

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

V. B. MATVEEV

M. I. YAVOR

Solutions presque périodiques et a N-solitons de l'équation hydrodynamique non linéaire de Kaup

Annales de l'I. H. P., section A, tome 31, n° 1 (1979), p. 25-41

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1979__31_1_25_0

© Gauthier-Villars, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Solutions presque périodiques et a N-solitons de l'équation hydrodynamique non linéaire de Kaup

par

V. B. MATVEEV (*) et M. I. YAVOR (**)

Laboratoire de Physique Mathématique,
Université des Sciences et Techniques du Languedoc,
place Eugène Bataillon, 34060 Montpellier Cedex, France

ABSTRACT. — The paper is concerned with algebrogeometrical integration of some hydrodynamical equation derived recently by D. Kaup. The vast class of almost periodical solutions containing N-soliton solutions as a degenerate case is found exactly. The asymptotic behaviour of N-soliton solutions is calculated and also the explicit isomorphism between the Kaup equation and the complexification of the nonlinear Schrodinger equation is obtained.

§ 1. INTRODUCTION

Ce travail est consacré à la construction et à l'étude de quelques familles de solutions du système d'équations.

$$\begin{aligned}\pi_\tau &= \phi_{xx} + \beta^2 \phi_{xxxx} - \varepsilon(\phi_x \pi)_x, \\ \pi &= \phi_\tau + \frac{1}{2} \varepsilon \phi_x^2,\end{aligned}\tag{1.1}$$

où β , ε sont des constantes réelles. Ce système, étudié pour la première fois par D. Kaup [1], présente un intérêt pour l'hydrodynamique. Il exprime

(*) On leave from Leningrad State University, U. S. S. R.

(**) Nord-West Politechnical Institut, Leningrad, U. S. S. R.

le changement du potentiel de la vitesse du liquide (ou, pour être plus précis, du potentiel de la composante horizontale de la vitesse) propagé dans le canal strict. Il est évident que la fonction ϕ est déterminée par le système (1.1) à une constante additive près.

Pour des données initiales avec décroissance rapide à l'infini, D. Kaup [1], a obtenu quelques résultats à l'aide de la méthode du problème inverse de la diffusion. Il a démontré l'existence de solution à N-solitons et a calculé la forme exacte d'un soliton. La construction explicite des solutions avec plusieurs solitons est très compliquée dans le cadre du formalisme utilisé par D. Kaup.

Dans ce travail nous avons trouvé un vaste ensemble de solutions explicites; exprimées par les fonctions θ de Riemann g -dimensionnelles. On nomme souvent les solutions de cette sorte fini-lacunaires, parce que elles sont liées à un certain opérateur linéaire dont le spectre est une suite d'intervalles (ou des arcs) ayant un nombre fini de lacunes. En vérité, nous montrerons plus loin qu'il est possible de relier les équations de Kaup à l'opérateur de Dirac mais non autoadjoint.

Notre construction des solutions de l'équation de Kaup est, en effet, très simple. La base de cette construction est (comme dans les travaux consacrés aux solutions périodiques et presque périodiques de KdV) l'analyse sur une surface de Riemann compacte qui a une forme particulière, c'est-à-dire sur la surface de la racine carré d'un certain polynôme.

Comme le cas dégénéré des solutions fini-lacunaires nous trouverons les solutions à N-solitons de l'équation de Kaup, et étudierons leur comportement asymptotique quand t tend vers l'infini (c'est-à-dire que nous calculerons les changements de phase dans les collisions entre solitons).

Les solitons « vrais » doivent paraître dans l'étude de $\phi_x(x, \tau)$ la composante horizontale du champ de la vitesse du liquide.

Pour résoudre le système (1.1) il est utile de le mettre sous la forme de la condition de compatibilité de deux équations linéaires :

$$\left. \begin{aligned} \psi_{xx} + \left(\lambda^2 + \frac{1}{4} \beta^{-2} + i\lambda q + r \right) \psi &= 0 \\ \psi_\tau &= \frac{1}{2} \beta q_x \psi + (-2i\beta\lambda - \beta q) \psi_x, \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

$$\left. \begin{aligned} q &= q(x, \tau), \quad r = r(x, \tau), \\ q &= \frac{1}{2} \beta^{-1} \varepsilon \phi_x, \quad r = -\frac{1}{4} \varepsilon \beta^{-2} \left(\phi_\tau + \frac{3}{4} \phi_x^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

A l'aide des notations

$$V = r + \frac{1}{4} \beta^{-2}, \quad Q = iq, \quad t = i\beta\tau \quad (1.4)$$

nous pouvons mettre le système (1.2) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \psi_{xx} + (\lambda^2 + \lambda Q + V)\psi = 0 \\ \frac{1}{2}\psi_t = -\frac{1}{4}Q_x\psi + \left(-\lambda + \frac{1}{2}Q\right)\psi_x \end{cases} \quad (1.5)$$

La fonction cherchée $\phi(x, \tau)$ sera déterminée à l'addition d'une constante arbitraire près à l'aide des relations

$$\begin{cases} \phi_x(x, t) = Q(x, t) \\ \phi_t(x, t) = \frac{1}{2}\beta^{-2} + \frac{3}{2}Q^2(x, t) - 2V(x, t) \\ \phi(x, \tau) = -2i\beta^{-1}\varepsilon\phi(x, i\beta\tau). \end{cases} \quad (1.6)$$

De cette manière le problème principal est réduit à la construction d'une famille de solutions ψ du système (1.5) et à la détermination simultanée des coefficients P et Q associés.

Nous allons construire $\psi(x, t, P)$ comme une fonction méromorphe (partout sauf aux deux points infinis ∞^+ et ∞^-) du point P variant sur la surface de Riemann hyperelliptique du genre g . Cette surface et le diviseur des pôles de ψ (comme une fonction de P), qui est indépendante de x et y , sont les paramètres qui déterminent chaque solution.

