ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

BERNARD GAVEAU
EDMOND MAZET

Opérateurs elliptiques et mesures sur l'espace des lacets invariants par le groupe des difféomorphismes du cercle

Annales de l'I. H. P., section A, tome 35, nº 2 (1981), p. 105-111
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1981__35_2_105_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XXXV, n° 2, 1981, p. 105-111. *Physique théorique.*

Opérateurs elliptiques et mesures sur l'espace des lacets invariants par le groupe des difféomorphismes du cercle

par

Bernard GAVEAU et **Edmond MAZET**

Tour Béryl,
40, Avenue d'Italie, 75013 Paris

65, Avenue de l'Amiral Mouchez,
75013 Paris

RÉSUMÉ. — On construit une diffusion et un opérateur elliptique sur l'espace des courbes fermées de classe $C^{k,\alpha}$ invariants par l'action du groupe des difféomorphismes du cercle par la méthode de [*2*]. Cela conduit à une quantification par l'intégrale fonctionnelle de la dynamique des cordes.

SUMMARY. — On the space of closed curves of classe $C^{k,\alpha}$ one constructs a diffusion process and an elliptic operator invariant by the action of diffeomorphism group using the method of [*2*]. This gives a quantization by functional space integrals of the dynamics of a string.

INTRODUCTION

L'article [*2*] résolvait le problème suivant : étant donné l'espace des connexions sur une variété compacte et l'action naturelle du groupe de jauge sur cet espace, construire un opérateur elliptique du second ordre sur l'espace des connexions, invariant par action du groupe de jauge, qui permette d'obtenir une diffusion (également invariante) sur l'espace des connexions. Nous considérons ici la situation assez différente suivante : l'espace des connexions est remplacé par l'espace des lacets, i. e. pour nous des immersions du cercle S^1 dans une variété M, le groupe de jauge étant remplacé par l'action naturelle du groupe des difféomorphismes du cercle agissant sur un lacet par l'action de changement de paramètre ; dans cette situation, nous construisons un opérateur elliptique du second ordre invariant sur l'espace de ces lacets et sa diffusion associée.

Dans les deux situations, la démarche est la même : la géométrie infinitésimale de la variété de dimension infinie est étudiée du point de vue des invariants naturels ; cette étude permet de construire un système différentiel elliptique du second ordre (de dimension finie) qui agit sur l'espace tangent à la variété de dimension infinie et qui a une certaine propriété d'équivariance par action du groupe envisagé ; cette étude est de nature purement algébrique en quelque sorte. Ensuite, l'opérateur différentiel de dimension infinie est obtenu par son symbole ; celui-ci n'est autre que le noyau de la chaleur du système elliptique différentiel considéré, l'opérateur ainsi obtenu étant naturellement invariant. A partir de ce moment, la diffusion se construit en utilisant la technique générale de [*1*] complétée dans [*2*], § 2 ; il suffit de vérifier que le symbole de l'opérateur, donc le noyau de la chaleur du système elliptique de dimension finie satisfait les estimées nécessaires, ce qui résulte de la même démarche que celle de [*2*], § 3, l'outil technique essentiel étant celui des estimées paraboliques intérieures de Friedman [*3*].

Signalons que l'article [*4*] donne une autre construction de diffusions non invariantes, utilisant le parallélisme canonique de l'espace des lacets.

Le premier auteur remercie I. M. Gelfand et A. M. Vershik de lui avoir donné la possibilité d'exposer les résultats dans leur séminaire à Moscou et Léningrad à l'automne 1980.

Signalons enfin le travail de Asorey et Mitter (à paraître dans les communications in *Math. Physics*) concernant la quantification de Yang Mills.

1. GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE DES LACETS

a) Soit M une variété riemannienne C^∞, nous noterons par $(X_i)_{i=i...n}$ un système de coordonnées locales sur M.

Soit S^1 le cercle unité identifié à l'intervalle des $s \in [0, 2\pi[$ et soit $L^{k,\alpha} = L^{k,\alpha}(S^1, M)$ l'espace des immersions $\gamma : S^1 \to M$ de classe C^k, les dérivées *k*ième étant höldériennes d'ordre $0 < \alpha < 1$. Cet espace a une structure naturelle de variété de Banach. Nous supposerons $k \geqslant 2$ et nous fixerons désormais k et α. L'espace tangent en $\gamma \in L^{k,\alpha}$, $T_\gamma L^{k,\alpha}$ est l'espace des champs de vecteurs X le long de γ qui sont de classe $C^{k,\alpha}$. Si $\Phi : L^{k,\alpha} \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle C^1 et si $X \in T_\gamma L^{k,\alpha}$, alors l'action naturelle de X sur Φ est donnée par la formule

$$X(\Phi)(\gamma) = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \Phi(\gamma_\varepsilon)$$

où on a posé

$$\gamma_\varepsilon(s) = \exp_{\gamma(s)}(\varepsilon X(s)) \qquad s \in [0, 2\pi[$$

