

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

J. GARIEL

Un nouvel effet couplé en thermodynamique relativiste locale des phénomènes irréversibles

Annales de l'I. H. P., section A, tome 34, n° 2 (1981), p. 153-161

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1981__34_2_153_0

© Gauthier-Villars, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Un nouvel effet couplé en thermodynamique relativiste locale des phénomènes irréversibles

par

J. GARIEL

Université de Madagascar (B. P. 372, Antsiranana, Madagascar)

RÉSUMÉ. — Nous montrons que le terme supplémentaire $\dot{q}^\alpha u_\alpha$ qui apparaît dans la théorie d'Eckart [1] d'un fluide conducteur de la chaleur (où \dot{q}^α est la dérivée par rapport à l'abscisse curviligne du 4-vecteur densité de conduction calorifique et u_α la quadrivitesse locale normée) pose un problème d'interprétation du point de vue thermodynamique. On peut le résoudre en postulant l'existence d'un nouvel effet couplé, « thermocinétique », d'origine relativiste, qui conduit à l'hypothèse de Fourier relativiste posée par Pham Mau Quan [2].

ABSTRACT. — We show that the supplementary term $\dot{q}^\alpha u_\alpha$ which appears in the caloric conducting fluid Eckart's theory [1] (where \dot{q}^α is the derivative by the curvilinear absciss of the calorific conduction density and u_α the local unitary speed) states a thermodynamics construction problem. We can solve this one by admitting the existence of a new relativistic « thermokinetic » cross-effect, which leads to the relativistic Fourier's hypothesis of Pham Mau Quan [2].

§ 1. INTRODUCTION

Soit un fluide simple, monophasé, non réactif, non visqueux, sans rayonnement, susceptible seulement de conduire la chaleur, dans l'espace de Minkowski de la relativité restreinte de métrique $g^{\alpha\beta} = C^{te}$ ($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$) de signature $(+, -, -, -)$, et dont l'élément d'univers est :

$$(1-1) \quad d\xi^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

où x^α est le quadripoint centré sur l'élément de matière. Nous noterons la dérivée totale relativement à ξ par un point sur le symbole qu'on dérive (ex. : $\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\xi}$). On sait qu'Eckart [1] et d'autres [2] [3] ont proposé de décrire un tel fluide en relativité restreinte par un tenseur d'impulsion-énergie symétrique de la forme :

$$(1-2) \quad T^{\alpha\beta} = n(1 + \bar{h})u^\alpha u^\beta - P g^{\alpha\beta} - u^\alpha q^\beta - u^\beta q^\alpha$$

où n , $\bar{h} = \frac{h}{n}$, P , $u^\alpha = \dot{x}^\alpha$, et q^α sont respectivement les champs de densité du nombre de particules (ou de la « matière »), d'enthalpie spécifique (h : densité d'enthalpie), de pression scalaire, de 4-vitesse normée de la matière, et de densité de conduction calorifique. On se place dans un système d'unités tel que $m_0 = 1$, $c = 1$, m_0 notant la masse au repos d'une particule et c la vitesse de la lumière dans le vide :

$$(1-3) \quad u^\alpha u_\alpha = 1$$

$$(1-4) \quad u_\alpha q^\alpha = 0.$$

Le principe de conservation de l'énergie totale :

$$(1-5) \quad \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

où ∇_α désigne la dérivation covariante, se décompose alors en :

i) le premier principe :

$$(1-6) \quad u_\beta \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

qui, avec (1-2), et compte tenu du principe de conservation du nombre de particules (principe de Lavoisier [5]) :

$$(1-7) \quad \sigma_N = \nabla_\alpha (n u^\alpha) = 0$$

(σ_N : source du nombre de particules), donne le bilan d'enthalpie :

$$(1-8) \quad n \dot{\bar{h}} = \dot{P} + \nabla_\alpha q^\alpha + u_\alpha \dot{q}^\alpha ;$$

et, $\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta$ notant le projecteur local d'espace [4] [5], en :

ii) l'équation du mouvement :

$$(1-9) \quad \gamma_{\alpha\beta} \nabla_\sigma T^{\sigma\beta} = 0$$

qui donne ici, avec (1-2) :

$$(1-10) \quad n(1 + \bar{h}) \dot{u}^\alpha = \gamma^{\alpha\beta} \nabla_\beta P + \gamma^{\alpha\beta} \dot{q}_\beta + q^\beta \nabla_\beta u^\alpha + q^\alpha \nabla_\beta u^\beta.$$