La coïncidence des points de branchement transforme notre surface en surface d'une courbe rationnelle et en même temps elle transforme les solutions presque périodiques en solutions à N-solitons.

Nous ne dirons rien sur le formalisme hamiltonien pour l'équation de Kaup. Il faut remarquer seulement que la relation de cette équation avec le système bien connu (voir § 3)

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} - 2\omega u^2 = 0 \\ i\omega_t - \omega_{xx} + 2\omega^2 u = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

nous donne une série infinie d'intégrales premières. Mais les densités de ces intégrales comportent les dérivées de ϕ par rapport à t , ce qui fait que l'équation de Kaup est différente des exemples précédents résolus par les méthodes inverses.

§ 2. SOLUTIONS PRESQUE PÉRIODIQUES DE L'ÉQUATION DE KAUP

a) Quelques notions nécessaires de l'analyse sur une surface de Riemann compacte.

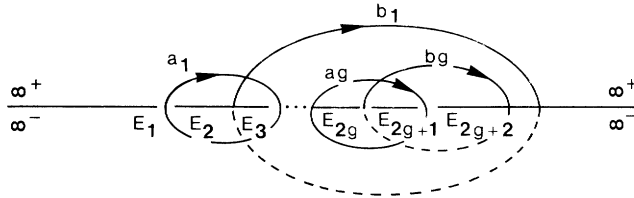
Considérons la surface de Riemann Γ de la fonction $\omega(\lambda)$

$$\omega^2 = \prod_{j=1}^{2g+2} (\lambda - E_j) \quad (2.1)$$

réalisée comme le recouvrement à deux feuillets du plan complexe avec les coupures

$$(\infty^+, E_1], [E_2, E_3], \dots, [E_{2m}, E_{2n+1}], [E_{2n+2}, \infty^+)$$

Le système de $2g$ cycles a_k, b_k indiqués sur la figure ci-dessous forme la



base du premier groupe d'homologie $H_1(\Gamma)$ de cette surface. On nomme souvent ce système de cycles le système des sections canoniques et le nombre g le genre de la surface Γ . Sur notre surface il y a deux points « infinis » ∞^+ et ∞^- situés respectivement sur le feuillet supérieur et le feuillet inférieur de la surface. Les parties de cycles b_k situées sur le feuillet inférieur sont indiquées par des lignes pointillées. Les paramètres E_j sont des nombres complexes (tous différents) ($E_j \neq E_k$, si $j \neq k$) mais absolument arbitraires. On peut faire correspondre à la surface Γ le système des différentielles abéliennes normés, c'est-à-dire, le système des formes différentielles

$$dU_v = \frac{\sum_{k=1}^g c_{vk} \lambda^{g-k}}{\omega(\lambda)} d\lambda, \quad v = 1, \dots, g, \quad (2.2) \text{ } ^{(1)}$$

où les coefficients c_{vk} sont définis par les relations

$$\oint_{a_k} dU_v = \delta_{kv}, \quad k, v = 0, 1, \dots, g. \quad (2.3)$$

Ces relations forment évidemment un système linéaire algébrique pour la détermination des c_{vk} .

Chaque forme holomorphe du premier ordre sur la surface Γ est une combinaison linéaire de dU_v , c'est-à-dire dU_v forment une base dans l'espace des formes holomorphes du premier ordre.

⁽¹⁾ La formule (2.2) donne seulement la représentation locale des formes $dU_v(P)$, où λ est la projection du point P sur le plan complexe. Au voisinage des points de branchement il faut utiliser $\tau, \tau = \sqrt{\lambda - E_j}$, comme paramètre local.

L'intégration des formes dU_v le long des cycles b_k nous donne la matrice B qu'on nomme la matrice de B-périodes :

$$B_{vk} = \oint_{b_k} dU_v \quad (2.4)$$

Il est facile de montrer que la matrice B est symétrique $B_{vk} = B_{kv}$ et sa partie imaginaire est définie positive ($\text{Im} Bx, x > 0$ si $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$). Pour la démonstration voir [2] ou [3]. La fonction θ est par définition la somme

$$\theta(\vec{p}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^g} \exp \{ \pi i (Bk, k) + 2\pi i (p, k) \}, \quad \vec{p} \in \mathbb{C}^n \quad (2.5)$$

La série (2.5) est toujours convergente en vertu des propriétés de la matrice B . Il est évident que la fonction θ est une fonction entière sur l'espace \mathbb{C}^n . Voici trois propriétés de la fonction θ qui découle directement de sa définition

$$\begin{aligned} \theta(\vec{p}) &= \theta(-\vec{p}), \quad \theta(\vec{p} + \vec{k}) = \theta(\vec{p}), \quad \vec{k} \in \mathbb{Z}^g \\ \theta(\vec{p} + \vec{B}^j) &= \theta(\vec{p}) \exp \{ -\pi i B_{jj} + 2\pi i p_j \} \end{aligned} \quad (2.6)$$

où B^j est la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice B .

La fonction θ de Riemann est définie par la relation

$$\theta = \theta(\vec{U}(\mathbf{P}) - \vec{e}),$$

où

$$U_j(\mathbf{P}) = \int_{1:2n+2}^{\mathbf{P}} dU_j, \quad (2.8)$$

et \vec{e} est un vecteur arbitraire, $\vec{e} \in \mathbb{C}^n$.

Considérons la surface $\hat{\Gamma}$ qui est la surface Γ coupée le long de sections canoniques a_k et b_k . Sur la surface $\hat{\Gamma}$ la fonction θ de Riemann est univalente.

Prenons g points P_j tels que leur projections $\pi(P_j)$ sur le plan complexe soient inégales ($\pi(P_j) \neq \pi(P_k)$ si $j \neq k$). En géométrie algébrique on dit que les points P_j forment un diviseur en position générale.

