

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

PIERRE ANGLES

Construction de revêtements du groupe conforme d'un espace vectoriel muni d'une « métrique » de type (p, q)

Annales de l'I. H. P., section A, tome 33, n° 1 (1980), p. 33-51

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1980__33_1_33_0

© Gauthier-Villars, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Construction de revêtements du groupe conforme d'un espace vectoriel muni d'une « métrique » de type (p, q)

par

Pierre ANGLES

U. E. R. Mathématique Informatique Gestion, Université Paul Sabatier,
118, route de Narbonne, 31077 Toulouse Cedex

I. INTRODUCTION

On s'intéresse, en physique, au groupe des transformations conformes globales de la variété espace-temps, espace-temps de Minskowski en relativité restreinte, variété hyperbolique normale de dimension 4 en relativité générale.

C'est Elie Cartan [4] *a), b)* qui, le premier, trouva par une analyse des racines que le *groupe* $O(4, 2)$, groupe de Lie pseudo-orthogonal classique, simple, est localement isomorphe au groupe $SU(2, 2)$ des transformations complexes conservant la forme hermitienne

$$(z, z') \mapsto \langle z, z' \rangle = z_1 \bar{z}'_1 + z_2 \bar{z}'_2 - z_3 \bar{z}'_3 - z_4 \bar{z}'_4.$$

La correspondance, depuis devenue classique, entre le groupe $O(4, 2)$ et « le groupe conforme », id est « le groupe d'invariance des équations de Maxwell » a été étudiée notamment par I. Segal [17] qui souligna l'isomorphisme entre $O(4, 2)$ et le groupe de Lie simple non compact conforme pour l'espace-temps, qui sera noté plus loin $C_{3,1}$.

B. L. Van der Waerden avait créé, en 1929, une « algèbre » dite « spino-rielle », en relation avec le groupe de Lorentz [18].

Y. Murai [13] et d'autres physiciens, tel Hepner [7], ont souligné l'homomorphisme entre $SU(2, 2)$ et la composante connexe de l'identité de $O(4, 2)$ et étudié les représentations du groupe conforme restreint.

R. Penrose [14] a), b), c) a créé, en 1966, une « algèbre », dite « algèbre des twisteurs » et un formalisme adapté, d'après lui, à décrire la covariance conforme.

A. Crumeyrolle [6] a), b), c), d), partant des résultats algébriques exprimés par C. Chevalley [2], a étudié les structures spinorielles et les liens entre les fibrations spinorielles et les twisteurs généralisés. Plus récemment, P. Lounesto [11] a), b), a construit un revêtement du groupe conforme et explicité les idempotents d'algèbres de Clifford associées aux espaces considérés. M. D. Maïa a étudié [12] b) les champs spinoriels conformes en relativité générale.

L'objet de ce travail est de trouver à l'aide du formalisme développé dans [6] a), b), c) des revêtements du groupe conforme d'un espace vectoriel euclidien ou pseudo-euclidien.

L'auteur tient à exprimer sa profonde gratitude à P. Lounesto pour d'utiles indications, et au Pr. A. Crumeyrolle qui a examiné le manuscrit, pour sa bienveillante patience, son aide et ses conseils précieux.

II. RAPPELS ET DÉFINITIONS

1° Soit $E_n = \mathbb{R}^{p+q}$ muni d'une « métrique » de type (p, q) . ($p+q=n$ ($n>2$)). (Pour $x \in E_n$, on pose $Q(x) = (x_1)^2 + \dots + (x_p)^2 - (x_{p+1})^2 \dots - (x_{p+q})^2$). B étant la forme bilinéaire symétrique associée, on trouve commode de prendre $B(x, x) = Q(x)$ comme dans [6] a).

On notera ici : $CL(E_n)$ ou $CL_{p,q}(E_n)$ l'algèbre de Clifford de E_n associée à Q , quotient de l'algèbre tensorielle $\mathcal{C}(E_n)$ de E_n par l'idéal bilatère engendré par les éléments de la forme $x \otimes x - Q(x).1$.

Soit ρ_Q (ou ρ quand aucune confusion n'est possible) l'application canonique de $\mathcal{C}(E_n)$ dans $Cl_{p,q}(E_n)$. Il est classique [3, 5] d'identifier les éléments de \mathbb{R} et de E_n à leurs images par ρ dans $Cl_{p,q}(E_n)$, les restrictions respectives de ρ à \mathbb{R} et E_n étant injectives.

Ainsi $x^2 = B(x, x)$ et $x^{-1} = x \left(\frac{1}{x^2} \right)$ pour $x \neq 0$ sont bien définis dans $Cl_{p,q}(E_n)$.

2° Les objets classiquement notés [1], [1 bis], [3], [6] a), [8], [9].

$O(Q)$	$SO(Q)$	$\Gamma(Q)$	$G(Q)$	$G_0(Q)$	$G_0^+(Q)$
groupe orthogonal pour Q	groupe spécial orthogonal pour Q	α -groupe de Clifford ou groupe de Clifford tordu	groupe de Clifford	groupe de Clifford réduit	groupe de Clifford spécial réduit

$SO + (Q)$ ou $\boxed{SO(Q)}$, composante connexe de l'identité de $SO(Q)$ seront désignés ici, respectivement, par $O(p, q)$, $SO(p, q)$, $\Gamma(p, q)$, $G(p, q)$, $G_0(p, q)$, $G_0^+(p, q)$, $SO_+(p, q)$ ou $\boxed{SO(p, q)}$.

On sait [I bis], [6] a), [9] qu'il existe une base orthogonale de \mathbb{R}^{p+q} : (e_i) la base canonique telle que $(e_i)^2 = +1$ pour $1 \leq i \leq p$ et $(e_i)^2 = -1$ pour $p+1 \leq i \leq p+q = n$. On introduit de même [I], [6] a), [9] les groupes Pin Q et Spin Q notés respectivement, ici, Pin (p, q) et Spin (p, q) . On a dès lors, les deux suites exactes suivantes :

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow Z_2 \rightarrow \text{Pin}(p, q) \rightarrow O(p, q) \rightarrow 1 \\ 1 &\rightarrow Z_2 \rightarrow \text{Spin}(p, q) \rightarrow \text{SO}(p, q) \rightarrow 1 \end{aligned}$$

On note si l'on pose dans $\text{Cl}(p, q)$ $e_N = e_1 e_2 \dots e_N$ que

$$(e_N)^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot (-1)^q.$$

3° a) Pour $n = p + q$ impair

Le centre des algèbres $\text{Cl}_{p,q}$ est isomorphe à \mathbb{C} si $p - q \equiv 3 \pmod{4}$ ($e_N^2 = -1$), respectivement $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ si $p - q \equiv 1 \pmod{4}$ [$e_N^2 = +1$].

On a donc, respectivement, les 2 suites exactes :

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow G(p, q) \rightarrow \text{SO}(p, q) \rightarrow 1 \\ 1 &\rightarrow \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \rightarrow G(p, q) \rightarrow \text{SO}(p, q) \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Dans tous les cas pour n impair, le centre Z de $\text{Cl}_{p,q}$ est $\mathbb{R} \cdot 1 + \mathbb{R}e_N$.

b) Pour $n = p + q$ pair

L'algèbre de Clifford $\text{Cl}_{p,q}$ est centrale i. e. de centre $\mathbb{R} \cdot 1$ et on a la suite exacte

$$1 \rightarrow \mathbb{R}^* \rightarrow G(p, q) \rightarrow O(p, q) \rightarrow 1.$$

4° On sait déterminer un revêtement de $O(p, q)$, respectivement de $\text{SO}(p, q)$ [I], [5], [6] a), [9]. On introduit le groupe Clifford tordu ou (α -groupe) $\Gamma(p, q)$ et l'application notée ici $\psi_g : x \mapsto \alpha(g) x g^{-1}$ [α désigne l'automorphisme principal de $\text{Cl}_{p,q}(E_n)$, $x \in E_n(p, q)$; $g \in \Gamma(p, q) \mapsto \psi_g$ est, ainsi, une représentation de $\Gamma(p, q)$ dans $E_n(p, q)$.] Introduisant alors respectivement Pin (p, q) et Spin (p, q) , on montre [I], [6] a), [9] que $(\psi, \text{Pin}(p, q))$, respectivement $(\psi, \text{Spin}(p, q))$ donnent des revêtements à deux feuillets de $O(p, q)$, respectivement de $\text{SO}(p, q)$. Dans ce qui suit, on notera ψ_1 l'application telle que pour $x \in E_n(p, q)$, $g \in G(p, q)$, on ait $\psi_1(x) = g x g^{-1}$; (ψ_1 est une représentation de $G(p, q)$ dans $E_n(p, q)$) et β l'antiautomorphisme principal de $\text{Cl}_{p,q}$ [I], [5], [6] a), [9].

