

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

P. MARONI

Sur quelques relations intégrales entre les solutions de l'équation biconfluente de Heun

Annales de l'I. H. P., section A, tome 30, n° 4 (1979), p. 315-332

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1979__30_4_315_0

© Gauthier-Villars, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur quelques relations intégrales entre les solutions de l'équation biconfluente de Heun

par

P. MARONI

Université Pierre-et-Marie Curie
Laboratoire d'Analyse Numérique, Tour 55-65, 5^e étage,
4, Place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — On établit plusieurs relations intégrales entre des solutions de l'équation canonique de la classe $(0, 1, 1_4)$. Des cas particuliers concernant les fonctions hypergéométriques confluentes sont mis en évidence. Une application est faite à un problème aux limites pour l'équation représentative de la classe $(0, 1, 1_4)$.

§ 1.

SOIT L'ÉQUATION CANONIQUE DE LA CLASSE $(0, 1, 1_4)$.

$$(1.1) \quad D_x(y) \equiv xy'' + (1 + \alpha - \beta x - 2x^2)y' + \{(\gamma - \alpha - 2)x - \mathcal{O}\}y = 0$$

où

$$\mathcal{O} = \frac{1}{2}(\delta + \beta(1 + \alpha)).$$

On cherche à représenter une solution y de l'équation (1.1) par l'expression

$$(1.2) \quad y(x) = \int_{\mathcal{L}} K(x, t)z(t)dt$$

où on assujettit le noyau K à satisfaire l'équation :

$$(1.3) \quad D_x(K) = D_t(K)$$

Si les conditions suivantes sont réalisées

$$(1.4) \quad \left[z(t) \left\{ t \frac{\partial K}{\partial t} + (\alpha - \beta t - 2t^2)K \right\} - tKz' \right]_L = 0$$

$$(1.5) \quad \bar{D}_t(z) = 0,$$

alors sous réserve de justifier les opérations effectuées on obtient une solution de l'équation (1.1) donnée par (1.2) [1].

La solution générale de (1.5) est

$$(1.6) \quad z(t) = t^\alpha e^{-\beta t - t^2} y(\alpha, \beta, \gamma, \delta; t)$$

où y est une solution quelconque de (1.1).

On tente de résoudre (1.3) en cherchant le noyau K sous la forme suivante :

$$K(x, t) = A(x + t)B(xt)$$

d'où l'équation où on a posé $\xi = xt$, $\eta = x + t$:

$$\frac{A''}{A} - \xi \frac{B''}{B} - \frac{A'}{A}(\beta + 2\eta) - \frac{B'}{B}(1 + \alpha + 2\xi) + \gamma - 2 - \alpha = 0$$

Soit :

$$\frac{A''}{A} - \frac{A'}{A}(\beta + 2\eta) + \gamma - 2 - \alpha = v = \xi \frac{B''}{B} + \frac{B'}{B}(1 + \alpha + 2\xi)$$

d'où

$$(1.7) \quad A(\eta) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{4}(v + 2 + \alpha - \gamma), \frac{1}{2}; \left(\eta + \frac{\beta}{2}\right)^2\right)$$

$$(1.8) \quad B(\xi) = \mathcal{F}\left(-\frac{v}{2}, 1 + \alpha; -2\xi\right)$$

où $\mathcal{F}(a, c; w)$ est une solution quelconque de l'équation de Kummer

$$(1.9) \quad w\mathcal{F}'' + (c - w)\mathcal{F}' - a\mathcal{F} = 0 \quad [2]$$

§ 2.

PLUSIEURS CAS PARTICULIERS PEUVENT ÊTRE MIS EN ÉVIDENCE! PREMIER CAS.

$$v = 2m, \quad m \geq 0 \text{ entier.}$$

On prend alors

$$(2.1) \quad A(\eta) = e^{(\eta + \frac{\beta}{2})^2} \psi\left(\frac{1}{4}(\gamma - \alpha - 2m), \frac{1}{2}; -\left(\eta + \frac{\beta}{2}\right)^2\right)$$

$$(2.2) \quad B(\xi) = L_m^{(\alpha)}(-2\xi)$$

où ψ est la solution de l'équation (1.9) définie par la fonction $W_{x,\mu}$ de Whittaker par

$$W_{x,\mu}(x) = e^{-\frac{x}{2}} x^{\mu+\frac{1}{2}} \psi\left(u - \chi + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; x\right)$$

et $L_m^{(\alpha)}(x)$ est le polynôme de Laguerre d'indice α [2].

Choisissons alors

$$(2.3) \quad z(t) = t^\alpha e^{-\beta t - t^2} N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; t)$$

où N est la fonction entière solution de (1.1) [3], [4].

Prenons enfin le chemin $L =]0, +i\infty[$, donc $t = i\tau$, $\tau > 0$. On impose que $\left(x + t + \frac{\beta}{2}\right)^2$ ne soit pas positif, ce qui implique $\text{Im } \beta + 2 \text{Im } x \geq 0$.

Cette condition est réalisée si

$$\text{Im } \beta \geq 0 \quad \text{et} \quad \text{Im } x > 0.$$

La condition (1.4) peut s'écrire, compte tenu de la forme de K :

$$(2.4) \quad tz(t) \{ A'(x+t)B(xt) + xA(x+t)B'(xt) \} \\ + A(x+t)B(xt) \{ (\alpha - \beta t - 2t^2)z(t) - tz'(t) \} \Big|_L = 0$$