Prenons le vecteur \vec{e} sous la forme

$$\vec{e} = \vec{K} + \sum_{j=1}^g \vec{U}(P_j) \quad (2.9)^{(2)}$$

(modulo périodes des intégrales U_j).

$$\vec{K}_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^g B_{mj} - \frac{m}{2}, \quad (2.10)$$

(²) On appelle les coordonnées k_m du vecteur \vec{K} les constantes de Riemann.

Alors la fonction θ (2.7) a précisément g zéros sur $\hat{\Gamma}$ et ces zéros sont les points P_j . En outre si pour un couple j, k , $\pi(P_j) = \pi(P_k)$, la fonction θ est identiquement nulle.

b) Construction de la fonction $\psi(x, t, P)$.

Nous allons construire maintenant la fonction $\psi(x, y, t, P)$, $x, y, t \in \mathbb{R}^1$, $P \in \Gamma$ qui satisfait aux conditions suivantes :

1) ψ est une fonction univoque du point P sur Γ , meromorphe sauf aux points ∞^+ , ∞^- , avec g pôles du premier ordre situés aux points P_j qui forment un diviseur en position générale.

2) Quand $P \rightarrow \infty^\pm$, ψ a le développement asymptotique suivant :

$$\psi \sim e^{i\lambda x - 2i\lambda^2 t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varphi_j(x, t)}{\lambda_j}, \quad P \rightarrow \infty^- \quad (2.11)$$

$$\psi \sim e^{-\lambda x + 2i\lambda^2 t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\chi_j(x, t)}{\lambda_j}, \quad P \rightarrow \infty^+, \quad (2.12)$$

$\lambda = \pi(P)$

La fonction ψ est déterminée de façon unique par les conditions 1, 2 et peut être construite par la formule suivante :

$$\psi(x, t, P) = e^{i\omega_1(P)t + i\omega_2(P)x} \frac{\theta(U(P) - e(x, t))}{\theta(U(P) - e(0, 0))} F(x, t), \quad (2.13)$$

$$F(x, t) = \left[\frac{\theta(e(0, 0) - r)\theta(e(0, 0) + r)}{\theta(e(x, t) - r)\theta(e(x, t) + r)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$\vec{e}(0, 0)$ est défini par la formule (2.9),

$$\vec{e}_j(x, t) = 2iC_{j1}x - 4i\left(C_{j1}\frac{C_0}{2} - C_{j2}\right)t + \vec{e}_j(0, 0), \quad (2.14)$$

$$C_0 = \sum_{j=1}^{2n} E_j, \quad r_v = U_v(\infty^+).$$

Dans ces formules ω_1, ω_2 sont des intégrales abéliennes de second genre avec le comportement suivant en leurs pôles uniques ∞^\pm :

$$\omega_1 \sim \pm \left(2\lambda + \frac{K_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n}{\lambda^n} \right), \quad P \rightarrow \infty^\pm \quad (2.15)$$

$$\omega_2 \sim \mp \left(\lambda - \frac{R_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{\lambda^n} \right), \quad P \rightarrow \infty^\pm$$

Il est bien connu que les intégrales abéliennes du second genre sont

défini à l'addition d'une constante près si leurs parties principales aux pôles sont données, et leurs a -périodes nulles ⁽³⁾.

Il est facile d'écrire les formules explicites pour ω_1 et ω_2 mais nous les omettons pour abréger. Maintenant il est facile de montrer que la fonction ψ satisfait les deux équations linéaires (1.5) où Q et V sont exprimées à l'aide des coefficients χ_j, φ_j qui figurent dans les formules (2.11), (2.12).

Pour être plus précis, nous définissons les fonctions Q et V par la condition asymptotique

$$e^{i\lambda x - 2i\lambda^2 t} \{ \psi_{xx} + (\lambda^2 + \lambda Q + V)\psi \} = o(1) \tag{2.16}$$

On peut dériver terme à terme les séries asymptotiques (2.12)-(2.13) grâce aux propriétés analytiques de la fonction ψ qui découlent directement de sa forme exacte (2.13). En substituant le développement (2.13) dans l'estimation (2.16) on obtient la relation

$$\sum_{k=2}^{\infty} b_k \lambda^k = -\lambda^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\chi_j}{\lambda^j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\chi_{jxx}}{\lambda^j} + \lambda^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\chi_j}{\lambda^j} = o(1), \lambda \rightarrow \infty \tag{2.17}$$

Il résulte de cette relation que $b_1 = b_2 = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} Q &= 2i \frac{\chi_{0x}}{\chi_0}, \\ V &= 2i \frac{\chi_{1x}}{\chi_0} - \frac{\chi_{0xx}}{\chi_0} - 2i \frac{\chi_{0x}\chi_1}{\chi_0^2} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Maintenant nous allons justifier la formule asymptotique

$$e^{-i\lambda x + 2i\lambda^2 t} \{ \psi_{xx} + (\lambda^2 + \lambda Q + V)\psi \} = o(1) \tag{2.19}$$

quand $P \rightarrow \infty^-$.

