ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

MICHÈLE MASTRANGELO
VICTOR MASTRANGELO

Entropie, paramètres thermodynamiques, information associée aux événements et aux expériences

Annales de l'I. H. P., section A, tome 30, nº 4 (1979), p. 295-314
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1979__30_4_295_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré
Vol. XXX, n° 4, 1979, p. 295-314.

Section A :
Physique théorique.

Entropie, paramètres thermodynamiques, information associée aux événements et aux expériences

par

Michèle MASTRANGELO
Université Pierre-et-Marie Curie, Paris VI

et

Victor MASTRANGELO
Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris,
Université Claude-Bernard, Lyon I

RÉSUMÉ. — En thermodynamique l'entropie est l'un des paramètres thermodynamiques, les autres étant : l'énergie interne, l'enthalpie, le potentiel thermodynamique, etc. Ils permettent de définir l'état du système. Une étude approfondie de l'entropie et des paramètres thermodynamiques, nous conduit à la notion d'information telle qu'elle a été axiomatisée par B. Forte, J. Kampe de Feriet et N. Pintacuda [*6*], [*7*], [*9*], [*10*]. Au moyen de techniques empruntées à W. Sierpinski [*15*], C. Dellacherie [*5*], M. Dehen-Mastrangelo *et al.* [*4*], nous effectuons, ici, une étude de l'information nous permettant d'obtenir des résultats analogues à ceux connus dans le cas des probabilités ou des capacités. Nous les établissons, ici, en toute généralité dans le cadre de l'information sur les expériences, plus précisément, nous définissons la notion d'expérience informative de la manière suivante. Nous introduisons deux classes d'expériences, une classe Γ, sur laquelle l'information se définit de manière naturelle et une classe Δ permettant de formuler une continuité à droite précisée ci-dessous. Nous appelons information sur Γ, adaptée à Δ, toute application H de Γ dans $\bar{\mathbb{R}}_+$, croissante pour la finesse et continue à droite relativement à Δ : pour tout réel ε strictement positif et pour toute expérience $\alpha \in \Gamma$, il existe une expérience $\delta \in \Delta$, plus fine que α et telle que toute expérience $\gamma \in \Gamma$ vérifiant $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \delta$ satisfasse à $H(\gamma) - H(\alpha) < \varepsilon$.

A toute expérience α, nous associons son information inférieure,

$$H_*(\alpha) = \sup \{ H(\gamma) , \ \alpha \geqslant \gamma \in \Gamma \}$$

et son information supérieure

$$H^*(\alpha) = \inf \{ H_*(\delta), \ \alpha \leqslant \delta \in \Delta \} ,$$

en suivant la convention $\inf \phi = +\infty$ et $\sup \phi = 0$. Nous disons que α est une expérience informative si $H_*(\alpha) = H^*(\alpha)$.
Nous montrons que, si Γ est stable par borne supérieure finie alors elle est composée d'expériences informatives. Nous étudions des conditions suffisantes pour que toute borne supérieure finie d'expériences informatives le soit également. De même nous établissons, sous des hypothèses assez peu restrictives, l'informativité des bornes supérieures de familles dénombrables, des bornes inférieures de telles familles, et, plus généralement des expériences nodales relatives à un pavage d'expériences informatives.

SUMMARY. — In thermodynamics, entropy is one of the thermodynamic parameters, the others being: internal energy, enthalpy, thermodynamic potential, etc. These make it possible to define the state of a system. An in-depth study of entropy and of thermodynamic parameters leads us to the notion of information as axiomatized by B. Forte, J. Kampe de Feriet and N. Pintacuda [*6*], [*7*], [*9*], [*10*]. Using techniques taken from W. Sierpinsky [*15*], C. Dellacherie [*5*], M. Dehen-Mastrangelo *et al.* [*4*], we carry out a study of information making it possible for us to obtain results analogous to those already known in the case of probabilities and of capacities. These results are established in the most general terms within the framework of information derived from our experiments; more precisely, we define the notion of informative experiment in the following way: we introduce two classes of experiments, one class Γ, in which the information is defined naturally, and another class Δ making it possible to formulate a continuity from the right as detailed below. We term information on Γ adapted to Δ, any application H from Γ in $\bar{\mathbb{R}}_+$, increasing in thinness and continuous from the right relative to Δ: for every real ε which is strictly positive, and for every experiment $\alpha \in \Gamma$, there exists an experiment $\delta \in \Delta$, thinner than α and such that any experiment $\gamma \in \Gamma$ verifying $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \delta$ satisfies the condition $H(\gamma) - H(\alpha) < \varepsilon$.

To every experiment α, we associate its inferior information,

$$H_*(\alpha) = \sup \{ H(\gamma), \ \alpha \geqslant \gamma \in \Gamma \}$$

and its superior information

$$H^*(\alpha) = \inf \{ H_*(\delta), \ \alpha \leqslant \delta \in \Delta \} ,$$

following the convention $\inf \phi = +\infty$ and $\sup \phi = 0$. We state that α is an informative experiment if $H_*(\alpha) = H^*(\alpha)$.

We demonstrate that, if Γ is stable with the upper finite limits, then Γ is composed of informative experiments. We study sufficient conditions for every upper finite limit of informative experiments to be also informative. Similarly, we establish, using relatively non-restrictive hypothesis, the informativity of the upper limits of numerable families, of the lower limits of these families, and, more generally speaking, of nodal experiments relative to a set of informative experiments.

---

1. ENTROPIE ET INFORMATION

La définition statistique de l'entropie d'un système A est donnée par la relation de Gibbs :

$$S(A) = -k \int_A [\mathrm{Log}\, W(X)] dW(X) \tag{1}$$

où W(X) désigne une densité de probabilité

$$0 \leqslant W(X) \leqslant 1 .$$

Pour les systèmes quantiques l'entropie se définit par des sommations discrètes :

$$S = -k \sum_i [\mathrm{Log}\, W_i] W_i . \tag{2}$$

Pour les systèmes en équilibre statistique, on peut utiliser indifféremment soit la définition de l'entropie de Gibbs, soit celle de Boltzmann.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons, également, aux systèmes hors d'équilibre en considérant le temps t comme un paramètre ; ce qui nous permet de garder la définition précédente.

L'entropie du système hors d'équilibre est inférieure à l'entropie calculée à l'état d'équilibre :

$$S \leqslant S_0 .$$

Toutefois, un état hors d'équilibre fournit d'avantage d'informations que l'état d'équilibre. Par conséquent, moindre est l'entropie plus d'informations avons nous sur le système.

L'entropie négative peut être considérée comme mesure de l'information sur le système. Nous pouvons prendre l'entropie négative de l'état d'équilibre $(-S_0)$ pour point zéro dans le calcul de la mesure de l'information.

Désignant par $(-S)$ l'entropie négative d'un état hors d'équilibre la quantité

$$I = -S - (-S_0) = S_0 - S \tag{3}$$

peut être considérée, comme la définition de l'information associée au système.

