ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

B. LINET

Force de réaction de rayonnement gravitationnel pour un milieu élastique. I. Perturbation d'un mouvement quasi-newtonien

Annales de l'I. H. P., section A, tome 34, nº 4 (1981), p. 419-425
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1981__34_4_419_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XXXIV, n° 4, 1981, p. 419-425.

Section A :
Physique théorique.

Force de réaction de rayonnement gravitationnel pour un milieu élastique.
I. Perturbation d'un mouvement quasi-newtonien

par

B. LINET

Équipe de Recherche Associée au C. N. R. S., N° 533,
Université Paris VI, Institut Henri Poincaré,
11, rue Pierre-et-Marie Curie, 75231, Paris Cedex 05, France

RÉSUMÉ. — Nous déterminons, dans le cadre de la relativité générale, les équations du mouvement pour un milieu élastique animé de vitesses faibles par rapport à c et dans lequel les forces de contraintes ne sont pas prépondérantes par rapport aux forces gravitationnelles. La force de réaction de rayonnement gravitationnel apparaît comme une force perturbatrice dans les équations du mouvement post-post-newtoniennes. Nous en déduisons la formule de variation d'énergie du système due au rayonnement gravitationnel.

ABSTRACT. — We determine, within the general theory of relativity, the equations of motion in the slow approximation of a continuous medium in which the forces from material stresses do not play a leading part with respect to the gravitational forces. The gravitational radiation reaction force appears as a disturbing force in the post-post-newtonian equations of motion. Then, we deduce the formula for the variation of the energy of the system due to the gravitational radiation.

1. INTRODUCTION

Dans le cas d'un fluide parfait animé de vitesse faible par rapport à c, Papapetrou et nous-mêmes [*4*] avons explicité la force de réaction, due

Annales de l'Institut Henri Poincaré-Section A-Vol. XXXIV, 0020-2339/1981/419/$ 5,00/

au rayonnement gravitationnel, apparaissant comme une force perturbant le mouvement post-post-newtonien. Cela conduisait à une variation d'énergie du système qui coïncide avec celle déterminée par Chandrasekhar et Esposito [*2*]. Dans ce travail nous n'allons pas discuter les difficultés mentionnées dans [*4*] qui sont inhérentes au type de méthode que nous avons adopté; mais avec le même degré de rigueur que dans [*4*], nous allons déterminer la force de réaction pour un milieu élastique ayant un tenseur des contraintes anisotropes et dans lequel les forces de contraintes ne sont pas prépondérantes par rapport aux forces gravitationnelles. Nous en déduirons la formule donnant la variation d'énergie du système.

Puisque dans le cas d'un milieu élastique, il s'agit de refaire des calculs similaires à ceux effectués dans [*4*], nous allons seulement faire une description du problème et nous allons omettre tous les détails.

2. POSITION DU PROBLÈME

L'espace-temps est décrit par la métrique $g_{\mu\nu}$. Nous adoptons comme variable de champs la densité tensorielle $\mathfrak{G}^{\lambda\mu}$ définie par :

$$\mathfrak{G}^{\lambda\mu} = \sqrt{-g}\,g^{\lambda\mu} \tag{1}$$

où g est le déterminant de $g_{\mu\nu}$. Nous notons $G_{\mu\nu}$ l'inverse de $\mathfrak{G}^{\mu\nu}$. Nous choisissons un système de coordonnées harmoniques; ce qui se traduit par la relation :

$$\mathfrak{G}^{\lambda\mu}_{\ .\lambda} = 0\,. \tag{2}$$

Dans ce travail, la source des équations d'Einstein est un tenseur impulsion-énergie ayant un tenseur des contraintes θ^{ν}_{μ} anisotrope :

$$T^{\mu}_{\nu} = \rho u^{\mu} u_{\nu} - \frac{1}{c^2}\theta^{\mu}_{\nu} \tag{3}$$

où u^{μ} est la vitesse du fluide. Nous introduisons une quantité v^{μ} par la relation :

$$u^{\mu} = u^0 v^{\mu} \qquad \text{avec} \qquad v^{\mu} : (1, v^i)\,. \tag{4}$$

Ce tenseur des contraintes satisfait la relation suivante :

$$\theta^{\mu}_{\nu} u^{\nu} = 0\,. \tag{5}$$

Nous introduisons la densité tensorielle $\mathfrak{T}^{\mu}_{\lambda}$ définie par :

$$\mathfrak{T}^{\mu}_{\lambda} = \sqrt{-g}\,T^{\mu}_{\lambda}\,. \tag{6}$$

Avec les notations que nous avons introduites, la conservation du tenseur impulsion-énergie peut s'exprimer sous la forme :

$$\text{(7)} \qquad \mathfrak{T}^{\mu}_{\lambda,\mu} = f_\lambda \quad \text{avec} \quad f_\lambda = \frac{1}{2}\mathfrak{T}^{\mu}_{\mu}(\mathrm{Log}\sqrt{-g})_{,\lambda} - \frac{1}{2}\mathfrak{T}^{\mu}_{\nu}\mathrm{G}_{\mu\rho}\mathfrak{G}^{\rho\nu}_{,\lambda}$$

La compréhension de la méthode exposée dans [*4*] permet de décrire la structure de notre problème. Nous allons considérer les deux étapes distinctes du raisonnement.