§ 2. BILAN ET SOURCE D'ENTROPIE

2.1. Montrons que le terme $\dot{q}^\alpha u_\alpha$ de (1-8), supplémentaire en théorie relativiste d'Eckart par rapport à la théorie classique [9], est inclus dans la

fonction dissipative $T\sigma_s$, où T est le champ scalaire de température et σ_s la source d'entropie, et non pas dans le terme de flux ou d'échange avec l'extérieur. En effet, l'axiome d'équilibre local $\bar{u} = f\left(\bar{s}, \bar{v} = \frac{1}{n}\right)$ ou $\bar{h} = \varphi(\bar{s}, P)$ où $\bar{u} = \frac{u}{n}$ note l'énergie interne spécifique (u étant la densité d'énergie interne), \bar{v} le volume spécifique, et $\bar{s} = \frac{s}{n}$ l'entropie spécifique (s étant la densité d'entropie), posé aussi bien classiquement [9] [10] qu'en relativité [1] à [8] dans le cas de pure conduction ici considéré, conduit à l'équation de Gibbs :

$$(2-1) \quad \dot{\bar{s}} = \frac{\dot{\bar{u}}}{\bar{T}} + \frac{1}{\bar{T}} P \left(\frac{\dot{1}}{n} \right) = \frac{\dot{\bar{h}}}{\bar{T}} - \frac{1}{n} \frac{\dot{P}}{\bar{T}}.$$

Avec (1-8), (2-1) devient :

$$(2-2) \quad \dot{\bar{s}} = \frac{\nabla_\alpha q^\alpha}{n\bar{T}} + \frac{u_\alpha \dot{q}^\alpha}{n\bar{T}}.$$

L'hypothèse :

$$(2-3) \quad q^\alpha = -Ts^{\alpha*}$$

où $s^{\alpha*} = \gamma^{\alpha\beta} s_\beta$ est le 4-courant densitaire de conduction d'entropie, s_β étant le 4-courant densitaire d'entropie total :

$$(2-4) \quad s_\beta = su_\beta + s_{\beta*} = n\bar{s}u_\beta + s_{\beta*},$$

couramment admise dans ce cas ([1] à [8]), transforme (2-2) en :

$$(2-5) \quad \dot{\bar{T}}\bar{s} = -\frac{\nabla_\alpha(Ts^{\alpha*})}{n} + \frac{u_\alpha \dot{q}^\alpha}{n}$$

Or, d'après (1-7) :

$$(2-6) \quad \sigma_s \stackrel{\text{déf}}{=} \nabla_\alpha s^\alpha = \nabla_\alpha(n\bar{s}u^\alpha) + \nabla_\alpha s^{\alpha*} = n\dot{\bar{s}} - \nabla_\alpha s^{\alpha*};$$

(2-5) et (2-6) donnent alors :

$$(2-7) \quad -T\nabla_\alpha s^{\alpha*} - s^{\alpha*}\nabla_\alpha T + u_\alpha \dot{q}^\alpha = n\dot{\bar{T}}\bar{s} = T\sigma_s - T\nabla_\alpha s^{\alpha*}$$

$$T\sigma_s = -s^{\alpha*}\nabla_\alpha T + u_\alpha \dot{q}^\alpha = \frac{q^\alpha}{\bar{T}} \nabla_\alpha T + u_\alpha \dot{q}^\alpha$$

ce qu'on voudrait démontrer.

