ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

MARC HENNEAUX

Univers de Bianchi et champs spinoriels

Annales de l'I. H. P., section A, tome 34, nº 3 (1981), p. 329-349
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1981__34_3_329_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XXXIV, n° 3, 1981, p. 329-349. *Physique théorique.*

Univers de Bianchi et champs spinoriels

par

Marc HENNEAUX (1) (2)

Physique théorique et mathématique, Université Libre de Bruxelles,
Campus Plaine C. P. 228, 1050 Bruxelles, Belgique

RÉSUMÉ. — A l'aide des méthodes hamiltoniennes, nous étudions les univers de Bianchi de classe A engendrés par un champ spinoriel. Nous démontrons que ces modèles cosmologiques n'appartiennent en général pas au cas « diagonal », et donnons une nouvelle solution des équations d'Einstein-Dirac pour le type II.

SUMMARY. — Using Hamiltonian techniques, we study class-A Bianchi universes generated by a spinor source. We show that these cosmological models do not belong in general to the diagonal case, and derive a new solution to Einstein-Dirac equations in the type-II case.

1. INTRODUCTION

L'étude des cosmologies spatialement homogènes — ou « univers de Bianchi » — a suscité et suscite encore un grand intérêt [*1*]. Les modèles généralement considérés sont soit solutions des équations d'Einstein du vide, soit remplis par un fluide parfait ou un champ magnétique. Plus récemment, des modèles avec champ scalaire ont également été analysés, en vue de déterminer l'influence des effets quantiques de la matière sur la singularité initiale de l'univers [*2*].

(1) Aspirant du Fonds National Belge de la Recherche Scientifique.

(2) Ce travail a reçu une aide partielle du gouvernement belge (Contrat n° A. R. C. 79/80, 12).

Le but de cet article est d'étudier, à l'aide des méthodes hamiltoniennes, les cosmologies spatialement homogènes de classe A engendrées par un champ spinoriel. Nous montrons d'abord comment le « groupe adjoint » remplace, pour ces modèles, le groupe des changements de coordonnées. Nous démontrons ensuite un certain nombre de théorèmes qui impliquent que ces cosmologies sont en général non diagonales, c'est-à-dire qu'on ne peut diagonaliser la métrique spatiale $g_{ab}(t)$ des hypersurfaces d'homogénéité par un changement de base indépendant du temps cosmologique t. Cette propriété résulte du spin du champ de Dirac qui, on le sait, se couple à la métrique par l'intermédiaire du tenseur d'énergie-impulsion ; elle reste vraie en présence d'autres sources de spin non nul (champ vectoriel, supergravité...).

Nous résolvons enfin les équations d'Einstein-Dirac dans un cas particulier appartenant au type II de Bianchi. Bien que la densité d'énergie de la matière spinorielle puisse y prendre des valeurs négatives (en première comme en seconde quantification), la singularité initiale de l'univers ne peut être évitée, excepté pour certaines valeurs (appartenant à un ensemble de mesure nulle) des constantes d'intégration. Dans ce cas, la phase d'expansion est précédée par une phase de contraction : l'univers passe par un rayon minimum non nul.

2. UNIVERS DE BIANCHI

Par hypothèse, la métrique $g_{\lambda\mu}(x^\rho)$ de l'espace-temps admet un groupe d'isométries à 3 paramètres agissant de manière simplement transitive sur une famille d'hypersurfaces de genre espace :

$$\begin{array}{lll} \pounds_{\xi_a} g_{\lambda\mu} = 0 & \lambda, \mu, \ldots = 0, 1, 2, 3 & \\ [\xi_a, \xi_b] = C^c{}_{ab} \cdot \xi_c & a, b, \ldots = 1, 2, 3 & \\ g_{\lambda\mu} \cdot \xi_a^\lambda \cdot \xi_a^\mu > 0 \quad (\text{sign. } g_{\lambda\mu} = +2) & \text{rang } (\xi_a^\lambda) = 3 & \end{array} \tag{2.1}$$

Les symboles £ et [,] désignent ici la dérivée et les crochets de Lie usuels. Les constantes $C^c{}_{ab}$ sont les constantes de structure du groupe considéré et satisfont à l'identité de Jacobi. Lorsque $C^b{}_{ab} = 0$ (classe A de Ellis et Mac Callum [*1*]), on a :

$$C^c{}_{ab} = \varepsilon_{abd} \cdot n^{cd}$$

Par des transformations linéaires des vecteurs de Killing, on peut diagonaliser la densité tensorielle symétrique n^{ab}. Soient n^a ses valeurs propres. Pour le type I, celles-ci sont toutes nulles : $n^a = 0$. Pour le type II, $n^2 = n^3 = 0$ et, à l'aide d'une transformation linéaire, on peut égaler n^1 à 1. De même, pour le type VI_0, $n^1 = 1 = -n^2$, $n^3 = 0$; pour le type VII_0, $n^1 = n^2 = 1$, $n^3 = 0$; pour le type VIII, $n^1 = n^2 = 1$, $n^3 = -1$; et enfin, pour le type IX, $n^1 = n^2 = n^3 = 1$.

Dans un système de coordonnées approprié, les hypersurfaces de transitivité ont pour équation x^0 = constante, tandis que les composantes des champs de vecteurs de Killing sont indépendantes de la coordonnée x^0 :

$$\xi_a^\mu = (0, \xi_a^m(x^n))$$
$$\partial_0 \xi_a^\mu = 0 \Leftrightarrow \left[\xi_a, \frac{\partial}{\partial x^0}\right] = 0 \tag{2.2}$$

Des solutions particulières $\xi_a^m(x^n)$ des équations (2.1) et (2.2) sont données pour tous les groupes dans [*1*]. Nous ne considèrerons ici que les changements de coordonnées $x'^\lambda(x^\mu)$ qui préservent la dépendance fonctionnelle des composantes des vecteurs de Killing en les coordonnées. Ceux-ci ont la forme suivante :

$$\begin{aligned} x'^0 &= f^0(x^0) \\ x'^m &= f^m(x^0, x^n) \end{aligned} \tag{2.3a}$$

où les fonctions $f^m(x^0, x^n)$ sont soumises aux conditions :

$$\xi_a^p(x^n) . \frac{\partial f^m}{\partial x^p}(x^0, x^n) = \xi_a^m [f^q(x^0, x^n)] \tag{2.3b}$$

pour tous x^0, x^n. Ces changements de coordonnées constituent un groupe dépendant de quatre fonctions arbitraires de x^0.

En raison des équations de symétrie (2.1), la métrique de l'espace-temps s'écrit, dans les systèmes de coordonnée considérés :

$$ds^2 = -N^2(x^0)(dx^0)^2 + g_{ab}(x^0) . [N^a(x^0)dx^0 + \omega^a] . [N^b(x^0)dx^0 + \omega^b] \tag{2.4a}$$

Les 1-formes $\omega^a \equiv \omega_m^a(x^n) . dx^m$ sont invariantes pour les transformations du groupe :

$$£_{\xi_a} \omega^b = 0 \tag{2.4b}$$

et obéissent en outre à

$$£_{\frac{\partial}{\partial x^0}} (\omega^a) = 0 \tag{2.4c}$$

Introduisons le champ $\{ X_a(x^n) \equiv X_a^m(x^n) . \partial_m \}$ de bases duales aux bases $\{ \omega^b(x^n) \}$. Ces bases sont également invariantes pour les transformations du groupe. On sait que les conditions (2.4*b*-*c*) ne déterminent les 1-formes ω^b — et donc aussi les vecteurs X_a — qu'à une transformation linéaire près. Nous lèverons cet arbitraire en imposant, pour certaines valeurs $\mathring{x}^m$ des coordonnées — par exemple $\mathring{x}^m = 0$ — :

$$X_a(x^m = \mathring{x}^m) = \xi_a(x^m = \mathring{x}^m) \tag{2.5}$$

Avec les équations $£_{\xi_a} X_b = 0$, ces conditions fixent complètement les fonctions $X_a^m(x^n)$. On en tire :

$$[X_a, X_b] = - C^c{}_{ab} X_c \tag{2.6}$$

Soit $x'^{\rho} = f^{\rho}(x^{\sigma})$ un changement de coordonnées appartenant à la classe (2.3), et $X'_a(x'^{\sigma})$ les champs de vecteurs invariants satisfaisant, dans les nouvelles coordonnées, aux conditions :

$$\left[X'_a, \frac{\partial}{\partial x'^0} \right] = 0$$

$$X'_a(x'^m = \overset{\circ}{x}{}^m) = \xi_a(x'^m = \overset{\circ}{x}{}^m)$$

Leurs composantes $X'^m_a(x'^n)$ dans le nouveau système de coordonnées sont évidemment les mêmes fonctions de x'^n que les composantes $X^m_a(x^n)$ des vecteurs X_a dans le système de coordonnées x^{ρ} :

$$X'_a(x'^n) = X^m_a(x'^n) . \partial'_m$$

On vérifie aisément que les champs de bases $\{ X_a \}$ et $\{ X'_a \}$ diffèrent par une transformation du groupe adjoint Adj. dépendant au plus de x^0 :

$$\begin{aligned} X^p_a(x^n) . \frac{\partial f^m}{\partial x^p}(x^0, x^n) &= A^b{}_a(x^0) . X^m_b [f^q(x^0, x^n)] \\ A^b{}_a(x^0) &\in \text{Adj.} \qquad \forall x^0 \end{aligned} \qquad (2.3c)$$