(l'exponentielle est l'exponentielle riemannienne de centre, le point $\gamma(s)$).

b) Si $\varphi \in \mathrm{Diff}^{k,\alpha}(S^1) \equiv D^{k,\alpha}$ (groupe des difféomorphismes de S^1 préservant l'orientation, de classe $C^{k,\alpha}$), φ agit naturellement sur $L^{k,\alpha}$ par le changement de paramétrisation

$$\tau_\varphi : \gamma \to \gamma \circ \varphi \qquad \gamma \in L^{k,\alpha}$$

L'action de $D^{k,\alpha}$ se prolonge à une action sur les espaces tangents à $L^{k,\alpha}$

$$\tau_\varphi^* : T_\gamma L^{k,\alpha} \to T_{\gamma\circ\varphi} L^{k,\alpha}$$

définie naturellement par l'identité suivante

$$X(\Phi_0 \tau_\varphi)(\gamma) = \tau_\varphi^*(X)(\Phi)(\tau_\varphi(\gamma))$$

Il est clair alors que

$$(\tau_\varphi^* X)(s) = X(\varphi(s))$$

où $X(\varphi(\cdot))$ est considéré comme champ de vecteurs le long de $\gamma \circ \varphi$.

c) Produit scalaire : on munit $T_\gamma(L^{k,\alpha})$ du produit scalaire riemannien suivant

$$(X \mid Y)_\gamma = \int_0^{2\pi} (X(s) \mid Y(s))_{\gamma(s)} \| \dot\gamma(s) \| \, ds$$

On vérifie alors que

$$(\tau_\varphi^*(X) \mid \tau_\varphi^*(Y))_{\tau_\varphi(\gamma)} = (X \mid Y)_\gamma$$

i. e. que τ est une isométrie pour ce produit scalaire (ici $(X(s) \mid Y(s))_{\gamma(s)}$ est le produit scalaire riemannien ponctuel en $\gamma(s) \in M$).

d) Opérateur D_γ.

Notons ∇_γ l'opérateur de dérivation covariante des champs de vecteurs le long de γ : en coordonnées, on a

$$(\nabla_\gamma X)^i(s) = \frac{dX^i}{ds} + \Gamma^i_{jk}(\gamma(s)) X^j(s) \dot\gamma^k(s)$$

On vérifie alors que

$$\nabla_{\tau_\varphi(\gamma)} \tau_\varphi^*(X) = \dot\varphi(s) . \tau_\varphi^*(\nabla_\gamma X)$$

Par suite, en posant

$$(D_\gamma X)(s) = \frac{1}{\| \dot\gamma(s) \|} (\nabla_\gamma X)(s)$$

où $\| \dot\gamma(s) \|$ est la longueur riemannienne de $\dot\gamma(s)$ (qui est différente de 0 car γ est une immersion), on a

$$D_{\tau_\varphi(\gamma)} \tau_\varphi^*(X) = \tau_\varphi^*(D_\gamma X) .$$

L'opérateur D agit de $TL^{k,\alpha}$ dans $TL^{k-1,\alpha}$.

e) Opérateur $\square_\gamma$.

Pour tout γ, définissons D_γ^* l'adjoint formel de D_γ défini pour le produit scalaire riemannien au point γ : plus précisément si X, Y sont dans $T_\gamma L^{k,\alpha}$, on pose :

$$\int_0^{2\pi} \| \dot\gamma(s) \| \, ds((D_\gamma^* X)(s) \mid Y(s))_{\gamma(s)} = \int_0^{2\pi} \| \dot\gamma(s) \| \, ds(X(s) \mid (D_\gamma Y)(s))_{\gamma(s)}$$

où $(\,|\,)_{\gamma(s)}$ est le produit scalaire riemannien en $\gamma(s) \in M$. On a alors en évaluant le premier membre de cette égalité en $\gamma \circ \varphi$, $X \circ \varphi$, $Y \circ \varphi$ que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} (D_{\gamma\circ\varphi}^*(X \circ \varphi) \mid Y \circ \varphi)_{\gamma\circ\varphi} \| \dot{\widehat{\gamma \circ \varphi}}(s) \| \, ds \\ &= \int_0^{2\pi} (X \circ \varphi \mid (D_\gamma Y) \circ \varphi)_{\gamma\circ\varphi} \| \dot{\widehat{\gamma \circ \varphi}}(s) \| \, ds \\ &= \int_0^{2\pi} (X \mid D_\gamma Y)_\gamma \| \dot\gamma(u) \| \, du = \int_0^{2\pi} (D_\gamma^* X \mid Y) \| \dot\gamma(u) \| \, ds\end{aligned}$$

