{aligned} \right.$$

ce qui implique les appartenances

$$\left\{ \begin{aligned} \text{grad } f &\in (TM)_{L^{-2}} \\ \text{rot } u &\in (TM)_{L^{-1}} \end{aligned} \right.$$

Les dimensions des opérateurs grad, rot, div sont donc respectivement L^{-2}, L^{-1}, L^0 ([13]). On en déduit aussitôt que la dimension du laplacien, appliqué à une fonction ou à un vecteur, est L^{-2}.

Donnons enfin les relations entre les objets et les opérations ci-dessus définis et ceux considérés usuellement. Un vecteur v d'intensité $\| v \| \in \mathbb{R}_A$ appartient, d'après ce qui précède, à $(TM)_{AL^{-1}}$. On le représente habituellement, en faisant le choix de deux unités $u_A \in \mathbb{R}_A$ et $u_L \in \mathbb{R}_L$, par le vecteur $\bar{v}$ de TM qui est défini par

$$\bar{v} = \overline{\| v \|} \left(u_L \frac{v}{\| v \|} \right) = u_A^{-1} u_L v$$

([13]) Ces dimensions sont évidemment en rapport avec les diverses formules tirées de la formule de Stokes.

Sa norme est $\| \bar{v} \| = u_A^{-1} u_L \| v \| \in \mathbb{R}_L$ ([14]). Si, de plus, on a $w \in (\mathrm{TM})_{\mathrm{BL}^{-1}}$ et $u_B \in \mathbb{R}_B$, le produit scalaire et le produit vectoriel usuels de $\bar{v}$ et $\bar{w}$, représentés respectivement par les symboles $\bar{\cdot}$ et $\overline{\times}$, sont donnés par

$$\bar{v} \mathbin{\bar{\cdot}} \bar{w} = \overline{v \cdot w} = u_A^{-1} u_B^{-1} v \cdot w \in \mathbb{R}$$
$$\bar{v} \mathbin{\overline{\times}} \bar{w} = \overline{v \times w} = u_A^{-1} u_B^{-1} u_L v \times w \in \mathrm{TM}$$

où $v \cdot w$ et $\| v \times w \|$ sont mesurés avec l'unité $u_A u_B$; en utilisant la définition de $\bar{v}$ et $\bar{w}$, on trouve les relations

$$(\bar{\cdot}) = u_L^{-2}(\cdot), \qquad (\overline{\times}) = u_L^{-1}(\times)$$

qui montrent la dépendance des produits usuels vis-à-vis du choix de l'unité de longueur. De même, on définit les opérateurs $\overline{\mathrm{grad}}$, $\overline{\mathrm{rot}}$ et $\overline{\mathrm{div}}$ par les relations

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{\mathrm{grad}}\, \bar{f} &= \overline{\mathrm{grad}\, f} \\ \overline{\mathrm{rot}}\, \bar{u} &= \overline{\mathrm{rot}\, u} \\ \overline{\mathrm{div}}\, \bar{u} &= \overline{\mathrm{div}\, u} \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles, si $f \in \mathscr{F}(\mathrm{M}, \mathbb{R}_A)$ et $u \in (\mathrm{TM})_{\mathrm{BL}^{-1}}$, les normes $\| \mathrm{grad}\, f \|$, $\| \mathrm{rot}\, u \|$, et $\mathrm{div}\, u$ sont mesurées sur les unités $u_A u_L^{-1}$ ou $u_B u_L^{-1}$. On trouve alors

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{\mathrm{grad}} &= u_L^2\, \mathrm{grad} \\ \overline{\mathrm{rot}} &= u_L\, \mathrm{rot} \\ \overline{\mathrm{div}} &= \, \mathrm{div} \end{aligned} \right.$$

b) **Électromagnétisme.**

Nous allons donner l'expression des lois fondamentales de l'Électromagnétisme dans la structure dimensionnelle basée sur groupe additif $\mathbb{Q}^3$ déterminé par les espèces abstraites L, T, M. Nous avons déjà vu dans la