D'après la relation (1), cette information peut aussi être définie par la formule :

$$I = k\left\{\int [\mathrm{Log}\, W(X)]W(X)dX - \int [\mathrm{Log}\, W_0(X)]W_0(X)dX\right. \tag{4}$$

et, pour un système quantique, par la formule

$$I = k\left\{\sum_l [\mathrm{Log}\, W_l]W_l - \sum_l [\mathrm{Log}\, W_l^{(0)}]W_l^{(0)}\right\} \tag{5}$$

où W_l et $W_l^{(0)}$ désignent respectivement la probabilité de l'état du système et la probabilité de l'état d'équilibre.

Le concept d'information ainsi introduit coïncide totalement avec le concept d'information défini en cybernétique.

L'information la plus complète possible transmise à l'aide d'un ensemble de signaux quelconques est aussi définie par la relation (4) où l'on prend comme état d'équilibre le « bruit » naturel crée par des fluctuations thermiques. Ainsi, toute transmission de l'entropie négative dans le sens thermodynamique et statistique peut être considérée comme transmission d'une certaine information dans le sens cybernétique et inversement, la transmission de l'information à l'aide des signaux doit être considérée comme un processus de transmission de l'entropie négative de l'émetteur au récepteur [*1*]. Nous donnons d'autres exemples d'information. Si Ω est un ensemble discret composé de 2^n points équiprobables l'information associée à l'un de ces points est n, nombre de symboles binaires nécessaires pour le caractériser.

Nous pouvons remarquer que, si $a \in \Omega$

$$J(a) = n = -\mathrm{Log}_2\, p(a)$$

où p est la probabilité de a.

Cette dernière relation constitue un cas particulier de la formule de Wiener-Shannon [*16*].

Si (Ω, P) est un espace probabilisé et si A est mesurable, la mesure de l'information fournie, par le fait que l'événement A se produit, est définie par la relation de Shannon [*16*]

$$J(A) = -C\,\mathrm{Log}\, P(A)$$

où C est une constante positive qui permet de choisir l'unité de mesure d'information.

Lorsque π est une partition finie de Ω, l'information disponible par la réalisation de l'un quelconque des événements $A \in \pi$ est donnée par la formule de Wiener-Shannon relative aux expériences :

$$H(\pi) = -C\sum_{A_i \in \pi} P(A_i)\,\mathrm{Log}\, P(A_i) = \sum_{A_i \in \pi} P(A_i)J(A_i)\,.$$

Un second exemple d'information sur les événements est celui exposé par R. S. Ingarden et K. Urbanic [8]; si P et Q sont deux probabilités sur Ω, alors pour tout ensemble A mesurable, on pose

$$J(A) = C \int_A \operatorname{Log}\left(\frac{Q(dx)}{P(dx)}\right) P(dx),$$

lorsque cette relation a un sens.

Un autre exemple physique analogue à celui donné par la formule de Gibbs en mécanique statistique peut être obtenu en optique en faisant intervenir la longueur d'onde λ.

2. INFORMATION SUR LES ÉVÉNEMENTS

Nous considérons un ensemble Ω qui est appelé événement certain. Nous notons $\mathscr{E}$ un sous-ensemble de $\mathscr{P}(\Omega)$ stable par réunion finie et par intersection finie et qui est appelé ensemble des événements. Nous allons introduire une définition dont la signification physique est assez intuitive.

Si $\mathscr{F}$ est un sous-ensemble de $\mathscr{P}(\Omega)$ nous notons $\sigma(\mathscr{F})$ la tribu engendrée par $\mathscr{F}$. Si $(\mathscr{G}_i)_{i\in I}$ est une famille de tribus dans $\mathscr{P}(\Omega)$; elle est dite algébriquement indépendante si, pour tout sous-ensemble J fini et contenu dans I, pour toute famille $(A_j)_{j\in J}$, où $A_j \in \mathscr{G}_j$ et $A_j \neq \phi$, pour tout $j \in J$, nous avons

$$\bigcap_{j\in J} A_j \neq \phi .$$

Nous disons qu'une famille $\mathscr{K}$ d'événements est algébriquement indépendante, si la famille des tribus $(\sigma(\{A\}))_{A\in\mathscr{K}}$ est algébriquement indépendante.

L'indépendance de $\mathscr{K}$ signifie, physiquement, qu'aucun des événements de $\mathscr{K}$ n'entraîne une conjonction d'autres événements de celle-ci ni sa négation. Nous rappelons que d'après un théorème de Banach-Marczewski [11] l'indépendance algébrique est équivalente à l'universelle indépendance stochastique.

En termes intuitifs une information sur $\mathscr{E}$ est une application de $\mathscr{E}$ dans les réels permettant de mesurer l'apport de caractérisation des points, dû à la connaissance de l'appartenance de ceux-ci à un événement. Elle est adaptée à la classe $\mathscr{K}$ si la connaissance de l'appartenance à $A \cap B$ apporte une caractérisation égale à la somme de celles obtenues pour A et pour B séparément, lorsque ceux-ci appartiennent à $\mathscr{K}$. Le choix de $\mathscr{K}$ n'est, généralement, pas canonique et il est souvent suggéré par la physique du problème.

Définition de l'information associée aux événements

Soit T une application de $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \bar{\mathbb{R}}_+$ dans $\bar{\mathbb{R}}_+$; nous disons qu'une application est une information T-compositive sur $\mathscr{E}$ (adaptée à la famille algébriquement indépendante $\mathscr{K}$), si :

1° J applique $\mathscr{E}$ dans $\bar{\mathbb{R}}_+$

2° $A \in \mathscr{E},\ B \in \mathscr{E},\ A \subset B \Rightarrow J(A) \geqslant J(B)$

3° $A \in \mathscr{E},\ B \in \mathscr{E},\ A \cap B = \phi \Rightarrow J(A \cup B) = J(A)TJ(B)$

4° J est dite adaptée à la famille $\mathscr{K}$ si

$$A \in \mathscr{K},\ B \in \mathscr{K} \Rightarrow J(A \cap B) = J(A) + J(B).$$

Nous voyons que cette définition s'applique bien à l'exemple donné précédemment.

Nous indiquons la loi de composition T dans le cas particulier de l'information associée à la formule de Wiener-Shannon. Soient A et B deux événements disjoints, alors :

$$\begin{aligned} J(A) &= -\operatorname{Log}_2 P(A) \Leftrightarrow P(A) = 2^{-J(A)} \\ J(B) &= -\operatorname{Log}_2 P(B) \Leftrightarrow P(B) = 2^{-J(B)} \\ J(A \cup B) &= -\operatorname{Log}_2 [P(A) + P(B)] \\ &= -\operatorname{Log}_2 [2^{-J(A)} + 2^{-J(B)}]. \end{aligned}$$

La loi T est l'application $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \bar{\mathbb{R}}_+ \to \bar{\mathbb{R}}_+$ définie par

$$xTy = -\operatorname{Log}_2 [2^{-x} + 2^{-y}].$$

Si $\mathscr{E}$ est une tribu, une partie $N \subset \Omega$ est dite J-négligeable, s'il existe un événement $A \in \mathscr{E}$ tel que $N \subset A$ et $J(A) = J(\phi)$.