Par « groupe adjoint », nous désignons ici le sous-groupe du groupe linéaire GL(3) (réel) agissant sur les bases invariantes $\{ X_a \}$ dont les générateurs infinitésimaux sont les trois matrices $(\Xi_a)^c{}_b \equiv C^c{}_{ab}$. Celles-ci ne sont pas linéairement indépendantes pour tous les types de Bianchi. Par exemple, pour le type I, elles sont nulles. Cette propriété s'explique par les équations $£_{\xi_a} X_b = 0$, $£_{\xi_a} \xi_b = 0$ (type I) et par les conditions (2.5), qui impliquent l'égalité des champs vectoriels X_a et ξ_a en tout point. De là, on tire :

$$X_a = X'_a$$

Soit Inv. (SInv.) le sous-groupe de GL(3) (SL(3)) qui préserve les constantes de structure. Le groupe Adj. est d'après (2.6) et (2.3c) inclus dans Inv. C'est même un sous-groupe normal. De plus, pour la classe A, le déterminant des transformations de Adj. est égal à l'unité : Adj. $\subset$ SInv.

Remarquons encore que le champ vectoriel $N^a X_a$ de Arnowitt-Deser-Misner est, comme la métrique spatiale g_{ab} et la fonction « de laps » N, spatialement homogène. Ses composantes N^a ne dépendent en effet que de la coordonnée x^0. Cette propriété résulte non seulement des hypothèses de symétrie, mais aussi des conditions $\partial_0 \xi^m_a = 0$. De là, il vient, comme nous l'avons vu :

$$£_{X_a} N^b = a^b{}_a(x^0)$$

où la matrice $a^b{}_a$ est, pour tout x^0, le générateur infinitésimal d'une transformation du groupe adjoint. Il existe une approche plus générale, particulièrement intéressante, dans laquelle les composantes $N^a(x^0, x^n)$ appartiennent à une classe plus large de fonctions. Elles sont soumises aux conditions :

$$\pounds_{X_a} N^b = b^b{}_a(x^0)$$

où $b^b{}_a$ est une matrice qui appartient à l'algèbre des générateurs du groupe Inv. d'invariance des constantes de structure [3]; la dérivée temporelle des composantes ξ_a^m des vecteurs de Killing est alors en général non nulle. Nous n'adoptons pas cette généralisation car elle présente certains inconvénients du point de vue du formalisme hamiltonien : les équations d'Einstein (ou d'Einstein-Dirac) — y compris les équations de contrainte — ne dérivent d'un principe variationnel que pour les types VIII et IX [3]. En outre, les transformations de « jauge » pures, auxquelles sont associées des générateurs nuls en vertu des contraintes, ne sont pas bien séparées des transformations d'invariance (auxquelles sont associées des constantes du mouvement pouvant prendre des valeurs quelconques). Le concept de degré de liberté « vrai » peut paraître ambigu.

Nous avons longuement — et sans doute lourdement — insisté sur certains aspects bien connus de la théorie des groupes. Ceux-ci jouent un rôle de premier plan dans la formulation hamiltonienne des équations gouvernant l'évolution des univers de Bianchi. Pour cette même raison nous reprenons ci-dessous les dimensions des groupes Inv., SInv. et Adj. :

	Inv.	SInv.	Adj.
I	9	8	0
II	6	5	2
VI_0	4	3	3
VII_0	4	3	3
VIII	3	3	3
IX	3	3	3

Il résulte de nos hypothèses qu'il existe des champs de tétrapodes orthonormés $h_{(\lambda)\rho}$ invariants pour les transformations du groupe [4] :

$$\pounds_{\xi_a} h_{(\lambda)\rho} = 0$$

Nous choisirons pour la simplicité des tétrapodes « adaptés », c'est-à-dire tels que le champ de vecteurs $h_{(0)}$ soit orthogonal aux hypersurfaces d'homogénéité. On a donc :

$$\begin{aligned} h_{(0)\rho} &= (-N(x^0), 0, 0, 0) \\ h_{(n)m} &= h_{(n)a}(x^0) \,.\, \omega^a_m(x^s) \\ g_{ab}(x^0) &= h_{(m)a}(x^0) \,.\, h_{(n)b}(x^0) \,.\, \eta^{(mn)} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ces tétrapodes sont déterminés à une rotation spatiale dépendant de x^0 près.

Comme source du champ de gravitation, nous prendrons un champ spinoriel $\psi(x^\rho)$ satisfaisant à

$$\pounds_{\xi_a}\psi = i.\lambda_a.\psi \tag{2.8}$$

où les trois constantes réelles λ_a sont soumises aux conditions :

$$C^c{}_{ab}.\lambda_c = 0 \tag{2.9}$$

Celles-ci expriment que le covecteur λ_a est invariant pour les transformations du groupe adjoint. Dans le cas des cosmologies de classe A, elles se réduisent à

$$n^{ab}.\lambda_b = 0 \tag{2.10}$$

De (2.8), on tire que le tenseur d'énergie-impulsion du champ spinoriel $T_{\lambda\mu}[\psi]$ est invariant pour les transformations du groupe d'isométries [5], et constitue donc un second membre acceptable des équations d'Einstein.

Dans les tétrapodes invariants (2.7), les équations (2.8) s'intègrent par séparation. On obtient :

$$\psi(x^0, x^r) = F(x^r).\tilde{\psi}(x^0) \tag{2.11}$$

où la fonction complexe $F(x^r)$ satisfait à

$$\pounds_{\xi_a}F = i.\lambda_a.F \qquad (\Rightarrow \pounds_{X_a}F = i\lambda_a F) \tag{2.12}$$

et où le champ spinoriel $\tilde{\psi}(x^0)$ est invariant pour les transformations du groupe d'isométries :

$$\pounds_{\xi_a}\tilde{\psi} = 0 \tag{2.13}$$

Comme (2.12) implique $\pounds_{\xi_a} | F |^2 = 0$, nous imposerons en outre $| F |^2 = 1$.

Pour la simplicité, nous considérons ici les composantes du champ spinoriel comme quatre nombres complexes ordinaires. Cette approche correspond à une théorie « tronquée » à une particule dans laquelle on néglige la création de paires par le champ gravitationnel. Cependant, on peut, dans tous les raisonnements qui suivent, traiter les composantes du champ spinoriel $\tilde{\psi}(x^0)$ comme les éléments d'une algèbre de Grassman, à condition d'utiliser la mécanique généralisée — ou pseudo-mécanique — de Berezin [6] [7]. Les variables gravitationnelles, ainsi que x^0, appartiennent à la sous-algèbre paire. En outre, on impose à la fonction N, à x^0 et au déterminant de la métrique spatiale d'avoir une composante non nulle le long de l'unité [7]. Dans cette approche, les modèles étudiés peuvent être vus comme les « limites classiques » (« termes d'ordre 0 d'un développement en puissances de $\hbar$ ») de solutions complètes d'une théorie quantique (encore inexistante) des champs de gravitation et de particules de spin un-demi en interaction. Les théorèmes démontrés ci-dessous restent valides car, comme le montre bien le formalisme hamiltonien, ils sont étroitement liés aux propriétés d'invariance des modèles, ou à la manière dont se transforment les composantes du champ spinoriel pour les rotations locales des tétrapodes.