Dans la première étape, on supprime les effets radiatifs. En effet on a une possibilité cohérente dans notre méthode de choisir ρ, v^i et θ^i_j comme variables dynamiques et de résoudre les équations du champ en prenant la solution demi-somme retardée et avancée. Finalement, la métrique se présente sous la forme d'un développement en $1/c$ dont les termes s'expriment en fonction de ρ, v^i et θ^i_j. Les équations du mouvement post-post-newtoniennes pour ρ, v^i et θ^i_j s'obtiennent en développant jusqu'en $1/c^5$ la loi de conservation (7). Les variables ρ, v^i et θ^i_j ne sont évidemment pas indépendantes quand on considère une théorie de l'élasticité relativiste et dans ce cas le mouvement peut être déterminé.

Dans la deuxième étape, les effets radiatifs vont apparaître quand nous résolvons, dans notre méthode, les équations du champ à l'aide de la solution retardée. Mais une difficulté apparaît puisque, de par la théorie de l'élasticité relativiste, θ^i_j dépend de ρ et v^i et en particulier par l'intermédiaire de la métrique d'une manière que l'on ne peut pas décrire sans préciser les équations de l'élasticité que l'on considère. Voulant garder la généralité de l'exposé, il nous suffira de savoir que :

$$\text{(8)} \qquad (\theta^i_j)_{\mathrm{rad}} = 0\left(\frac{1}{c^6}\right)$$

pour calculer la perturbation radiative des équations du mouvement post-post-newtoniennes. Ainsi dans la suite de notre raisonnement, ce ne sera pas θ^i_j qui sera utilisé mais $\widetilde{\theta}^i_j$ la variable dynamique θ^i_j utilisée dans les équations du mouvement post-post-newtoniennes à côté de ρ et v^i. Nous avons vérifié que la propriété (8) tient en particulier pour un fluide parfait et pour le milieu élastique considéré par Bennoun [*1*] en relativité générale. Finalement, la métrique se présente sous la forme d'un développement en $1/c$, à l'ordre qui nous est utile, dont les termes s'expriment en fonction de ρ, v^i et $\widetilde{\theta}^i_j$. Les équations du mouvement s'obtiennent en développant jusqu'en $1/c^6$ la loi de conservation (7). Celles-ci se présentent comme les équations du mouvement post-post-newtoniennes pour ρ, v^i et $\widetilde{\theta}^i_j$ avec une force perturbatrice radiative. C'est la force de réaction de rayonnement qui s'exprime évidemment en fonction de ρ, v^i et $\widetilde{\theta}^i_j$.

3. FORCE DE RÉACTION DE RAYONNEMENT

La description du problème dans la section précédente étant faite, nous n'allons donner que quelques formules de base. Les expressions utiles des termes du développement en $1/c$ de la métrique sont les suivantes :

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
{}^5\mathfrak{G}^{00} &= -\frac{2G}{3c^5}\frac{d^3Q^{ii}}{dt^3} \\
{}^5\mathfrak{G}^{ij} &= -\frac{2G}{c^5}\frac{d^3Q^{ij}}{dt^3} \\
\partial_k{}^7\mathfrak{G}^{00} &= -\frac{2G}{15c^7}x^k\frac{d^5Q^{ii}}{dt^5} - \frac{4G}{15c^7}x^l\frac{d^5Q^{kl}}{dt^5} + \partial_k Z + F_1^k(t) \\
{}^6\mathfrak{G}^{0k} &= \frac{2G}{3c^6}x^l\frac{d^4Q^{kl}}{dt^4} + F_2^k(t) \\
\partial_k{}^7\mathfrak{G}^{ii} &= -\frac{2G}{3c^7}x^k\frac{d^5Q^{ii}}{dt^5} + F_3^k(t)
\end{aligned}
\right.
$$

où Q^{ij} est le moment quadrupolaire portant sur la densité ρ. La quantité Z vérifie l'équation suivante :

$$
(10)\qquad \Delta Z = {}^5\mathfrak{G}^{ij}\,{}^2\mathfrak{G}^{00}_{,ij}
$$

où $\frac{1}{4}\,{}^2\mathfrak{G}^{00}$ est le potentiel newtonien associé à ρ. Des fonctions du temps $F^k(t)$ existent dans les expressions (9) mais, comme dans [*4*], elles ne donnent pas de contribution à la formule de variation d'énergie. Nous rappelons que les expressions (9) ont été déterminées dans un système de coordonnées harmoniques qui, d'autre part, doit satisfaire des conditions supplémentaires identiques à celles introduites dans [*4*].