En substituant dans cette formule (2.11) nous voyons que pour justifier (2.19) il faut montrer que

$$Q = -2i \frac{\varphi_{0x}}{\varphi_0}. \tag{2.20}$$

Cette relation découle de la condition

$$\frac{\hat{c}}{\partial x} \ln \chi_0 = -\frac{\hat{c}}{\partial x} \ln \varphi_0$$

qui est à son tour la séquence immédiate des formules explicites pour χ_0 et φ_0 :

$$\begin{aligned} \chi_0 &= e^{\frac{iR_0}{2}x + \frac{iK_0 t}{2}} \left[\frac{\theta(\vec{g}(x, t) - \vec{r})\theta(\vec{g}(0, 0) + \vec{r})}{\theta(\vec{g}(0, 0) - \vec{r})\theta(\vec{g}(x, t) + \vec{r})} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \varphi_0 &= e^{\frac{-iR_0}{2}x - \frac{iK_0 t}{2}} \left[\frac{\theta(\vec{g}(0, 0) - \vec{r})\theta(\vec{g}(x, t) + \vec{r})}{\theta(\vec{g}(x, t) - \vec{r})\theta(\vec{g}(0, 0) + \vec{r})} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{2.21}$$

⁽³⁾ On nomme l'intégrale de 1-forme méromorphe l'intégrale de second genre si ses singularités uniques sont les pôles.

Pour démontrer que la fonction ψ satisfait la première des deux équations (1.5) il suffit de remarquer que la fraction

$$\frac{\psi_{xx} + (\lambda^2 + \lambda Q + V)\Psi}{\psi} \quad (2.22)$$

est (comme fonction de P) univoque et méromorphe sur la surface Γ . Ses seuls pôles sont les zéros de ψ et ils sont du premier ordre. Pour x et t assez petits le diviseur des zéros de ψ est en position générale et l'expression (2.22) est donc indépendante de P, d'après le théorème de Riemann-Roch.

Mais quand P tend vers ∞^+ cette expression tend vers zéro, donc elle est identiquement nulle. Il est clair que pour prouver la deuxième des équations (2.5) il suffit de montrer que la fraction

$$\frac{\frac{1}{2}\psi_t + \frac{1}{4}Q_x\psi - (-\lambda + \frac{1}{2}Q)\psi_x}{\psi} \quad (2.23)$$

est indépendante de P, et que cette fraction tend vers zéro quand $P \rightarrow \infty^\mp$.

Le premier pas de cette preuve est une répétition de la démonstration précédente tandis que le deuxième est plus difficile. Pour le faire il est commode de représenter ψ de la façon suivante

$$\psi = \exp \sigma,$$

et d'utiliser les développements de la fonction σ en somme asymptotique de puissances de λ aux voisinages des points ∞^\pm :

$$\sigma(x, t, p) = \pm 2i\lambda^2 t \mp i\lambda x + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma_j^\pm(x, t)}{\lambda^j}, \quad (2.24)$$

$$\sigma_0^\pm(x, t, P) = \pm \frac{i}{2} \{ K_0 t + R_0 x \} \pm \frac{1}{2} \{ \ln \mathcal{J}_1(x, t) - \ln \mathcal{J}_1(0, 0) \}, \quad (2.25)$$

où

$$\mathcal{J}_1(x, t) = \begin{cases} \theta(\vec{g}(x, t) - \vec{r}) \\ \theta(\vec{g}(x, t) + \vec{r}) \end{cases},$$

$$\sigma_j^\pm(x, t) = \pm iK_j t \mp iR_j X \mp \frac{1}{j!} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \right)^j \ln \theta(U(p) - g(x, t)) \Big|_{p=\infty^\pm} - \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \right)^j \ln \theta(\vec{U}(p) - \vec{g}(0, 0)) \Big|_{p=\infty^+} \right\} \quad (2.26)$$

Ici τ est le paramètre local au voisinage des points ∞^\pm , $\tau = \lambda^{-1}$. Il est possible de mettre les coefficients σ_j^\pm sous une forme plus commode en

utilisant les formules suivantes (pour leur démonstration voir par exemple [3]) :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \ln \theta(\tilde{U}(p) - \vec{g}(x, t)) \right|_{p=\dots, \pm} &= \mp \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \ln \theta(\vec{g}(x, t) \pm \vec{r}), \\ \left. \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \ln \theta(\tilde{U}(p) - \vec{g}(x, t)) \right|_{p=\dots, \pm} &= -\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta(\vec{g}(x, t) \mp \vec{r}) \\ &\quad \pm \frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial t} \ln \theta(\vec{g}(x, t) \mp \vec{r}) \text{ etc.} \end{aligned}$$

Ces formules nous donnent :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_1^\pm(x, t) &= \pm iK_1 t \mp iR_1 X \mp \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \ln \theta(\vec{g} \pm \vec{r}) \right\} \Big|_{0,0}^{x,t}, \\ \vec{g} &= \vec{g}(x, t), \\ \vec{\sigma}_2^\pm(x, t) &= \pm iK_2 t \mp iR_2 X + \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta(\vec{g} \mp \vec{r}) \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{i}{8} \frac{\partial}{\partial t} \ln \theta(\vec{g} \mp \vec{r}) \right\} \Big|_{0,0}^{x,t}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Les équations pour σ , qui découlent du système (2.5) sont :

$$\sigma_{xx} + \sigma_x^2 + \lambda^2 + \lambda Q + V = 0 \quad (2.28)$$

$$\frac{1}{2} \sigma_t = f(x, t) - \frac{1}{4} Q_x - \lambda \sigma_x + \frac{1}{2} Q \sigma_x, \quad (2.29)$$

où $f(x, t)$ est la valeur de la fraction (2.23).