III. LE GROUPE CONFORME DE E_n , MUNI D'UNE MÉTRIQUE DE TYPE (p, q) , $n > 2$

1° Définition.

a) Liouville [20] considère le plan euclidien \mathbb{R}^2 , définit et étudie les applications continûment différentiables conformes d'un ouvert θ de \mathbb{R}^2

dans \mathbb{R}^2 . Il est classique que les seules transformations conformes de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 , étales sont les fonctions holomorphes.

b) Soit f une application continûment différentiable d'un ouvert \mathcal{U} de $E_n(p, q)$ dans $E_n(p, q)$; f est dite (cf. [11] c) *conforme dans \mathcal{U} si et seulement si il existe une fonction continue λ de \mathcal{U} dans $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ telle que pour tout $x \in \mathcal{U}$ et pour tous $a, b \in E_n$, $B[(D_x f)a, (D_x f)b] = \lambda^2(x) B(a, b)$ où B désigne la forme bilinéaire symétrique, associée à Q , définie sur E_n et $D_x f$, l'application linéaire tangente en f à x .*

L'ensemble des transformations conformes de $E_n(p, q)$ muni de la loi \circ de composition des applications est un groupe noté $C_n(p, q)$ [2], [10], [10 bis].

En utilisant le théorème de Liouville [10], [12] b), [20], on montre que pour les espaces $E_n(p, q)$, ce groupe $C_n(p, q)$ est le groupe « des inversions-similitudes-translations » de E_n muni de sa « métrique ».

2° L'algèbre de Lie conforme

a) L'algèbre de Lie conforme est obtenue en considérant les $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

champs de vecteurs suivants [1 ter], [6] d) où les notations sans rapport avec celles qui précèdent sont évidentes :

$$E_{j,k} = x_j \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right) - x_k \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) \quad (\text{correspondant aux rotations})$$

$$E_k = \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right) \quad (\text{translations})$$

$$E_0 = x^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \quad (\text{dilatations})$$

$$F_k = \frac{1}{2} x_j x^j \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right) - x_k x^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) \quad (\text{transformations spéciales conformes}).$$

On vérifie alors que :

$$[E_{sr}, E_{jk}] = E_{sk} g_{jr} + E_{rj} g_{sk} + E_{kr} g_{js} + E_{js} g_{kr} \quad (\text{table de l'algèbre de Lie des isométries de } E_n)$$

$$[E_l, F_k] = g_{lk} E_0 + E_{lk}$$

$$[E_k, E_l] = [F_l, F_k] = 0$$

$$[E_k, E_0] = E_k$$

$$[F_k, E_0] = -F_k$$

$$[E_{jk}, E_l] = -g_{lj} E_k + g_{lk} E_j$$

$$[E_{jk}, E_0] = 0$$

$$[E_{jk}, F_s] = F_j g_{ks} - F_k g_{js}.$$

Si comme dans [6] c), on introduit un espace vectoriel E_2 de dimension 2 sur \mathbb{R} muni d'une métrique de type (1, 1) et si on pose

$$E_{n+2}(p+1, q+1) = E_2(1, 1) \oplus E_n(p, q)$$

avec comme « métrique » $g_{lx} = 0$, g_{ij} , $g_{\alpha\beta} = -1$, $g_{\alpha\alpha} = g_{\beta\beta} = 0$ (les indices α et β sont relatifs à E_2 et fixés) en posant

$$\begin{aligned} E_l &= E_{lx}, & F_k &= F_{k\beta}, & E_0 &= E_{\alpha\beta}, & E_{lx} &= -E_{xl}, \\ F_{k\beta} &= -F_{\beta k} & E_{\alpha\beta} &= -E_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

on vérifie ainsi que la table de l'algèbre de Lie du groupe conforme $C_n(p, q)$ s'identifie à celle de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}O(p+1, q+1)$ ou de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}SO(p+1, q+1)$ (avec $E_{n+2}(p+1, q+1) = E_n(p, q) \oplus E_2(1, 1)$).

Dans tout ce qui suit, on note (e_1, \dots, e_n) une base orthogonale de $E_n(p, q)$. $((e_i)^2 = 1$ pour $1 \leq i \leq p$ et $(e_i)^2 = -1$ pour $p+1 \leq i \leq p+q = n$) et (e_0, e_{n+1}) une base orthogonale de $E_2(1, 1)$ avec donc,

$$(e_0)^2 = 1 \quad \text{et} \quad (e_{n+1})^2 = -1.$$

$(e_0, e_{n+1}, e_1, \dots, e_n)$ est donc une base orthogonale de $E_{n+2}(p+1, q+1)$.

A la différence de [11] a), on se place ici dans $Cl_{n+2}(p+1, q+1)$.

Utilisant donc les résultats généraux de [16, chap. IV, p. 128-187], on obtient dans l'algèbre de Clifford $Cl_{n+2}(p+1, q+1)$ que :

$$\text{aux } E_{jk} \text{ correspondent} \quad \frac{1}{2} e_{jk} = \frac{1}{2} e_j e_k \quad (1 \leq j \leq k \leq n)$$

$$\text{à } E_0 \text{ correspond} \quad -\frac{1}{2} e_0 e_{n+1};$$

$$\text{aux } E_k \text{ correspondent} \quad -\frac{1}{2} (e_{n+1} + e_0) e_k \quad (1 \leq k \leq n)$$

$$\text{et aux } F_k \text{ correspondent} \quad -\frac{1}{2} (e_{n+1} - e_0) e_k \quad (1 \leq k \leq n).$$

Ces résultats sont aussi obtenus dans un cas particulier dans [7], [8] et dans [12] b).

IV. REVÊTEMENTS DU GROUPE CONFORME $C_n(p, q)$, $n > 2$

1° Construction d'un revêtement du groupe conforme $C_n(p, q)$.

On se place dans $Cl_{p+1, q+1}(E_{n+2})$ pour les raisons déjà indiquées ci-dessus. On va construire :

a) une application u injective de $E_n(p, q)$ dans $E_{n+2}(p+1, q+1)$ qui envoie tous les points de $E_n(p, q)$ dans le cône isotrope C_{n+2} de $E_{n+2}(p+1, q+1)$ telle que toute application $f \in C_n(p, q)$ puisse être décrite dans

$Cl_{p+1,q+1}(E_{n+2})$ au moyen d'éléments de $\text{Pin}(p+1, q+1)$. Plus précisément, pour tout $x \in E_n(p, q)$ et pour tout $f \in C_n(p, q)$, on a :

$$\boxed{\alpha(g)u(x)g^{-1} = \sigma_g(x)u[f(x)]} \quad (\text{A})$$

$\sigma_g(x)$ étant un facteur multiplicatif réel à préciser, $g \in \text{Pin}(p+1, q+1)$;

b) un homomorphisme de groupes φ à noyau discret de $\text{Pin}(p+1, q+1)$ sur $C_n(p, q)$.

Ainsi, par abus, $u(x) \mapsto \sigma_g(x)u[f(x)] = \alpha(g)u(x)g^{-1}$ pourra être noté $\varphi^{-1}(f)$.

2° Détermination de u .

Pour déterminer u , on est conduit, tout naturellement, à considérer $u(x) - x$ comme élément de $E_2(1, 1)$ et donc de la forme $u(x) - x = ae_0 + be_{n+1}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, id est $u(x) = x + ae_0 + be_{n+1}$. Or, pour tout $x \in E_n(p, q)$, $(u(x))^2$ doit être nul. Et, $(u(x))^2 = (x + ae_0 + be_{n+1})^2 = x^2 + a^2 - b^2$.