Or d'après [3], on a :

$$z(i\tau) = 0(\tau^{\frac{1}{2}(\gamma-2+\alpha)} e^{\tau^2 - i\beta\tau}) \\ z'(i\tau) = 0(\tau^{\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)} e^{\tau^2 - i\beta\tau}) \quad , \quad \tau \rightarrow +\infty$$

et sachant que

$$A(x+i\tau) = 0(\tau^{-\frac{1}{2}(\gamma-\alpha-2m)} e^{-\tau^2 + 2i(x+\frac{\beta}{2})\tau})$$

on voit que :

$$tz(t)A'(x+t) = 0(\tau^{\alpha+m} e^{-2\tau \text{Im } x}) \\ xt z(t)A(x+t) = 0(\tau^{\alpha+m} e^{-2\tau \text{Im } x}) \quad , \quad \tau \rightarrow +\infty \\ tz'(t)A(x+t) = 0(\tau^{\alpha+1+m} e^{-2\tau \text{Im } x})$$

Il en résulte que la condition (2.4) est réalisée à l'infini ; à l'origine on a :

$$tz(t) = 0(t^{1+\alpha}) \\ \alpha z(t) - tz'(t) = 0(t^{1+\alpha}) \quad , \quad \tau \rightarrow +0$$

de sorte que la condition (2.4) est vérifiée également à l'origine. On en déduit que la fonction suivante est une solution de l'équation (1.1) dans le demi-plan $\text{Im } x > 0$:

$$\int_0^{+\infty} \tau^\alpha e^{-i\beta\tau + \tau^2} L_m^{(\alpha)}(-2ix\tau) e^{\left(x+i\tau+\frac{\beta}{2}\right)^2} \\ \psi\left(\frac{1}{4}(\gamma - \alpha - 2m), \frac{1}{2}; -\left(x+i\tau+\frac{\beta}{2}\right)^2\right) N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; i\tau) d\tau$$

c'est-à-dire à un facteur près :

$$e^{x^2 + \beta x} \int_0^{+\infty} \tau^\alpha e^{2i\tau x} L_m^{(\alpha)}(-2i\tau x) \psi\left(\frac{1}{4}(\gamma - \alpha - 2m), \frac{1}{2}; -\left(x + i\tau + \frac{\beta}{2}\right)^2\right) N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; i\tau) d\tau$$

Il existe donc A_1 et A_2 telles que cette solution soit égale à

$$A_1 E^+(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) + A_2 F^+(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$$

dans $\text{Im } x > 0$.

Les fonctions E^+ et F^+ constituent un système fondamental de solutions de (1.1) dans $\text{Im } x > 0$ et vérifient [3]

$$E^+(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) = O(x^{-\frac{1}{2}(\gamma + 2 + \alpha)} e^{\beta x + x^2})$$

$$F^+(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) = O(x^{\frac{1}{2}(\gamma - 2 - \alpha)})$$

On exprime E^+ et F^+ à l'aide d'un autre système fondamental, soit B^+ et H^+ , définies dans $\text{Re } x > 0$; on a :

$$E^+(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) = e^{\beta x + x^2} B^+(\alpha, -i\beta, -\gamma, i\delta; -ix)$$

$$F^+(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) = e^{\beta x + x^2} H^+(\alpha, -i\beta, -\gamma, i\delta; -ix)$$

de sorte que,

$$A_1 B^+(\alpha, -i\beta, -\gamma, i\delta; -ix) + A_2 H^+(\alpha, -i\beta, -\gamma, i\delta; -ix) = \int_0^{+\infty} \tau^\alpha e^{2i\tau x} L_m^{(\alpha)}(-2i\tau x) \psi\left(\frac{1}{4}(\gamma - \alpha - 2m), \frac{1}{2}; -\left(x + i\tau + \frac{\beta}{2}\right)^2\right) N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; i\tau) d\tau$$

On change x en ix avec $\text{Re } x > 0$ et également, $\alpha \rightarrow \alpha, \beta \rightarrow i\beta, \gamma \rightarrow -\gamma, \delta \rightarrow -i\delta$; on obtient alors :

$$(2.6) \quad A_1 B^+(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) + A_2 H^+(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) = \int_0^{+\infty} \tau^\alpha e^{-2\tau x} L_m^{(\alpha)}(2\tau x) \psi\left(\frac{1}{4}(\gamma - \alpha - 2m), \frac{1}{2}; \left(x + \tau + \frac{\beta}{2}\right)^2\right) N(\alpha, i\beta, -\gamma, -i\delta; i\tau) d\tau$$

Enfin, puisque

$$N(\alpha, i\beta, -\gamma, -i\delta; i\tau) = e^{-\beta\tau - \tau^2} N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; \tau)$$

on a le résultat suivant :

THÉORÈME 2.1. — Notons

$$(2.5) \quad N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) = \sum_{m \geq 0} C_m x^m, \quad C_0 = 1$$

On a la relation intégrale suivante entre les solutions B^+ et N :

$$(2.7) \quad i^m C_m(\alpha, i\beta, -\gamma, -i\delta) B^+(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) \\ = 2^{1+\alpha+m} \frac{(-1)^m}{\Gamma(1+\alpha+m)} \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-\beta t - t^2} e^{-2tx} L_m^{(\alpha)}(2tx) \\ \psi\left(-\frac{s}{2}, \frac{1}{2}; \left(x+t+\frac{\beta}{2}\right)^2\right) N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; t) dt$$

pour

$$Rx > 0, \quad R(1+\alpha) > 0,$$

et chaque $m \geq 0$ entier avec $s = \frac{1}{2}(\gamma + \alpha + 2m)$.

Il reste à montrer que

$$(2.8) \quad A_1 = i^m C_m(\alpha, i\beta, -\gamma, -i\delta) 2^{-(1+\alpha+m)} \Gamma(1+\alpha+m) (-1)^m \\ A_2 = 0$$

Pour cela, on évalue le comportement asymptotique de l'intégrale au second membre de (2.6) lorsque $x \rightarrow \infty$ $Rx > 0$.