3. ÉQUATIONS D'EINSTEIN-DIRAC POUR LES UNIVERS DE CLASSE A

L'hamiltonien dont dérivent les équations d'Einstein-Dirac dans le cas des cosmologies de classe A est une somme de trois termes [8] [9] :

$$H = N\mathscr{H} + N^a.\mathscr{H}_a + \Omega_{(mn)}.\mathscr{H}^{(mn)} \tag{3.1}$$

Le premier, proportionnel à la fonction N de Arnowitt-Deser-Misner, est le générateur des déplacements orthogonaux aux hypersurfaces de transitivité $x^0 = \text{const.}$ Sa forme explicite est donnée par

$$\begin{aligned} \mathscr{H} &= \mathscr{H}^G + \mathscr{H}^{1/2} \\ \mathscr{H}^G &= G_{abcd}.\pi^{ab}.\pi^{cd} - Rg^{1/2} + 2\lambda g^{1/2} \\ \mathscr{H}^{1/2} &= \lambda_a.j^a - \frac{1}{4}g^{-1/2}.g_{ab}.n^{ab}.\phi^+\gamma_{(5)}\chi - m\phi^+\gamma^{(0)}\chi \end{aligned} \tag{3.2}$$

On a posé :

$$G_{abcd} = \frac{1}{2g^{1/2}}(g_{ac}g_{bd} + g_{ad}g_{bc} - g_{ab}g_{cd})$$

$$\pi^{ab} = \frac{1}{4}(\pi^{(m)a}h_{(m)}{}^{b} + \pi^{(m)b}h_{(m)}{}^{a})\,; \qquad g = \det g_{ab}$$

$$\chi = g^{1/4}\tilde{\psi}\,; \qquad \phi^+ = i\chi^+$$

et

$$j^a = h_{(m)}{}^{a}.j^{(m)} \qquad j^{(m)} = i\phi^+\gamma^{(0)}\gamma^{(m)}\chi$$

La courbure tridimensionnelle R des hypersurfaces d'homogénéité s'exprime uniquement à l'aide de la métrique tridimensionnelle et des constantes de structure du groupe :

$$Rg^{1/2} = -\,G_{abcd}.n^{ab}.n^{cd} \tag{3.3}$$

λ est la constante cosmologique, incluse ici par souci de généralité, et $\gamma_{(5)}$ est le produit $\gamma_{(0)}\gamma_{(1)}\gamma_{(2)}\gamma_{(3)}$ des matrices usuelles de Dirac. Pour plus de détails sur nos conventions, nous renvoyons le lecteur à la référence [9] déjà citée. Bornons-nous à signaler que toutes les grandeurs considérées ici sont, sauf mention contraire, tridimensionnelles.

Le « supermoment » $\mathscr{H}_a$, qui apparaît dans (3.1) multiplié par le vecteur N^a de A. D. M., est le générateur des déplacements tangents aux hypersurfaces $x^0 = \text{const.}$ Il est égal à :

$$\mathscr{H}_a = 2\pi^{bd}.g_{bc}.C^c{}_{ad} - \mathscr{H}_{1/2c}{}^{d}C^c{}_{ad} + i.\lambda_a.\phi^+\chi \tag{3.4}$$

où

$$\mathscr{H}_{1/2c}{}^{d} = h_{(p)c}.h_{(q)}{}^{d}.\mathscr{H}^{(pq)}_{1/2}$$

$$\mathscr{H}^{(pq)}_{1/2} = \phi^+.S^{(pq)}.\chi\,; \qquad S^{(pq)} \equiv S^{(p)(q)} = \frac{1}{8}(\gamma^{(p)}.\gamma^{(q)} - \gamma^{(q)}.\gamma^{(p)})$$

A noter que les quantités $\mathscr{H}^{(pq)}_{1/2}$ sont les composantes $(p)(q)(0)$ du tenseur de spin.

Enfin, le générateur $\mathscr{H}^{(pq)}$ ($\equiv \mathscr{H}^{(p)(q)}$) des rotations locales des tétrapodes a une forme particulièrement simple :

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^{(pq)} &= \mathscr{H}^{(pq)}_{G} + \mathscr{H}^{(pq)}_{1/2} = -\mathscr{H}^{(qp)} \\ \mathscr{H}^{(pq)}_{G} &= \frac{1}{2}\left(\pi^{(p)a}.h^{(q)}_{a} - \pi^{(q)a}.h^{(p)}_{a}\right)\end{aligned} \tag{3.5}$$

Les équations d'Einstein-Dirac sont équivalentes aux équations hamiltoniennes tirées de (3.1), ainsi qu'aux équations de contrainte :

$$\mathscr{H} \approx 0 \qquad \mathscr{H}_a \approx 0 \qquad \mathscr{H}^{(pq)} \approx 0 \tag{3.6}$$

Les variables dynamiques de base sont les composantes $h_{(m)a}$ des tétrapodes, celles du champ spinoriel (χ), et leurs moments conjugués $\pi^{(m)a}$ et ϕ^+ :

$$[h_{(m)a}, \pi^{(n)b}] = \delta^{(n)}_{(m)}.\delta^b_a \qquad [\chi_A, \phi^+_B] = \delta_{AB}$$

(autres crochets de Poisson nuls).

Les fonctions N, N^a et $\Omega_{(pq)}$ sont indéterminées. La première (ainsi que la contrainte $\mathscr{H} \approx 0$) est associée à l'arbitraire dans le choix de la coordonnée temporelle x^0. Aux deuxièmes (ainsi qu'aux contraintes $\mathscr{H}_a \approx 0$) correspondent les transformations linéaires du groupe adjoint agissant sur les bases invariantes $\{X_a\}$. Pour mettre cette propriété en évidence, remplaçons les générateurs (3.4) par les générateurs équivalents $\tilde{\mathscr{H}}_a$

$$\tilde{\mathscr{H}}_a = \pi^{(m)d}.h_{(m)c}C^c{}_{ad} + i\lambda_a\phi^+\chi \tag{3.7}$$

obtenus en ajoutant la combinaison linéaire $C^b{}_{ad}.\mathscr{H}_b{}^d$ des contraintes de « supermoment angulaire » $\mathscr{H}^{(pq)} \approx 0$. On vérifie aisément que ces nouveaux « supermoments » sont bien les générateurs du groupe Adj. pour les variables canoniques homogènes $h_{(m)a}$ et $\pi^{(m)a}$.

Enfin, les six fonctions antisymétriques arbitraires $\Omega_{(pq)}$ et les contraintes $\mathscr{H}^{(pq)} \approx 0$ sont liées à l'indétermination des tétrapodes (2.7).

L'hamiltonien (3.1) a été obtenu par simple substitution de la forme réduite des champs gravitationnel et spinoriel dans l'hamiltonien général d'Einstein-Dirac. On sait que cette façon de procéder n'est permise que pour les cosmologies de classe A [*10*]. Pour la classe B, on peut trouver, d'une infinité de manières inéquivalentes, un principe variationnel du premier ordre qui reproduise les équations d'Einstein-Dirac — voir le théorème de Havas [*11*] — ; mais celui-ci n'a plus rien à voir avec le principe de moindre action usuel $\delta\int({}^{(4)}R\sqrt{-{}^{(4)}g} + \pounds_D)d^4x = 0$, et n'offre en général guère d'intérêt.

Terminons ce paragraphe en insistant sur le fait que les constantes n^{ab} et λ_a sont, dans notre approche, données *a priori*. Ce ne sont pas des variables dynamiques. Leurs crochets de Poisson avec toutes les grandeurs $h_{(m)a}$, $\pi^{(m)a}$, χ et ϕ^+ sont par conséquent nuls.

4. LOIS DE CONSERVATION

L'utilisation des spineurs de poids un-demi χ et ϕ^+, suggérée par l'expression de la « charge »

$$Q = \int d^3x \,.\, \psi^+\psi \,.\, \sqrt{g} = -i\int d^3x \,.\, \phi^+\chi \,,$$

simplifie quelque peu le formalisme [*8*]. Lorsque le champ spinoriel est homogène, ou homogène à une phase près comme ici, la charge est simplement proportionnelle à $\phi^+\chi$. Elle est conservée pour autant que le flux du courant à travers toute surface fermée soit nul. Celui-ci est proportionnel à $j^a C^c{}_{ca}$ et est égal à zéro dans le cas des cosmologies de classe A. Par conséquent :

$$\frac{d}{dx^0}(\phi^+\chi) = 0 \tag{4.1}$$

On peut vérifier cette loi de conservation en remarquant que l'hamiltonien de première quantification de Dirac est bien hermitien pour la classe A.