---

([14]) La pratique courante ne distingue pas clairement les vecteurs v et $\bar{v}$ (qui ne sont en fait identiques que pour A = L) non plus que leurs normes : c'est $\bar{v}$ qui apparaît en réalité dans les formules classiques (voir plus loin la loi de Coulomb, par exemple), mais par $\| \bar{v} \|$, on entend généralement $\| v \|$. Supposons en effet, par exemple, que le vecteur considéré soit une accélération $\vec{g}$, et le système d'unités le Système International; le nom de l'unité étant toujours indiqué dans les résultats numériques, on écrit, par exemple, pour l'intensité de $\vec{g}$ la relation $g = 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$ (qui correspondrait dans nos notations à la formule incorrecte $\| \vec{g} \| = 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$), mais, le symbole $\mathrm{m.s^{-2}}$ désignant l'unité d'accélération, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{R}_{\mathrm{LT}^{-2}}$, la quantité notée g est en fait $\| \vec{g} \|$. Pour éviter des confusions, on entend donc ici par représentation usuelle celle qui ne laisse apparaître que des mesures de grandeurs et des vecteurs de TM, des unités étant choisies.

Section 2 que, dans cette structure, la loi de Coulomb permet de définir le produit de deux charges q et q' par la relation

$$qq' = 4\pi r^2 f(q, q', r) \in \mathbb{R}_{L^3T^{-2}M} \cdot$$

valable pour des charges ponctuelles dans le vide. Si $\mathscr{E}$ désigne l'espace vectoriel associé à l'espace physique tridimensionnel, et $\vec{x} \in \mathscr{E}$ le vecteur joignant la position de q à celle de q', la force exercée par q sur q' est donnée par $\vec{f} = f\frac{\vec{x}}{r}$, soit (avec $F = LT^{-2}M$)

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi}\frac{qq'}{r^2}\frac{\vec{x}}{r} \in \mathbb{R}_{FL^{-1}} \otimes \mathscr{E}$$

Le champ électrique et le potentiel créés par q ont alors pour expression (avec $Q = L^{3/2}T^{-1}M^{1/2}$)

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}}{q'} = \frac{1}{4\pi}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{x}}{r} \in \mathbb{R}_{QL^{-3}} \otimes \mathscr{E}$$

$$V = \frac{1}{4\pi}\frac{q}{r} \in \mathbb{R}_{QL^{-1}}$$

On a en particulier $\vec{E} = -\operatorname{grad} V$, et l'on vérifie que cette formule est dimensionnellement correcte, l'opérateur gradient défini plus haut ayant la dimension L^{-2}. Dans le cas d'une distribution continue de charges de densité $\rho \in \mathbb{R}_{QL^{-3}}$, on trouve les équations locales de l'Électrostatique

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \qquad \operatorname{div} \vec{E} = \rho$$

dans lesquelles figurent les opérateurs rot et div définis précédemment.

Soit $\mathscr{I}$ l'espèce de grandeur courant électrique. Considérons deux éléments de courants permanents, parallèles et de même sens, orthogonaux à la droite les joignant, et d'intensités respectives $J, J' \in \mathbb{R}_{\mathscr{I}}$; si dl et dl' sont les longueurs infiniment petites de ces éléments, et r la distance qui les sépare, soit $df(J, J', dl, dl', r)$ la force d'attraction qui s'exerce entre eux. La loi de Biot-Savart-Laplace permet de définir le produit JJ' par la relation

$$JJ' = 4\pi\frac{r^2}{dldl'}df(J, J', dl, dl', r) \in \mathbb{R}_F$$

Par cette définition, l'espèce $\mathscr{I}$ se trouve identifiée à l'espèce abstraite $F^{1/2} = L^{1/2}T^{-1}M^{1/2}$. Dans le cas général où la situation relative de ces éléments de courant est quelconque, si $\vec{x}$ est le vecteur joignant l'élément d'intensité J à l'autre, la formule vectorielle donnant la force exercée par le premier sur le second est alors la suivante

$$\overrightarrow{df} = \frac{1}{4\pi}\frac{JJ'}{r^2}\overrightarrow{dl'} \times \left(\overrightarrow{dl} \times \frac{\vec{x}}{r}\right) \in \mathbb{R}_{FL^{-1}} \otimes \mathscr{E}$$