Il suffit de supposer $x > 0$. On écrit pour $\varepsilon > 0$ arbitraire.

$$\int_0^{+\infty} = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^{+\infty} \int_\varepsilon^{+\infty} = 0 \left(\int_\varepsilon^{+\infty} (tx)^m e^{-2tx} t^{-\frac{1}{2}(\gamma+2-\alpha)} \left(x+t+\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}(\gamma+\alpha+2m)} dt \right) \\ = 0(x^{2m+\frac{1}{2}R(\gamma+\alpha)} e^{-2\varepsilon x}), \quad x \rightarrow +\infty$$

Posons pour simplifier $\tilde{C}_m = i^m C_m(\alpha, i\beta, -\gamma, -i\delta)$, on a

$$\int_0^\varepsilon = \int_0^\varepsilon dt^\alpha e^{-2tx} L_m^{(\alpha)}(2tx) \left(\sum_{q \geq 0} \tilde{C}_q t^q \right) \left(x + \tau + \frac{\beta}{2} \right)^s \left(\sum_{p \geq 0} \frac{a_p}{\left(x + \tau + \frac{\beta}{2}\right)^{2p}} \right)$$

avec

$$a_p = \frac{(-s)_{2p}}{p!} \frac{(-1)^p}{4p}$$

Posant $2tx = \xi$, on a

$$(2.9) \quad (2x)^{-1-\alpha} \int_0^{2\varepsilon x} \xi^\alpha e^{-\xi} L_m^{(\alpha)}(\xi) \left(\sum_{q \geq 0} \tilde{C}_q \left(\frac{\xi}{2x}\right)^q \right) \left(x + \frac{\xi}{2x} + \frac{\beta}{2} \right)^s \\ \left(\sum_{p \geq 0} \frac{a_p}{\left(x + \frac{\xi}{2x} + \frac{\beta}{2}\right)^{2p}} \right) d\xi$$

La dernière série étant en fait un développement asymptotique.

On écrit :

$$\left(x + \frac{\xi}{2x} + \frac{\beta}{2}\right)^r = \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^r \sum_{p \geq 0} \chi_p(r) \left(\frac{\xi}{2x\left(x + \frac{\beta}{2}\right)}\right)^p$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{\beta}{2} + \frac{\xi}{2x}\right)^s \left(\sum_{p \geq 0} a_p \left(x + \frac{\beta}{2} + \frac{\xi}{2x}\right)^{-2p}\right) &= \sum_{p \geq 0} a_p \left(x + \frac{\beta}{2} + \frac{\xi}{2x}\right)^{-2p+s} \\ &= \sum_{p \geq 0} a_p \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^{-2p+s} \sum_{q \geq 0} \chi_q(-2p+s) \left(\frac{\xi}{2x\left(x + \frac{\beta}{2}\right)}\right)^q \\ &= \sum_{q \geq 0} \frac{\left(x + \frac{\beta}{2}\right)^s}{\left(2x\left(x + \frac{\beta}{2}\right)\right)^q} \xi^q \sum_{p \geq 0} a_p \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^{-2p} \chi_q(-2p+s) \\ &= \sum_{q \geq 0} \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^{s-q} \left(\frac{\xi}{2x}\right)^q b_q(x; s) \end{aligned}$$

avec

$$b_q(x; s) = \sum_{p \geq 0} a_p \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^{-2p} \chi_q(-2p+s)$$

Enfin :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{p \geq 0} \tilde{C}_p \left(\frac{\xi}{2x}\right)^p\right) \left(\sum_{q \geq 0} \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^{s-q} \left(\frac{\xi}{2x}\right)^q b_q(x; s)\right) \\ = \sum_{r \geq 0} \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^s \left(\frac{\xi}{2x}\right)^r d_r \quad \text{avec} \quad d_r = \sum_{p+q=r} \tilde{C}_p \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^{-q} b_q(x; s) \end{aligned}$$

Ainsi (2.9) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} (2x)^{-1-\alpha} \int_0^{2\epsilon x} \xi^\alpha e^{-\xi} L_m^{(\alpha)}(\xi) \left(\sum_{r \geq 0} \left(\frac{\xi}{2x}\right)^r d_r\right) \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^s d\xi \\ = (2x)^{-1-\alpha} \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^s \int_0^{2\epsilon x} \xi^\alpha e^{-\xi} L_m^{(\alpha)}(\xi) \left(\sum_{r=0}^N \frac{d_r}{(2x)^r} \xi^r\right) d\xi + O(x^{s-2-\alpha-N}) \\ = (2x)^{-1-\alpha} \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^s \sum_{r=0}^N \frac{d_r}{(2x)^r} \int_0^{+\infty} \xi^{\alpha+r} e^{-\xi} L_m^{(\alpha)}(\xi) d\xi + O(x^{s-2-\alpha-N}) \end{aligned}$$

Prenons $N \geq m$. Puisque

$$\int_0^{+\infty} \xi^{\alpha+r} L_m^{(\alpha)}(\xi) e^{-\xi} d\xi = 0 \quad 0 \leq r \leq m-1$$

Il reste

$$\int_0^\varepsilon = (2x)^{-1-\alpha} \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^s \frac{d_m}{(2x)^m} \int_0^{+\infty} \xi^{\alpha+m} e^{-\xi} L_m^{(\alpha)}(\xi) d\xi + 0(x^{s-2-\alpha-m})$$

Or on a, d'après les calculs précédents :

$$d_m = \tilde{C}_m b_0(x; s) + 0\left(\frac{1}{x}\right)$$

et

$$b_0(x; s) = \sum_{p \geq 0} a_p \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^{-2p} \chi_0(-2p + s) = a_0 + 0\left(\frac{1}{x}\right)$$

et donc

$$d_m = \tilde{C}_m + 0\left(\frac{1}{x}\right).$$

D'où finalement :

$$\int_0^\varepsilon = \tilde{C}_m 2^{-1-\alpha-m} \left\{ x^{\frac{1}{2}(\gamma-\alpha-2)} \int_0^{+\infty} \xi^{\alpha+m} e^{-\xi} L_m^{(\alpha)}(\xi) d\xi \left(1 + 0\left(\frac{1}{x}\right)\right) \right\}$$

ce qui implique bien l'expression indiquée (2.8), compte tenu des comportements asymptotiques

$$B^+(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) \sim x^{\frac{1}{2}(\gamma-\alpha-2)}$$

$$H^+(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) \sim x^{-\frac{1}{2}(\gamma+2+\alpha)} e^{\beta x + x^2}$$

et de la formule

$$\int_0^{+\infty} \xi^{\alpha+m} e^{-\xi} L_m^{(\alpha)}(\xi) d\xi = (-1)^m \Gamma(1 + \alpha + m)$$

§ 3.