Donc : $(u(x))^2 = 0 \Rightarrow x^2 = b^2 - a^2$.

On peut donc choisir :

$$a = \frac{1}{2}(x^2 - 1) \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{2}(1 + x^2).$$

Posons donc, pour tout $x \in E_n(p, q)$:

$$\boxed{u(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)e_0 + x + \frac{1}{2}(1 + x^2)e_{n+1}} \quad (\text{B})$$

ou, si l'on veut,

$$\boxed{u(x) = \frac{1}{2}(e_{n+1} + e_0)x^2 + x + \frac{1}{2}(e_{n+1} - e_0)} \quad (\text{B}_1)$$

3° Détermination de φ .

On va montrer successivement :

a) qu'il existe φ application de $\text{Pin}(p+1, q+1)$ dans l'ensemble \mathcal{E} des applications de $E_n(p, q)$ dans lui-même, qui à $g \in \text{Pin}(p+1, q+1)$ associe $f = \varphi(g)$ unique telle que pour tout $x \in E_n(p, q)$, il existe $\sigma_g(x) \in \mathbb{R}$ unique associé à g :

$$\boxed{\alpha(g)u(x)g^{-1} = \sigma_g(x)u[f(x)]}; \quad (\text{A})$$

b) que φ est un homomorphisme de groupes de $\text{Pin}(p+1, q+1)$ dans (\mathcal{E}, o) , où « o » désigne la composition des applications;

c) que $\varphi(\text{Pin}(p+1, q+1))$ est un groupe qui est le groupe des « inversions-similitudes-translations » de $E_n(p, q)$;

d) que φ est à noyau discret \mathcal{A} que l'on déterminera.

NOTATION. — Pour $\sigma_g(x) \neq 0$, on notera $\lambda_g(x) = (\sigma_g(x))^{-1}$.

a) Par définition même, pour tout $z \in E_{n+2}$, pour g donné $\in \text{Pin}(p+1, q+1)$, $\alpha(g)zg^{-1} = \psi(g).z$. On sait que ψ est un homomorphisme de groupes du groupe $\text{Pin}(p+1, q+1)$ sur le groupe $O(p+1, q+1)$.

Posons donc pour $g \in \text{Pin}(p+1, q+1)$: $\psi(g) = f_1(g)$; $f_1(g)$ (noté aussi f_1 s'il n'y a pas de confusion possible) est une isométrie de E_{n+2} parfaitement déterminée. La considération de la formule (A) fondamentale conduit à étudier la restriction de $f_1(g)$ à $u(E_n) \subset C_{n+2}$ puisque :

$$\alpha(g)u(x)g^{-1} = f_1(g).[u(x)];$$

$f_1(g).u(x) \in E_{n+2}$; écrivons : $f_1(g).u(x) = X^0e_0 + X^{n+1}e_{n+1} + X$; $(X^0, X^{n+1}) \in \mathbb{R}^2$; $X \in E_n(p, q)$. Pour tout $x \in E_n(p, q)$, X, X^0, X^{n+1} sont donc connus.

Donc,

$$(A) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sigma_g(x)[f^2(x) - 1]e_0 + \sigma_g(x)f(x) + \frac{1}{2}\sigma_g(x)[f^2(x) + 1]e_{n+1} = X^0e_0 + X + X^{n+1}e_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\sigma_g(x)[f^2(x) - 1] = X^0 \\ \frac{1}{2}\sigma_g(x)[f^2(x) + 1] = X^{n+1} \\ \sigma_g(x)f(x) = X \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \sigma_g(x) = X^{n+1} - X^0 \\ \sigma_g(x)f^2(x) = X^{n+1} + X^0 \\ \sigma_g(x)f(x) = X \end{cases}} \quad (A_1)$$

Ainsi pour $\sigma_g(x) \neq 0$, à $g \in \text{Pin}(p+1, q+1)$ est bien associé une application f de E_n dans E_n parfaitement déterminée pour $x \in E_n$. On peut noter, aussi que, *a priori*, cette application ne dépend pas de « l'écriture » de g dans $\text{Pin}(p+1, q+1)$;

$$\text{pour } X^{n+1} \neq X_0, \quad f(x) = \frac{X}{X^{n+1} - X^0}.$$

Remarque. — On peut remarquer, aussi, que si f existe, associé à $g \in \text{Pin}(p+1, q+1)$, $f(x)$ et $\sigma_{g,f}(x)$ sont définis sans ambiguïté. Supposons que à g donné $\in \text{Pin}(p+1, q+1)$ soient associés 2 éléments f et f' .

$$\left(\forall x \in E_n(p, q) \right) \sigma_{g,f}(x)u[f(x)] = \sigma_{g,f'}(x)u[f'(x)] \Rightarrow u[f(x)]$$

et $u[f'(x)]$ colinéaires $(\forall x)(x \in E_n)$.

Or,

$$u(x) = \lambda u(x') \}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2 - 1)e_0 + x + \frac{1}{2}(x^2 + 1)e_{n+1} = \lambda \left\{ \frac{1}{2}(x'^2 - 1)e_0 + x' + \frac{1}{2}(x'^2 + 1)e_{n+1} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \lambda x' \\ x^2 = \lambda x'^2 \end{cases} \Rightarrow \lambda^2 x'^2 = \lambda x'^2 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow x = x'.$$

Donc, pour tout $x \in E_m$, $f(x) = f'(x)$ et par suite $\sigma_{g,f}(x) = \sigma_{g,f'}(x)$ noté $\sigma_g(x)$. On a donc construit une application φ de $\text{Pin}(p+1, q+1)$ dans \mathcal{E} .

b) Montrons, maintenant, que pour tous $g, g' \in \text{Pin}(p+1, q+1)$ tels que $\varphi(g) = f$ et $\varphi(g') = f'$, on a $\varphi(g'g) = f' \circ f$.

En effet :

$$\begin{aligned} (\forall x) \quad \alpha(g)u(x)g^{-1} &= \sigma_g(x)u[f(x)] \text{ et } \alpha(g')u(x)g'^{-1} = \sigma_{g'}(x)u[f'(x)] \\ (\forall x \in E_n(p,q)) \\ \Rightarrow \alpha(g'g)u(x)(g'g)^{-1} &= \alpha(g')[\alpha(g)u(x)g^{-1}]g'^{-1} = \alpha(g') \left\{ \sigma_g(x)u[f(x)] \right\}_{(\forall x)(x \in E_n)} g'^{-1} \\ \Rightarrow \alpha(g'g)u(x)(g'g)^{-1} &= \sigma_{g'}(x)\sigma_g(x)u[f' \circ f(x)] (\forall x)(x \in E_n). \end{aligned}$$

Donc à $g'g$ est associé par $\varphi : f' \circ f$ et de plus, $(\forall x)(x \in E_n) \underline{\sigma_{g'g}(x) = \sigma_{g'}(x)\sigma_g(x)}$.

c) On sait [6] a) que $g \in \text{Pin}(p+1, q+1)$ si et seulement si $g = \lambda v_1 \dots v_k$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$; v_1, \dots, v_k vecteurs non isotropes de $E_{n+2}(p+1, q+1)$ et

$$N(g) = \beta(g).g = \pm 1.$$

On est donc conduit, en utilisant le résultat b) précédent à étudier $\varphi(v)$ où $v \in E_{n+2}(p+1, q+1)$ avec $v^2 = N(v) = \pm 1$.

Écrivons $v = v_1 + v_2 + v_3$ avec $v_1 = \lambda^0 e_0$; $v_2 = \lambda^{n+1} e_{n+1}$, $v_3 \in E_n$; $(\lambda^0, \lambda^{n+1}) \in \mathbb{R}^2$. Notons que $v^2 = (v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2 = \varepsilon = \pm 1$. Il est classique (par exemple 1) que

$$\underline{\alpha(v)u(x)v^{-1} = f_1(v).u(x) = u(x) - \frac{2B(u(x), v)}{N(v)}v}$$

avec, ici, $N(v) = \varepsilon (f_1(v) \in O(p+1, q+1))$.