d'où de nouveau par changement de variable

$$D_{\tau_\varphi(\gamma)}^*(\tau_\varphi^*(X)) = \tau_\varphi^*(D_\gamma^* X)$$

On peut donc fabriquer un opérateur du second ordre elliptique

$$\square_\gamma X = (D_\gamma^* D_\gamma + D_\gamma D_\gamma^*) X$$

autoadjoint par rapport au produit scalaire sur $T_\gamma L^{k,\alpha}$ précédent. De plus cet opérateur satisfait la propriété :

$$\square_{\tau_\varphi(\gamma)} \tau_\varphi^*(X) = \tau_\varphi^*(\square_\gamma X)$$

$\square_\gamma$ est un système différentiel du second ordre en s elliptique. Comme S^1 est compact, il admet une suite de valeurs propres $\lambda_n(\gamma)$ tendant vers $+\infty$ et une suite de vecteurs propres associés $X_n(\gamma)$ orthonormés et il est clair qu'on a

$$\lambda_n(\tau_\varphi(\gamma)) = \lambda_n(\gamma)$$
$$X_n(\tau_\varphi(\gamma)) = \tau_\varphi^*(X_n(\gamma))$$

N. B. — Cet opérateur joue pour l'espace des lacets et le groupe des difféomorphismes, le même rôle que l'opérateur $\square_\pi$ de (2) pour l'espace des connexions et le groupe de jauge.

De plus, les coefficients de cet opérateur sont de classe $C^{k-2,\alpha}$.

2. OPÉRATEURS SUR $L^{k,\alpha}$ INVARIANTS PAR ACTION DE $D^{k,\alpha}$

a) Le noyau de la chaleur de $\square_\gamma$.

Soit σ un paramètre > 0 et soit l'équation de la chaleur dans l'espace $T_\gamma L^{k,\alpha}$ (γ est lacet fixé)

$$\frac{\partial}{\partial\sigma} = - \square_\gamma$$

On notera $P_{\gamma,\sigma}$ le noyau de la chaleur i. e. $P_{\gamma,\sigma}$ est opérateur de $T_\gamma L^{k,\alpha}$ dans lui-même tel que

$$\frac{\partial}{\partial\sigma} P_{\gamma,\sigma}X = - \square_\gamma P_{\gamma,\sigma}X$$

$$P_{\gamma,\sigma}X \to X \qquad \text{si} \quad \sigma \to 0^+$$

Ce semi-groupe admet un noyau ayant un développement en séries de fonctions propres

$$P_{\gamma,\sigma}(s, s') = \sum_n e^{-\lambda_n(\gamma)\sigma} X_n(\gamma)(s) \otimes X_n(\gamma)'(s')$$

avec la relation suivante (par définition)

$$\begin{aligned} p_{\gamma,\sigma}(X)(s) &= (p_{\gamma,\sigma}(s, .) \mid X(\cdot))_\gamma \qquad \text{(produit scalaire du 1°)} \\ &= \sum_n e^{-\lambda_n(\gamma)\sigma} X_n(\gamma)(s) \int_0^{2\pi} (X_n(\gamma)(s') \mid X(s'))_{\gamma(s')} \, \| \dot\gamma(s') \| \, ds' \end{aligned}$$

Comme nous sommes dans le cas compact, les estimées paraboliques intérieures du type de Schauder, démontrées par Friedman ( ), montrent que $P_{\gamma,\sigma}$ opère de $T_\gamma L^{k,\alpha}$ dans lui-même.

Par ailleurs, le calcul du 1° montre que

$$p_{\tau(\varphi)\gamma,\sigma}(s, s') = p_{\gamma,\sigma}(\varphi(s), \varphi(s'))$$

b) Dérivée fonctionnelle.