UN CAS PARTICULIER DE LA RELATION (2.7).

C'est le cas où $\beta = 0$ et $\delta = 0$; on a alors :

$$N(\alpha, 0, \gamma, 0; x) = \Phi\left(\frac{1}{4}(\alpha + 2 - \gamma), 1 + \frac{\alpha}{2}; x^2\right)$$

$$B^+(\alpha, 0, \gamma, 0; x) = \psi\left(\frac{1}{4}(\alpha + 2 - \gamma), 1 + \frac{\alpha}{2}; x^2\right)$$

et

$$C_{2m+1}(\alpha, 0, \gamma, 0) = C_{2m+1} = 0, \quad m \geq 0$$

$$C_{2m}(\alpha, 0, \gamma, 0) = C_{2m} = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}(\alpha + 2 - \gamma) + m\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2} + m\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}(\alpha + 2 - \gamma)\right)} \frac{1}{m!} \quad m \geq 0$$

On a ainsi pour (2.7) :

$$0 = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2 - 2tx} L_{2m+1}^{(\alpha)}(2tx) \psi\left(-\frac{1}{4}(\gamma + \alpha + 2) - m, \frac{1}{2}; (x+t)^2\right) \Phi\left(\frac{1}{4}(\alpha + 2 - \gamma), 1 + \frac{\alpha}{2}; t^2\right) dt$$

(3.1) pour chaque $m \geq 0$ entier, $Rx > 0$, $R(1 + \alpha) > 0$.

$$\psi\left(\frac{1}{4}(\alpha + 2 - \gamma), 1 + \frac{\alpha}{2}; x^2\right)$$

$$= (-1)^m \frac{2^{1+\alpha+2m} \Gamma\left(\frac{1}{4}(\alpha + 2 + \gamma)\right) \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2} + m\right) m!}{\Gamma(1 + \alpha + 2m) \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}(\alpha + 2 + \gamma) + m\right)}$$

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2 - 2tx} L_{2m}^{(\alpha)}(2tx) \psi\left(-\frac{1}{4}(\gamma + \alpha) - m, \frac{1}{2}; (x+t)^2\right) \Phi\left(\frac{1}{4}(\alpha + 2 - \gamma), 1 + \frac{\alpha}{2}; t^2\right) dt$$

(3.2) pour chaque $m \geq 0$ entier, $Rx > 0$, $R(1 + \alpha) > 0$.

Supposons de plus que $\frac{1}{4}(\alpha + 2 - \gamma) = -n$ avec $n \geq 0$ entier. De

$$\Phi(-n, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)} n! L_n^{(c-1)}(z)$$

$$\psi(-n, c; z) = (-1)^n n! L_n^{(c-1)}(z),$$

On a

$$L_n^{(\frac{\alpha}{2})}(x^2) = (-1)^{m+n} 2^{1+\alpha+2m} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\alpha+2)+n\right) \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2} + m\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}(\alpha+2)+n+m\right)} \frac{m!}{\Gamma(1+\alpha+2m)} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2} + n\right)}$$

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2 - 2tx} L_{2m}^{(\alpha)}(2tx) \psi\left(-\frac{1}{2}(\alpha + 1) - n - m, \frac{1}{2}; (x+t)^2\right) L_n^{(\frac{\alpha}{2})}(t^2) dt$$

Soit

$$L_n^{(\frac{\alpha}{2})}(x^2) = (-1)^{m+n} 2^{1+\alpha+2m} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2} + m\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2} + m + n\right)} \frac{m!}{\Gamma(1 + \alpha + 2m)}$$

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2-2tx} L_{2m}^{(\frac{\alpha}{2})}(2tx) \psi\left(-\frac{1}{2}(\alpha+1) - m - n, \frac{1}{2}; (x+t^2)\right) L_n^{(\frac{\alpha}{2})}(t^2) dt$$

(3.3) pour $x \in \mathbb{C}$, $\operatorname{R}(1 + \alpha) > 0$, $m, n \geq 0$ entiers.

Et provenant de (3.1), on a dans ce cas :

$$0 = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2-2tx} L_{2m+1}^{(\frac{\alpha}{2})}(2tx) \psi\left(-\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) - m - n, \frac{1}{2}; (x+t^2)\right) L_n^{(\frac{\alpha}{2})}(t^2) dt$$

(3.4) où $m, n \geq 0$ entiers, $x \in \mathbb{C}$, $\operatorname{R}(1 + \alpha) > 0$.

Supposons maintenant α entier, dans (3.3); posons $\alpha = 2p - 1$, $p \geq 1$ entier, on a :

$$L_n^{(p-\frac{1}{2})}(x^2) = (-1)^{m+n} 2^{-2n} \frac{m!}{\Gamma(2p+2m)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + m + p\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + m + n + p\right)}$$

$$\int_0^{+\infty} t^{2p-1} e^{-t^2-2tx} H_{2(p+m+n)}(x+t) L_{2m}^{(2p-1)}(2tx) L_n^{(p-\frac{1}{2})}(t^2) dt$$

ou encore

$$L_n^{(p-\frac{1}{2})}(x^2) = (-1)^{m+n} \frac{2^{-2n} m!}{\Gamma(2p+2m)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + m + p\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + m + n + p\right)}$$

$$\int_0^{+\infty} t^{2p-1} e^{-t^2-2tx} H_{2(p+m+n)}(x+t) L_{2m}^{(2p-1)}(2tx) L_n^{(p-\frac{1}{2})}(t^2) dt$$