N. Pintacuda a démontré le théorème de complexion suivant [*12*] :

— si $\mathscr{E}$ est une tribu, si J est compositive et vérifie pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements disjoints ;

$$J\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{p \to \infty} J(A_1)TJ(A_2)T \ldots TJ(A_p),$$

alors la classe $\mathscr{M} = \{ A \cup N,\ A \in \mathscr{E},\ N$ étant J-négligeable $\}$ est une tribu.

L'ensemble $\mathscr{M}$ est égal à $\mathscr{E}$ si, et seulement si, $\mathscr{E}$ est une tribu complète ; J se prolonge de manière unique en une mesure d'information J_c sur $\mathscr{M}$, et $\mathscr{M}$ est complète pour J_c.

Dans le même exposé, l'auteur indique comme probable l'existence de résultats plus forts, obtenus en construisant des capacités de G. Choquet. Nous nous proposons d'établir de tels prolongements.

Cette étude est faite dans le cadre plus général des expériences. Dans la suite, nous nous inspirons des techniques développées par G. Choquet [*3*] et W. Sierpinski [*15*].

3. INFORMATION ASSOCIÉE AUX EXPÉRIENCES

Une expérience $\alpha = \{ X_i \}_{i \in I}$ est un ensemble d'événements quelconques dans $\mathscr{P}(\Omega)$, disjoints deux à deux. Nous notons Θ l'ensemble des expériences. Si $\alpha \in \Theta$, $\alpha = \{ X_i \}_{i \in I}$, nous posons $U(\alpha) = \bigcup_{i \in I} X_i$, et nous disons que α est une expérience complète si $U(\alpha) = \Omega$.

Sur l'ensemble Θ des expériences nous pouvons définir deux ordres partiels différents. Le premier a été donné par B. Forte et N. Pintacuda ; il est bien adapté à l'information de Shannon-Renyi. Le second correspond davantage à l'intuition de l'information apportée par une expérience et nous a été suggéré par de fructueuses discussions avec J. Kampe de Feriet. Toute notre étude est faite en considérant indifféremment l'un ou l'autre ordre.

1° *Ordre de* B. Forte *et* N. Pintacuda. — Nous disons que α est moins fine que β, $\alpha \leqslant \beta$, si $U(\alpha) = U(\beta)$ et $\forall Y \in \beta$, $\exists X \in \alpha$ tel que $Y \subset X$. Si $(\alpha_i)_{i \in I}$ est un ensemble d'expériences, *admettant toutes la même réunion*, $\alpha_i = \{ X_j^i \}_{j \in J_i}$. Nous définissons :

$$\bigvee_{i \in I} \alpha_i = \left\{ \bigcap_{i \in I} X_{j_i}^i : (j_i) \in \prod_{i \in I} J_i \right\}.$$

Il est immédiat de voir que $\bigvee_{i \in I} \alpha_i$ est la borne supérieure, dans Θ, des α_i ; nous voyons de plus que, si I est dénombrable, et si les événements des α_i appartiennent tous à une même tribu $\mathscr{E}$, il en est de même pour les événements de $\bigvee_{i \in I} \alpha_i$.

Nous nous proposons de définir la borne inférieure de l'ensemble d'expériences $(\alpha_i)_{i \in I}$. Sur les éléments de $\bigcup_{i \in I} \alpha_i \subset \mathscr{P}(\Omega)$, nous définissons la relation d'équivalence $X \sim Y$ si, et seulement s'il existe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ appartenant à $\bigcup_{i \in I} \alpha_i$, tels que :

$$X \cap X_1 \neq \phi \ldots X_p \cap X_{p+1} \neq \phi \ldots X_n \cap Y \neq \phi .$$

Si $X \in \bigcup_{i \in I} \alpha_i$, nous notons

$$\tilde{X} = \bigcup \left\{ Y : Y \sim X,\ Y \in \bigcup_{i \in I} \alpha_i \right\} \in \mathscr{P}(\Omega)$$

et

$$\bigwedge_{i \in I} \alpha_i = \left\{ \tilde{X} : X \in \bigcup_{i \in I} \alpha_i \right\} \subset \mathscr{P}(\Omega) .$$

Nous voyons que $\bigwedge_{i\in I} \alpha_i$ est la borne inférieure, dans Θ, des α_i. Si I est dénombrable ainsi que chaque α_i et si tous les événements des α_i appartiennent à une même tribu $\mathscr{E}$, il en est de même pour $\wedge\, \alpha_i$.

L'étude d'informativité qui suit s'applique à cet ordre; *il faut alors se limiter à des expériences admettant toutes la même réunion.*

2° *Second ordre partiel sur* Θ. — A toute expérience $\alpha = \{ X_i \}_{i\in I}$, nous associons l'expérience complète $\tilde{\alpha} = \{ X_i (i \in I), \Omega \backslash U(\alpha), \phi \}$. Nous disons qu'une expérience α est moins fine qu'une expérience $\beta (\alpha \leqslant \beta)$ si $U(\alpha) \subset U(\beta)$ et $\forall Y \in \tilde{\beta}, \exists X \in \tilde{\alpha}$ tel que $Y \subset X$.

Nous pouvons remarquer que, si $\alpha \leqslant \beta$, alors :

— $\forall Y \in \beta$, $Y \neq \phi$, ou bien $Y \cap U(\alpha) = \phi$, ou bien $Y \subset U(\alpha)$.

— $\{ Y \in \beta : Y \subset U(\alpha) \}$ forme une partition de $U(\alpha)$ plus fine que α.

En effet, si $Y \in \beta$, il existe un $X \in \tilde{\alpha}$ tel que $Y \subset X$; ou bien $X \in \tilde{\alpha}\backslash\alpha$, $X = \Omega\backslash U(\alpha)$, et $Y \cap U(\alpha) = \phi$; ou bien $X \in \alpha$, et $Y \subset U(\alpha)$.

Soit $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille d'expériences *quelconques* (pas d'hypothèse sur les réunions). Nous allons voir que cette famille admet une borne supérieure et une borne inférieure. Comme précédemment, nous notons $\tilde{\alpha}_i = \{ X^i_j \}_{j\in K_i}$. La borne supérieure se définit par :

$$\bigvee_{i\in I} \alpha_i = \left\{ \bigcap_{i\in I} X^i_{j_i},\ X^i_{j_i} \in \tilde{\alpha}_i,\ (j_i) \in \prod_{i\in I} K_i,\ \exists i \in I : X^i_{j_i} \in \alpha_i \right\}.$$

Nous voyons que, pour tout $k \in I$, $U(\alpha_k) \subset U\left(\bigvee_{i\in I} \alpha_i \right)$ et, si $Y \in \bigvee_{i\in I} \alpha_i$, $Y = \bigcap_{i\in I} X^i_{j_i}$, et $Y \subset X^k_{j_k} \in \tilde{\alpha}_k$; donc $\alpha_k \leqslant \bigvee_{i\in I} \alpha_i$. Il est, par ailleurs, évident de voir que cette expérience est la moins fine des majorantes des α_k.