L'homogénéité de cette formule se vérifie en notant que le produit vectoriel, tel qu'il a été défini dans la sous-section précédente, a la dimension L, les vecteurs $\vec{dl}$, $\vec{dl'}$, $\vec{x} \in \mathscr{E}$ ayant la dimension zéro. L'induction créée par $\mathrm{J}\vec{dl}$ est définie par la formule $\vec{df} = \mathrm{J}'\vec{dl'} \times d\vec{\mathrm{B}}$, et a pour expression

$$d\vec{\mathrm{B}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{J}}{r^2}\vec{dl} \times \frac{\vec{x}}{r} \in \mathbb{R}_{\mathscr{I}\mathrm{L}^{-2}} \otimes \mathscr{E}$$

Elle dérive du potentiel vecteur

$$d\vec{\mathrm{A}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{J}\vec{dl}}{r} \in \mathbb{R}_{\mathscr{I}\mathrm{L}^{-1}} \otimes \mathscr{E}$$

Le champ électrique et l'induction magnétique ont la même dimension. Il en est de même pour le potentiel électrique et la norme du potentiel vecteur. Dans le cas d'une distribution continue de courants permanents, de densité $\vec{j} \in \mathbb{R}_{\mathscr{I}\mathrm{L}^{-3}} \otimes \mathscr{E}$, les lois élémentaires conduisent aux équations locales de la Magnétostatique

$$\operatorname{div} \vec{\mathrm{B}} = 0 \qquad \operatorname{rot} \vec{\mathrm{B}} = \vec{j}$$

Le lien entre les grandeurs électriques et magnétiques est maintenant exprimé par la relation

$$\mathrm{J} = \frac{1}{c}\mathrm{I}, \qquad c \in \mathbb{R}_{\mathrm{LT}^{-1}}$$

où $\mathrm{I} = \dfrac{d\mathrm{Q}}{dt} \in \mathbb{R}_{\mathrm{QT}^{-1}}$ représente le flux de charge électrique (intensité usuelle), et c la constante fondamentale de l'Électromagnétisme. Pour une distribution continue quelconque de courant, caractérisée en chaque point par la densité de charge ρ et la vitesse $\vec{v}$, la densité $\vec{j}$ précédemment introduite est donc égale à $\rho\dfrac{\vec{v}}{c}$, et l'on a la relation de continuité

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

La constante c apparaît encore dans la loi d'induction

$$e = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$$

dans laquelle e est la force électromotrice induite dans un circuit fixe traversé par le flux magnétique Φ. A partir des lois précédentes, les équations de Maxwell dans le vide sont obtenues de la façon usuelle, et s'écrivent

$$\operatorname{div} \vec{\mathrm{B}} = 0 \qquad \operatorname{rot} \vec{\mathrm{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathrm{B}}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{\mathrm{E}} = \rho \qquad \operatorname{rot} \vec{\mathrm{B}} = \vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathrm{E}}}{\partial t}$$

Ces équations, ainsi que les précédentes, ont un sens intrinsèque. Elles sont *de forme* identique aux équations écrites classiquement dans le système d'unités dit « système mixte rationalisé » [*11*]. Cela implique que les équations entre mesures et vecteurs de $\mathscr{E}$ déduites des équations intrinsèques dans un système d'unités *cohérent* de la structure choisie, sont identiques aux équations dans le système mixte. La raison essentielle en est la définition de J par la loi de la Magnétostatique, qui entraîne que $\bar{\mathrm{J}}$ est égale à la mesure de l'intensité ordinaire en u. é. m. Puisque $\bar{\mathrm{I}}$ est la mesure de la même quantité en u. é. s., la formule reliant J et I équivaut à la définition donnée couramment pour la constante $\bar{c}$, soit $\bar{c} = (u_{\mathrm{Q}})_{\text{u.é.m.}}/(u_{\mathrm{Q}})_{\text{u.é.s.}}$. On verrait de même que, dans le système cohérent mentionné ci-dessus, les mesures de E et V sont égales à leurs mesures dans le système électrostatique, tandis que celles de B et A sont égales à leurs mesures dans le système électromagnétique. Enfin, les équations dans le Système International sont obtenues à partir des équations intrinsèques par le choix suivant des unités de champs (outre celui des unités u_{L}, u_{T}, u_{M})

$$u_{\mathrm{E}} = \sqrt{\varepsilon_0}\, u_{\mathrm{F}}^{1/2} u_{\mathrm{L}}^{-1} \qquad u_{\mathrm{B}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} u_{\mathrm{F}}^{1/2} u_{\mathrm{L}}^{-1}$$