La substitution de (2.24) dans (2.28) donne

$$\begin{aligned} Q &= \pm 2i\sigma_{0x}^\pm, \\ V &= -\sigma_{0xx}^\pm \pm 2i\sigma_{1x}^\pm - (\sigma_{0x}^\pm)^2, \\ \sigma_{kxx}^\pm &= \mp 2i(\sigma_{k+1})_x + \sum_{j+l=k} \sigma_{jx} \sigma_{lx}^\pm = 0, \quad k > 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

De la même façon (2.24) et (2.29) avec (2.30) donnent pour f la représentation suivante :

$$f(x, t) = \frac{1}{2} \sigma_{0t}^\pm \pm \frac{i}{2} \sigma_{0xx}^\pm + \sigma_{1x}^\pm \mp i(\sigma_{0x}^\pm)^2$$

avec les relations complémentaires pour σ_j :

$$\sigma_{jt}^\pm + 2\sigma_{j+1,x}^\pm \mp 2i\sigma_{0x}^\pm \sigma_{jx}^\pm = 0, \quad j > 0.$$

En utilisant les formules pour σ_0^\pm et σ_1^\pm nous obtenons

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \pm \frac{i}{2} K_0 \pm \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial t} \ln \mathcal{J}_1 + \frac{i}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \mathcal{J}_1 \mp iR_1 \\ &\quad \frac{i}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta(\vec{g} \mp \vec{r}) \mp \frac{i}{4} \left(iR_0 + \frac{\partial}{\partial x} \ln \mathcal{J}_1 \right)^2, \end{aligned} \quad (2.31)$$

c'est-à-dire que $f = -f$ d'où découle que $f = 0$.

Nous avons démontré ainsi que ψ satisfait de (1.5) et par conséquent que $Q(x, t)$ et $V(x, t)$ satisfont le système

$$\begin{aligned} Q_t &= 3QQ_x - 2V_x, \\ V_t &= \frac{1}{2}Q_{xxx} - 2Q_xV + QV_x \end{aligned} \quad (2.32)$$

En même temps nous avons obtenu la relation

$$K_0 = i \frac{\partial}{\partial t} \ln \mathcal{J}_1 + 4R_1 + \frac{\partial}{\partial x^2} \ln \mathcal{J}_2 + \left(iR_0 + \frac{\partial}{\partial x} \ln \mathcal{J}_1 \right)^2,$$

où

$$\mathcal{J}_2(x, t) = \theta(\vec{g}(x, t) - \vec{r})\theta(\vec{g}(x, t) + \vec{r}).$$

Pour la fonction φ qui est liée à Q et V par les formules (1.6) nous avons :

$$\begin{aligned} \varphi_x &= -R_0 + i \frac{\partial}{\partial x} \ln \mathcal{J}_1, \\ \varphi_t &= \frac{1}{2}\beta^{-2} \left(iR_0 + \frac{\partial}{\partial x} \ln \mathcal{J}_1 \right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \mathcal{J}_2 - 4R_1 \\ &= (\text{en vue de l'égalité (2.33)}) = \frac{1}{2}\beta^{-2} - K_0 + i \frac{\partial}{\partial t} \ln \mathcal{J}_1, \end{aligned}$$

d'où nous déduisons pour φ

$$\varphi(x, t) = \left(\frac{1}{2}\beta^{-2} - K_0 \right) t - R_0 x + i \ln \mathcal{J}_1(x, t) + C,$$

C est une constante, que nous pouvons poser égale à zéro sans perte de généralité (voir remarque associée au § 1).

Maintenant nous pouvons écrire la formule finale pour les solutions presque périodiques des équations de Kaup :

$$\phi(x, t) = \varepsilon^{-1}(1 - 2\beta K_0)\tau + 2i\beta\varepsilon^{-1}R_0x + 2\beta\varepsilon^{-1} \ln \mathcal{J}_1(x, i\beta\tau). \quad (2.34)$$

§ 3. REPRÉSENTATION DE LAX POUR L'ÉQUATION DE KAUP

Comme nous l'avons déjà dit, nous n'avons pas utilisé l'existence de la représentation de Lax pour résoudre l'équation de Kaup mais il est facile de vérifier que le changement des variables

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{if(x,t)}, \\ v(x, t) &= \frac{1}{2}f_t - \frac{i}{2}f_{xx} - \frac{1}{2}f_x^2, \\ f(x, t) &= \frac{1}{2}i\beta^{-1}\varepsilon\phi\left(x, \frac{t}{i\beta}\right) - \frac{1}{2}\beta^2t \end{aligned}$$

transforme le système de Kaup par le système suivant

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} - 2vu = 0 \\ iv_t - v_{xx} + 2\left(v \frac{u_x}{u}\right) = 0 \end{cases}$$

ou, en posant $w = vu^{-1}$,

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} - 2wu^2 = 0 \\ iw_t - w_{xx} + 2w^2u = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Le système (3.1) est équivalent à l'équation de Lax :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} &= [A, L], \\ L &= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} 0 & u \\ w & 0 \end{pmatrix} \\ A &= \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} \frac{d^2}{dx^2} + \begin{pmatrix} 0 & -2u \\ -2w & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} -iuw & -u_x \\ -w_x & iuw \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ces formules nous montrent la possibilité de résoudre l'équation de Kaup en employant les résultats de A. Its [3], et de développer la méthode de diffusion inverse sous une forme beaucoup plus simple que celle de Kaup [1].

§ 4. SOLUTIONS A N-SOLITONS

Ici nous montrerons qu'il est très facile d'obtenir les solutions à N-solitons comme un cas dégénéré des solutions presque périodiques finilacunaires. La dégénérescence est telle que la surface Γ se transforme en la surface Γ_0 (dont le genre est zéro) une courbe rationnelle. Les formules analytiques qui expriment cette transformation sont

$$\begin{aligned} E_{2k}, E_{2k+1} &\rightarrow \lambda_k \in (-\alpha, \alpha) \\ \lambda_1 &< \lambda_2 < \dots < \lambda_n, \quad k = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.1)$$

Dans cette limite $w(\lambda)$ se transforme en la fonction

$$w_0(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - \alpha^2} \prod_{j=1}^n (\lambda - \lambda_j).$$

Nous faisons la convention que $\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2} > 0$ sur le bord supérieur de la coupure $[\alpha, \infty)$ sur le feuillet supérieur. Γ_0 est évidemment la surface de Riemann de la fonction $\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}$.