De même, lorsque la masse est nulle, la charge « axiale » est conservée :

$$\frac{d}{dx^0}(\phi^+\gamma_{(5)}\chi) = 0 \tag{4.2}$$

D'autres lois de conservation résultent de la symétrie du problème. Ainsi par exemple, les générateurs canoniques infinitésimaux Π_A du sous-groupe de SInv. qui préserve le covecteur λ_a commutent, au sens des crochets de Poisson, avec le superhamiltonien $\mathscr{H}$, le supermoment angulaire $\mathscr{H}^{(mn)}$ et le supermoment $\mathscr{H}_a$ (en vertu des contraintes $\mathscr{H}_a = 0$ dans ce dernier cas). Nous nous limitons ici aux transformations de déterminant unité car l'action du groupe GL(3) n'est pas canonique dans l'espace des phases (h, π, χ, ϕ^+). En effet, les variables π, χ et ϕ^+ portent un poids de densité. Dès lors, pour toute transformation $\Lambda^a{}_b$ de GL(3) [*12*] :

$$\pi' dh' + \phi^{+\prime} \,.\, d\chi' = \det \Lambda^a{}_b \,.\, (\pi dh + \phi^+ \,.\, d\chi)$$

De $[\Pi_A, H] = 0$, nous tirons huit constantes du mouvement pour le type I. Dans ce cas, il faut prendre $\lambda_a = 0$ pour satisfaire aux équations de contrainte $\mathscr{H}_a \approx 0$. Les huit générateurs de SL(3) ($\equiv$ SInv.) :

$$\Pi^a{}_b = \pi^{(m)a} \,.\, h_{(m)b} - \frac{1}{3}\,\delta^a{}_b \,.\, \pi^{(m)c} \,.\, h_{(m)c} \tag{4.3}$$

sont donc conservés. A noter que c'est précisément l'existence de cette loi de conservation qui permet d'écrire la solution générale des équations d'Einstein-Dirac pour le type I [*9*].

Pour le type II, λ_1 est nul (condition (2.10)), et il y a en général trois générateurs Π_A conservés. Ceux-ci sont explicitement donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= h_{(m)1}\,.\,\pi^{(m)3} \approx -\, i\lambda_2\,.\,\phi^+\chi \\ \Pi_2 &= h_{(m)1}\,.\,\pi^{(m)2} \approx +\, i\lambda_3\,.\,\phi^+\chi \\ \Pi_3 &= \alpha.\Sigma_1 + \beta.\Sigma_2 + \gamma.\Sigma_3 \end{aligned} \tag{4.4}$$

où

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= h_{(m)2}\,.\,\pi^{(m)3} \\ \Sigma_2 &= h_{(m)3}\,.\,\pi^{(m)2} \\ \Sigma_3 &= h_{(m)2}\,.\,\pi^{(m)2} - h_{(m)3}\,.\,\pi^{(m)3} \end{aligned}$$

et où les nombres α, β et γ sont déterminés (à un facteur près) par les deux équations linéaires :

$$\begin{aligned} \beta.\lambda_3 + \gamma.\lambda_2 &= 0 \\ \alpha.\lambda_2 - \gamma.\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

(par exemple : $\alpha = (\lambda_3)^2$, $\beta = -(\lambda_2)^2$ et $\gamma = \lambda_2.\lambda_3$). Lorsque $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, toutes les combinaisons linéaires des grandeurs Σ_1, Σ_2 et Σ_3 sont conservées.

Pour les types VI_0, VII_0, VIII et IX, le sous-groupe de SInv. qui préserve le covecteur λ_a est identique au groupe adjoint. Par conséquent, on a :

$$\Pi_a = \tilde{\mathscr{H}}_a - i\lambda_a.\phi^+\chi \approx -\, i\lambda_a.\phi^+\chi \tag{4.5}$$

Compte tenu de (4.1) dans le cas où $\lambda_3 \neq 0$ (types VII_0 et VI_0), la loi de conservation

$$\frac{d}{dx^0}\Pi_a = 0$$

est équivalente au fait que les contraintes $\tilde{\mathscr{H}}_a \approx 0$ sont de première classe (comme les autres contraintes) :

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathscr{H}}_a, \tilde{\mathscr{H}}_b] &= -\, \mathrm{C}^c{}_{ab}.\tilde{\mathscr{H}}_c \\ [\tilde{\mathscr{H}}_a, \mathscr{H}] = 0 &= [\tilde{\mathscr{H}}_a, \mathscr{H}^{(mn)}] \end{aligned}$$

Lorsque $\lambda_a = 0$ (mais $m \neq 0$, $\lambda \neq 0$), il existe encore une autre loi de conservation. En effet, les champs gravitationnel et spinoriel n'interagissent alors dans le superhamiltonien $\mathscr{H}$ que par l'intermédiaire des quantités $\phi^+\gamma^{(0)}\chi$ et $\phi^+\gamma_{(5)}\chi$, scalaires pour le groupe SO(3) agissant sur les tétrapodes. Par conséquent, le crochet de Poisson des générateurs $\mathscr{H}^{(mn)}_{1/2}$ et du superhamiltonien sont nuls :

$$\left[\mathscr{H}^{(mn)}_{1/2}, \mathscr{H}_{\lambda_a=0}\right] = 0 \tag{4.6}$$

Dans la « jauge » $N^a = 0$, $\Omega_{(mn)} = 0$, ces générateurs sont conservés. Si $m = 0$, on a en outre, dans la même jauge :

$$\frac{d}{dx^0} j^{(m)} = 0 \qquad (m = 0,\ \lambda_a = 0) \tag{4.7}$$

Supposons à présent que la constante cosmologique λ soit nulle, ainsi que la masse du champ spinoriel et son « impulsion » spatiale λ_a. Considérons le groupe $\overline{\mathrm{GL}(3)}$ des transformations canoniques engendrées par les 9 générateurs $\pi^{(m)a}.h_{(m)a}$. Écrivons les variations infinitésimales des composantes des variables canoniques sous l'action de ce groupe :

$$\delta h_{(m)b} = -\,\varepsilon^c{}_b . h_{(m)c} \qquad \delta\pi^{(m)a} = \varepsilon^a{}_b . \pi^{(m)b} \tag{4.8a}$$

$$\delta\chi = 0 \qquad \delta\phi^+ = 0 \tag{4.8b}$$

Seul le caractère tensoriel des grandeurs dynamiques — et pas leur caractère de densité — joue un rôle dans (4.8).

Soit $\overline{\mathrm{Inv.}}$ le sous-groupe de $\overline{\mathrm{GL}(3)}$ tel que

$$n^{ab} = \Lambda^a{}_c . \Lambda^b{}_d . n^{cd} \tag{4.9}$$

et $\bar{\Pi}_{\bar{A}}$ ses générateurs canoniques. Ceux-ci commutent avec $\sqrt{g}\mathscr{H}$:

$$[\bar{\Pi}_{\bar{A}}, \sqrt{g}\mathscr{H}] = 0 \tag{4.10}$$

En effet, $\sqrt{g}\mathscr{H}$ est un scalaire pour les transformations de $\overline{\mathrm{Inv.}}$ De plus :

$$[\bar{\Pi}_{\bar{A}}, \mathscr{H}^{(mn)}] = 0 \qquad [\bar{\Pi}_{\bar{A}}, \mathscr{H}_a] \approx 0 \tag{4.11}$$

En vertu des contraintes, on tire de (4.10) et (4.11) :

$$\frac{d}{dx^0}\bar{\Pi}_{\bar{A}} = 0 \qquad (m = 0,\ \lambda = 0,\ \lambda_a = 0) \tag{4.12}$$

Lorsque (4.9) n'implique pas det $\Lambda^a{}_b = 1$, cette loi de conservation donne une nouvelle constante du mouvement :

$$\begin{aligned}
&\text{Type I :} && \frac{d}{dx^0}(\pi^{(m)c}.h_{(m)c}) = 0 \\
&\text{Type II :} && \frac{d}{dx^0}(\pi^{(m)2}.h_{(m)2} + \pi^{(m)3}.h_{(m)3}) = 0 \qquad (4.13)\\
&\text{Types VI}_0 \text{ et VII}_0 \text{ :} && \frac{d}{dx^0}(\pi^{(m)3}.h_{(m)3}) = 0
\end{aligned}$$

Notons pour terminer que les lois de conservation (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.6) et (4.12) ne sont pas modifiées si l'on ajoute au superhamiltonien le terme « de Weyl », quartique en le champ spinoriel :

$$\frac{3}{32} g^{-1/2}(\phi^+\gamma_{(0)}\gamma_{(\alpha)}\gamma_{(5)}\chi)(\phi^+\gamma_{(0)}\gamma^{(\alpha)}\gamma_{(5)}\chi)$$

(voir [9]).