On posera, comme en 3° a), $\alpha(v)u(x)v^{-1} = X^0 e_0 + X^{n+1} e_{n+1} + X$, $X \in E_n$; $(X^0, X^{n+1}) \in \mathbb{R}^2$.

En développant et en utilisant la bilinéarité de B , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} X^0 = \varepsilon \left\{ (\lambda^0)^2 \frac{1}{2}(1-x^2) - (\lambda^{n+1})^2 \frac{1}{2}(x^2-1) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + (v_3)^2 \frac{1}{2}(x^2-1) + (1+x^2)\lambda^0 \lambda^{n+1} - 2\lambda^0 B(x, v_3) \right\} \\ X^{n+1} = \varepsilon \left\{ (\lambda^0)^2 \frac{1}{2}(1+x^2) + (\lambda^{n+1})^2 \frac{1}{2}(1+x^2) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + (v_3)^2 \frac{1}{2}(x^2+1) + (1-x^2)\lambda^0 \lambda^{n+1} - 2\lambda^{n+1} B(x, v_3) \right\} \\ X = \varepsilon \left\{ x \left[\underbrace{(\lambda^0)^2 - (\lambda^{n+1})^2 + (v_3)^2}_{v^2} \right] \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. - v_3 [2B(x, v_3) - \lambda^0(1-x^2) - \lambda^{n+1}(1+x^2)] \right\} \end{array} \right.$$

et vu le système (A₁) donné au 3° a), on obtient :

$$\begin{cases} \sigma_g(x) = X^{n+1} - X^0 = \varepsilon \{ x^2(\lambda^{n+1} - \lambda^0)^2 + (v_3)^2 \\ \quad - 2B(x, v_3)(\lambda^{n+1} - \lambda^0) \} = \varepsilon [x(\lambda^{n+1} - \lambda^0) - v_3]^2 \\ \sigma_g(x)f(x) = \varepsilon \{ xv^2 - v_3[2B(x, v_3) + x^2(\lambda^0 - \lambda^{n+1}) - (\lambda^0 + \lambda^{n+1})] \} \\ \sigma_g(x)f^2(x) = \varepsilon \{ v_3^2x^2 + (\lambda^0 + \lambda^{n+1})[\lambda^0 + \lambda^{n+1} - 2B(x, v_3)] \} \end{cases}$$

On est conduit tout naturellement à considérer dans E_n(p, q) l'hyperquadrique définie par :

$$\sigma_g(x) = 0 \Leftrightarrow [x(\lambda^{n+1} - \lambda^0) - v_3]^2 = 0$$

Pour $\sigma_g(x) \neq 0$;

$$f(x) = \frac{xv^2 - v_3[2B(x, v_3) + x^2(\lambda^0 - \lambda^{n+1}) - (\lambda^0 + \lambda^{n+1})]}{[x(\lambda^{n+1} - \lambda^0) - v_3]^2}$$

$$\textcircled{I} \quad \lambda^{n+1} - \lambda^0 = 0 \quad \frac{\sigma_g(x) = \varepsilon \{ x(\lambda^{n+1} - \lambda^0)v_3 \}^2; \quad v^2 = \varepsilon$$

$$v^2 = \varepsilon = v_3^2 + (\lambda^0)^2 - (\lambda^{n+1})^2 = v_3^2; \quad \sigma_g(x) = \varepsilon \times \varepsilon = 1;$$

$$f(x) = \frac{\varepsilon x - v_3[2B(x, v_3) - (\lambda^0 + \lambda^{n+1})]}{\varepsilon} = x - \frac{2B(x, v_3)}{\varepsilon(\lambda^0 + \lambda^{n+1})v_3} \text{ avec } \lambda^0 = \lambda^{n+1}$$

Donc $f(x) = x - 2B(x, v_3)(\varepsilon v_3) - 2\lambda^0(\varepsilon v_3)$. On remarque que :

$$x \mapsto x - 2B(x, v_3)(\varepsilon v_3) = u_{(\varepsilon v_3)}(x)$$

en notant de manière générale (cf. [I]) pour tout vecteur a non isotrope de E_n(p, q) u_(a), la symétrie orthogonale par rapport à (a)[⊥] définie par

$$u_{(a)}(x) = x - \frac{2B(x, a)a}{Q(a)}.$$

Donc,

$$f(x) = u_{(\varepsilon v_3)}(x) - 2\lambda^0(\varepsilon v_3)$$

Comme, d'après le théorème dit de Cartan-Dieudonné, toute isométrie u ∈ O(p, q) peut se décomposer en produit d'au plus n symétries par rapport à des hyperplans non isotropes, et que φ est un homomorphisme de groupes, on obtient, en notant que -2λ⁰(εv₃) = y décrit E_n, « l'élément générique » du groupe de Poincaré P(p, q). On vérifie que pour ces éléments on a σ_g(x) = 1. (Dans le cas particulier où λⁿ⁺¹ = λ⁰ = 0, on trouve que f(x) = u_(εv₃)(x) et f ∈ O(p, q) avec σ_g(x) = 1).

$$\textcircled{II} \quad \lambda^{n+1} - \lambda^0 \neq 0 \quad v^2 = \varepsilon = (\lambda^0)^2 - (\lambda^{n+1})^2 + (v_3)^2.$$

$$\begin{aligned}
& \text{On a } \sigma_g(x) = \varepsilon(\lambda^{n+1} - \lambda^0)x - v_3 \}^2; \\
f(x) &= \frac{xv^2 + (\lambda^0 + \lambda^{n+1})v_3}{[(\lambda^0 - \lambda^{n+1})x + v_3]^2} - \frac{v_3[2\mathbf{B}(x, v_3) + x^2(\lambda^0 - \lambda^{n+1}) + v_3^2]}{[(\lambda^0 - \lambda^{n+1})x + v_3]^2} \\
\Leftrightarrow f(x) &= \frac{[(\lambda^0)^2 - (\lambda^{n+1})^2]x + (\lambda^0 + \lambda^{n+1})v_3}{[(\lambda^0 - \lambda^{n+1})x + v_3]^2} \\
&\quad + \frac{v_3^2x - v_3[2\mathbf{B}(x, v_3) + x^2(\lambda^0 - \lambda^{n+1}) + v_3^2]}{[(\lambda^0 - \lambda^{n+1})x + v_3]^2} \\
\Leftrightarrow f(x) &= (\lambda^0 + \lambda^{n+1}) \frac{[(\lambda^0 - \lambda^{n+1})x + v_3]}{[(\lambda^0 - \lambda^{n+1})x + v_3]^2} + \left(x + \frac{v_3}{(\lambda^0 - \lambda^{n+1})}\right) v_3^2 \\
&\quad \times \frac{1}{[(\lambda^0 - \lambda^{n+1})x + v_3]^2} - \frac{v_3[2\mathbf{B}(x, v_3)(\lambda^0 - \lambda^{n+1}) + x^2(\lambda^0 - \lambda^{n+1}) + v_3^2]}{[\lambda^0 - \lambda^{n+1}][2\mathbf{B}(x, v_3)(\lambda^0 - \lambda^{n+1}) + x^2(\lambda^0 - \lambda^{n+1}) + v_3^2]} \\
\Leftrightarrow f(x) &= (\lambda^0 + \lambda^{n+1}) \frac{1}{[(\lambda^0 - \lambda^{n+1})x + v_3]} + \frac{v_3^2}{(\lambda^0 - \lambda^{n+1})} \\
&\quad \times \frac{1}{[(\lambda^0 - \lambda^{n+1})x + v_3]} - \frac{v_3}{(\lambda^0 - \lambda^{n+1})} \\
\Leftrightarrow f(x) &= \frac{1}{(\lambda^0 - \lambda^{n+1})} [(\lambda^0)^2 - (\lambda^{n+1})^2 + v_3^2] \times \frac{1}{[(\lambda^0 - \lambda^{n+1})x + v_3]} - \frac{v_3}{(\lambda^0 - \lambda^{n+1})} \\
\Leftrightarrow & \boxed{f(x) = \frac{\varepsilon}{(\lambda^0 - \lambda^{n+1})^2} \times \frac{1}{\left(x + \frac{v_3}{\lambda^0 - \lambda^{n+1}}\right)} - \frac{v_3}{(\lambda^0 - \lambda^{n+1})}}
\end{aligned}$$

qui est la forme la plus générale de $f(x)$.