(3.5) valable pour $x \in \mathbb{C}$, $m, n \geq 0$, $p \geq 1$ entiers. Et dans (3.4) posons :

$$\alpha = 2(p-1), \quad p \geq 1$$

entier. On a :

$$0 = \int_0^{+\infty} t^{2(p-1)} e^{-t^2-2tx} L_{2m+1}^{(2(p-1))}(2tx) H_{2(m+n+p)}(x+t) L_n^{(p-1)}(t^2) dt$$

avec

$$(3.6) \quad H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} n! L_n^{(-\frac{1}{2})}(x^2)$$

$$(3.7) \quad H_{2n+1}(x) = (-1)^n 2^{2n+1} n! x L_n^{(\frac{1}{2})}(x^2)$$

Dans (3.5) prenons $p = 1$, on obtient selon (3.7) :

$$(3.8) \quad \frac{H_{2n+1}(x)}{x} = (-1)^{n+m} \frac{2^{-2n} m!}{\Gamma(2+2m)} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + m\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + m + n\right)} \int_0^{+\infty} e^{-t^2 - 2tx} H_{2(1+m+n)}(x+t) L_{2m}^{(1)}(2tx) H_{2n+1}(t) dt.$$

§ 4.

SECOND CAS.

$$v + 2 + \alpha - \gamma = -4m, \quad m \geq 0 \text{ entier}$$

On prend alors

$$(4.1) \quad A(\eta) = H_{2m}\left(\eta + \frac{\beta}{2}\right)$$

$$(4.2) \quad B(\xi) = \Phi\left(2m - \frac{1}{2}(\gamma - 2 - \alpha), 1 + \alpha; -2\xi\right)$$

où Φ est la fonction de Kummer.

On choisit $L =]-\infty, +\infty[$.

Considérons les solutions B^+ et B^- de (1.1) : il existe des constantes M_1^+ , M_2^+ et M_1^- , M_2^- respectivement telles que

$$(4.3) \quad B^+(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) = M_1^+ N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) + M_2^+ x^{-\alpha} N(-\alpha, \beta, \gamma, \delta; x), \quad Rx > 0$$

$$(4.4) \quad B^-(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) = M_1^- N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) + M_2^- x^{-\alpha} N(-\alpha, \beta, \gamma, \delta; x), \quad Rx < 0.$$

du moins lorsque α n'est pas un entier relatif [3]. Dans (1.6) prenons :

$$(4.5) \quad y(\alpha, \beta, \gamma, \delta; t) = \begin{cases} M_2^- B^+(\alpha, \beta, \gamma, \delta; t), & t > 0 \\ M_2^+ B^-(\alpha, \beta, \gamma, \delta; t), & t < 0 \end{cases}$$

Supposons $R\alpha > 0$. On vérifie facilement que la fonction $t \rightarrow z(t)$ donnée par (1.6) et (4.5) est continue sur R et que $tz'(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0$. D'autre part, on a :

$$z(t) = O(|t|^{\frac{1}{2}(\gamma-2+\alpha)} e^{-R\beta|t|-t^2}), \quad |t| \rightarrow +\infty$$

Il en résulte que la condition (1.4) est vérifiée et on constate que les opérations effectuées sont légitimes : la fonction ci-dessous est une solution de l'équation (1.1) pour chaque $x \in \mathbb{C}$, c'est une fonction entière, elle est donc identique à un facteur près à la fonction N . D'où le résultat :

THÉOREME 4.1. — Il existe une constante $\mu_m(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ telle que :

$$(4.6) \quad \mu_m(\alpha, \beta, \gamma, \delta)N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) \\ = M_2^+ \int_{-\infty}^0 t^\alpha e^{-\beta t - t^2} H_{2m} \left(x + t + \frac{\beta}{2} \right) \\ \Phi \left(2m - \frac{1}{2}(\gamma - 2 - \alpha), 1 + \alpha; -2xt \right) B^-(\alpha, \beta, \gamma, \delta; t) dt \\ + M_2^- \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-\beta t - t^2} H_{2m} \left(x + t + \frac{\beta}{2} \right) \\ \Phi \left(2m - \frac{1}{2}(\gamma - 2 - \alpha), 1 + \alpha; -2xt \right) B^+(\alpha, \beta, \gamma, \delta; t) dt$$

valable pour $x \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $m \geq 0$ entier.

Le résultat a été montré pour $\operatorname{Re} \alpha > 0$, α non entier. Lorsque α est un entier positif, la seconde solution $x^{-\alpha}N(-x, \beta, \gamma, \delta, x)$ est remplacée par une solution dont le comportement à l'origine est analogue : $O(x^{-\alpha})$ et on a toujours les propriétés précédentes [5]. Donnons l'expression de $\mu_m(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$:

PROPOSITION 4.2. — Lorsque $M_2^+(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq 0$, on a :

$$(4.7) \quad \mu_m(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \\ = 2^{4m+1-\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)} \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)m!}{\alpha\Gamma\left(2m-\frac{1}{2}(\gamma-2-\alpha)\right)} e^{\frac{\beta^2}{4}+i\pi\alpha} a_{2m}(p, -q, r, -s), \quad m \geq 0.$$

où les $a_v(p, q, r, s)$ sont définis par :

$$B^+(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) = x^{\frac{1}{2}(\gamma-2-\alpha)} \left\{ \sum_{v=0}^n \frac{a_v(p, q, r, s)}{x^v} + O\left(\frac{1}{x^{1+n}}\right) \right\}$$

lorsque $|x| \rightarrow +\infty$, $\operatorname{Re} x > 0$, avec

$$p = \frac{1}{4}(\gamma^2 - \alpha^2 + 4), \quad q = \frac{1}{2}(\delta + \beta\gamma), \quad r = \gamma, \quad s = \beta. \quad [3]$$

ce résultat est basé sur le lemme suivant :