Les valeurs limites des différentielles dU_v deviennent :

$$dU_v^0(\lambda) = \frac{\varphi_v^0(\lambda)d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2} \prod_{j=1}^n (\lambda - \lambda_j)},$$

$$\varphi_v^0(\lambda) = C_{v_1}^0 \lambda^{n-1} + \dots + C_{v_n}^0; v = 1, \dots, n.$$

La fonction $\varphi_v^0(\lambda)$ est définie par les relations

$$\oint_{a_k} dU_v^0 = \delta_{kv}.$$

Le théorème des résidus nous donne pour les membres gauches de ces relations

$$\frac{-2\pi i \varphi_v^0(\lambda_\mu)}{\sqrt{\lambda - \mu^2} \prod_{\mu \neq k} (\lambda_\mu - \lambda_k)} = \delta_{\mu v},$$

d'où nous tirons immédiatement

$$\varphi_v^0(\lambda) = C_{v_1}^0 \prod_{k \neq v} (\lambda - \lambda_k), \quad (4.2)$$

$$C_{v_1}^0 = -\frac{\mathcal{H}_v}{2\pi}, \quad \mathcal{H}_v = \sqrt{\alpha^2 - \lambda_v^2} > 0 \quad (4.3)$$

et ainsi

$$dU_v^0(\lambda) = \frac{C_{v_1}^0 d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2} (\lambda - \lambda_v)}$$

Il en résulte que

$$C_{v_2}^0 = -C_{v_1}^0 \sum_{k \neq v} \lambda_k = \frac{\mathcal{H}_v}{2\pi} \sum_{k \neq v} \lambda_k.$$

Les grandeurs $\gamma_v = 2iC_{v_1}^0$ et $\alpha_v = -4i\left(C_{v_1}^0 \frac{\sum E_j}{2} + C_{v_2}^0\right)$ prennent les valeurs limites :

$$\gamma_v^0 = 2iC_{v_1}^0 = -\frac{i\mathcal{H}_v}{\pi}$$

$$\alpha_v^0 = -4i\left(C_{v_1}^0 \sum_{k=1}^n \lambda_k + C_{v_2}^0\right) = \frac{2i}{\pi} \mathcal{H}_v \lambda_v$$

Les limites des intégrales abéliennes w_1 et w_2 sont égales à

$$w_1^0(\lambda) = 2\lambda \sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}, \quad w_2^0(\lambda) = -\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}$$

et par conséquent

$$R_0 \rightarrow R_0^0 = 0, K_0 \rightarrow K_0^0 = -2\alpha^2 \quad (4.5)$$

Maintenant nous allons calculer les valeurs limites des éléments de la matrice $\|B_{\mu\nu}\|$. Remarquons que, si le point λ_0 se trouve dans le demi plan supérieur du feuillet supérieur de la surface Γ , on a

$$U_v^0(\lambda_0) = C_{v1}^0 \int_{\alpha}^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{(\lambda - \lambda_v)\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}} = \frac{i}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{\frac{\alpha - \lambda_v}{\alpha + \lambda_v}} - \sqrt{\frac{\alpha - \lambda_0}{\alpha + \lambda_0}}}{\sqrt{\frac{\alpha - \lambda_v}{\alpha + \lambda_v}} + \sqrt{\frac{\alpha - \lambda_0}{\alpha + \lambda_0}}} \quad (4.6)$$

Quand $\lambda_0 \in (\alpha, -\alpha)$ et $\lambda_0 > \lambda_v$, toutes les racines dans la partie droite de l'égalité (4.6) sont positives et nous prenons la valeur principale du logarithme.

Il est clair d'après la définition de la matrice $B_{\mu\nu}$ et la formule (4.6) que dans la limite considérée

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B_{\nu\mu}^0 = 2 \int_{\lambda_v}^{\alpha} dU_{\mu}^0 = -\frac{i}{\pi} \ln \frac{K_{\mu} - K_{\nu}}{K_{\mu} + K_{\nu}}$$

où

$$K_{\nu} = \sqrt{\frac{\alpha - \lambda_{\nu}}{\alpha + \lambda_{\nu}}} > 0 \quad (K_{\mu} > K_{\nu} \text{ quand } \nu > \mu).$$

Par conséquent d'après la symétrie de la matrice B

$$B_{\nu\mu}^0 = -\frac{i}{\pi} \ln \left| \frac{K_{\nu} - K_{\mu}}{K_{\nu} + K_{\mu}} \right|, \quad \nu \neq \mu \quad (4.7)$$

et

$$iB_{\nu\nu} \rightarrow -\infty \quad (4.8)$$

Les grandeurs $r_{\nu} = U_{\nu}(\infty^+)$ peuvent être calculées exactement à la limite

$$r_{\nu} \rightarrow r_{\nu}^0 = \frac{i}{2\pi} \ln \frac{K_{\nu} + i}{K_{\nu} - i},$$

et

$$\sum_{k=1}^n U_{\nu}(P_k) \rightarrow \tilde{\eta}_{\nu}^0 = \frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^n \ln \frac{\sqrt{\frac{\alpha - \lambda_{\nu}}{\alpha + \lambda_{\nu}}} - \sqrt{\frac{\alpha - p_k}{\alpha + p_k}}}{K_{\nu} + \sqrt{\frac{\alpha - p_k}{\alpha + p_k}}}$$

Il est possible de transformer les exposants ($\nu > \mu$) qui entrent dans la définition de $\theta(\vec{g}(x, t) \pm \vec{r})$ de la manière suivante :

$$\pi i \sum_{\nu=1}^n B_{\nu\nu} m_{\nu} (m_{\nu} + 1) + 2\pi i \sum_{\nu>\mu} B_{\nu\mu} m_{\nu} m_{\mu} + 2\pi i \sum_{\nu=1}^n m_{\nu} (p_{\nu} + \eta_{\nu} \pm r_{\nu})$$

où

$$p_\nu = \gamma_\nu x + \alpha_\nu t$$

$$\eta_\nu = \sum_{k=1}^n U_\nu(P_k) + \frac{1}{2} \sum_{\nu \neq \mu} B_{\nu\mu} - \frac{\nu}{2}.$$