Soit $\Phi : L^{k,\alpha} \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1. On peut alors définir d'abord sa dérivée fonctionnelle première $\frac{\delta\Phi}{\delta\gamma}$ comme étant une section de $TL^{k,\alpha}$ définie par la relation, pour tout $X \in T_\gamma L^{k,\alpha}$

$$X(\Phi) = \left(X \,\middle|\, \frac{\delta\Phi}{\delta\gamma} \right)_\gamma = \int_0^{2\pi} \left(X(s) \,\middle|\, \frac{\delta\Phi}{\delta\gamma(s)} \right)_{\gamma(s)} \| \dot\gamma(s) \| \, ds .$$

On vérifie alors que l'on a

$$\frac{\delta(\Phi_0 \tau_\varphi)}{\delta\gamma(s)} = \frac{\delta\Phi}{\delta\gamma(\varphi^{-1}(s))} \circ \tau_\varphi$$

De même si Φ est C^2, on définit sa dérivée fonctionnelle seconde $\frac{\delta^2\Phi}{\delta\gamma(s)\delta\gamma(s')}$ par une relation de forme bilinéaire : plus précisément si $\Phi''(\gamma)$ est la dérivée seconde de Φ considérée comme forme bilinéaire, on écrit

$$\langle \Phi''(\gamma); X, Y \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\delta^2\Phi}{\delta\gamma(s)\delta\gamma(s')} \,\middle|\, X(s) \otimes Y(s') \right)_{\gamma(s),\gamma(s')} \| \dot\gamma(s) \| \, \| \dot\gamma(s') \| \, ds ds'$$

de sorte que $\dfrac{\delta^2\Phi}{\delta\gamma(\delta)\delta\gamma(s')}$ est alors une section de $TL^{k,\alpha} \otimes TL^{k,\alpha}$ et on a évidemment

$$\frac{\delta^2(\Phi_0\tau_\varphi)}{\delta\gamma(s)\delta\gamma(s')} = \frac{\delta^2\Phi}{\delta\gamma(\varphi^{-1}(s))\delta\gamma(\varphi^{-1}(s'))} \circ \tau_\varphi .$$

c) L'opérateur invariant L.

Un tel opérateur est tel que par définition :

$$L(\Phi_0\tau_\varphi) = (L\Phi)_0\tau_\varphi .$$

Ici fixons $\tau > 0$ et considérons l'opérateur elliptique de symbole $p_{\gamma,2\tau}(x, y)$; son expression est donc

$$(L\Phi)(\gamma) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(p_{\gamma,2\tau}(s, s') \,\middle|\, \frac{\delta^2\Phi}{\delta\gamma(s)\delta\gamma(s')} \right)_{\gamma(s),\gamma(s')} \| \dot\gamma(s) \| \, \| \dot\gamma(s') \| \, ds ds'$$

THÉORÈME 1. — *L'opérateur L est un opérateur elliptique du second ordre, invariant par action de* $D^{k,\alpha}$.

Preuve. — Calculons l'action de L sur $\Phi_0\tau_\varphi$

$$\begin{aligned}
&(L(\Phi_0\tau_\varphi))(\gamma) \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(p_{\gamma,2\tau}(s, s') \,\middle|\, \frac{\delta^2(\Phi_0\tau_\varphi)}{\delta\gamma(s)\delta\gamma(s')} \right)_{\gamma(s),\gamma(s')} \| \dot\gamma(s) \| \, \| \dot\gamma(s') \| \, ds ds' \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(p_{\gamma,2\tau}(s, s') \,\middle|\, \frac{\delta^2\Phi}{\delta\gamma(\varphi^{-1}(s))\delta\gamma(\varphi^{-1}(s'))} \circ \tau_\varphi \right)_{\gamma(s),\gamma(s')} \| \dot\gamma(s) \| \, \| \dot\gamma(s') \| \, ds ds'
\end{aligned}$$

Posant $u = \varphi^{-1}(s)$, $u' = \varphi^{-1}(s')$, c'est égal à

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(p_{\tau_\varphi(\gamma),2\tau}(u, u') \,\middle|\, \frac{\delta^2\Phi}{\delta\gamma(u)\delta\gamma(u')} \circ \tau_\varphi \right)_{(\gamma\circ\varphi)(u),(\gamma\circ\varphi)(u')} \times$$

$$\times \, \| \tau_\varphi(\gamma)(u) \| \, \| \dot{\widehat{\tau_\varphi(\gamma)}}(u') \| \, du du' = (L(\Phi))(\tau_\varphi(\gamma)) .$$

d) Notations intrinsèques pour L.