On reconnaît, comme premier terme du deuxième membre de (2-7), la contribution classique due à la conduction calorifique; le deuxième terme, $u_\alpha \dot{q}^\alpha$, reste à interpréter. En raison de (1-4) et de (2-3), on peut encore écrire (2-7) sous les formes :

$$(2-8) \quad T\sigma_s = q^\alpha \left(\frac{\nabla_\alpha T}{\bar{T}} - \dot{u}_\alpha \right) = -s^{\alpha*}(\nabla_\alpha T - T\dot{u}_\alpha).$$

2.2. On peut chercher à interpréter $-q^\alpha \dot{u}_\alpha$ comme un nouvel effet dissipatif (le flux étant q^α , la « force » \dot{u}_α), d'origine relativiste car il n'existe pas classiquement, et devant être associé au mouvement d'ensemble local (contrairement à ce qui se passe classiquement : [10], p. 828). Comme il s'agit du même flux, q^α , dans le premier terme de $T\sigma_s$ (2-8), la force associée étant alors $\nabla_\alpha T/T$, il faudrait donc interpréter (2-8) comme un effet *direct*, le flux étant q^α et la « force » $\left(\gamma^{\alpha\beta} \frac{\nabla_\beta T}{T} - \dot{u}^\alpha\right)$.

Dans cette perspective, l'hypothèse de Fourier généralisée d'Eckart [1] :

$$(2-9) \quad q^\alpha = -K \gamma^{\alpha\beta} (\nabla_\beta T - T \dot{u}_\beta)$$

où $K = K(T)$ est la conductivité thermique du fluide, semblerait meilleure que celle de Pham Mau Quan [2] :

$$(2-10) \quad q_P^\alpha = -K \gamma^{\alpha\beta} \nabla_\beta T$$

comme l'ont déjà souligné Eringen ([7], p. 500, § 7) et d'autres [8]; elle devrait être considérée comme une relation phénoménologique linéaire traduisant un tel effet direct :

$$(2-11) \quad q^\alpha = L_{11} \left(\gamma^{\alpha\beta} \frac{\nabla_\beta T}{T} - \dot{u}^\alpha \right) = \frac{L_{11}}{T} (\gamma^{\alpha\beta} \nabla_\alpha T - T \dot{u}^\alpha)$$

avec, par conséquent, d'après (2-9) :

$$(2-12) \quad L_{11} = -KT.$$

L_{11} est différent de zéro, le fluide étant supposé conducteur.

(2-11) et (2-8) donnent alors :

$$(2-13) \quad T\sigma_s = \frac{q^\alpha q_\alpha}{L_{11}}$$

L'état stationnaire, $q^\alpha = 0$, correspond à une transformation réversible ($T\sigma_s = 0$). (2-9) et (1-10) entraînent dans ce cas :

$$(2-14) \quad \gamma^{\alpha\beta} \frac{\nabla_\beta T}{T} = \dot{u}^\alpha = \frac{1}{(n+h)} \gamma^{\alpha\beta} \nabla_\beta P,$$

c'est-à-dire que le fluide est holonome ([5] (8-7)).

§ 3. CRITIQUE DE L'INTERPRÉTATION D'ECKART

Plaçons-nous dans le cas particulier où le fluide n'a pas de 4-gradient de température :

$$(3-1) \quad \nabla_\alpha T = 0$$

d'où par conséquent

$$(3-2) \quad \gamma^{\alpha\beta} \nabla_{\beta} T = 0 \quad \text{et} \quad \dot{T} = 0,$$

on a affaire à un fluide à température uniforme et isotherme. Cependant, même dans ce cas, la théorie d'Eckart prévoit un courant de chaleur de conduction donné par (2-9) avec (3-2), soit :

$$(3-3) \quad q^{\alpha} = K T \dot{u}^{\alpha} = -L_{11} \dot{u}^{\alpha} = K \dot{T}^{\alpha} \quad (T^{\alpha} = T u^{\alpha})$$

dont on ne voit pas l'interprétation : que peut signifier un courant de chaleur de conduction en l'absence de gradient de température ? Il suffirait qu'il y ait une 4-accélération pour qu'un courant de chaleur apparaisse si le fluide est conducteur ($K \neq 0 \neq L_{11}$), et ce, sans conditions restrictives particulières. Cela ne semble pas exact : toute force causant une accélération \dot{u}^{α} n'est pas nécessairement dissipative.