Dans le but de définir la borne inférieure, nous introduisons l'ensemble $\mathscr{X} = \{ X^i_j : X^i_j \in \tilde{\alpha}_i,\ i \in I \}$. Nous le munissons de la relation d'équivalence $X \sim Y$ si, et seulement s'il existe $\{ X_1, X_2, \ldots, X_n \} \subset \mathscr{X}$ tels que $X \cap X_1 \neq \phi$, $X_1 \cap X_2 \neq \phi, \ldots, X_n \cap Y \neq \phi$. Nous notons $\bar{\mathscr{X}}$ l'ensemble quotienté et, pour tout $\bar{X} \in \bar{\mathscr{X}}$, $U(\bar{X}) = \cup \{ X : X \in \bar{X} \}$. Nous remarquons que $\{ U(\bar{X}) : \bar{X} \in \bar{\mathscr{X}} \}$ forme une partition de Ω. La borne inférieure des α_i se définit alors par :

$$\bigwedge_{i\in I} \alpha_i = \left\{ U(\bar{X}) : \bar{X} \in \bar{\mathscr{X}},\ U(\bar{X}) \subset \bigcap_{i\in I} U(\alpha_i) \right\}.$$

Nous voyons, en effet, que, pour tout $k \in I$, $U(\alpha_k) \supset U\left(\bigwedge_{i\in I} \alpha_i \right)$ et, pour tout $Y \in \tilde{\alpha}_k$, ou bien $U(\bar{Y}) \subset \bigcap_{i\in I} U(\alpha_i)$ et $Y \subset U(\bar{Y}) \in \bigwedge_{i\in I} \alpha_i$, ou bien $U(\bar{Y}) \not\subset \bigcap_{i\in I} U(\alpha_i)$ et $Y \subset U(\bar{Y}) \subset \Omega \backslash U\left(\bigwedge_{i\in I} \alpha_i\right) \in \overline{\bigwedge_{i\in I}} \alpha_i$. Donc $\bigwedge_{i\in I} \alpha_i$ est moins fine que α_k. Il est évident de voir que $\bigwedge_{i\in I} \alpha_i$ est la plus fine des expériences minorant chaque α_k ($k \in I$).

Ce second ordre partiel présente, par rapport au premier, l'avantage que toute famille d'expériences admet une borne supérieure et une borne inférieure. Il apparaît cependant qu'il ne peut être utilisé pour l'étude de l'information de Shannon-Renyi,

$$H(\alpha) = \sum_{i \leqslant n \in \mathbb{N}} J(X_i)e^{-J(X_i)} \Big/ \sum_{i \leqslant n} e^{-J(X_i)}.$$

Il est, par contre, bien adapté à l'étude d'une information de la forme

$$H(\alpha) = -\sum_{i\in I} P(X_i) \log P(X_i),$$

où P est une probabilité sur Ω.

Lorsque α est une expérience, nous appelons information de α, un réel permettant intuitivement de mesurer l'acquis de connaissance sur la structure du système physique, révélé par l'expérience. Nous considérons, à titre d'exemple, l'entropie donnée par la formule Wiener-Shannon. Si Ω est un espace muni de la probabilité P, la formule de Wiener-Shannon définie sur l'ensemble des expériences complètes, finies, à événements mesurables :

$$\alpha = \{ X_1, X_2, \ldots, X_n \}$$

(telles que $\bigcup_{i \leqslant i \leqslant n} X_i = \Omega$) s'écrit :

$$H(\alpha) = -\left[\sum_{k=1}^{n} P(X_k) \operatorname{Log}_2 P(X_k)\right]$$

V. I. Arnold et A. Avez [*2*] (cf. Ch. II. § 12) montrent que :

1° $\alpha \leqslant \beta \Rightarrow H(\alpha) \leqslant H(\beta)$

2° $H(\alpha \vee \beta) \leqslant H(\alpha) + H(\beta)$

3° $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \bigvee_{1 \leqslant n < \infty} \alpha_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n\to\infty} H(\alpha_n) = H(\alpha)$.

Dans le but d'axiomatiser la notion d'information associée aux expériences, nous introduisons deux classes d'expériences Γ et Δ, toutes deux contenues dans Θ.

La classe Γ est celle où se définit de manière naturelle l'information. Dans l'exemple donné au paragraphe VI, Γ est formée des expériences constituées d'un nombre fini d'événements tous F_σ sauf l'un d'entre eux, ce dernier étant un fermé soumis à une certaine condition; la classe Δ est celle des expériences formées d'événements compacts. Si Ω est un espace muni d'une tribu $\mathscr{E}$, Γ peut être la classe formée des expériences admettant un nombre fini d'événements appartenant à $\mathscr{E}$; la classe Δ peut alors être, par exemple, l'ensemble des expériences formées d'une famille éventuellement non dénombrable d'événements appartenant à $\mathscr{E}$.

Nous appelons information sur Γ adaptée à Δ, toute application

1° $H : \Gamma \to \bar{\mathbb{R}}_+$

2° H croissante pour la finesse

$$\alpha \leqslant \beta \Rightarrow H(\alpha) \leqslant H(\beta)$$

3° H continue à droite relativement à Δ, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \alpha \in \Gamma, \exists \delta \in \Delta, \alpha \leqslant \delta : \forall \gamma \in \Gamma,$$
$$\alpha \leqslant \gamma \leqslant \delta \Rightarrow H(\gamma) - H(\alpha) < \varepsilon .$$

Nous disons que $(\Omega, \Gamma, \Delta, H)$ est un espace expérimental.

La trace de cette information, relative aux expériences, sur l'ensemble des expériences constituées d'un seul événement est une information sur les événements.

4. INFORMATION INFÉRIEURE ET SUPÉRIEURE ; EXPÉRIENCE INFORMATIVE

Si $\alpha = \{ X_i \}_{i \in I}$ est une expérience appartenant à Θ, nous définissons :

— son information inférieure

$$H_*(\alpha) = \sup \{ H(\gamma), \alpha \geqslant \gamma \in \Gamma \} ;$$

— son information supérieure

$$H^*(\alpha) = \inf \{ H_*(\delta), \alpha \leqslant \delta \in \Delta \} .$$

En suivant la convention $\inf \phi = +\infty$, $\sup \phi = 0$.

Nous disons que α est une expérience informative si $H_*(\alpha) = H^*(\alpha)$.

Il est immédiat de voir que les expériences de Δ sont informatives. Nous allons étudier des classes aussi larges que possible d'expériences informatives.

PROPOSITION 1. — *Soit* $(\Omega, \Gamma, \Delta, H)$ *un espace expérimental, où* Γ *vérifie :*

$$\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma, \forall \delta \in \Delta, \gamma_1 \vee \gamma_2 \leqslant \delta \Rightarrow \exists \gamma \in \Gamma$$

tel que $\gamma_1 \vee \gamma_2 \leqslant \gamma \leqslant \delta$. *Alors toute expérience de* Γ *est informative.*

Démonstration. — Soit $\gamma \in \Gamma$, si $H_*(\gamma) = \infty$, nous voyons que $H^*(\gamma) = H_*(\gamma)$. Si $H_*(\gamma) < \infty$, d'après la continuité à droite relativement à Δ, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta \in \Delta$, $\delta \geqslant \gamma$ tel que $\forall \alpha \in \Gamma$, $\gamma \leqslant \alpha \leqslant \delta \Rightarrow H(\alpha) - H(\gamma) < \varepsilon$.