5. ÉTUDE DU CAS DIAGONAL

Imposons les conditions de coordonnées $N^a = 0$. Supposons aussi, pour la simplicité, que le champ spinoriel est homogène, c'est-à-dire que le covecteur λ_a est nul. Comme nous l'avons vu, cette dernière hypothèse n'est une restriction que pour les types II, VI_0 et VII_0. Au paragraphe suivant, nous traitons en détail le type VII_0 avec $\lambda_a \neq 0$.

Lorsque la métrique spatiale $g_{ab}(x^0)$ est diagonale à tout instant, ou peut être diagonalisée par une transformation linéaire du groupe Inv. indépendante du temps, on se trouve dans ce que Misner et Ryan ont appelé le « cas diagonal » [*1*]. Dans les bases où la métrique est diagonale, la courbure extrinsèque $K_{ab}(x^0) \equiv - G_{abcd}(x^0).\pi^{cd}(x^0)$ des hypersurfaces d'homogénéité et les moments $\pi^{ab}(x^0)$ sont aussi diagonaux ; les directions propres de ces tenseurs spatiaux sont constantes. De même, la partie $\mathscr{H}_a^{1/2}$ du supermoment (densité de flux d'impulsion du champ spinoriel) et les composantes mixtes $T_{ab}(x^0)$ $(a \neq b)$ du tenseur d'énergie-impulsion sont nulles :

$$\sqrt{g}T^{ab}(x^0)$$
$$\equiv \frac{1}{2}\left(n^{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}.g_{cd}n^{cd}\right)g^{-1/2}.\phi^+\gamma_{(5)}\chi + K^a{}_c.\mathscr{H}^{bc}_{1/2} + K^b{}_c.\mathscr{H}^{ac}_{1/2} \quad (5.1a)$$

$$T^{ab} = 0 \qquad a \neq b \quad (5.1b)$$

$$\varepsilon_{adc}n^{ec}g_{eb}.\mathscr{H}^{bd}_{1/2} = 0 \quad (5.2)$$

La relation (5.1*b*) résulte des équations hamiltoniennes pour π^{ab} (avec $N^a = 0$). La relation (5.2) est une conséquence des contraintes (3.6) et de $n^{ab} = 0$ $(a \neq b)$.

Nous allons examiner ce qu'impliquent les conditions (5.1*b*) et (5.2) pour les différents types de Bianchi.

Types VII_0 et IX : les contraintes (5.2) sont équivalentes à

$$\mathscr{H}^{ab}_{1/2} = 0 \quad (5.3)$$

Les équations (5.1*b*) sont alors automatiquement satisfaites.

Type VI_0 : les contraintes (5.2) impliquent dans ce cas

$$\mathscr{H}^{23}_{1/2} = 0 \qquad \mathscr{H}^{13}_{1/2} = 0 \qquad \mathscr{H}^{12}_{1/2}(g_{11} - g_{22}) = 0 \quad (5.4)$$

Supposons $\mathscr{H}^{12}_{1/2} \neq 0$. Alors les composantes g_{11} et g_{22} de la métrique sont égales, et la trace $n^a{}_a$ de la densité tensorielle n^{ab} est nulle :

$$n^a{}_a = 0 \quad (5.5)$$

En outre, les conditions (5.1*b*) entraînent $K^1{}_1 = K^2{}_2$, ou encore : $\pi^1{}_1 = \pi^2{}_2$.

En dérivant cette relation par rapport au temps et en utilisant les équations hamiltoniennes, on tire ensuite :

$$\phi^{+}\gamma_{(5)}\chi = 0 \tag{5.6}$$

Dans le cas où la masse est nulle, la charge axiale est conservée. Si l'on impose la condition d'hélicité $\gamma_{(5)}\chi = \pm i\chi$, l'équation $\chi^{+}\chi = 0$, dont la solution est $\chi = 0$, découle de (5.6). De là, on tire $\mathscr{H}^{12}_{1/2} = 0$, contrairement à nos hypothèses. Si $m \neq 0$, on obtient, en différentiant (5.6) par rapport au temps :

$$\phi^{+}\cdot\gamma_{(5)}\cdot\gamma_{(0)}\cdot\chi = 0 \tag{5.7}$$

Cette condition est préservée dans le temps. Dans des tétrapodes convenablement choisis, il vient, compte tenu de (5.4), (5.6), (5.7) et $\mathscr{H}^{12}_{1/2} \neq 0$:

$$\chi^{\mathrm{T}} = (a, 0, 0, d) \qquad |a|^2 - |d|^2 \neq 0 \tag{5.8}$$

Les relations (5.5) et (5.8) (avec $g_{ab} = 0$, $a \neq b$) définissent ce que nous appellerons le type VI_0 « exceptionnel ». Les équations de Dirac s'intègrent très aisément dans ce cas particulier, tandis que les équations pour la métrique sont identiques aux équations d'Einstein avec fluide parfait sans pression (discutées par Ellis et Mac Callum, voir [*1*]).

Si la trace $n^{a}{}_{a}$ est différente de zéro (type VI_0 « général »), il faut, pour que la métrique soit diagonale, que la partie de spin $\mathscr{H}^{ab}_{1/2}$ soit nulle :

$$\mathscr{H}^{ab}_{1/2} = 0 \tag{5.9}$$

Type VIII : les contraintes (5.2) impliquent

$$\mathscr{H}^{12}_{1/2} = 0 \qquad \mathscr{H}^{23}_{1/2}(g_{22} - g_{33}) = 0 \qquad \mathscr{H}^{13}_{1/2}(g_{11} - g_{33}) = 0 \tag{5.10}$$

En utilisant (5.1*b*) et les équations hamiltoniennes, on démontre ensuite que

$$\mathscr{H}^{ab}_{1/2} = 0 \tag{5.11}$$

Type II : les contraintes (5.2) entraînent :

$$\mathscr{H}^{13}_{1/2} = 0 \qquad \mathscr{H}^{12}_{1/2} = 0 \tag{5.12}$$

Si $\mathscr{H}^{23}_{1/2} \neq 0$, on tire de (5.1*b*) que les composantes $\pi^{2}{}_{2}$ et $\pi^{3}{}_{3}$ des moments sont égales. Cette condition est préservée dans le temps cas $\pi^{2}{}_{2} - \pi^{3}{}_{3}$ est une constante du mouvement lorsque la métrique est diagonale (voir (4.4)). Par des dilatations appropriées le long des axes 2 et 3 de déterminant unité (appartenant donc à SInv. et ne modifiant pas les composantes $\pi^{2}{}_{2}$ et $\pi^{3}{}_{3}$), on peut, pour une certaine valeur de x^0 (« instant initial ») faire $g_{22} = g_{33}$. En vertu des équations d'Einstein-Dirac, les composantes g_{22} et g_{33} de la métrique spatiale restent égales pour tout x^0. On en déduit que l'élément de longueur spatio-temporel est donné par l'expression :

$$ds^2 = -\,\mathrm{N}^2(x^0)(dx^0)^2 + a^2(x^0)(\omega^1)^2 + b^2(x^0)[(\omega^2)^2 + (\omega^3)^2] \tag{5.13}$$

où les 1-formes ω^a sont les 1-formes invariantes du type II. Cette métrique possède un quatrième vecteur de Killing de genre espace, générateur des rotations autour de l'axe 1 :

$$\pounds_{\xi_4}\omega^1 = 0 \qquad \pounds_{\xi_4}\omega^2 = \omega^3 \qquad \pounds_{\xi_4}\omega^3 = -\omega^2$$
$$[\xi_1, \xi_4] = 0 \qquad [\xi_2, \xi_4] = -\xi_3 \qquad [\xi_3, \xi_4] = +\xi_2$$

Dans la base des tétrapodes qu'il est naturel de prendre ($h^{(1)}{}_m = a\omega^1{}_m$, $h^{(2)}{}_m = b\omega^2{}_m$, $h^{(3)}{}_m = b\omega^3{}_m$), la dérivée de Lie du champ spinoriel vaut explicitement :

$$\pounds_{\xi_4}\chi = -2.\mathrm{S}^{(23)}\chi \tag{5.14}$$

Si on impose à la direction de spin d'être le long de l'axe de révolution, les conditions (5.12) sont automatiquement réalisées. De plus :

$$\pounds_{\xi_4}\chi = -\frac{i}{2}\chi$$

Tous les tenseurs construits à l'aide du champ spinoriel ont donc aussi la symétrie de révolution [5]. Les relations (5.13) et (5.14) définissent le type II « spécial ».