Si l'on pose :

$$(3-4) \quad \dot{u}^{\alpha} = a n^{\alpha}$$

où a note la première courbure et n^{α} le premier vecteur unitaire d'espace de la tétrade de Frénet-Serret :

$$(3-5) \quad n^{\alpha} u_{\alpha} = 0 \quad , \quad n^{\alpha} n_{\alpha} = -1,$$

la fonction dissipative (2-7) se réduit à :

$$(3-6) \quad T \sigma_S = u_{\alpha} \dot{q}^{\alpha} = -q^{\alpha} \dot{u}_{\alpha} = -K T \dot{u}^{\alpha} \dot{u}_{\alpha} = K T a^2,$$

d'où la source d'entropie et le deuxième principe local :

$$(3-7) \quad \sigma_S = K a^2 \geq 0$$

La condition de réversibilité $\sigma_S = 0$ pour un fluide conducteur ($K \neq 0$) entraîne alors une courbure nulle, $a = 0$, c'est-à-dire que les lignes de courant soient des géodésiques :

$$(3-8) \quad u^{\beta} \nabla_{\beta} u^{\alpha} = 0,$$

et réciproquement ($\dot{u}^{\alpha} = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \sigma_S = 0$). Pour qu'il y ait source d'entropie dans un fluide où $\nabla_{\alpha} T = 0$, il serait nécessaire et suffisant que le fluide conducteur ait des lignes de courant non géodésiques, c'est-à-dire ici courbes. Cette conséquence de la théorie d'Eckart semble inacceptable.

§ 4. NOUVELLE INTERPRÉTATION PROPOSÉE

4.1. Si l'on revient à la forme (2-7) de la fonction dissipative, il semble qu'on puisse proposer la nouvelle interprétation que voici :

On a affaire à un *nouvel effet couplé*, qu'on pourrait qualifier de « *thermo-cinétique* », avec :

$$\begin{array}{l} \text{les deux flux :} \\ \text{et les deux « forces » :} \end{array} \quad \begin{array}{l} q^\alpha \quad \text{et} \quad \dot{q}^\alpha, \\ \nabla_\alpha T/T \quad \text{et} \quad u_\alpha, \end{array}$$

car rien n'oblige *a priori* à ce qu'une « force » ou un flux soit du genre espace ou du genre temps. D'où les relations phénoménologiques linéaires :

$$(4-1) \quad q^\alpha = L_{11} \frac{\nabla^\alpha T}{T} + L_{12} u^\alpha$$

$$(4-2) \quad \dot{q}^\alpha = L_{21} \frac{\nabla^\alpha T}{T} + L_{22} u^\alpha$$

avec la relation de réciprocité d'Onsager :

$$(4-3) \quad L_{12} = L_{21}.$$

(4-1) et (4-2) entraînent respectivement :

$$(4-4) \quad 0 = u_\alpha \dot{q}^\alpha = L_{11} \frac{\dot{T}}{T} + L_{12}$$

$$(4-5) \quad u_\alpha \dot{q}^\alpha = L_{21} \frac{\dot{T}}{T} + L_{22}.$$

4.2. Annulation des forces (états d'équilibre partiel).

i) Reprenons le cas particulier (3-1); il correspond à l'équilibre thermique, mais non mécanique (*a priori* $\dot{u}^\alpha \neq 0$). (4-1) et (4-2) se réduisent alors à :

$$(4-6) \quad q^\alpha = L_{12} u^\alpha \Rightarrow 0 = u_\alpha \dot{q}^\alpha = L_{12} \dot{T} \Rightarrow q^\alpha = 0 \Rightarrow \dot{q}^\alpha = 0$$

$$(4-7) \quad \dot{q}^\alpha = L_{22} u^\alpha \Rightarrow u_\alpha \dot{q}^\alpha = L_{22} \dot{T} \stackrel{(4-6)}{\Rightarrow} L_{22} = 0.$$