On trouve les inversions de pôle l'origine et de puissance quelconque. En notant que les homothéties de E_n sont associées aux éléments de $\text{Pin}(p+1, q+1)$ de la forme $\exp(\eta e_0 e_{n+1})$, $\eta \in \mathbb{R}^*$, et que φ est un homomorphisme de groupes, il en résulte que $(\varphi(\text{Pin}(p+1, q+1)), o)$ est le groupe des « inversions-translations-similitudes » de $E_n(p, q)$.

On convient donc d'appeler, par définition $[\varphi[\text{Pin}(p+1, q+1)], o]$: groupe conforme de $E_n(p, q)$. (On peut, grâce au théorème de Liouville [10], [20], identifier ce groupe obtenu ici avec le groupe déjà défini $C_n(p, q)$ au III) 1°.

On appellera groupe conforme restreint $[\varphi[\text{Spin}(p+1, q+1)], o]$.

Remarques (sur la formule obtenue au (II)).

1° Si $v_3 = 0$, on obtient $f(x) = \left(\frac{\lambda^0 + \lambda^{n+1}}{\lambda^0 - \lambda^{n+1}}\right) \frac{1}{x} = \frac{\varepsilon}{(\lambda^0 - \lambda^{n+1})^2} \times \frac{1}{x}$: inversions de pôle l'origine et de puissance quelconque. Les cas particuliers $(\lambda^0 = 0, \lambda^{n+1} = 0)$; $(\lambda^0 = 0, \lambda^{n+1} = 1)$ donnent respectivement les inver-

sions de pôle 0 et de puissance 1, respectivement -1 , associées donc respectivement à e_0, e_{n+1} .

2° Si $v_3 \neq 0$ et $(v_3)^2 = 0$, on obtient, comme

$$(\lambda^0)^2 - (\lambda^{n+1})^2 = \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda^0 - \lambda^{n+1}} = \varepsilon(\lambda^0 + \lambda^{n+1})$$

$$f(x) = (\lambda^0 + \lambda^{n+1}) \left[\frac{1}{x(\lambda^0 - \lambda^{n+1}) + v_3} - \varepsilon v_3 \right].$$

3° Notons que le cas où v_3 est isotrope et $(v_1 + v_2)$ isotrope est exclu, puisqu'alors E_{n+2} serait totalement isotrope.

d) Montrons, alors, que le noyau \mathcal{A} de φ est discret.

Déterminons $\mathcal{A} = \ker \varphi$.

$g \in \mathcal{A} \Leftrightarrow (\forall x) (x \in E_n) u(x)$ est colinéaire à

$$\alpha(g)u(x)g^{-1} = f_1(g) \cdot u(x)(f_1(g) = \psi(g) \in O(p + 1, q + 1)).$$

Rappelons que pour tout $x \in E_n, u(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)e_0 + x + \frac{1}{2}(1 + x^2)e_{n+1}$.

On a défini $C_n(p, q)$ comme le groupe $\varphi(\text{Pin}(p + 1, q + 1))$. Rappelons, de plus, que pour $g = v, v = \lambda^0 e_0 + \lambda^{n+1} e_{n+1} + v_3, (\lambda^0, \lambda^{n+1}) \in \mathbb{R}^2, v_3 \in E_n; v^2 = \varepsilon$, on a trouvé que $\sigma_g(x) = \varepsilon [x(\lambda^{n+1} - \lambda^0)^2 - v_3]^2$, et que

$$\sigma_{g \cdot g}(x) = \sigma_g(x) \times \sigma_g(x).$$

(φ est un homomorphisme de groupes). En cherchant dans le groupe des inversions similitudes-translations de E_n comment obtenir l'identité, on vérifie immédiatement que pour tout $g \in \mathcal{A}, \sigma_g(x) = \sigma_g(-x) = \varepsilon, (\forall x) (x \in E_n)$. On notera, par abus, pour tout $g \in \mathcal{A}, \sigma_g(x) = \sigma_{\text{id}}(x) = \varepsilon$. Le choix successif de $x \in E_n(p, q)$ et de $(-x) \in E_n$ tels que $x^2 = 1$ et $(-x)^2 = 1$ permet de vérifier que pour tout $g \in \mathcal{A}$:

$$\alpha(g)e_{n+1}g^{-1} = \varepsilon e_{n+1} \text{ et } (\forall x) (x \in E_n) : (x^2) = 1, \alpha(g)xg^{-1} = \varepsilon x \text{ } (\forall g) (g \in \mathcal{A}).$$

En effet

$$\left. \begin{array}{l} \{ x : x^2 = 1 \Rightarrow u(x) = x + e_{n+1} \\ -x : (-x)^2 = 1 \Rightarrow u(-x) = -x + e_{n+1} \} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha(g)(x + e_{n+1})g^{-1} = \sigma_{\text{id}}(x)[x + e_{n+1}] \\ \alpha(g)(-x + e_{n+1})g^{-1} = \sigma_{\text{id}}(-x)[-x + e_{n+1}] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha(g)e_{n+1}g^{-1} = \varepsilon e_{n+1} & (\forall g) \in \mathcal{A} : (\forall x) : x^2 = 1. \\ \alpha(g)xg^{-1} = \varepsilon x. \end{cases}$$

De même, le choix de $x : x^2 = -1$ et de $(-x)$ tel que $(-x)^2 = -1$, pour lesquels, respectivement, $u(x) = -e_0 + x$ et $u(-x) = -e_0 - x$ permet de montrer que $\alpha(g)e_0g^{-1} = \varepsilon e_0$, ($\forall g$) ($g \in \mathcal{A}$) et que $\alpha(g)xg^{-1} = \varepsilon x$;

$\forall g \in \mathcal{A}$; ($\forall x$) ($x^2 = -1$). De plus, pour $x : x^2 = 0$, $u(x) = \frac{-e_0}{2} + x + \frac{e_{n+1}}{2}$

et on obtient ($\forall x$) ($x^2 = 0$), ($\forall g$) ($g \in \mathcal{A}$) $\alpha(g)xg^{-1} = \varepsilon x$.

Il en résulte aussitôt que pour tout $z \in E_{n+2}$, $z = \lambda^0 e_0 + \lambda_{e_{n+1}}^{n+1} + x$, $x \in E_n(p, q)$, $(\lambda^0, \lambda_{e_{n+1}}^{n+1}) \in \mathbb{R}^2$, ($\forall g$) ($g \in \mathcal{A}$), $\alpha(g)zg^{-1} = f_1(g).z = \varepsilon z$ avec $\varepsilon = \pm 1$, donc $g \in \mathcal{A} \Leftrightarrow f_1(g) = \text{Id}_{E_{n+2}}$ ou $f_1(g) = -\text{Id}_{E_{n+2}}$

avec $f_1(g) = \psi(g)$ et $f_1(g).z = \alpha(g)zg^{-1}$.

Or on sait [I bis], [5], [6] a) que $\text{Ker } \psi = \{+1, -1\}$ id est $\psi(1) = \text{Id}_{E_{n+2}}$ et $\psi(-1) = -\text{Id}_{E_{n+2}}$. Cherchons $\psi^{-1}\{-\text{Id}_{E_{n+2}}\}$.

Notons d'abord que $\psi(e_N) = -\text{Id}_{E_{n+2}}$ et $\psi(-e_N) = -\text{Id}_{E_{n+2}}$, où $e_N = e_0 e_{n+1} e_1 \dots e_n$.

$$\left. \begin{array}{l} g \in \text{Pin}(p+1, q+1) \\ g \in \psi^{-1}\{-\text{Id}_{E_{n+2}}\} \end{array} \right\} \Rightarrow \psi(g) = -\text{Id}_{E_{n+2}}$$

$$\Rightarrow \psi(g e_N) = \psi(g) \cdot \psi(e_N) = \text{Id}_{E_{n+2}} \Rightarrow g e_N \in \text{Ker } \psi = \{-1, +1\}$$

$$\Rightarrow g e_N = \pm 1 \Rightarrow g = (\pm 1)(e_N)^{-1} = \varepsilon e_N \text{ où } \varepsilon = \pm 1.$$

vu [5], [6] a)

Donc $\psi^{-1}\{-\text{Id}_{E_{n+2}}\} = \{e_N, -e_N\}$.