Nous voyons que

$$\forall \beta \in \Gamma, \beta \leqslant \delta, \exists \zeta \in \Gamma \quad \text{tel que} \quad \beta \vee \gamma \leqslant \zeta \leqslant \delta .$$

Par conséquent

$$H(\beta) \leqslant H(\zeta) \leqslant H(\gamma) + \varepsilon, \quad \text{et} \quad \text{donc} \quad H(\delta) \leqslant H(\gamma) + \varepsilon,$$

ce qui entraîne

$$H^*(\gamma) = H(\gamma) = H_*(\gamma) .$$

Nous pouvons remarquer que :

si Γ est stable par borne supérieure finie la condition de la proposition 1 est toujours vérifiée. Or, dans les cas concrets que nous avons vu précédemment Γ est toujours stable par borne supérieure finie.

Dans la suite nous supposons que Γ est composée d'expériences informatives.

PROPOSITION 2. — *Soient Γ et Δ deux classes d'expériences stables par bornes supérieures finies et vérifiant :*

1° $\forall \gamma \in \Gamma$, $\forall \delta_1, \delta_2 \in \Delta$, $\gamma \leqslant \delta_1 \vee \delta_2 \Rightarrow \exists \gamma_1$ *et* $\gamma_2 \in \Gamma$, $\gamma_1 \leqslant \delta_1$, $\gamma_2 \leqslant \delta_2$, $\gamma \leqslant \gamma_1 \vee \gamma_2$.

2° $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$, *telle que pour toute famille* $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2)$ *d'expériences de Γ vérifiant $\alpha_i \leqslant \gamma_i$ et $H(\gamma_i) - H(\alpha_i) < \eta$* ($i = 1$ et 2) *nous ayons :*

$$H(\gamma_1 \vee \gamma_2) - H(\alpha_1 \vee \alpha_2) < \varepsilon .$$

Alors, toute borne supérieure finie d'expériences informatives est, elle-même, informative.

Démonstration. — Nous montrons d'abord que si δ_1 et δ_2 sont deux expériences de Δ, si γ_1 et γ_2 sont deux expériences de Γ vérifiant

$$H(\delta_i) - H(\gamma_i) < \eta \quad (i = 1, 2),$$

alors $H(\delta_1 \vee \delta_2) - H(\gamma_1 \vee \gamma_2) \leqslant \varepsilon$. En effet

$$H(\delta_1 \vee \delta_2) = \sup \{ H(\gamma), \ \gamma \leqslant \delta_1 \vee \delta_2, \ \gamma \in \Gamma \} = \sup \{ H(\alpha_1 \vee \alpha_2), \ \delta_i \geqslant \alpha_i \in \Gamma \} .$$

D'après la seconde condition de l'énoncé :

$$H(\delta_1 \vee \delta_2) \leqslant H(\gamma_1 \vee \gamma_2) + \varepsilon .$$

Il suffit ensuite de montrer si α_1 et α_2 sont deux expériences informatives, $\alpha_1 \vee \alpha_2$ l'est aussi.

Si $H(\alpha_1)$ ou $H(\alpha_2) = +\infty$, alors

$$H_*(\alpha_1 \vee \alpha_2) = +\infty = H^*(\alpha_1 \vee \alpha_2) .$$

Si $H(\alpha_1)$ et $H(\alpha_2)$ sont toutes deux finies : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ et il existe des expériences, δ_1 et $\delta_2 \in \Delta$ et γ_1 et $\gamma_2 \in \Gamma$, $\gamma_i \leqslant \alpha_i \leqslant \delta_i$ et

$H(\delta_i) - H(\gamma_i) < \eta$, alors $\gamma_1 \vee \gamma_2 \leqslant \alpha_1 \vee \alpha_2 \leqslant \delta_1 \vee \delta_2$ et $H(\delta_1 \vee \delta_2) - H(\gamma_1 \vee \gamma_2) < \varepsilon$. Par conséquent $\alpha_1 \vee \alpha_2$ est informative.

Proposition 3. — *Soit* $(\Omega, \Gamma, \Delta, H)$ *un espace expérimental vérifiant les conditions de la proposition 2, où* Δ *est stable par borne supérieure dénombrable et tel que*

1° *Pour toute famille* $(\alpha_i, \delta_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *d'expériences de* Δ *telles que* $\alpha_i \leqslant \delta_i$ *alors*

$$H\left(\bigvee_{1 \leqslant i \leqslant n} \delta_i\right) - H\left(\bigvee_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i\right) \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} [H(\delta_i) - H(\alpha_i)].$$

2° *Pour toute suite croissante* $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Delta$

$$H\left(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \delta_n\right) = \lim_{n \to \infty} H(\delta_n).$$

Alors, pour toute suite $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *croissante dans* Θ,

$$H^*\left(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \beta_n\right) = \sup_{n \in \mathbb{N}} H^*(\beta_n).$$

De plus la borne supérieure d'une suite d'expériences informatives est, elle-même, informative.

Démonstration. — Soit $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante contenue dans Θ, s'il existe un n_0 tel que $H^*(\beta_{n_0}) = +\infty$, nous avons :

$$H^*\left(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \beta_n\right) = \lim_{n \to \infty} H^*(\beta_n) = +\infty.$$

Sinon, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \delta_n \in \Delta$, $\beta_n \leqslant \delta_n$ tel que $H(\delta_n) - H^*(\beta_n) < \varepsilon 2^{-n}$; par suite :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ H\left[\bigvee_{n \leqslant p} \delta_n\right] - H^*\left[\bigvee_{n \leqslant p} \beta_n\right] \leqslant \varepsilon.$$

Comme Δ est stable par borne supérieure dénombrable,

$$\delta = \bigvee_{p \in \mathbb{N}} \left[\bigvee_{n \leqslant p} \delta_n\right] \in \Delta$$

et

$$H^*\left[\bigvee_{p \in \mathbb{N}} \beta_p\right] \leqslant H(\delta) = \lim_{p \to \infty} H\left[\bigvee_{n \leqslant p} \delta_n\right] \leqslant \lim H^*(\beta_p) + \varepsilon.$$

Si $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'expériences informatives, nous pouvons, d'après la proposition 2, nous ramener à une suite croissante, et conclure que la borne supérieure des α_n est informative.

REMARQUE 4. — *Lorsque Γ et Δ sont contenues dans l'ensemble des expériences constituées d'un seul événement, nous obtenons des résultats analogues en faisant l'étude dans ce dernier ensemble, indépendamment de son injection dans Θ.*

Il existe des cas où la condition 2° de la proposition 3, relative au prolongement de H à Δ est une conséquence de propriétés intrinsèques de Γ et Δ; par exemple, si pour toute suite croissante d'expériences $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Δ et toute expérience $\gamma \in \Gamma$ telles que $\gamma \leqslant \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \delta_n$, il existe un entier n_0 tel que $\gamma \leqslant \delta_{n_0}$.