(2-7) et (4-6) donnent alors

$$(4-8) \quad T\sigma_s = 0$$

résultat qui semble plus plausible, dans le cas où $\nabla_\alpha T = 0$, que celui, (3-3) et (3-7), issu de l'interprétation d'Eckart.

Remarque. — *A priori* on pourrait penser poser une interprétation semblable à celle de 4.1., mais avec les deux flux q^α et u_α et les deux « forces » $\nabla_\alpha T/T$ et \dot{q}^α . Cela conduirait, cependant, dans le cas particulier (3-1), à un état doublement stationnaire (les deux flux q^α et u_α seraient nuls), sans force \dot{q}^α , sans flux de chaleur et *statique* ($u^\alpha = 0 = \dot{u}^\alpha$), avec état d'équilibre

($T\sigma_S = 0$). Nous rejetons cette interprétation, car on ne voit pas physiquement pourquoi l'annulation du gradient de température imposerait au fluide d'être statique; cela serait même encore plus restrictif que l'interprétation d'Eckart.

Ainsi (4-1) et (4-2) nous paraissent fournir la meilleure interprétation possible. On peut les réécrire :

$$(4-9) \quad \dot{q}^\alpha = L_{11}\gamma^{\alpha\beta} \frac{\nabla_\beta T}{T} + \left(L_{11} \frac{\dot{T}}{T} + L_{12} \right) u^\alpha = L_{11}\gamma^{\alpha\beta} \frac{\nabla_\beta T}{T}$$

en utilisant (4-4), et :

$$(4-10) \quad \dot{q}^\alpha = L_{21} \frac{\gamma^{\alpha\beta} \nabla_\beta T}{T} + \left(L_{21} \frac{\dot{T}}{T} + L_{22} \right) u^\alpha$$

où $\left(L_{21} \frac{\dot{T}}{T} + L_{22} \right)$ est différent de zéro en général.

(4-9) montre que l'hypothèse (2-10) de Fourier généralisée de Pham Mau Quan [2] avec, donc :

$$(4-11) \quad -K = \frac{L_{11}}{T}$$

qui est sous-tendue par l'interprétation (4-1) et (4-2), est préférable à celle (2-9) d'Eckart [1] elle-même sous-tendue par l'interprétation (2-11).

ii) On ne peut supposer que la deuxième « force », u^α , est nulle car cela serait en contradiction avec (1-3). Aussi la supposons-nous seulement constante (état d'équilibre mécanique, mais *a priori* non thermique) :

$$(4-12) \quad u^\alpha = \text{Cte} \quad (\Rightarrow \dot{u}^\alpha = 0 \Rightarrow \dot{u}^\alpha q_\alpha = 0 = -u^\alpha \dot{q}_\alpha)$$

Alors (4-9) reste inchangée et (4-10) devient :

$$(4-13) \quad \dot{q}^\alpha = L_{21}\gamma^{\alpha\beta} \frac{\nabla_\beta T}{T}$$

puisque, d'après (4-12) et (4-2) :

$$(4-14) \quad L_{21} \frac{\dot{T}}{T} + L_{22} = 0.$$

(2-7) se réduit à :

$$(4-15) \quad T\sigma_S = \frac{q^\alpha \nabla_\alpha T}{T}.$$

4.3. États stationnaires (annulation des flux).