Donc $\mathcal{A} = \{+1, -1, e_N, -e_N\}$. \mathcal{A} est donc discret. On vérifie immédiatement que suivant que $(e_N)^2 = +1$, respectivement $(e_N)^2 = -1$, l'on trouve pour \mathcal{A} soit la structure du groupe de Klein $Z_2 \times Z_2$, soit, respectivement, la structure du groupe Z_4 ; de plus, pour tout $x \in E_m$,

$$\begin{aligned} u(x).1 &= \alpha(1)u(x)(1)^{-1}; & u(x).(-1) &= \alpha(-1)u(x)(-1)^{-1}, \\ (-1).(u(x)) &= \alpha(e_N)u(x)(e_N)^{-1} & \text{et} & \quad (-1).(u(x)) = \alpha(-e_N)u(x)(-e_N)^{-1}. \end{aligned}$$

4° Compléments.

a) Conformément aux résultats indiqués en III 2° c), on peut vérifier directement que à $g = \exp\left(\frac{1}{2}(e_{n+1} + e_0)y\right) \in \text{Pin}(p+1, q+1)$ où $y \in E_m$, soit à $g = 1 + \frac{1}{2}(e_{n+1} + e_0)y$, avec $\alpha(g) = 1 + \frac{1}{2}(e_{n+1} + e_0)y$ et

$$g^{-1} = 1 + \frac{y}{2}(e_{n+1} + e_0)$$

est associé la translation de $E_n : x \mapsto x + y$. On vérifie, en effet que pour tout $x \in E_m$, $u(x+y) = \alpha(g)u(x)g^{-1}$; $[\sigma_g(x) = 1]$.

b) On peut obtenir les « rotations orthochrones » de E_m , éléments de

$SO_+(p, q)$ comme dans [I6]. Toute rotation $t \in SO_+(p, q)$ est décrite par : $t(x) = gxg^{-1}$ avec $g = \exp\left(-\frac{1}{2}b^{ij}e_{ij}\right)$. En effet, $t \in SO_+(p, q)$ s'écrit $t = \exp h$ où h est une transformation antisymétrique de E_n . De plus à h est associée un bivecteur b unique tel que $hx = bx - xb$, $b = \frac{1}{2}b^{ij}e_{ij}$ où $b^{ij} = \frac{1}{2}h^{ij}$ et, dès lors, $t = \psi_1(g) = \varphi(g)$ où $g = \exp\left(-\frac{1}{2}b^{ij}e_{ij}\right)$. Car, pour $X = x \wedge y$, $\exp X = 1 + X$ et $\exp(-X) = 1 - X = (\exp X)^{-1}$. Formant, donc, $\alpha(g)u(x)g^{-1}$ et développant, comme $ge_0g^{-1} = e_0$, $ge_{n+1}g^{-1} = e_{n+1}$ et $(t(x))^2 = x^2$, on trouve que $\alpha(g)u(x)g^{-1} = u[t(x)]$ et que $\sigma_g(x) = 1$. Ce résultat est signalé dans [II].

c) On a noté comment obtenir les homothéties de E_n images par φ des éléments $\exp(\eta e_0 e_{n+1})$, ($\eta \in \mathbb{R}^*$, de $\text{Pin}(p+1, q+1)$). Utilisant les résultats du III 2° c) pour $\lambda = \exp \eta$, $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$, $g = \exp\left(\frac{1}{2}\eta e_0 e_{n+1}\right)$, on vérifie que $\varphi(g)$ est l'homothétie positive $x \mapsto \lambda x$ de E_n . On trouve, en effet que : $\alpha(g)u(x)g^{-1} = \lambda^{-1}u[\lambda x] = \sigma_g(x)u[\lambda x]$ avec $\sigma_g(x) = \lambda^{-1} = \exp(-\eta)$. Ce résultat a été trouvé dans [II], dans un contexte différent.

d) Soit $a \in E_n$. Considérons la transformation conforme spéciale de E_n $x \mapsto f(x) = x(1 + ax)^{-1}$. Cette transformation n'est pas définie pour x appartenant au cône d'équation $(1 + ax)^2 = 0$ si $a^2 \neq 0$ et à l'hyperplan d'équation $B(a, x) = -\frac{1}{2}$ si $a^2 = 0$. Conformément à [I6] et vu les résultats du III) 2° c), pour

$$g = \exp\left[\frac{1}{2}(e_{n+1} - e_0)a\right] = 1 + \frac{1}{2}(e_{n+1} - e_0)a \in \text{Pin}(p+1, q+1),$$

on trouve que : $\alpha(g)u(x)g^{-1} = \sigma_g(x)u[\lambda_g(x)(x + ax^2)] = \sigma_g(x)u[f(x)]$, en posant $[\sigma_g(x)]^{-1} = \lambda_g(x) = [N(1 + ax)]^{-1}$; donc

$$\varphi\left(\exp\left(\frac{1}{2}(e_{n+1} - e_0)a\right)\right) = f \text{ où } f : x \mapsto x(1 + ax)^{-1}.$$

On notera ci-dessous u_i l'application

$$u_{(e_i)} : x \mapsto u_{(e_i)}(x) = x - 2B(x, e_i)e_i.$$

e) *Tableau fondamental des résultats pour des éléments notables g de $\text{Pin}(p+1, q+1)$:*

(Cf. [II]).

$g \in \text{Pin}(p+1, q+1)$	$f \in C_n(p, q); f = \varphi(g)$	$\sigma_g(x)$
$g = \exp b = \exp\left(-\frac{1}{2}b^{ij}e_{ij}\right)$ $b^{ji} = \frac{1}{2}h^{ij} : hx = bx - xb$	rotation orthochrone $\in \text{SO}_+(p, q) :$ $x \mapsto t(x) = g(x)g^{-1}; t = \exp h, t = \varphi(g)$	1
$g = e_{ij}$ $1 \leq i < j \leq n$	$t \in \text{SO}(p, q) : x \mapsto t(x) = u_{(i)} \circ u_{(j)}(x);$ $u[u_{(i)} \circ u_{(j)}(x)] = u_{(i)} \circ u_{(j)}(x)$	1
$g = e_i \quad 1 \leq i \leq n$	$t \in \text{O}(p, q) - \text{SO}(p, q) : x \mapsto t(x) = u_{(i)}(x);$ $u[u_{(i)}(x)] = u_{(i)}[u(x)]$	1
$g = \exp\left(\frac{1}{2}(e_{n+1} + e_0)y\right)$ $= 1 + \frac{1}{2}(e_{n+1} + e_0)y; y \in E_n$	$x \mapsto x + y$ translation de E_n	1
$g = \exp\left(\frac{1}{2}\eta e_0 e_{n+1}\right), \eta \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto \lambda x$ homothétie positive (ou dilatation) de E_n $\lambda = \exp \eta, \lambda \in \mathbb{R}^{*+}$	λ^{-1}
$g = e_0$ $g = e_{n+1}$	$x \mapsto \frac{1}{x}$: inversion de pôle 0, de puissance 1 : $x^2 u[x^{-1}] = u_{(0)}[u(x)]$ $x \mapsto -\frac{1}{x}$: inversion de pôle 0, de puissance -1 : $(-x^2)u[-x^{-1}] = u_{(n+1)}[u(x)]$	x^2 $-x^2$
$g = \exp\left(\frac{1}{2}(e_{n+1} - e_0)a\right)$ $= 1 + \frac{1}{2}(e_{n+1} - e_0)a; a \in E_n$	$x \mapsto x \cdot \frac{1}{1+ax}$ transformation conforme spéciale de E_n	$N(1+ax)$

5° Revêtements de $C_n(p, q)$.

a) On a donc, pour toute parité de n , algébriquement

$$C_n(p, q) \approx \frac{\text{Pin}(p+1, q+1)}{\mathcal{A}}$$

On a, ainsi, construit un isomorphisme algébrique (i), isomorphisme algébrique de $\frac{\text{Pin}(p+1, q+1)}{\mathcal{A}}$ sur $C_n(p, q)$. On sait [5], [6] a), que $\text{Pin}(p+1, q+1)$ est muni d'une structure de groupe de Lie; \mathcal{A} est discret. On peut postuler que i définit un isomorphisme topologique entre $\frac{\text{Pin}(p+1, q+1)}{\mathcal{A}}$ et $C_n(p, q)$. $C_n(p, q)$ est alors doté d'une structure

de groupe topologique ; de même, on le munit d'une structure de groupe de Lie. On retrouve ainsi un résultat énoncé par exemple dans [2].