5. EXPÉRIENCES NODALES

Nous pourrions effectuer une étude directe sur l'informativité d'expériences obtenues par bornes supérieure ou inférieure dénombrables à partir d'une classe d'expériences informatives. Cependant, nous allons appliquer, ici, une étude systématisée des expériences nodales.

Nous appelons pavage Π un sous-ensemble de Θ, stable par bornes supérieure et inférieure finies. Si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'expériences de Θ, nous disons que $\alpha \in \Theta$ est une Π-enveloppe de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite décroissante $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Pi$ telle que $\forall r \in \mathbb{N}$, $\exists s \in \mathbb{N}$ pour lequel $\alpha_s \leqslant \beta_r$ et telle que $\alpha \geqslant \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \beta_n$. Une classe $\Psi \subset \Theta$ est appelée une capacitance si toute expérience plus fine qu'une expérience de Ψ appartient encore à Ψ et si, pour toute expérience $\alpha \in \Theta$ et toute suite croissante $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Theta$, le fait que $\alpha \wedge \left(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \beta_n\right)$ appartienne à Ψ implique l'existence d'un entier n_0 pour lequel $\alpha \wedge \beta_{n_0}$ appartienne à Ψ. Nous supposons, dans tout ce paragraphe, que pour toute suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante dans Θ et tout $\alpha \in \Theta$, nous avons :

$$H^*\left[\left(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \beta_n\right) \wedge \alpha\right] = \lim_{n\to\infty} H^*[\beta_n \wedge \alpha];$$

nous pouvons en déduire que, pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$\Psi_r = \{ \alpha \in \Theta, H^*(\alpha) > r \}$$

est une capacitance.

Nous appelons application nodale relative à une capacitance Ψ une suite $F = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications telles que :

1° $f_n : \Theta^n \to \Theta$

2° $f_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leqslant \alpha_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

3° $\alpha_n \in \Psi \Rightarrow f_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Psi$.

Nous disons qu'une suite $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots) \in \Theta^{\mathbb{N}}$ d'expériences est F-dominée si :

a) $\alpha_{n+1} \leqslant f_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $\forall n$ (ce qui implique $\alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n$)

b) $\alpha_n \in \Psi$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Une expérience α est dite compatible avec une application nodale $F = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si, pour toute suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, F-dominée et vérifiant $\alpha_1 \leqslant \alpha$, alors α est une Π-enveloppe de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous désignons par expérience nodale relative à une capacitance Ψ toute expérience pour laquelle existe une application nodale compatible.

THÉORÈME 5. — (*Généralisation d'un théorème de W. Sierpinski relatif à $\mathscr{P}(\Omega)$ pour un ensemble pavé [15]*).

La classe Ξ des expériences nodales est stable par borne supérieure de suites croissantes et par borne inférieure dénombrable.

Démonstration. — *a*) Démonstration pour les bornes supérieures de suites croissantes. Soient $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'expériences nodales et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F^k = (f_n^k)$ une application nodale compatible avec α_k.

Nous désignons par $\alpha = \bigvee_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k$. Si $(\beta_1 \ldots \beta_n)$ sont n expériences de Θ, nous posons :

— si $\alpha \wedge \beta_1 \notin \Psi$, $f_n(\beta_1 \ldots \beta_n) = \beta_n$,

— si $\alpha \wedge \beta_1 \in \Psi$, $f_n(\beta_1 \ldots \beta_n) = f_n^k[\alpha_k \wedge \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]$,

où k est le plus petit entier tel que $\alpha_k \wedge \beta_1 \in \Psi$. La suite $F = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie est une application nodale compatible avec α. En effet si $\alpha \notin \Psi$, ceci est évident.

Si $\alpha \in \Psi$, soit (β_n) une suite F-dominée telle que $\beta_1 \leqslant \alpha$. Nous avons, puisque $\alpha \wedge \beta_1 \in \Psi$,

$$f_n(\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n) = f_n^k(\alpha_k \wedge \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n),$$

où k est défini comme précédemment.

Ceci implique que la suite $\alpha_k \wedge \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n \ldots$ est F^k-dominée et $\beta_n \wedge \alpha_k \leqslant \alpha_k$.

Il en résulte que α_k est une Π-enveloppe de cette suite, donc aussi de la suite $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \ldots$ comme $\alpha_k \leqslant \alpha$, nous pouvons en déduire que α est encore une Π-enveloppe de cette suite; α est une expérience nodale.

b) Démonstration de la stabilité par borne inférieure dénombrable :

Soit $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'expériences nodales, et pour tout k, soit F^k une application nodale compatible avec α_k. Nous notons $\alpha = \bigwedge_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k$ et montrons que α est une expérience nodale. Tout entier $n \geqslant 1$ s'écrit d'une manière unique :

$$n = (2q_n - 1)2^{p_n - 1} \text{ où } p_n \text{ et } q_n \text{ sont des entiers} \geqslant 1.$$

Si $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$ sont n expériences de Θ, nous posons :

$$f_n(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = f_{q_n}^{p_n}(\beta_{2^{p_n-1}}, \beta_{3.2^{p_n-1}}, \beta_{5.2^{p_n-1}}, \ldots, \beta_{(2q_n-1)2^{p_n-1}}$$

Comme le dernier indice $(2q_n - 1).2^{p_n-1}$ est égal à n, la suite $\mathrm{F} = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une application nodale.

Montrons qu'elle est compatible avec α. Si $\alpha \notin \Psi$, c'est évident. Si $\alpha \in \Psi$, nous considérons une suite (β_n), F-dominée et telle que $\beta_1 \leqslant \alpha$. Les expériences α_k appartiennent alors à Ψ. Pour que α soit une Π-enveloppe de (β_n) il suffit que α_k soit une Π-enveloppe de (β_n), pour tout $k \in \mathbb{N}$.

En effet, dans ce cas, si les α_k sont tous des Π-enveloppes de β_n, pour tout k, nous pouvons déterminer une suite décroissante $(\gamma_n^k)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Pi$ telle que:

$$\forall r \in \mathbb{N}\ \exists s = s(k, r) \in \mathbb{N},\ \beta_s \leqslant \gamma_r^k \text{ et } \alpha_k \geqslant \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n^k .$$

Comme Π est stable par bornes inférieures finies, la suite $\gamma_p = \bigwedge_{\substack{n \leqslant p \\ k \leqslant p}} \gamma_n^k$ est encore contenue dans Π et vérifie :

$\forall p \in \mathbb{N}, \exists s = \sup \{ s(k, r) : k \leqslant p, r \leqslant p \} \in \mathbb{N}$ tel que $\beta_s \leqslant \gamma_p$ et $\alpha \geqslant \bigwedge_{p\in\mathbb{N}} \gamma_p$.
Par conséquent α est une Π-enveloppe de (β_n).