Nous avons donc

$$\lim \theta(\vec{g} \pm \vec{r}) = \theta^0(\vec{g} \pm \vec{r}) = \sum_{m \in \Sigma'} \exp \left\{ 2\pi i \sum_{\nu > \mu} B_{\nu\mu}^0 m_\nu m_\mu^+ + 2\pi i \sum_{\nu=1}^m m_\nu (p_\nu^0 + \eta_\nu^0 \pm r_\nu^0) \right\},$$

où

$$p_\nu^0 = \frac{1}{2\pi i} (2\mathcal{H}_{\nu,x} - 4\mathcal{H}_{\nu,\lambda,t}),$$

$$\eta_\nu^0 = \tilde{\eta}_\nu^0 + \frac{1}{2} \sum_{\nu \neq \mu} B_{\nu\mu}^0 - \frac{\nu}{2} \quad (4.10)$$

et le symbole Σ' signifie que la sommation porte sur les vecteurs $m \in \mathbb{Z}^s$ dont les coordonnées prennent les valeurs 0 ou 1 seulement.

Pour la valeur limite de la solution Φ de l'équation nous avons la formule

$$\phi^0(x, \tau) = \varepsilon^{-1} (1 + 4\alpha^2 \beta^2) \tau + 2\beta \varepsilon^{-1} \ln \frac{\theta^0(\vec{g}(x, i\beta\tau) - r)}{\theta^0(g(x, i\beta\tau) + r)}, \quad (4.11)$$

qui décrit comme nous verrons plus loin la solution à N-solitons.

§ 5. SOLUTION A UN SOLITON

Pour obtenir cette solution pour le potentiel de la vitesse

$$f_0(x, \tau) = \frac{\partial}{\partial x} \phi_0(x, \tau)$$

Nous posons $\beta^2 < 0$, $i\beta = \delta$, $\delta > 0$ et $g = 1$.

$$\theta^0(\vec{g} \pm r) = 1 + \exp \{ -2\pi i (p^0 + \eta^0 \pm r^0) \}$$

où

$$p^0 = \frac{1}{2\pi i} (2\mathcal{H}x - 4\mathcal{H}\lambda\delta\tau)$$

$$f_0(x, \tau) = 2\beta \varepsilon^{-1} \left\{ \frac{\theta_x^0(\vec{g} - r)}{\theta^0(g - r)} - \frac{\theta_x^0(\vec{g} + r)}{\theta^0(g + r)} \right\} \quad (4)$$

(4) Cette formule s'applique aussi au cas d'un nombre quelconque de solitons.

et après avoir substitué dans (5. 1) les formules (4. 10) nous obtenons

$$\begin{aligned}
 f_0(x, \tau) &= 2 \frac{\delta}{i} \varepsilon^{-1} \cdot 2 \mathcal{H} (e^{-2\pi i r^0} - e^{2\pi i r^0}) \\
 &\quad \cdot \frac{e^{-2\mathcal{H}x + 4\mathcal{H}\lambda\delta\tau - 2\pi i \eta^0}}{1 + e^{-2\mathcal{H}x + 4\mathcal{H}\lambda\delta\tau - 2\pi i \eta^0} (e^{2\pi i r^0} + e^{-2\pi i r^0}) + e^{-4\mathcal{H}x + 8\mathcal{H}\lambda\delta\tau - 4\pi i \eta^0}} \\
 &= \frac{4\delta\varepsilon^{-1} \mathcal{H} \sin Z}{\operatorname{ch}(2\mathcal{H}x - 4\mathcal{H}\lambda\tau\delta + 2\pi i \eta^0) + \cos z}, \tag{5.2}
 \end{aligned}$$

où $Z = -2\pi i r_0$, $\operatorname{Im}Z = 0$.

La formule (5.2) coïncide avec celle obtenue par K. Kaup [1]. La solution (5.2) est réelle quand $\operatorname{Re} \eta^0 = 0$ où $\eta^0 = \pi n$, $n = 0, \pm 1, \dots$. La direction du mouvement d'un soliton est définie par le signe de λ .

§ 6. L'INTERACTION DE SOLITONS

Maintenant nous étudions la solution à N-solitons dans le même cas $\beta^2 < 0$.

Pour $\theta_x^0(g \pm r)$ nous avons d'après (4. 10)

$$\begin{aligned}
 \theta_x^0(\vec{g} \pm \vec{r}) &= \sum_m \left(\sum_{j=1}^N 2m_j \mathcal{H}_j \right) \exp \left\{ 2\pi i \sum_{\nu \neq \mu}^N B_{\nu\mu}^0 m_\nu m_\mu \right. \\
 &\quad \left. + 2\pi i \sum_{\nu=1}^N m_\nu (p_\nu^0 + \eta_\nu^0 \pm r_\nu^0) \right\}
 \end{aligned}$$