Comme nous l'avons expliqué dans la section précédente, on peut alors déduire de (7) la force de réaction de rayonnement. Mais avant, faisons une remarque qui permet de simplifier les calculs. De la conservation du tenseur impulsion-énergie, il résulte que :

$$
(11)\qquad \nabla_\nu(\rho\mu^\nu) = \frac{1}{c^2}\nabla_\mu\theta^\mu_\nu u^\nu
$$

et ensuite de (11), on déduit aisément que :

$$
(12)\quad \partial_0[\rho^7(\sqrt{-g}u^0)] + \partial_i[\rho^7(\sqrt{-g}u^0)v^i] = -\frac{1}{2c^2}\tilde{\theta}^s_s\,{}^5\mathfrak{G}^{00}_{,0} + \frac{1}{2c^2}\tilde{\theta}^l_m\,{}^5\mathfrak{G}^{ml}_{,0}
$$

La force de réaction apparaît à l'ordre $1/c^6$. Nous avons trouvé les expressions générales suivantes :

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \delta f_0 = \rho c\Big[& \frac{1}{4} v^l\, {}^7\mathfrak{G}^{00}_{,l} + \frac{1}{4} v^l\, {}^7\mathfrak{G}^{ii}_{,l} \\ & + {}^6\mathfrak{G}^{0l}_{,0}\frac{v^l}{c} - \frac{1}{2}\frac{v^i v^k}{c^2}\, {}^5\mathfrak{G}^{ik}_{,0} - \frac{1}{2} v^l\, {}^2\mathfrak{G}^{00}_{,l}\, {}^5\mathfrak{G}^{00}\Big] \\ & + \frac{1}{c}\, {}^5\mathfrak{G}^{00}\tilde{\theta}^j_{k,j} v^k - \frac{1}{2c}\partial_0(\rho\, {}^5\mathfrak{G}^{ij} v^i v^j) - \frac{1}{2c}\partial_l(\rho\, {}^5\mathfrak{G}^{ij} v^i v^j v^l) + 0\left(\frac{1}{c^8}\right) \end{aligned}\right.$$

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \delta f_k = \rho c\Big[& -\frac{1}{4}\, {}^7\mathfrak{G}^{00}_{,k} - \frac{1}{4}\, {}^7\mathfrak{G}^{ii}_{,k} - \frac{1}{c}\, {}^6\mathfrak{G}^{0k}_{,0} + {}^6\mathfrak{G}^{0l}_{,k}\frac{v^l}{c} - {}^6\mathfrak{G}^{0k}_{,l}\frac{v^l}{c} \\ & + \frac{1}{2}\, {}^5\mathfrak{G}^{00}\, {}^2\mathfrak{G}^{00}_{,k} + \frac{1}{c^2}\partial_0 v^i\, {}^5\mathfrak{G}^{ki} + \frac{1}{c^2} v^l \partial_l v^i\, {}^5\mathfrak{G}^{ki} + \frac{1}{c^2} v^l\, {}^5\mathfrak{G}^{kl}_{,0}\Big] \\ & - \frac{1}{c}\, {}^5\mathfrak{G}^{00}\tilde{\theta}^j_{k,j} + 0\left(\frac{1}{c^8}\right) \end{aligned}\right.$$

A partir de (13) et (14), nous vérifions que :

$$(15)\qquad \delta f_0 + v^k \delta f_k = 0\left(\frac{1}{c^8}\right)$$

La force de réaction de rayonnement (13) et (14) provoque une variation de l'énergie post-post-newtonienne qui est donnée par la formule suivante :

$$(16)\qquad \frac{d\mathrm{E}}{dt} = c\int \delta f_0 d^3x$$

Pour intégrer (16), quelques résultats intermédiaires sont nécessaires. Ils se démontrent comme dans [*4*]. Nous trouvons que l'on a les relations :