LEMME 4.3. — On a le développement asymptotique :

$$(4.8) \quad \int_0^{+\infty} F(x-t)G(xt)u(t)dt = x^{\rho-2a} \left\{ \sum_{\lambda=0}^n \frac{e_\lambda}{x^\lambda} + O\left(\frac{1}{x^{1+n}}\right) \right\}$$

lorsque $x \rightarrow +\infty$, sous les hypothèses suivantes :

$$(4.9) \quad u(t) = 0(1), \quad G(t) = 0(1) \quad \text{lorsque } t \rightarrow +0.$$

$$(4.10) \quad u(t) = t^\rho \left\{ \sum_{v=0}^n \frac{u_v}{t^v} + 0\left(\frac{1}{t^{1+n}}\right) \right\}, \quad \rho \in \mathbb{C}$$

$$(4.11) \quad G(t) = t^{-a} \left\{ \sum_{v=0}^n \frac{g_v}{t^v} + 0\left(\frac{1}{t^{1+n}}\right) \right\}, \quad a \in \mathbb{C}$$

lorsque $t \rightarrow +\infty$.

$$(4.12) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^v |F(t)| dt < +\infty, \quad \forall v \geq 0.$$

(4.13) Il existe $T > 0$ tel que la fonction $t \rightarrow |F(t)|$ soit monotone non croissante pour $|t| \geq T$.

On a posé :

$$(4.14) \quad e_\lambda = \sum_{v+\mu=\lambda} u_v d_\mu(\rho - v)$$

$$(4.15) \quad d_\lambda(\sigma) = \sum_{2v+\mu=\lambda} g_v C_\mu(\sigma - a - v) f_\mu$$

$$(4.16) \quad C_\mu(r) = (-1)^\mu \frac{\Gamma(1+r)}{\Gamma(r-\mu+1)\mu!}$$

$$(4.17) \quad f_\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} t^\mu F(t) dt$$

Démonstration. — On écrit l'intégrale sous la forme :

$$J(x) = \int_0^{x/2} + \int_{x/2}^{+\infty} = J_1(x) + J_2(x)$$

Soit d'abord :

$$J_2(x) = \int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} F(x-t)G(xt)u(t)dt = \int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} dt F(x-t)G(xt)t^\rho \left\{ \sum_{v=0}^n \frac{u_v}{t^v} + 0\left(\frac{1}{t^{1+n}}\right) \right\}$$

d'après (4.10). D'où

$$(4.18) \quad J_2(x) = \sum_{v=0}^n u_v h_{\rho-v}(x) + 0(h_{\rho-1-n}(x))$$

avec

$$\begin{aligned} h_\sigma(x) &= \int_{x/2}^{+\infty} F(x-t)G(xt)t^\sigma dt = \int_{-\infty}^{x/2} F(\xi)G(x(x-\xi))(x-\xi)^\sigma d\xi \\ &= \int_{-x}^{x/2} x^{-a}F(\xi)(x-\xi)^{\sigma-a} \left\{ \sum_{v=0}^n \frac{g_v}{(x(x-\xi))^v} + o\left(\frac{1}{(x(x-\xi))^{1+n}}\right) \right\} d\xi \end{aligned}$$

selon (4.11). Donc :

$$(4.19) \quad h_\sigma(x) = x^{-a} \sum_{v=0}^n \frac{g_v}{x^v} a_{\sigma-a-v}(x) + o(x^{-a-1-n} a_{\sigma-a-1-n}(x))$$

avec

$$a_r(x) = \int_{-\infty}^{x/2} F(\xi)(x-\xi)^r d\xi = \int_{-\infty}^{-x/2} + \int_{-x/2}^{+x/2}$$

Or

$$\int_{-\infty}^{-x/2} F(\xi)(x-\xi)^r d\xi = o(x^{-s}), \quad x \rightarrow +\infty \quad \text{pour chaque } s > 0$$

et cela quel que soit $r \in \mathbb{C}$. Car l'hypothèse (4.12) implique

$$\int_x^{+\infty} t^v |F(-t)| dt = o(x^{-s}), \quad x \rightarrow +\infty$$

pour chaque $s > 0$ et quel que soit $v \geq 0$.

Ensuite :

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{x}{2}}^{+\frac{x}{2}} F(\xi)(x-\xi)^r d\xi &= x^r \int_{-\frac{x}{2}}^{+\frac{x}{2}} d\xi F(\xi) \left\{ \sum_{v=0}^n C_v(r) \left(\frac{\xi}{x}\right)^v + o\left(\left(\frac{\xi}{x}\right)^{n+1}\right) \right\} \\ &= x^r \sum_{v=0}^n \frac{C_v(r)}{x^v} \int_{-\frac{x}{2}}^{+\frac{x}{2}} F(\xi) \xi^v d\xi + o(x^{r-1-n}) \\ &= x^r \sum_{v=0}^n \frac{C_v(r) f_v}{x^v} + o(x^{r-1-n}), \end{aligned}$$

toujours en vertu de (4.12).

On en déduit :

$$J_2(x) = x^{\rho-2a} \sum_{\lambda=0}^n \frac{c_\lambda}{x^\lambda} + o(x^{\rho-2a-1-n})$$

compte tenu de (4.19), (4.18) et (4.14)-(4.17).

D'autre part :

$$J_1(x) = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^{x/2} (F(x-t)G(xt)u(t)dt)$$

On a

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^{x/2} &= \int_0^{\frac{x}{2}-\varepsilon} F\left(\frac{x}{2} + \xi\right) G\left(x\left(\frac{x}{2} - \xi\right)\right) u\left(\frac{x}{2} - \xi\right) d\xi \\ &= 0\left(x^{-a} \int_{\frac{x}{2}}^{x-\varepsilon} F(t)(x-t)^{\rho-a} dt\right) = 0(x^{\rho-2a-1-n}) \\ \int_0^\varepsilon &= 0\left(\int_0^\varepsilon F(x-t)G(xt)dt\right), \end{aligned}$$

compte tenu de (4.9).