i) Supposons d'abord que le premier flux est nul :

$$(4-16) \quad q^\alpha = 0 \Rightarrow \dot{q}^\alpha = 0$$

(4-1) et (4-2) deviennent :

$$(4-17) \quad 0 = L_{11} \frac{\nabla_{\alpha} T}{T} + L_{12} u_{\alpha} \Rightarrow 0 = L_{11} \frac{\dot{T}}{T} + L_{12}$$

$$(4-18) \quad 0 = L_{21} \frac{\nabla_{\alpha} T}{T} + L_{22} u_{\alpha} \Rightarrow 0 + L_{21} \frac{\dot{T}}{T} = L_{22} = L_{22} - L_{11} \left(\frac{\dot{T}}{T} \right)^2$$

$\nabla_{\alpha} T$ doit donc être du genre temps :

$$(4-19) \quad \gamma^{\alpha\beta} \nabla_{\beta} T = 0$$

ce qu'on aurait pu écrire directement à partir de (4-9) et (4-16) sachant que $L_{11} \neq 0$.

(2-7) donne avec (4-16) :

$$(4-20) \quad T\sigma_s = 0$$

Cet état stationnaire est une transformation réversible.

ii) Supposons que le deuxième flux est nul :

$$(4-21) \quad \dot{q}^{\alpha} = 0$$

(4-9) et (4-10) deviennent alors

$$(4-22) \quad q^{\alpha} = L_{11} \gamma^{\alpha\beta} \frac{\nabla_{\beta} T}{T} = C^{te}$$

$$(4-23) \quad 0 = L_{21} \frac{\gamma^{\alpha\beta} \nabla_{\beta} T}{T} + \left(L_{21} \frac{\dot{T}}{T} + L_{22} \right) u^{\alpha} \Rightarrow \begin{cases} L_{21} \frac{\gamma^{\alpha\beta} \nabla_{\beta} T}{T} = 0 \\ L_{21} \frac{\dot{T}}{T} + L_{22} = 0 \end{cases}$$

(4-23) impose d'après (4-22) :

$$(4-24) \quad L_{21} = 0 \quad , \quad L_{22} = 0$$

et (2-7) devient avec (4-21) et (4-22) :

$$(4-25) \quad T\sigma_s = \frac{q^{\alpha} \nabla_{\alpha} T}{T} = \frac{q^{\alpha} q_{\alpha}}{L_{11}} = \frac{C^{te}}{L_{11}}.$$

§ 5. CONCLUSION

L'interprétation selon laquelle la théorie d'Eckart amène à définir les deux flux q^{α} et \dot{q}^{α} , les deux « forces » $\nabla_{\alpha} T/T$ et u_{α} , et l'effet couplé « thermocinétique » correspondant traduit par (4-1) et (4-2), d'où résulte en particulier l'hypothèse (2-10) de Fourier relativiste de Pham Mau Quan [2], semble la meilleure.

RÉFÉRENCES

- [1] C. ECKART, *Phys. Rev.*, t. 58, 1940, p. 919 (III).
- [2] PHAM MAU QUAN, *Thèse*, Paris, 1954 et *Relativistic Fluid Dynamics*, Cime, ed., Cremonese, Rome, 1971.
- [3] A. H. TAUB, *Phys. Rev.*, t. 74, 1948, p. 328-334.
- [4] C. CATTANEO, *Introduction à la théorie macroscopique des fluides relativistes* (I), Collège de France, 1970.
- [5] P. V. GROSJEAN, *Bull. de la Soc. Roy. des Sc. de Liège*, n° 3-4, 1975.
- [6] O. COSTA DE BEAUREGARD, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 280 A, 17-02, 1975.
- [7] A. C. ERINGEN, in *A critical Review of Thermodynamics*, Pittsburgh, Pennsylvania, ed. Mono Book Corp., 1970.
- [8] R. ESPOSITO, *Ric. Mat. ITA*, t. 27, n° 1, 1978, p. 187-210.
- [9] DE GROOT et MAZUR, *Non-equilibrium thermodynamics*, N. H. P. C., Amsterdam, 1963.
- [10] J. CHANU, *Thermodynamique*, Bruhat-Kastler, Masson, Paris, 1968.

(Manuscrit reçu le 18 septembre 1980)