On a encore :

$$(L\Phi)(\gamma) = \text{Trace}\,(\Phi''(\gamma)_0(P_{\gamma,\tau}, P_{\gamma,\tau}))$$

3. DIFFUSION INVARIANTE SUR L'ESPACE DES LACETS

a) A partir de la définition de L, nous pouvons construire une diffusion de générateur infinitésimal $\dfrac{1}{2}$L de la façon suivante :

THÉORÈME 2. — *Fixons* $\gamma_0 \in L^{k,\alpha}$. *Il existe une unique diffusion de temps* *de vie* ζ_{γ_0} *issue de* γ_0 *à* $t = 0$ *satisfaisant l'équation différentielle stochastique*

$$d\gamma_t^{(\gamma_0)}(\omega, s) = (\mathrm{P}_{\gamma_t^{(\gamma_0)}(\omega),\tau} \circ db_t)(s)$$

pour $t < \zeta_{\gamma_0}$, *de générateur infinitésimal* $\frac{1}{2}\mathrm{L}$ *invariante par action du groupe des difféomorphismes* $\mathrm{D}^{k,\alpha}$ *i. e. telle que pour* $\varphi \in \mathrm{D}^{k,\alpha}$ *on ait*

$$\gamma_t^{(\tau_\varphi(\gamma_0))}(\omega) = \tau_\varphi\big(\gamma_t^{(\gamma_0)}(\omega)\big) \qquad \text{et} \qquad \zeta_{\tau_\varphi(\gamma_0)} = \zeta_{\gamma_0}.$$

De plus si on note $\mu_{\gamma_0,t}$ *la loi de* $\gamma_{t\wedge\zeta_{\gamma_0}}^{(\gamma_0)}$ *dans* $\mathrm{L}^{k,\alpha}$ *on a :*

$$\mu_{\tau_\varphi(\gamma_0),t} = \tau_\varphi^*(\mu_{\gamma_0}, t)$$

b) Donnons l'esquisse de la démonstration de ce théorème ; elle est en tout point semblable à celle du théorème analogue de (2). Nous nous fixons un chemin γ_0 et nous raisonnons dans une carte U^0 au voisinage de γ_0 (par exemple la carte exponentielle) ; cela nous ramène au cas des espaces vectoriels usuels (tout au moins localement), cas pour lequel nous pouvons appliquer les arguments généraux du § 2 de (2) en introduisant l'espace de Hilbert auxiliaire H, l'espace de vecteurs L^2 de carré intégrable le long de γ_0 l'espace de Banach B étant l'espace $\mathrm{T}_{\gamma_0}\mathrm{L}^{k,\alpha}$.

Pour $\gamma \in \mathrm{U} \subset \mathrm{T}_{\gamma_0}\mathrm{L}^{k,\alpha}$ (identifié au point correspondant de $\mathrm{L}^{k,\alpha}$) nous avons un champ d'opérateurs

$$u_\gamma = u_\gamma^{(2)} \quad u_\gamma^{(1)}$$

où $u_\gamma^{(1)} = \mathrm{P}_{\gamma,\sigma}$, $u_\gamma^{(2)} = \mathrm{P}_{\gamma,\tau-\sigma}$ où ici on note $\mathrm{P}_{\gamma,\sigma}$ l'action du noyau de la chaleur lu par la carte exponentielle. La même démonstration que celle de (2), § 3 assure alors que $u_\gamma^{(1)}$, $u_\gamma^{(2)}$ satisfont les estimées nécessaires pour ce genre de situations car ce sont les estimées des noyaux de la chaleur d'un système elliptique sur une variété compacte (ici S^1) à coefficient $\mathrm{C}^{k-2,\alpha}$ dans l'espace $\mathrm{C}^{k,\alpha}$.

RÉFÉRENCES

[1] B. GAVEAU, Intégrale stochastique radonifiante. *C. R. A. S.*, Paris, t. **276**, 1973, p. 617-620.

[2] B. GAVEAU, Ph. TRAUBER, Constructions de diffusion et de mesures invariantes par le groupe de jauge sur l'espace des connexions. *Journal of functional analysis*, t. **38**, 1980, p. 324-341, annoncé dans *C. R. A. S.*, Paris, t. **289**, 1979, p. 609-612.

[3] A. FRIEDMAN, Interior estimates for parabolic systems of partial differential equations. *J. of Math and Mech.*, t. **7**, 1958, p. 393-417.

[4] B. GAVEAU, E. MAZET, diffusion et intégration sur les espaces de lacets. *C. R. A. S.*, Paris, t. **289**, 1979, p. 643-646.

[5] B. GAVEAU, Ph. TRAUBER, Une approche rigoureuse à la quantification du champ de Yang Mills avec cut-off. *Journal of functional analysis*, 1981 *(à paraître)* annoncé dans *C. R. A. S.*, Paris, t. **291**, 1980, p. 673-676.

(Manuscrit reçu le 27 février 1981)