Maintenant, de (4.13), on a :

$$|F(x)| \leq \int_{x-1}^x |F(\xi)| d\xi \leq \int_{x-1}^{+\infty} |F(\xi)| d\xi = 0(x^{-s})$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon F(x-t)G(xt)u(t)dt &= 0\left(x^{-s} \int_0^\varepsilon \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{-s} G(xt)dt\right) \\ &= 0(x^{\rho-2a-1-n}) \end{aligned}$$

puisque s est arbitraire et selon (4.11). D'où (4.8).

Pour obtenir (4.7), il suffit d'écrire la première intégrale au second membre de (4.6) sous la forme suivante :

$$e^{i\pi\alpha + \beta x + x^2} \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-(x-t)^2 - \beta(x-t)} H_{2m}\left(x-t + \frac{\beta}{2}\right) \Phi\left(\frac{1}{2}(\gamma + \alpha) - 2m, 1 + \alpha; -2xt\right) B^+(\alpha, -\beta, \gamma, -\delta; t) dt,$$

compte tenu de la relation de Kummer pour la fonction Φ et de

$$B^-(\alpha, \beta, \gamma, \delta; t) = B^+(\alpha, -\beta, \gamma, -\delta; -t), \quad \operatorname{Re} t < 0.$$

Donc ici

$$\begin{aligned} u(t) &= t^\alpha B^+(\alpha, -\beta, \gamma, -\delta; t) \\ G(t) &= \Phi\left(\frac{1}{2}(\gamma + \alpha) - 2m, 1 + \alpha; -2t\right) \\ F(t) &= e^{-\beta t - t^2} H_{2m}\left(t + \frac{\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

On en déduit, après quelques calculs :

$$e_\lambda = 0, \quad 0 \leq \lambda \leq 4m - 1, \quad m \geq 1.$$

$$e_{4m} = 2^{4m - \frac{1}{2}(\gamma + \alpha)} \frac{\Gamma(1 + \alpha) \Gamma\left(\frac{1}{2} + m\right) m!}{\Gamma\left(2m - \frac{1}{2}(\gamma - 2 - \alpha)\right)} e^{\frac{\beta^2}{4}} a_{2m}, \quad m \geq 0.$$

où les a_{2m} sont les coefficients du développement asymptotique de $B^+(\alpha, -\beta, \gamma, -\delta; x)$.

Estimons maintenant les deux membres de (4.6) lorsque $x \rightarrow +\infty$, $x > 0$. On sait que l'équation (1.1) possède le système fondamental suivant : [3] B^+ et H^+ dans $Rx > 0$, avec

$$H^+(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) = x^{-\frac{1}{2}(\gamma+\alpha+2)} e^{\beta x + x^2} \left(1 + o\left(\frac{1}{x}\right) \right), \quad |x| \rightarrow +\infty$$

il existe donc deux constantes K_1 et K_2 telles que :

$$(4.20) \quad N = K_1 B^+ + K_2 H^+$$

d'où

$$N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) = K_2 x^{-\frac{1}{2}(\gamma+\alpha+2)} e^{\beta x + x^2} \left\{ 1 + o\left(\frac{1}{x}\right) \right\}, \quad x \rightarrow +\infty$$

Le second membre de (4.6) est équivalent à

$$M_2^+ e^{i\pi z} e_{4m} x^{-\frac{1}{2}(\gamma+\alpha+2)} e^{\beta x + x^2} \quad \text{lorsque } x \rightarrow +\infty$$

D'où l'égalité :

$$\mu_m K_2 = M_2^+ e^{i\pi z} e_{4m}$$

Or des considérations analogues permettent de montrer à l'aide du théorème 2.1 que

$$(4.21) \quad K_2 = \frac{1}{\alpha} M_2^+ \quad \text{pour } R\alpha > 0.$$

On en déduit l'expression (4.7).

§ 5.

QUELQUES CAS PARTICULIERS.

La fonction N est d'ordre polynomial lorsque $|x| \rightarrow +\infty$, $Rx > 0$ si et seulement si on a :

$$(5.1) \quad M_2^+(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0 \quad \text{avec } R\alpha > 0.$$

c'est évident d'après (4.20) et (4.21).

Notons $\delta_\mu(\alpha, \beta, \gamma)$ les racines de cette équation lorsqu'elles existent [6] et posons :

$$(5.2) \quad P_\mu(\alpha, \beta, \gamma; x) = N(\alpha, \beta, \gamma, \delta_\mu(\alpha, \beta, \gamma); x)$$

Alors chaque fonction P_μ vérifie l'équation intégrale suivante :

$$(5.3) \quad \lambda_{m\mu} P_\mu(\alpha, \beta, \gamma, x) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-\beta t - t^2} H_{2m}\left(x+t+\frac{\beta}{2}\right) \Phi\left(2m-\frac{1}{2}(\gamma-2-\alpha), 1+\alpha; -2xt\right) P_\mu(\alpha, \beta, \gamma; t) dt$$

pour chaque $m \geq 0$ entier.