Si la métrique ne possède pas le quatrième vecteur de Killing ξ_4 (type II « général »), il faut, pour que la métrique soit diagonale, que la partie de spin $\mathscr{H}^{ab}_{1/2}$ soit nulle :

$$\mathscr{H}^{ab}_{1/2} = 0 \tag{5.15}$$

Type I : une discussion analogue à celle du type II conduit à la classification suivante des cosmologies spinorielles diagonales du type I.

Type I général (pas d'isométrie supplémentaire) : les conditions (5.1*b*) impliquent que la partie $\mathscr{H}^{ab}_{1/2}$ de spin est nulle :

$$\mathscr{H}^{ab}_{1/2} = 0 \tag{5.16}$$

Il existe une interprétation très simple de ce résultat. Dans le cas diagonal, la métrique du type I admet les isométries discrètes suivantes (réflexions planes) :

$$\mathscr{R}_1 \begin{cases} x^1 \to -x^1 \\ x^2 \to +x^2 \\ x^3 \to +x^3 \end{cases} \qquad \mathscr{R}_2 \begin{cases} x^1 \to +x^1 \\ x^2 \to -x^2 \\ x^3 \to +x^3 \end{cases} \qquad \mathscr{R}_3 \begin{cases} x^1 \to +x^1 \\ x^2 \to +x^2 \\ x^3 \to -x^3 \end{cases}$$

Pour que tous les tenseurs construits à l'aide du champ spinoriel soient invariants dans ces transformations, il faut que le spineur χ soit nul. Mais cette condition est évidemment trop forte, car seul le tenseur d'énergie-impulsion doit posséder les mêmes symétries que la métrique. Or, dans le tenseur d'énergie-impulsion n'apparaît que le tenseur de spin $g^{-1/2}\mathscr{H}^{ab}_{1/2}$ (de manière essentielle lorsque les valeurs propres de la courbure extrinsèque sont distinctes). Imposer à ce tenseur antisymétrique d'être invariant pour les réflexions $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$ et $\mathscr{R}_3$ revient à imposer les conditions (5.16).

c. q. f. d.

Types I spéciaux :

A) $$ds^2 = - N^2(x^0)(dx^0)^2 + a^2(x^0)(dx^1)^2 + b^2(x^0)[(dx^2)^2 + (dx^3)^2] \quad (5.17)$$

$$£_{\xi_4} g_{\lambda\mu} = 0 \qquad \xi_4 = x^3\partial_2 - x^2\partial_3 \quad (5.18)$$

Le spin du champ de Dirac est dirigé le long de l'axe 1 de révolution

$$£_{\xi_4}\chi = -\frac{i}{2}\chi \qquad \mathscr{H}^{12}_{1/2} = 0 \qquad \mathscr{H}^{13}_{1/2} = 0$$

La composante $\mathscr{H}^{23}_{1/2}$ du tenseur de spin n'apparaît pas dans T^{ab} car les valeurs propres $K^1{}_1$ et $K^2{}_2$ sont égales.

B) $$ds^2 = - N^2(x^0)(dx^0)^2 + a^2(x^0)[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2] \quad (5.19)$$

Cette métrique possède 6 vecteurs de Killing ; c'est la métrique des espaces de Robertson-Walker à courbure nulle. Le tenseur de spin se découple du champ de gravitation en raison de l'isotropie. Il n'y a pas de contrainte sur $\mathscr{H}^{ab}_{1/2}$.

Des solutions particulières des équations d'Einstein-Dirac pour les types I spéciaux sont données dans les références [*13*] [*14*] (voir aussi [*9*]).

Inversement, supposons que la partie de spin $\mathscr{H}^{ab}_{1/2}$ soit nulle à l'instant initial. Alors, en vertu de (4.6) et des crochets de Poisson :

$$[\mathscr{H}^{(mn)}_{1/2}, \mathscr{H}^{(rs)}] = \frac{1}{2}\left(-\eta^{(mr)}.\mathscr{H}^{(ns)}_{1/2} + \eta^{(ms)}.\mathscr{H}^{(nr)}_{1/2} - \eta^{(ns)}.\mathscr{H}^{(mr)}_{1/2} + \eta^{(nr)}.\mathscr{H}^{(ms)}_{1/2}\right),$$

cette densité tensorielle reste nulle pour tout x^0. Il en résulte que la partie $\mathscr{H}^{1/2}_a$ du supermoment est aussi égale à zéro, et que les relations $g_{ab} = 0$, $\pi^{ab} = 0$ $(a \neq b)$ sont des relations « invariantes » (ou « intégrales premières particulières »).

D'autre part, lorsque $\mathscr{H}^{ab}_{1/2} = 0$, il est toujours possible de diagonaliser simultanément g_{ab} et π^{ab} à l'instant initial par une transformation de Inv. (utiliser les contraintes de supermoment). Nous avons donc démontré le théorème suivant :

THÉORÈME. — En vertu des équations d'Einstein-Dirac, les cosmologies spinorielles homogènes des types VII_0, VIII, IX et I, II, VI_0 « généraux » appartiennent au cas diagonal si, et seulement si, la partie de spin $\mathscr{H}^{ab}_{1/2}$ du champ spinoriel est égale à zéro.

Ce théorème explique sans doute certains résultats négatifs mentionnés par divers auteurs, selon lesquels les champs spinoriels s'accommoderaient mal de la symétrie des cosmologies homogènes. Ces auteurs supposent en fait implicitement que la métrique est diagonale, ce qui n'est pas du tout une conséquence de l'hypothèse d'homogénéité spatiale.

6. ÉTUDE DU TYPE VII_0 DIAGONAL AVEC $\lambda_a \neq 0$

Pour le type VII_0, seule la composante λ_3 peut être différente de zéro. La contribution à $T_{ab}(x^0)$ due au terme $\lambda_a j^a$ est donnée par la combinaison symétrique $2^{-1}(\lambda_a . j_b + \lambda_b . j_a)$. La composante T_{12} du tenseur d'énergie-impulsion est par conséquent indépendante de λ_3.

D'autre part, les contraintes de supermoment impliquent (dans le cas diagonal) :

$$\mathscr{H}^{23}_{1/2} = 0 \qquad \mathscr{H}^{13}_{1/2} = 0 \qquad \mathscr{H}^{12}_{1/2}(g_{11} + g_{22}) + i\lambda_3 . \phi^+ \chi = 0 \quad (6.1)$$

Si $\lambda_3 \neq 0$, $\mathscr{H}^{12}_{1/2}$ doit être non nul. On en tire, à l'aide de (5.1*b*) (avec $a = 1$, $b = 2$) que les valeurs propres $K^1{}_1$ et $K^2{}_2$ de la courbure extrinsèque sont égales. Ces conditions sont compatibles avec les équations hamiltoniennes si nous prenons également $g_{11} = g_{22}$. Dans ce cas, la métrique possède un quatrième vecteur de Killing, qui engendre les rotations autour de l'axe 3.

Les deux premières équations (6.1) et les conditions $T_{13} = 0$, $T_{23} = 0$ montrent que la direction du spin du champ spinoriel doit être dirigée le long de l'axe de révolution (utiliser aussi la condition d'hélicité dans le cas à masse nulle). La troisième équation (6.1) implique alors $\lambda_3 = -\dfrac{1}{2}$, d'où l'on tire que les composantes spatiales T_{ab} du tenseur d'énergie-impulsion sont nulles, et que la composante T_{00} se réduit au terme de masse.

Le lecteur aura reconnu le type I spécial étudié ci-dessus (voir à ce propos [*1*]).

Dans le cas diagonal « général », la partie de spin $\mathscr{H}^{ab}_{1/2}$ du champ spinoriel est nulle. Il en résulte que la constante λ_3 ne peut différer de zéro.

7. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS POUR LE TYPE II SPÉCIAL

Les modèles cosmologiques spatialement homogènes (avec $\lambda \leqslant 0$) remplis par un fluide parfait ordinaire possèdent tous une singularité. Celle-ci apparaît lorsque le volume $g^{1/2}$ des sections invariantes s'annule, et peut être soit une singularité à la fois physique et mathématique (par exemple, certains invariants deviennent infinis quand $g \to 0$), soit une singularité purement physique (les sections invariantes deviennent de genre lumière, mais certaines géodésiques sont incomplètes).

Baaklini a suggéré récemment que l'introduction d'un champ spinoriel quantique pourrait éliminer cette singularité [*15*]. Le problème du signe de la densité d'énergie du champ spinoriel se pose en effet dans la théorie d'Einstein-Dirac, en raison du terme $\phi^+ \gamma_{(5)} \chi$, qui apparaît dans le super-hamiltonien (3.2).

Pour examiner cette question plus en détail, nous allons étudier le cas le plus simple, le type II « spécial », dont les équations dérivent du principe variationnel $\delta S = 0$. L'action S est donnée par l'expression :

$$S = \int (p_\Omega.\Omega_{,0} + p_\beta.\beta_{,0} + \phi^+\chi_{,0} - N\mathscr{H})dx^0$$
$$\mathscr{H} = e^{-3\Omega}\left[\frac{1}{24}(-p_\Omega^2 + p_\beta^2) + \frac{1}{2}e^{4(\Omega+2\beta)} - \frac{1}{4}e^{2(\Omega+2\beta)}A + e^{3\Omega}B\right] \approx 0 \tag{7.1}$$

que l'on obtient en injectant la forme « réduite » des champs dans le principe variationnel des cosmologies de classe A. Nous avons posé :

$$A = \phi^+\gamma_{(5)}\chi \qquad B = -m\phi^+\gamma^{(0)}\chi \tag{7.2}$$

La paramétrisation $(\Omega - \beta)$ des variables gravitationnelles a été introduite par Misner :

$$a = e^\Omega.e^{2\beta} \qquad b = e^\Omega.e^{-\beta} \tag{7.3}$$

Ω est une variable liée au volume de l'univers $(e^\Omega = (ab^2)^{1/3})$, tandis que β mesure son anisotropie $\left(\beta = \frac{1}{3}.\ln\frac{a}{b}\right)$. Les moments conjugués p_Ω et p_β se tirent de $p_\Omega.d\Omega + p_\beta.d\beta = \pi^{ab}.dg_{ab}$. Enfin, nous avons pris $\lambda = 0$ pour la simplicité, et choisi les tétrapodes naturels dirigés le long des directions propres de l'expansion — ce qui explique pourquoi les contraintes $\mathscr{H}^{(ab)} \approx 0$ ont disparu. Notons aussi que le spin du champ de Dirac et l'axe de révolution sont alignés ; mais il n'est pas nécessaire d'introduire, dans les calculs qui suivent, une paramétrisation explicite des variables spinorielles telle que les conditions

$$S^{(23)}.\chi = \frac{i}{4}\chi \tag{7.4}$$

deviennent des identités.

Dans la statistique de Fermi, le terme de masse possède les valeurs propres 0 (« vide »), $+ m$ (« états à une particule au repos ») et $+ 2m$ (« paire au repos ») — pour éviter la soustraction de l'énergie du vide, il faut décrire classiquement le champ spinoriel par les éléments d'une algèbre de Grassman et permuter les opérateurs de création et de destruction appropriés avant le passage à la quantification. Le terme de masse ne pose donc aucun problème. Par contre, la charge axiale A possède, outre les valeurs propres 0 et $+ 1$, la valeur propre négative $- 1$.

Le terme d'interaction $e^{2(\Omega+2\beta)}.A$ domine le terme $e^{3\Omega}B$ pour les faibles valeurs du volume de l'univers $(\Omega \to -\infty)$ et pour les grandes valeurs positives de l'anisotropie $(\beta \to +\infty)$. Il est responsable de la création de paires. Comme nous l'avons signalé plus haut, il pourrait aussi jouer, en raison de son signe, un rôle intéressant au voisinage de la singularité initiale. Afin de mettre ce rôle en évidence, annulons la masse du champ spinoriel. Le superhamiltonien est dans ce cas séparable. En le multipliant par $4g^{1/2}$, nous obtenons :

$$4.\sqrt{g}.\mathscr{H} = \frac{1}{6}(-p_\Omega^2 + p_\beta^2) + 2e^{4(\Omega+2\beta)} - e^{2(\Omega+2\beta)}.\langle \mathrm{A} \rangle \qquad (7.5)$$

où nous avons remplacé l'opérateur A par sa valeur moyenne conservée $\langle \mathrm{A} \rangle$. Le champ de gravitation est traité comme un nombre c; sa quantification, même dans le cadre des modèles spatialement homogènes, soulève de nombreuses controverses.

Le nouveau superhamiltonien $4.\sqrt{g}.\mathscr{H}$ ne dépend des variables gravitationnelles que par l'intermédiaire de la combinaison $\Omega + 2\beta$. Nous en déduisons une constante du mouvement supplémentaire :

$$p'_\Omega = 2p_\Omega - p_\beta = -3k \qquad (k = \text{const.}) \qquad (7.6)$$

qui n'est autre que (4.13).

En effectuant la transformation canonique :

$$\begin{aligned} \Omega' &= \frac{2}{3}\Omega + \frac{1}{3}\beta & \beta' &= \Omega + 2\beta \\ p'_\Omega &= 2p_\Omega - p_\beta & p'_\beta &= \frac{2}{3}p_\beta - \frac{1}{3}p_\beta \end{aligned} \qquad (7.7)$$

on simplifie quelque peu la forme de $4.\sqrt{g}.\mathscr{H}$:

$$4\sqrt{g}\mathscr{H} = -\frac{1}{18}p_\Omega'^2 + \frac{1}{2}p_\beta'^2 + 2e^{4\beta'} - e^{2\beta'}\langle \mathrm{A} \rangle \approx 0 \qquad (7.8)$$

Imposons à la coordonnée x^0 la condition $\mathrm{N} = 4\sqrt{g}$. Dans cette « jauge », on obtient :

$$\Omega' = \frac{1}{3}kx^0 + \rho \qquad (\rho = \text{const.}) \qquad (7.9)$$

et

$$\frac{d\beta'}{\sqrt{k^2 + 2e^{2\beta'}.\langle \mathrm{A} \rangle - 4e^{4\beta'}}} = \pm\, dx^0 \qquad (7.10)$$

Deux cas sont à considérer, suivant que $k = 0$ ou $|k| > 0$. Si $|k| > 0$, les solutions — que le lecteur écrira sans peine — ont les mêmes formes asymptotiques qu'en l'absence de matière : deux régimes de Kasner (caractérisés par les exposants (1, 0, 0) et $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$) séparés par une collision contre le mur exponentiel que représente la courbure [*16*] [*1*]. Celle-ci domine en effet le terme spinoriel quand $\beta' \to +\infty$. Le déterminant g de la métrique spatiale s'annule en un temps propre fini. Toutes les composantes ${}^{(4)}\mathrm{R}_{(\lambda)(\mu)(\rho)(\sigma)}$ du tenseur de Riemann dans les tétrapodes naturels considérés ici (qui sont propagés parallèlement le long des géodésiques

x^m = const.) tendent vers des limites finies quand $g \to 0$, mais on peut considérer cette limite comme étant une singularité mathématique (en forme de « crèpe » (« pancake »)), car les composantes ψ du champ spinoriel dans ces mêmes tétrapodes divergent.

Bien que le type II spécial soit un cas (très) particulier, il semble donc que nous puissions conclure qu'un champ spinoriel homogène quantifié n'élimine en général pas la singularité initiale des modèles cosmologiques.