Nous allons maintenant établir le fait que α_k est une Π-enveloppe de (β_n), pour tout k. Nous posons :

$$\delta_n = \beta_{(2n-1).2^{k-1}} .$$

Nous avons $\delta_1 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_k$. Démontrons que la suite (δ_n) est F^k-dominée. Comme α_k et F^k sont compatibles, cela implique que α_k est une Π-enveloppe de (δ_n) et donc aussi de (β_n), puisque (δ_n) est une suite extraite de (β_n).

Il nous faut établir que, pour tout n :

$$\delta_{n+1} \leqslant f_n^k(\delta_1, \ldots, \delta_n)$$

ou encore, de manière équivalente, que

$$\beta_{(2n+1)2^{k-1}} \leqslant f_n^k(\beta_{1.2^{k-1}}, \beta_{3.2^{k-1}}, \ldots, \beta_{(2n-1)2^{k-1}});$$

mais ceci résulte du fait que la suite (β_n) est F-dominée et que :

$$\beta_{(2n+1).2^{k-1}} \leqslant \beta_{1+(2n-1)2^{k-1}} \leqslant f_{(2n-1).2^{k-1}}(\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_{(2n-1).2^{k-1}}) .$$

Finalement nous pouvons conclure que α est une expérience nodale.

Nous allons démontrer une généralisation du théorème 5, pour des expériences obtenues par une opération plus générale que celles de bornes supérieure et inférieure dénombrables.

Soit $\Sigma = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites $\sigma = (a_1, a_2 \ldots a_n \ldots)$, $a_i \in \mathbb{N}$, d'entiers naturels et $\mathrm{S} = \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites finies $s = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $b_i \in \mathbb{N}$ d'entiers naturels.

Si $s \in S$, $s = (b_1, \ldots, b_n)$, nous appelons longueur de s, et notons $l(s) = n$, le nombre d'entiers qui constituent la suite s.

Si $r = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $s = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sont deux suites de même longueur nous écrivons $r \leqslant s$ si, pour toute composante i, on a $a_i \leqslant b_i$ (dans $\mathbb{N}$). Si r et s sont deux suites finies et si σ est une suite infinie, nous écrivons $r \prec s$ [resp. $r \prec \sigma$] si r est une section commençante de s [resp. de σ] :

$$r = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$$
$$s = (a_1, a_2, \ldots, a_p, a_{p+1}, \ldots, a_n)$$

[resp. $\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_p, \ldots, a_n, \ldots)$].

Nous appelons système déterminant d'expériences toute application $(s \to \alpha_s) : S \to \Theta$ vérifiant $r \leqslant s \Rightarrow \alpha_r \leqslant \alpha_s$ (pour la finesse).

Nous disons que l'expérience α est le noyau du système déterminant $(s \to \alpha_s)$ si

$$\alpha = \bigvee_{\sigma \in \Sigma} \Big(\bigwedge_{\substack{s \in S \\ s \prec \sigma}} \alpha_s \Big).$$

Si Γ est une classe d'expériences stables par borne inférieure finie, nous voyons que la classe Γ_σ^δ, stabilisée de Γ par bornes inférieure et supérieure dénombrables est contenue dans la classe des noyaux de systèmes déterminants dont l'image est contenue dans Γ. Par ailleurs, comme il existe des ensembles analytiques non boréliens, cette dernière classe est, en général, strictement plus grande que H_σ^δ.

Utilisant le résultat établi au théorème 24 de [*4*], nous pouvons énoncer :

THÉORÈME 6. — *La classe Ξ des expériences nodales est stable par noyau de système déterminant.*

En effet si α est une expérience, noyau d'un système déterminant

$$\alpha = \bigvee_{\sigma \in \Sigma} \Big(\bigwedge_{\substack{s \in S \\ s \prec \sigma}} \alpha_s \Big)$$

où les α_s sont des expériences nodales, alors α est, elle-aussi, une expérience nodale. La démonstration de ce théorème se copie sur celle que nous avons donnée au théorème 24 de [*4*] dans le cas du treillis des expériences.

L'intérêt des expériences nodales réside dans le fait qu'elles sont informatives, sous une hypothèse assez légère, comme nous allons le démontrer ci-dessous.

THÉORÈME 7. — *Soit* $(\Omega, \Gamma, \Delta, H)$ *un espace expérimental tel que, pour toute suite croissante* $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Theta$, *et tout* $\alpha \in \Theta$, *nous ayons*

$$H^*\Big[\alpha \wedge \Big(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \beta_n\Big)\Big] = \lim_{n \to \infty} H^*(\alpha \wedge \beta_n).$$

Soit Π *un pavage de* Θ, *formé d'expériences informatives, tel que, pour toute suite décroissante* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Pi$, *nous ayons :*

$$H_*\left(\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\right) = \lim_{n\to\infty} H(\alpha_n).$$

Alors, toute expérience nodale relative à toute capacitance $\Psi_r (r \in \mathbb{R})$ *est informative.*

Démonstration. — Soit α une expérience nodale $\in \Theta$ relative à toute capacitance C_ε (ε réel > 0) où :

$$C_\varepsilon = \{ \beta \in \Theta : H^*(\beta) > H^*(\alpha) - \varepsilon \}.$$

Soit $F = (f_n)$ une application nodale, relative à C_ε, et compatible avec α.

Nous notons $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dérivée de α :

$$\alpha_1 = \alpha,\ \alpha_2 = f_1(\alpha_1),\ \ldots,\ \alpha_{n+1} = f_n(\alpha_1 \ldots \alpha_n) \ldots$$

Comme α est une Π-enveloppe, il existe une suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Pi$, décroissante et vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n \leqslant \beta_n \ \text{ et } \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \beta_n \leqslant \alpha.$$

Par conséquent

$$H^*(\alpha) - \varepsilon \leqslant \lim_{n\to\infty} H(\beta_n) = H_*\left(\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \beta_n\right) \leqslant H_*(\alpha).$$

Comme $H_*(\alpha) \leqslant H^*(\alpha)$, nous avons nécessairement égalité et l'expérience nodale α est donc informative.

COROLLAIRE 8. — *Si* Γ [*resp.* Δ] *est stable par bornes supérieure et inférieure finies et si :*

a) *pour toute suite décroissante* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Gamma$ [*resp.* Δ]

$$H_*\left(\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\right) = \lim_{n\to\infty} H(\alpha_n)$$

b) *pour toute suite croissante* $(\beta_n) \subset \Theta$ *et tout* $\alpha \in \Theta$

$$H^*\left[\left(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \beta_n\right) \wedge \alpha\right] = \lim_{n\to\infty} H^*(\beta_n \wedge \alpha),$$

alors toute expérience appartenant au stabilisé de Γ [*resp.* Δ] *par bornes supérieure croissante ou inférieure dénombrables est informative.*

Plus généralement, toute expérience noyau d'un système déterminant à image dans Γ [*resp.* Δ] *est informative.*

Démonstration. — Ce corollaire se déduit des théorèmes 5 et 7 ou bien 6 et 7 en considérant le pavage $\Pi = \Gamma$ [resp. $\Pi = \Delta$].