On a donc construit un revêtement $[\varphi, \text{Pin}(p+1, q+1)]$ à quatre feuillettes de $C_n(p, q)$ et même dans le cas où $(e_N)^2 = +1$, un double revêtement à deux feuillettes puisqu'alors $A \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

On vérifie de même en notant $\varphi(\text{Spin}(p+1, q+1), (C_n(p, q))_r$ (groupe conforme restreint), que $[\varphi, \text{Spin}[p+1, q+1]]$ est un revêtement à quatre feuillettes de $(C_n(p, q))_r$ et même dans le cas où $(e_N)^2 = +1$ un double revêtement à deux feuillettes.

b) Autre revêtement de $C_n(p, q)$.

Comme, vu IV) 3° d), $\psi(\mathcal{A}) \approx \{-1, +1\}$, $\frac{\mathcal{A}}{\ker \psi} \simeq \mathbb{Z}_2$, i. e. $\frac{\mathcal{A}}{\mathbb{Z}_2} \approx \mathbb{Z}_2$.

Dès lors, vu [6] a), en utilisant ψ et en raison des théorèmes d'isomorphismes sur les groupes, on obtient :

$$\frac{\text{Pin}(p+1, q+1)}{\mathcal{A}} \approx \frac{\frac{\text{Pin}(p+1, q+1)}{\ker \psi}}{\frac{\mathcal{A}}{\ker \psi}} \approx \frac{\frac{\text{Pin}(p+1, q+1)}{\mathbb{Z}_2}}{\frac{\mathcal{A}}{\mathbb{Z}_2}} \approx \frac{\text{O}(p+1, q+1)}{\mathbb{Z}_2}$$

Dès lors $C_n(p, q) \approx \frac{\text{Pin}(p+1, q+1)}{\mathcal{A}} \approx \frac{\text{O}(p+1, q+1)}{\mathbb{Z}_2}$, ce qui donne un

autre revêtement à deux feuillettes de $C_n(p, q)$. Comme (cf. par exemple 1), \mathbb{Z}_2 est le centre de $\text{O}(p+1, q+1)$, il en résulte que $C_n(p, q) \approx \text{PO}(p+1, q+1)$ *groupe projectif orthogonal*, ce qui justifie la construction faite dans [14, a, b]

du groupe conforme à partir de $\frac{\text{S}^p \times \text{S}^q}{\mathbb{Z}_2}$, comme groupe de transformations de cet espace.

c) On vérifie de même que

$$(C_n(p, q))_r \approx \frac{\text{SO}(p+1, q+1)}{\mathbb{Z}_2} \simeq \text{PSO}(p+1, q+1)$$

groupe projectif spécial orthogonal.

6° Composantes connexes du groupe conforme $C_n(p, q)$, $n > 2$.

a) RAPPELS.

On montre [11] a), [19], que tout élément de la composante connexe de l'identité du groupe de Lie conforme $C_n(p, q)$ est la composée d'une « rotation orthochrone $t \in \text{SO}_+(p, q)$, d'une translation de E_n , d'une homo-

thétique de rapport positif, et d'une transformation spéciale conforme. On se propose de retrouver ces résultats directement en utilisant les revêtements de $C_n(p, q)$ obtenus au 6°.

b) UTILISATION DE $PO(p + 1, q + 1)$.

On a montré que $\frac{O(p + 1, q + 1)}{\mathbb{Z}_2}$ est « un revêtement » de

$$C_n(p, q) \cdot C_n(p, q) \approx \frac{O(p + 1, q + 1)}{\mathbb{Z}_2}$$

(isomorphisme topologique et de groupes de Lie.) On sait de plus que $O(p, q)$ est rétracte par déformation de $O(p) \times O(q)$ et que le cardinal de l'ensemble des composantes connexes de tout espace topologique est invariant par homéomorphisme. Il est bien connu que $O(p, q) \approx O(q, p)$, que $(Op, 0)$ noté $O(p)$ a exactement 2 composantes connexes et que $\frac{O(p) \times O(q)}{\mathbb{Z}_2}$ a 4 composantes connexes si p et q sont pairs et 2 composantes connexes si p ou q est impair. On obtient, en appliquant, ici, ces résultats :

1° si pq est impair $\Leftrightarrow p$ et q impairs $\Leftrightarrow p + 1$ et $q + 1$ pairs, alors $\frac{O(p + 1, q + 1)}{\mathbb{Z}_2}$ a 4 composantes connexes et donc $C_n(p, q)$ a 4 composantes connexes ;

2° si pq est pair $\Leftrightarrow p$ ou q pair $\Leftrightarrow p + 1$ ou $q + 1$ impair, alors $\frac{O(p + 1, q + 1)}{\mathbb{Z}_2}$ a 2 composantes connexes et $C_n(p, q)$ a, donc, 2 composantes connexes.

REMARQUES. — 1° Si pq est impair ; en notant par des cadres, les composantes connexes de l'identité, on obtient :

$$\text{card} \left\{ \frac{C_n(p, q)}{\boxed{C_n(p, q)}} \right\} = 4.$$

Or vu les théorèmes d'isomorphismes sur les groupes

$$\frac{\text{Pin}(p + 1, q + 1)}{\varphi^{-1}(\boxed{C_n(p, q)})} \approx \frac{\varphi(\text{Pin}(p + 1, q + 1))}{\varphi(\varphi^{-1}(\boxed{C_n(p, q)}))} = \frac{C_n(p, q)}{\boxed{C_n(p, q)}}.$$

Donc $\text{card} \frac{\text{Pin}(p + 1, q + 1)}{\varphi^{-1}(\boxed{C_n(p, q)})} = 4$. Comme $n + 2$ est pair et que vu [5], [6] a)

$\boxed{\text{Pin}(p + 1, q + 1)} = G_0^+(p + 1, q + 1)$, il en résulte que

$$\varphi^{-1}(\boxed{C_n(p, q)}) = G_0^+(p + 1, q + 1) = \boxed{\text{Pin}(p + 1, q + 1)}.$$

On peut alors vérifier en utilisant ψ , que

$$\frac{\text{Pin}(p+1, q+1)}{\varphi^{-1}(\boxed{C_n(p, q)})} = \frac{\text{Pin}(p+1, q+1)}{\boxed{\text{Pin}(p+1, q+1)}} \approx \frac{O(p+1, q+1)}{\boxed{O(p+1, q+1)}}$$

(cf. [6] a)).

2° Si pq est pair ; on peut seulement dire que

$$\text{card} \left\{ \frac{\text{Pin}(p+1, q+1)}{\varphi^{-1}(\boxed{C_n(p, q)})} \right\} = 2.$$

c) UTILISATION DE $(\text{Pin}(p+1, q+1), \varphi)$.

Nous devons à A. Crumeyrolle la démonstration plus directe suivante :

On rappelle que $\frac{C_n(p, q)}{\boxed{C_n(p, q)}} \simeq \frac{\text{Pin}(p+1, q+1)}{\varphi^{-1}(\boxed{C_n(p, q)})}$ selon un résultat classique d'algèbre.

En raison de la connexité de $\boxed{C_n(p, q)}$, si un élément de $\text{Pin}(p+1, q+1)$ s'applique par φ dans $\boxed{C_n(p, q)}$, il en est ainsi de tout élément de sa composante connexe.

Réciproquement, tout élément de $\boxed{C_n(p, q)}$ a son anti-image dans une des composantes connexes des éléments de $\text{Ker } \varphi$, comme le montre le relèvement toujours possible d'un chemin de $\boxed{C_n(p, q)}$ dans $\text{Pin}(p+1, q+1)$ puisque φ est un revêtement. Donc, l'anti-image de $\boxed{C_n(p, q)}$ par φ est l'ensemble des composantes connexes des éléments de $\text{ker } \varphi$ dans $\text{Pin}(p+1, q+1)$.