On se ramène à un noyau symétrique en posant :

$$\begin{aligned}
 Q_\mu(\alpha, \beta, \gamma; x) &= x^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{\beta}{2}x} \frac{1}{2} x^2 P_\mu(\alpha, \beta, \gamma; x) \\
 (5.4) \quad K_m(x, t) &= (xt)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{1}{2}\beta(x+t) - \frac{1}{2}(x^2+t^2)} H_{2m}\left(x+t + \frac{\beta}{2}\right) \Phi\left(2m - \frac{1}{2}(\gamma - 2 - \alpha), 1 + \alpha; -2xt\right)
 \end{aligned}$$

donc :

$$(5.5) \quad \lambda_{m\mu} Q_\mu(\alpha, \beta, \gamma; x) = \int_0^{+\infty} K_m(x, t) Q_\mu(\alpha, \beta, \gamma; t) dt$$

Lorsque $\alpha + 1 > 0, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, le noyau K_m est auto-adjoint et donc l'équation possède une infinité au plus dénombrable de valeurs propres : ce qui implique que les racines de (5.1) sont aussi au plus dénombrables. Dans le cas où :

$$(5.6) \quad \gamma - 2 - \alpha = 2n, \quad n \geq 0 \text{ entier,}$$

l'équation (5.1) ne possède qu'un nombre fini de racines $\delta_\mu^{(n)} \ 0 \leq \mu \leq n$, qui sont d'ailleurs aussi racines de l'équation

$$M_2^-(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0$$

Dans ce cas, la fonction N se réduit à un polynôme de degré n , associé à chacune des racines $\delta_\mu^{(n)}$:

$$(5.7) \quad P_{n\mu}(\alpha, \beta; x) = N(\alpha, \beta, \alpha + 2n + 2, \delta_\mu^{(n)}(\alpha, \beta); x)$$

On a ainsi pour chaque m vérifiant

$$\begin{aligned}
 (5.8) \quad s_{\mu m}^{(n)}(\alpha, \beta) P_{n\mu}(\alpha, \beta; x) &= \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-\beta t - t^2} H_{2m}\left(x+t + \frac{\beta}{2}\right) L_{n-2m}^{(\alpha)}(-2xt) P_{n\mu}(\alpha, \beta; t) dt
 \end{aligned}$$

avec

$$s_{\mu m}^{(n)}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(1 + \alpha + n - 2m)}{\Gamma(1 + \alpha)} \frac{1}{(n - 2m)!} \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-\beta t - t^2} H_{2m}\left(t + \frac{\beta}{2}\right) P_{n\mu}(\alpha, \beta; t) dt$$

Un cas particulier d'une autre nature est obtenu en prenant

$$\beta = 0, \quad \delta = 0 \quad [3]$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
 M_2^+(\alpha, 0, \gamma, 0) = M_2^-(\alpha, 0, \gamma, 0) &= \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}(\alpha + 2 - \gamma)\right)} \\
 \mu_m(\alpha, 0, \gamma, 0) &= 2^{4m - \frac{1}{2}(\gamma - 2 + \alpha)} \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{\alpha} e^{i\pi\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{2} + m\right) r_m
 \end{aligned}$$

avec

$$r_m = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}(\alpha + 2 - \gamma) + m\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}(\alpha + 2 + \gamma)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}(\alpha + 2 + \gamma) - m\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}(\alpha + 2 - \gamma)\right)\Gamma\left(2m - \frac{1}{2}(\gamma - 2 - \alpha)\right)}$$

et on a la relation intégrale suivante :

$$(5.9) \quad \hat{\mu}_m \Phi\left(\frac{1}{4}(\alpha + 2 - \gamma), 1 + \frac{\alpha}{2}; x^2\right) \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2} H_{2m}(x+t) \Phi\left(2m - \frac{1}{2}(\gamma - 2 - \alpha), 1 + \alpha; -2xt\right) \\ \psi\left(\frac{1}{4}(\alpha + 2 - \gamma), 1 + \frac{\alpha}{2}; t^2\right) dt$$

où

$$\hat{\mu}_m = \sqrt{\pi} 2^{2m + \frac{1}{2}(\gamma - 3\alpha)} \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} e^{i\pi\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + m\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}(\alpha + 2 + \gamma)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}(\alpha + 2 + \gamma) - m\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}(\alpha + 4 - \gamma) + m\right)}$$

valable pour $\frac{1}{2}(\gamma - 2 - \alpha) \neq 2n$, $n \geq 0$ entier, chaque $m \geq 0$ entier, $\operatorname{Re} \alpha > 0$ et $x \in \mathbb{C}$.

Lorsque au contraire, on a :

$$\gamma - 2 - \alpha = 4n, \quad n \geq 0,$$

on se trouve en présence d'un cas particulier de (5.8) : l'un des polynômes $P_{2n,\mu}(\alpha, 0; x)$ est un polynôme de Laguerre $L_n^{(\frac{\alpha}{2})}(x^2)$; d'où l'équation intégrale suivante pour les polynômes de Laguerre :

$$(5.10) \quad s_{0m}^{(2n)}(\alpha, 0) L_n^{(\frac{\alpha}{2})}(x^2) = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2} H_{2m}(x+t) L_{2(n-m)}^{(\alpha)}(-2xt) L_n^{(\frac{\alpha}{2})}(t^2) dt$$

où

$$(5.11) \quad s_{0m}^{(2n)}(\alpha, 0) \\ = \frac{\Gamma(1 + \alpha + 2(n - m))}{\Gamma(1 + \alpha)} \frac{1}{(2(n - m))!} \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2} H_{2m}(t) L_n^{(\frac{\alpha}{2})}(t^2) dt$$

pour $0 \leq m \leq n$.

RÉFÉRENCES

- [1] E. L. INCE, *Ordinary differential equations*, Dover, 1927.
 [2] F. G. TRICOMI, Fonctions hypergéométriques confluentes, *Mém. Sci. Math.*, t. 140, Gauthier-Villars, Paris, 1960.

- [3] A. DECARREAU, P. MARONI, A. ROBERT, Sur les équations confluentes de l'équation de Heun, *Ann. Soc. Sci.*, Bruxelles, t. **92**, III, 1978, p. 151-189.
- [4] P. MARONI, Sur la forme biconfluente de l'équation de Heun. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. **264**, 1967, p. 503-505.
- [5] F. BATOLA, *Quelques propriétés de l'équation biconfluente de l'équation de Heun*. Thèse de 3^e cycle, Paris VI, 1977.
- [6] P. MARONI, *Un problème aux limites pour l'équation représentative de la classe* $(0, 1, 1_4)$. A paraître.

(Manuscrit reçu le 14 mars 1979)