la condition $\varepsilon_0 \mu_0 \bar{c}^2 = 1$ étant satisfaite, et les unités des autres grandeurs étant définies à partir de celles-là par

$$u_{\mathrm{F}} = u_{\mathrm{Q}} u_{\mathrm{E}} \qquad u_{\mathrm{V}} = u_{\mathrm{E}} u_{\mathrm{L}}$$
$$u_{\mathrm{Q}} = u_{\mathrm{J}} u_{\mathrm{L}} \qquad u_{\mathrm{A}} = u_{\mathrm{B}} u_{\mathrm{L}}$$

On a par exemple $u_{\mathrm{Q}} = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} u_{\mathrm{F}}^{1/2} u_{\mathrm{L}}$, et la loi de Coulomb s'écrit

$$\vec{\bar{f}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\bar{q}\,\bar{q}'}{\bar{r}^2} \frac{\vec{\bar{x}}}{\bar{r}}$$

Il reste à donner à ε_0 (ou plutôt à μ_0) la valeur *numérique* telle que $u_{\mathrm{Q}} u_{\mathrm{T}}^{-1}$ soit le représentant dans la structure dimensionnelle choisie de l'intensité ordinaire égale à 1 ampère.

6. CONCLUSION

La description quantitative des lois physiques n'exige pas que soit donnée une représentation des grandeurs par des nombres, c'est-à-dire que soient choisies des unités. L'expression mathématique des lois, ainsi qu'une représentation intrinsèque de toutes les grandeurs, peuvent être obtenues dans le cadre d'une structure algébrique abstraite, canoniquement définie à partir de quelques espèces de grandeurs choisies comme fondamentales. Ce dernier choix, associé aux lois, détermine, en particulier, les dimensions des diverses grandeurs, qui forment un groupe. L'utilisation du produit tensoriel dans la définition de cette structure permet d'étendre directement la description à celle des grandeurs vectorielles. L'homogénéité des relations qui expriment les lois est une simple conséquence de la structure algébrique, les relations entre grandeurs de dimensions déterminées (comprenant éventuellement des constantes) construites à l'aide des seules opérations appartenant à cette structure étant nécessairement homogènes. Ces relations sont plus généralement caractérisées par leur invariance par les automorphismes de la structure algébrique. Enfin, quel que soit le choix du groupe des dimensions, les équations intrinsèques peuvent être traduites à la façon usuelle dans tout système d'unités, cohérent ou non par rapport à la structure considérée.

REMERCIEMENTS

Je remercie M. Irac-Astaud pour d'intéressantes discussions, ainsi que pour une lecture critique du manuscrit. Je remercie aussi M. Ginocchio, qui m'a communiqué la référence [*3*].

RÉFÉRENCES

[*1*] H. BOUASSE, *Cours de Magnétisme et d'Électricité*, 3e édition, 1re partie, Delagrave, Paris, 1914.
[*2*] G. BRUHAT et G. GOUDET, *Électricité*, Masson, Paris, 1956.
[*3*] R. SAINT-GUILHEM, *Les principes généraux de la similitude physique*, Eyrolles, Gauthier-Villars, Paris, 1971.
[*4*] N. BOURBAKI, *Éléments de Mathématique*, Livre **II**, chap. 1, Hermann, Paris, 1958.
[*5*] R. FLEISCHMANN, *Z. f. Phys.*, t. **129**, 1951, p. 377.
[*6*] W. QUADE, *Abh. Braunschw. Wiss. Ges.*, t. **13**, 1961, p. 24.
[*7*] Le Système International d'Unités, *Bureau International des Poids et Mesures*, Sèvres, 1970.
[*8*] J.-M. LÉVY-LEBLOND, *Riv. Nuovo Cimento*, t. **7**, 1977, p. 187.
[*9*] J.-M. LÉVY-LEBLOND, *Rendiconti S. I. F.*, t. **72**, 1979, p. 237
[*10*] S. HELGASON, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York and London, 1962.
[*11*] E. DURAND, *Électrostatique et Magnétostatique*, Masson, Paris, 1953.

(Manuscrit reçu le 5 juin 1981)