Soit G_0 le sous-groupe des éléments de $\text{Pin}(p+1, q+1)$ de norme spinorielle 1 et G_0^+ l'intersection de ce sous-groupe avec $\text{Spin}(p+1, q+1)$. Selon [5], G_0^+ est connexe et d'indice 2 dans $\text{Spin}(p+1, q+1)$. Mais $\text{Pin}(p+1, q+1)$ est la réunion disjointe de $\text{Spin}(p+1, q+1)$ et de son complémentaire C dans $\text{Pin}(p+1, q+1)$. C a deux composantes connexes car le produit d'un élément de $\text{Spin}(p+1, q+1)$ par un vecteur non isotrope de norme spinorielle 1 est une bijection de $\text{Spin}(p+1, q+1)$ sur C . $\text{Pin}(p+1, q+1)$ a donc 4 composantes connexes : G_0^+ , $G_0 - G_0^+$; le complémentaire $\mathcal{C}G_0$ dans C de G_0 , $(\text{Spin}(p+1, q+1) - G_0^+)$; et $\pm 1 \in G_0^+$.

a) $p+q$ pair α) pq pair (p et q pairs)

$$N(e_N) = -1 ; \quad \pm e_N \in \text{Spin}(p+1, s+1) - G_0^+$$

$$\varphi^{-1}(\boxed{C_n(p, q)}) = \text{Spin}(p+1, q+1) ;$$

$$\frac{\text{Pin}(p+1, q+1)}{\text{Spin}(p+1, q+1)} \simeq \{-1, +1\} \quad [5], [6] a)$$

$C_n(p, q)$ a 2 composantes connexes.

β) pq impair (p et q impairs).

$$\varphi^{-1}(\boxed{C_n(p, q)}) = G_0^+; \quad \frac{N(e_N) = 1; \quad \pm e_N \in G_0^+}{G_0^+} \simeq \{-1, +1\} \quad [5]$$

Donc $C_n(p, q)$ a 4 composantes connexes.

b) $p + q$ impair α) p pair, q impair

$$N(e_N) = 1; \quad \pm e_N \in G_0 - G_0^+.$$

Donc 2 composantes connexes.

β) p impair, q pair

$$N(e_N) = -1; \quad \pm e_N \in \mathcal{C}G_0.$$

Donc 2 composantes connexes.

En résumé :

$$\begin{cases} pq \text{ impair} : 4 \text{ composantes connexes} \\ pq \text{ pair} : 2 \text{ composantes connexes.} \end{cases}$$

CONSÉQUENCE

Il en résulte, comme l'indique le tableau du (IV, 4°), qu'on peut obtenir l'élément générique de $\boxed{C_n(p, q)}$ par composition des images par φ des éléments de $\text{Pin}(p+1, q+1)$ de la forme $\exp\left(-\frac{1}{2}b^{ij}e_{ij}\right)$,

$$\exp\left(\frac{1}{2}(e_{n+1} + e_0)y\right), \quad y \in E_n;$$

$$\exp\left(\frac{1}{2}\eta e_0 e_{n+1}\right) \text{ en posant } \lambda = \exp \eta;$$

$$\exp\left(\frac{1}{2}(e_{n+1} - e_0)a\right), \quad a \in E_n;$$

puisque dans le groupe de Lie $\text{Pin}(p+1, q+1)$, on peut trouver un voisinage de l'identité « engendré » par l'exponentielle.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. ARTIN, Geometric Algebra. *Interscience tracts in pure math.*, n° 3, Pergamon Press, London 1957.
 [1] bis M. F. ATIYAH, R. BOTT, A. SHAPIRO, Clifford Modules. *Top. Supp.*, t. 1, p. 13-38. Pergamon Press, 1963.
 [2] C. BARBANCE, *Thèse*, Paris, 1969.
 [3] N. BOURBAKI, Algèbre, chapitre 9, *Formes sesquilineaires et quadratiques*. Hermann, Paris, 1959.
 [4] E. CARTAN, a) Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane. *Bulletin de la S. M. F.*, t. 41, 1931, p. 53; b) *Annales de l'E. N. S.*, t. 31, 1914, p. 263-355; c) *Leçons sur la théorie des Spineurs*. Hermann, Paris, 1938.

- [5] C. CHEVALLEY, *The algebraic theory of Spinors*. Columbia University Press. New York, 1954.
- [6] A. CRUMEYROLLE, a) Structures spinorielles, *Ann. Inst. H. Poincaré*, Section A, Vol. XI, n° 1, 1969, p. 19-55 ; b) Groupes de Spinorialité, *Ibid*, Section A, Vol. XIV, n° 4, 1971, p. 309-323 ; c) Dérivations, formes et opérateurs usuels sur les champs spinoriels, *Ibid*, Vol. XVI, n° 3, 1972, p. 171-201 ; d) Fibrations spinorielles et twisteurs généralisés, *Periodica Math. Hungaria*, t. 6, 2, 1975.
- [7] W. A. HEPNER, The inhomogeneous linear group and the conformal group. *Il Nuevo Cimento*, vol. 26, 1962, p. 351-368.
- [8] Th. KAHAN, *Théorie des groupes en physique classique et quantique*. Tome IV, Dunod, 1960.
- [9] M. KAROUBI, Algèbres de Clifford et K-théorie. *Ann. Sci. de l'E. N. S.*, t. 1, 1968, p. 161-270.
- [10] N. H. KUIPER, « On conformally flat spaces in the large ». *Ann. of Math.*, vol. 50, n° 4, 1949, p. 916-924.
- [10] bis Y. KOSMANN, *Sur la notion de covariance en relativité générale*. Journées relativistes de Dijon. Avril 1975.
- [11] P. LOUNESTO, a) Conformal transformations and Clifford algebras. *Report HT KK. Mat.*, t. A-123, 1978. Helsinki University of technology. b) Spinors and Brauer groups, *Ibid. Mat.*, t. A-124, 1978 ; c) Spinor valued regular functions in hyper-complex analysis, *Ibid. Mat.*, t. A-154, 1979.
- [12] M. D. MAIA, a) Isospinors, *Journal of Math. Physics.*, t. 14, n° 7, 1973, p. 882-887. b) Conformal Spinors in general relativity, *Ibid.*, t. 15, n° 4, 1974, p. 420-425.
- [13] Y. MURAI, a) On the group of transformations of sixdim. spaces, *Prog. of Th. Physics*, t. 9, 1953, p. 147-168 ; b) Conformal groups in Physics, *Ibid.*, t. 11, n° 45, 1954, p. 441-448.
- [14] B. PENROSE, a) Twistor algebra, *Journal of Math. Physics*, t. 8, 1967, p. 345-366 ; b) Twistor quantisation and curved space time, *Int. J. of Ph. Physics*, I, 1968 ; c) Zero rest mass fields including gravitation asymptotic, *Behaviour (Ibid.)*.
- [15] P. RASEVSKI, La théorie des Spineurs, *Uspehi-Mat-Nauk (N. S.)*, t. 10, n° 2, 64, 1955, p. 3-110 (en russe). Traduction en anglais : *American Math. translations*, serie 2-6, 1957, p. 1-110.
- [16] M. RIESZ, *Clifford numbers and Spinors*. Lectures series n° 38, University of Maryland, 1958.
- [17] I. SEGAL, Positive energy particle models with mass splitting. *Proced. of the Nat. Ac. Sc. of U. S. A.*, t. 57, 1967, p. 194-197.
- [18] B. L. VAN DER WAERDEN, *Nachr. Ges. Wiss. Gottingen*, t. 100, I, 1929.
- [19] CONSTANTINESCU-CORNEA, *Ideale Ränder. Riemanscher Flächen*. Springer Verlag, Berlin, 1963.
- [20] J. LIOUVILLE, *Extension au cas de 3 dimensions de la question du tracé géographique*. Application de l'analyse à la géométrie C. Monge, Paris, 1963, p. 609-616.

(Manuscrit reçu le 14 mars 1980)