6. EXEMPLE D'APPLICATION : UNE GÉNÉRALISATION DE L'INFORMATION SHANNONIENNE DANS UN CADRE NON PROBABILISTE

B. Forte et J. Kampe de Feriet [*10*] ont introduit l'information, portée par les événements (boréliens) d'un groupe abélien, invariante par translation. Dans ce paragraphe nous étudions l'information portée par des expériences complètes sur un groupe abélien.

Soit Ω un groupe abélien localement compact, non compact — il n'existe pas de probabilité de Haar — nous pouvons munir l'ensemble Π des expériences complètes constituées d'un nombre fini d'événements (boréliens ou universellement mesurables) d'une information semblable à celle de Wiener-Shannon. Soit μ une mesure de Haar sur Ω ; si θ est une application de $\bar{\mathbb{R}}_+$ dans lui-même, décroissante, et vérifiant $\theta(+\infty) = 0$, la fonction définie sur la tribu $\mathscr{E}$ des ensembles universellement mesurables par $J(a) = \theta \quad \mu(A)$ est alors une mesure d'information sur les événements, invariante par translation. Lorsque θ est continue, il est immédiat que tout ensemble μ-mesurable est J-informatif.

Par analogie avec l'information shannonienne, nous cherchons s'il existe une information H, définie sur Π, telle que, si $\alpha = \{ X_1, X_2, \ldots, X_n \}$, $H(\alpha)$ soit une fonction de $(\mu(X_1) \ldots \mu(X_n))$ de la forme :

$$H(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \mu(X_i)\rho\,[\mu(X_i)]\,,$$

où ρ soit une application continue de $\bar{\mathbb{R}}_+$ dans lui-même. Pour que H soit croissante, il suffit alors que, si X et Y sont deux événements disjoints

$$\mu(X \cup Y) \times \rho \circ \mu(X \cup Y) \leqslant \mu(X) \times \rho \circ \mu(X) + \mu(Y) \times \rho \circ \mu(Y)\,.$$

En particulier, nous pouvons choisir $\rho = \theta$ avec, par exemple, $\rho(x) = \theta(x) = e^{-x}$ ou $\rho(x) = \theta(x) = \dfrac{1}{x}$.

L'information sur Π s'écrit alors :

$$H(\{ X_1, X_2, \ldots, X_n \}) = \sum_{i=1,2,\ldots,n} \mu(X_i)J(X_i)\,,$$

avec les conventions $\infty . 0 = 0$ — pour que $H(\{ \Omega \}) = 0$ — et, lorsque $\theta(0) = +\infty$, $0 . \infty = 0$ car si X est un événement de mesure nulle,

$$H(\{ X, CX \}) = 0\,.$$

Nous pouvons appliquer l'étude précédente dans le treillis Θ_c des expériences complètes.

Soit Γ la classe des expériences de Θ_c, constituées d'un nombre fini d'événements, tous F_σ, sauf un au plus, ce dernier étant fermé de mesure infinie.

Si $\alpha = \{ X_1, X_2, \dots, X_n, Y \} \in \Gamma$ ($X_i F_\sigma$, Y fermé), nous posons

$$H(\alpha) = \Sigma \mu(X_i) J(X_i)$$

(avec la convention $\infty . 0 = 0$).

Ainsi Γ est stable par borne supérieure finie et borne inférieure dénombrable. Nous définissons ensuite la classe Δ des expériences de Θ_c, constituées d'un nombre quelconque de compacts; Δ est stable par borne inférieure finie et borne supérieure dénombrable.

La borne supérieure d'une suite d'expériences informatives l'est aussi. En particulier, une expérience, constituée d'un ensemble dénombrable d'événements, qui sont des G_δ ou des fermés, est informative.

Si la forme explicite de θ permet de conclure que les hypothèses du corollaire 8 sont vérifiées, alors en particulier, toute expérience complète $\alpha = \{ X_n \}_{n \in \mathbb{N}}$, formée de boréliens, est informative ; si $H(\alpha) < \infty$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $\gamma \in \Gamma$,

$$\gamma = \left\{ Z_k = \bigcup_{n \in A_k \subset \mathbb{N}} X_n^k, \ (X_n^k)_{n \in A_k} \subset (X_n)_{n \in \mathbb{N}} \right\}_{k \leqslant p},$$

les Z_k étant tous F_σ, sauf un au plus, et il existe une expérience $\delta \in \Delta$, $\delta \geqslant \alpha$, telle que $H(\delta) - H(\gamma) < \varepsilon$; si $H(\alpha) = +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \gamma \in \Gamma$, $\gamma \leqslant \alpha$ telle que $H(\gamma) \geqslant n$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Avan, *Entropie et information en physique et en biologie, de Boltzmann à von Neumann.* Note interne L. P. E.-C. N. A. M., Paris, 1976.

[2] V. I. Arnold, A. Avez, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars, Paris, 1967.

[3] G. Choquet, Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. **5**, 1953-1954, p. 131-295.

[4] Dehen-Mastrangelo, Y. Dermenjian, J. Saint-Raymond, *Rabotages sur un Treillis.* Séminaire Choquet, Initiation à l'analyse, 9e année, n° 22, 1969-1970.

[5] C. Dellacherie, *Ensembles aléatoires II*, Séminaire de Probabilités, 1967-1968. Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg.

[6] B. Forte, N. Pintacuda, Information fournie par une expérience *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. **266**, 1968, Série A, p. 242-245.

[7] B. Forte, N. Pintacuda, Sull' Informazione associata alle esperienze incomplete, *Annali di Mat. pura ed appl.*, 4e série, t. **80**, 1968, p. 215-234.

[8] R. S. Ingarden, K. Urbanik, *Information without probability*. Coll. Math. Warszawa, t. **9**, 1962, p. 131-150.

[9] J. Kampe de Feriet, *La théorie généralisée de l'information et la mesure subjective de l'information. Théories de l'Information.* Actes des Rencontres de Marseille, Luminy, 5 au 7 juin 1973. Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[10] J. Kampe de Feriet, B. Forte, Information et probabilités, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. **265**, 1967, Série A, p. 110-114, 142-146, 350-353.

[*11*] D. A. KAPPOS, *Strukturtheorie der Wahrscheinlichkeitsfelder und-räume*. Berlin, Springer-Verlag, 1960 (Ergebnisse der mathematik. Neue Falge, 24).

[*12*] N. PINTACUDA, *Quelques développements récents de la théorie de l'Information*. Conférence faite à Paris le 22 janvier 1969.

[*13*] N. PINTACUDA, Prolongement des mesures d'information, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. **269**, 3 novembre 1969, Série A, p. 861-864.

[*14*] A. RENYI, *On measures of entropy and information*. Proceedings of the 4 th, Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, Berkeley, Vol. **1**, 1960, p. 547-561; Berkeley, University of California Press, 1961.

[*15*] W. SIERPEINSKI, *Sur la puissance des ensembles mesurables (B)*. Fund. Math. Warszewa, t. **5**, p. 166-171.

[*16*] A. WEHRL, General properties of entropy. *Reviews of Modern Physics*, vol. **50**, n° 2, avril 1978.

(Manuscrit reçu le 10 avril 1979)