La substitution dans la formule (5. 1) nous donne :

$$\begin{aligned}
 f_0 &= \frac{2\beta\varepsilon^{-1} \sum_{m,n} \left(\sum_{j=1}^N 2\eta_j \mathcal{H}_j \right) \exp \left\{ 2\pi i \left[\sum_{\nu>\mu}^N B_{\nu\mu}^0 (n_\nu n_\mu + m_\nu m_\mu) \right] \right\}}{C_{nm} \sum_{m>n} \exp \left\{ 2\pi i \left[\sum_{\nu>\mu}^N B_{\nu\mu}^0 (n_\nu n_\mu + m_\nu m_\mu) + \sum_{\nu=1}^N (n_\nu^+ m_\nu) (p_\nu^0 + \eta_\nu^0) \right] \right\} + c_1} \\
 &\quad \times \exp \left\{ 2\pi i \sum_{\nu=1}^N (n_\nu + m_\nu) (p_\nu^0 + \eta_\nu^0) \right\} \left[\exp \left\{ 2\pi i \sum_{\nu=1}^N (m_\nu - n_\nu) r_\nu^0 \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \exp \left\{ -2\pi i \sum_{\nu=1}^N (m_\nu - n_\nu) r_\nu^0 \right\} \right], \\
 C_{nm} &= \left\{ e^{2\pi i \sum_{\nu=1}^N (m_\nu - n_\nu) r_\nu^0} + e^{-2\pi i \sum_{\nu=1}^N (m_\nu - n_\nu) r_\nu^0} \right\},
 \end{aligned}$$

$$C_1 = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \exp 4\pi i \left\{ \sum_{\nu > \mu}^N B_{\nu\mu}^0 m_\nu m_\mu + \sum_{\nu=1}^N m_\nu (p_\nu^0 + \eta_\nu^0) \right\}$$

Ce résultat montre, que les solutions à N-solitons sont réelles si $\operatorname{Re} \eta^0 = 0$ où $\eta^0 = \pi n$.

Il est évident que ces solutions décroissent exponentiellement quand $x \rightarrow \pm \infty$.

Examinons le comportement asymptotique de la fonction

$$f_0(x + v_l \tau, \tau), \quad v_l = 2\lambda_l \delta, \quad 1 \leq l \leq n \quad \text{quand } \tau \rightarrow \pm \infty.$$

En vertu des relations

$$2\pi i p_\nu^0 = 2\mathcal{H}_\nu x + 4\mathcal{H}_\nu (\lambda_l - \lambda_\nu) \delta \tau \rightarrow \begin{cases} \infty, & l > \nu \quad \text{quand } \tau \rightarrow +\infty, \\ -\infty, & l < \nu \end{cases}$$

Nous obtenons

$$f_0(x + v_l \tau, \tau) \underset{\tau \rightarrow \infty}{\sim} 2\beta \varepsilon^{-1} \frac{\sum_{\nu=l+1}^N (-2\mathcal{H}_\nu) + \sum_{\nu=l}^N (-2\mathcal{H}_\nu) e^{2\pi i \left\{ \sum_{\nu=l+1}^N B_{\mu\nu}^0 - (p_\nu^0 + \eta_\nu^0 - r_l^0) \right\}}}{1 + e^{2\pi i \left\{ \sum_{\mu=l+1}^N B_{\mu\nu}^0 - (p_\nu^0 + \eta_\nu^0 - r_l^0) \right\}}} \cdot \frac{\sum_{\nu=l+1}^N (-2\mathcal{H}_\nu) + \sum_{\nu=l}^N (-2\mathcal{H}_\nu) e^{2\pi i \left\{ \sum_{\nu=l+1}^N B_{\mu\nu}^0 - (p_\nu^0 + \eta_\nu^0 - r_l^0) \right\}}}{1 + e^{2\pi i \left\{ \sum_{\nu=l+1}^N B_{\mu\nu}^0 - (p_\nu^0 + \eta_\nu^0 + r_l^0) \right\}}}$$

Sur cette représentation il est clair que le comportement asymptotique de la fonction $f_0(x + v_l \tau, \tau)$ est

$$f_0(x + v_l \tau, \tau) \sim \frac{4\delta \varepsilon^{-1} \mathcal{H}_l \sin Z_l}{\operatorname{ch} \left(2\mathcal{H}_l x + 2\pi i \eta_l^0 - 2\pi i \sum_{\mu=l+1}^N B_{\mu l}^0 \right) + \cos Z_l}$$

$$Z_l = -2\pi r_l.$$

De la même façon quand $\tau \rightarrow -\infty$, nous obtenons

$$f_0(x + v_l \tau, \tau) \sim \frac{4\delta \varepsilon^{-1} \mathcal{H}_l \sin Z_l}{\operatorname{ch} \left(2\mathcal{H}_l x + 2\pi i \eta_l^0 - 2\pi i \sum_{\mu=1}^{l-1} B_{\mu l}^0 \right) + \cos Z_l}$$

Les formules (6.1), (6.2) montrent que les solutions à N-solitons, quand $\tau \rightarrow \pm \infty$ sont asymptotiquement égales à la somme des solitons simples, chacun d'eux se propageant avec sa propre vitesse v_l .

Le déplacement Δx du centre de masse d'un soliton à la suite d'une collision est égale à

$$\Delta x = \frac{\pi i}{\mathcal{H}_l} \left\{ \sum_{\mu=l+1}^N B_{\mu l}^0 - \sum_{\mu=l}^{l-1} B_{\mu l}^0 \right\} \quad (6.3)$$

Δx dépend donc des vitesses des solitons en interaction.

La formule (6.3) achève notre étude de la solution à N-solitons de l'équation de Kaup.

ACKNOWLEDGMENTS

The first of the authors is very grateful to Professor P. C. Sabatier for his hospitality at the Laboratory of Mathematical Physics of the University Montpellier II, where this work was finished.

REFERENCES

- [1] D. J. KAUP, *Progr. of Theor. Phys.* Vol. **54**, N2, August 1975, p. 396-408.
- [2] V. B. MATVEEV, *Abelian functions and solitons*. Preprint N 373, University of Wrocław. June 1976.
- [3] A. R. ITS. Sur l'intégration explicite des équations non linéaires à l'aide des fonctions θ de Riemann. *Thèse de Doctorat*. Université de Leningrad, 1977 (En russe).

(Manuscrit reçu le 11 mai 1979)