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} \int \rho v^l \partial_l \mathrm{Z} d^3x = \frac{1}{c^2}\, {}^5\mathfrak{G}^{lm}\Big[& \frac{d^3\mathrm{Q}^{lm}}{dt^3} + \frac{d^3\mathrm{Q}^{ii}}{dt^3}\delta^m_l - 2\frac{d}{dt}\int \rho v^l v^m d^3x \\ & - 2\frac{d}{dt}\int \tilde{\theta}^l_m d^3x - 2\frac{d}{dt}\int \tilde{\theta}^s_s d^3x \delta^l_m + 4\int \tilde{\theta}^j_{k,j} v^k d^3x \delta^m_l\Big] + 0\left(\frac{1}{c^9}\right) \end{aligned}\right.$$

$$(18)\quad \int \rho v^l\, {}^2\mathfrak{G}^{00}_{,l} d^3x = \frac{2}{c^2}\left[\frac{d^3\mathrm{Q}^{ii}}{dt^3} + 4\int \tilde{\theta}^j_{k,j} v^k d^3x - 2\frac{d}{dt}\int \tilde{\theta}^s_s d^3x\right] + 0\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

Ayant établi (17) et (18), les calculs usuels permettent d'intégrer (16). Nous obtenons la formule suivante :

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\mathrm{E}}{dt} = &-\frac{\mathrm{G}}{5c^5}\frac{d^3\mathrm{Q}^{ij}}{dt^3}\frac{d^3\mathrm{Q}^{ij}}{dt^3} + \frac{\mathrm{G}}{15c^5}\left(\frac{d^3\mathrm{Q}^{mm}}{dt^3}\right)^2 + 2\frac{d}{dt}\left[\frac{d^3\mathrm{Q}^{ij}}{dt^3}\int \rho v^i v^j d^3x\right] \\ &+ \frac{\mathrm{G}}{c^5}\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{3}{10}\left(\frac{d\mathrm{Q}^{ij}}{dt}\frac{d^3\mathrm{Q}^{ij}}{dt^3} - \frac{d^2\mathrm{Q}^{ij}}{dt^2}\frac{d^2\mathrm{Q}^{ij}}{dt^2}\right)\right. \\ &\left. - \frac{1}{10}\left(\frac{d\mathrm{Q}^{mm}}{dt}\frac{d^3\mathrm{Q}^{nn}}{dt^3} - \left(\frac{d^2\mathrm{Q}^{mm}}{dt^2}\right)^2\right)\right] \\ &- \frac{1}{2}\,{}^5\mathfrak{G}^{lm}\frac{d}{dt}\int \tilde{\theta}_l^m d^3x + \frac{1}{2}\,{}^5\mathfrak{G}^{00}\frac{d}{dt}\int \tilde{\theta}_s^s d^3x \end{aligned}\right.$$

On vérifie que dans (19) les deux derniers termes se compensent pour un fluide parfait; ainsi on retrouve la formule de Chandrasekhar et Esposito [2]. Dans le cas d'un milieu ayant un tenseur des contraintes anisotropes, ceux-ci ne sont pas nuls mais se mettent sous la forme d'une dérivée totale par rapport au temps. En effet à partir de (12), nous obtenons immédiatement que :

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} -\frac{1}{2}\,{}^5\mathfrak{G}^{ml}\frac{d}{dt}\int \tilde{\theta}_l^m d^3x + \frac{1}{2}\,{}^5\mathfrak{G}^{00}\frac{d}{dt}\int \tilde{\theta}_s^s d^3x = &\frac{d}{dt}\left[c^2\int \rho^7(\sqrt{-g}u^0)d^3x\right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\,{}^5\mathfrak{G}^{00}\int \tilde{\theta}_s^s d^3x - \frac{1}{2}\,{}^5\mathfrak{G}^{ml}\int \tilde{\theta}_m^l d^3x\right] + 0\left(\frac{1}{c^7}\right) \end{aligned}\right.$$

4. CONCLUSION

Notre travail peut servir de point de départ pour une analyse plus complète d'un milieu dont on préciserait les propriétés élastiques et thermodynamiques.

D'autre part dans un article [3] accompagnant celui-ci, nous déterminerons la formule de variation d'énergie d'un milieu élastique en mouvement quasi-minkowskien dans le cadre de l'approximation linéaire de la relativité générale. Ainsi la formule (19) permettra une comparaison avec celle-ci.

RÉFÉRENCES

[1] J.-F. BENNOUN, Étude des milieux continus élastiques et thermodynamiques en relativité générale. *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 3, 1965, p. 41.

[2] S. CHANDRASEKHAR et F. ESPOSITO, The $2\frac{1}{2}$ post-newtonian equations of hydro-

dynamics and radiation reaction in general relativity. *Astrophys. J.*, t. **160**, 1970, p. 153.

[3] B. LINET, Force de réaction de rayonnement gravitationnel pour un milieu élastique. II. Perturbation d'un mouvement quasi-minkowskien. *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **34**, 1981, p. 427.

[4] A. PAPAPETROU et B. LINET. Equation of motion including the reaction of gravitational radiation. *Gen. Rel. Grav. (à paraître)*.