Cependant, quand k a la valeur particulière 0, les solutions présentent des caractéristiques nouvelles et intéressantes. Cette possibilité n'est permise que lorsque la valeur moyenne $\langle \mathrm{A} \rangle$ est positive, c'est-à-dire lorsque l'énergie du champ ψ est négative. En choisissant bien l'origine de la coordonnée x^0, on trouve :

$$a^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\langle \mathrm{A} \rangle}{\langle \mathrm{A} \rangle^2 . (x^0)^2 + 1} \tag{7.11a}$$

et

$$b^2 = \sigma . a^{-2} \tag{7.11b}$$

$$a^2 b^4 \equiv g = \sigma^2 . a^{-2} \tag{7.11c}$$

où σ est une constante strictement positive. La métrique est régulière pour toute valeur réelle de x^0. En intégrant l'équation qui relie x^0 au temps propre $(4\sqrt{g}dx^0 = dt)$, on vérifie que $t \to \pm \infty$ pour $x^0 \to \pm \infty$. Ce modèle d'univers passe successivement par une phase de contraction, par un volume minimum (en $x^0 = 0$), et s'installe ensuite dans une phase d'expansion. Au cours de celle-ci, a tend vers 0 (décalage vers le bleu dans la direction 1), tandis que b tend vers l'infini (décalage vers le rouge dans les directions contenues dans le plan (2, 3)).

Ce modèle, dans lequel la singularité initiale est évitée car l'énergie est négative, présente évidemment deux limitations majeures :

— seuls quelques degrés de liberté du champ de Dirac ont été quantifiés ; la quantification complète du champ spinoriel (avec prise en compte, comme ici, de la réaction sur la métrique) pourrait modifier ce résultat, mais dépasse de loin les objectifs de ce travail. Elle permettrait aussi de mieux comprendre la signification des modes « homogènes » $\chi(x^0)$ — qui, soit dit en passant, peuvent encore être vus comme des modes « moyens » :

$$\chi(x^0) = \left[\int \chi(\bar{x}, x^0) d^3x \right] . \left[\int d^3x \right]^{-1/2}$$

— les problèmes de la renormalisation et de la régularisation du tenseur d'énergie-impulsion — qui ne se posent pas dans les modèles à quelques degrés de liberté considérés ici — n'ont pas été abordés. Ils pourraient jeter une lumière nouvelle sur la question du signe de l'énergie du champ spinoriel, et sur la conclusion que celle-ci est négative pour certains états. A première vue, cette propriété est en contradiction avec le principe d'équivalence; mais il ne faut pas oublier que le concept d'état d'un champ quantique, associé à une hypersurface de genre espace tout entière, n'est pas un concept local.

Il nous reste à intégrer les équations de Dirac. En adoptant une nouvelle coordonnée x'^0 telle que

$$\mathrm{N}' = \mathrm{N}e^{-2\beta'} = 4\frac{b^2}{a}$$

on obtient :

$$\chi = e^{-\gamma_{(5)}.x'^0}.\overset{\circ}{\chi} \tag{7.12}$$

où le spineur constant $\overset{\circ}{\chi}$ est soumis aux conditions (7.4). Le lien entre les coordonnées x^0 et x'^0 se tire ensuite de

$$\mathrm{N}'(x'^0)dx'^0 = \mathrm{N}(x^0)dx^0 \Leftrightarrow dx'^0 = a^2dx^0$$

Nous laissons cette intégration élémentaire au lecteur.

NOTES ET RÉFÉRENCES

[*1*] Nous nous basons essentiellement sur les exposés de M. A. H. MAC CALLUM, Cosmological models from a geometric point of view, *Cargèse Lectures in Physics*, t. **6**, p. 61, édité par E. Schatzman, Gordon and Breach, New York, 1973.
M. P. RYAN et L. C. SHEPLEY, *Homogeneous Relativistic Cosmologies*, Chapitres 9 et suivants. Princeton University Press, Princeton, 1975.
A. H. TAUB, Spatially homogeneous universes, *Proceedings of the first Marcel Grossman meeting on General Relativity*, p. 231, édité par R. Ruffini, North Holland, Amsterdam, 1977.

[*2*] J. D. BARROW et R. A. MATZNER, *Phys. Rev.*, t. **D21**, 1980, p. 336.

[*3*] R. T. JANTZEN, *Comm. Math. Phys.*, t. **64**, 1979; p. 211; *Nuov. Cim.*, t. **55B**, 1980, p. 161.

[*4*] On ne considère ici que des tétrapodes orthonormés possédant la même orientation dans l'espace et le temps que les bases $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^0}, \mathrm{X}_a \right\}$ dans lesquelles les constantes de structure prennent les valeurs canoniques mentionnées dans le texte. Rappelons que les tétrapodes orthonormés sont définis par

$$h_{(\lambda)\rho} . h_{(\mu)\sigma} . g^{\rho\sigma} = \eta_{(\lambda\mu)} \equiv \mathrm{diag}\,(-, +, +, +)$$

d'où l'on tire notamment (compte tenu de ce qui précède) :

$$\det h_{(m)a} = +(\det g_{ab})^{1/2}$$

Les indices entre parenthèses sont les indices des tétrapodes. Notons aussi que les premières lettres de l'alphabet latin sont réservées aux composantes des tenseurs exprimées dans les bases invariantes $\{ \mathrm{X}_a \}$, tandis que les lettres du milieu de l'alphabet (m, n ...) désignent leurs composantes dans les bases des coordonnées $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^m} \equiv \partial_m \right\}$ (cette règle s'applique uniquement aux indices sans parenthèse !).

Enfin, pour nous conformer à l'usage, nous avons adopté un langage qui se réfère aux systèmes de coordonnées. Pour une formulation plus intrinsèque du formalisme hamiltonien, nous renvoyons le lecteur aux articles de Kuchař :
K. KUCHAŘ, *J. Math. Phys.*, t. **17**, 1976, p. 777, 792, 801.
[5] M. HENNEAUX, *Gen. Rel. Grav.*, t. **12**, 1980, p. 137.
[6] F. A. BEREZIN et M. S. MARINOV, *Ann. Phys.* (N. Y.), t. **104**, 1977, p. 336.
R. CASALBUONI, *Nuov. Cim.*, t. **33A**, 1976, p. 115.
[7] C. TEITELBOIM, *Constrained Hamiltonian Systems*, Cours donné à l'Université de Princeton en 1977 (non publié).
[8] P. A. M. DIRAC, Interacting Gravitational and Spinor Fields, dans *Recent Developments in General Relativity*, Pergamon Press, Oxford, 1962.
J. E. NELSON et C. TEITELBOIM, *Ann. Phys.* (N. Y.), t. **116**, 1978, p. 86.
M. HENNEAUX, *Gen. Rel. Grav.*, t. **9**, 1978, p. 1031.
[9] M. HENNEAUX, *Phys. Rev.*, t. **D21**, 1980, p. 857.
[10] M. A. H. MAC CALLUM et A. H. TAUB, *Comm. Math. Phys.*, t. **25**, 1972, p. 173.
[11] P. HAVAS, *Acta Phys. Austr.*, t. **38**, 1973, p. 145 (appendice B).
[12] Ce problème de densité se comprend aisément : pour passer de l'hamiltonien général d'Einstein-Dirac à l'hamiltonien des cosmologies de classe A, on simplifie formellement par la quantité $\int d^3x . | \omega_m^a |$. Celle-ci n'est constante que pour les transformations de GL(3) de déterminant unité.
[13] C. J. ISHAM et J. E. NELSON, *Phys. Rev.*, t. **D10**, 1974, p. 3226.
T. M. DAVIS et J. R. RAY, *Phys. Lett.*, t. **51A**, 1975, p. 199.
[14] T. M. DAVIS et J. R. RAY, *J. Math. Phys.*, t. **17**, 1976, p. 1049.
J. R. RAY, *Progr. Theor. Phys.*, t. **63**, 1980, p. 1213.
[15] N. S. BAAKLINI, *Phys. Lett.*, t. **66A**, 1978, p. 357.
[16] V. A. BELINSKII et I. M. KHALATNIKOV, Soviet Phys., *J. E. T. P.*, t. **29**, 1969, p. 911.

Note ajoutée lors de la correction des épreuves :

Après la rédaction de cet article, nous avons reçu la prépublication très intéressante suivante, qui traite des cosmologies spinorielles diagonales et « symétriques » du type IX :

O. OBREGÓN et M. P. RYAN, Bianchi type-IX cosmological models with homogeneous spinor fields. Prepublication SPF-06-80 de l' « Universidad Nacional Autónoma de México » (à paraître dans *J. Math. Phys.*).

Mentionnons également :

T. R. MICHALIK et M. A. MELVIN, *J. Math. Phys.*, t. **21**, 1980, p. 1952.

(Manuscrit reçu le 9 septembre 1980)