

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

GUY PATISSIER

Déformations différentielles à coefficients constants et produits de Moyal généralisés

Annales de l'I. H. P., section A, tome 30, n° 4 (1979), p. 275-293

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1979__30_4_275_0

© Gauthier-Villars, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Déformations différentielles à coefficients constants et produits de Moyal généralisés (*)

par

Guy PATISSIER

Mathématiques 1^{er} cycle, Université Claude-Bernard,
43, boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne

1. INTRODUCTION

Les déformations des algèbres associatives et des algèbres de Lie de dimension infinie attachées à une variété de Poisson apparaissent en mécanique quantique (produit de Moyal, crochet de Moyal-Vey [1]) et en théorie des opérateurs pseudo-différentiels (symbole du produit et du commutateur de deux opérateurs pseudo-différentiels [3]).

Ces déformations sont, en particulier, étudiées dans [1], [4] et [5]; les auteurs de ces articles utilisent la cohomologie de Chevalley pour étudier les déformations des algèbres de Lie et celle de Hochschild pour les déformations des algèbres associatives ([5]). Nous nous proposons, dans le cadre plus restreint des opérateurs multidifférentiels à coefficients constants de $C^\infty(\mathbb{R}^d)$, d'utiliser le formalisme des opérateurs pseudo-différentiels pour étudier ces déformations. Le symbole (formel) des déformations joue un rôle essentiel; ce symbole permet de caractériser les déformations associatives, de déterminer celles qui sont triviales et de calculer les dérivations de ces déformations associées aux champs de vecteurs hamiltoniens. Dans les deux dernières parties nous utilisons le formalisme des opérateurs pseudo-différentiels pour étudier les déformations à coefficients constants du crochet de Poisson. Certaines des relations obtenues sont la traduction en termes de symboles de conditions cohomologiques données dans [1] et [4].

(*) Ce travail a été inspiré par un cours sur la théorie des déformations donné à l'Université de Lyon I par A. Lichnerowicz en 1977.

2. GÉNÉRALITÉS

On pose $W = \mathbb{R}^q$ et on note $E(W, \lambda)$ l'espace des séries formelles à coefficients dans $C^\infty(W)$. Un opérateur bidifférentiel formel P_λ est une application bilinéaire

$$P_\lambda : C^\infty(W)^2 \rightarrow E(W, \lambda)$$

avec

$$P_\lambda = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s P_s$$

où $P_s : C^\infty(W)^2 \rightarrow C^\infty(W)$ est un opérateur bidifférentiel ordinaire. Si $\mathcal{S}(W)$ est l'espace des fonctions à décroissance rapide sur W , P_λ s'écrit formellement sur $\mathcal{S}(W)^2$ sous la forme pseudo-différentielle :

$$(2.1) \quad P_\lambda(u, v) = \frac{1}{(2\pi)^{2q}} \int e^{i\langle x, \eta + \xi \rangle} a(\lambda, x, \eta, \xi) \hat{u}(\eta) \hat{v}(\xi) d\eta d\xi$$

avec

$$a(\lambda, x, \eta, \xi) = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s a_s(x, \eta, \xi),$$

où $a_s(x, \eta, \xi)$ est par rapport à $\eta, \xi \in \mathbb{R}^q$ un polynôme à coefficients dans $C^\infty(W)$, a_s est le symbole de P_s et $a(\lambda, x, \eta, \xi)$ celui de P_λ . Les symboles considérés dans la suite seront toujours de ce type. Ici \hat{u} désigne la transformée de Fourier de u .

La relation (2.1) se généralise immédiatement au cas où P_λ est un opérateur p -multidifférentiel formel, p quelconque.

(2.2) *Exemples.* — *i)* Pour $P_0(u, v) = u \cdot v$ (c'est-à-dire pour $a(0, x, \xi, \eta) = 1$), on obtient une déformation de l'algèbre associative $C^\infty(W)$. On pose dans ce cas $u * v = P_\lambda(u, v)$.

ii) Pour $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^{2n})$ et $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{2n})$ dans \mathbb{R}^{2n} soit

$$F(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n (\xi^{n+i} \eta^i - \xi^i \eta^{n+i})$$

la 2-forme symplectique canonique de \mathbb{R}^{2n} , $-F(\xi, \eta)$ est le symbole du crochet de Poisson

$$\{u, v\} = \sum_{i=1}^n (\partial_{n+i} u \cdot \partial_i v - \partial_i u \cdot \partial_{n+i} v)$$

Pour $P_0(u, v) = \{u, v\}$ (c'est-à-dire pour $a(0, x, \eta, \xi) = -F(\eta, \xi)$) on obtient une déformation du crochet de Poisson (ici $q = 2n$), et si $(E(W, \lambda), P_\lambda)$ est une algèbre de Lie on dira que P_λ est une déformation de Poisson.

(2.3) *Remarque.* — $\mathcal{S}(W)$ étant dense dans $C^\infty(W)$, pour qu'un produit $*$ soit associatif il faut et il suffit qu'il le soit quand on le restreint à $\mathcal{S}(W)^2$. De même pour qu'une déformation P_λ du crochet de Poisson soit une déformation de Poisson, il faut et il suffit que P_λ restreint à $\mathcal{S}(W)^2$ soit une déformation de Poisson. Ce qui justifie l'utilisation de la relation (2.1).

3. DÉFORMATIONS DE L'ALGÈBRE ASSOCIATIVE $C^\infty(W)$

On considère un produit $*$ à coefficients constants ; son symbole, noté $a(\lambda, \eta, \xi)$, est donc indépendant de x . On a :

(3.1) **PROPOSITION.** — $a(\lambda, \eta, \xi)$ définit une déformation associative du produit ordinaire des fonctions si et seulement si il existe une suite de polynômes $b_s(\eta, \xi)$, $s \geq 1$, telle que :

$$(3.1.1) \left\{ \begin{array}{l} i) a(\lambda, \eta, \xi) = \exp \left[\sum_{s=1}^{\infty} \lambda^s b_s(\eta, \xi) \right] \\ ii) \text{ pour tout entier } s : \\ \quad b_s(\eta, \xi) + b_s(\eta + \xi, \zeta) = b_s(\eta, \xi + \zeta) + b_s(\xi, \zeta). \end{array} \right.$$

Preuve. — Posons $\Phi(\lambda, \eta, \xi) = a(\lambda, \eta, \xi) \hat{u}(\eta)$, on note $\Phi(\lambda, \tilde{y}, \xi)$ la transformée de Fourier inverse de Φ par rapport à la deuxième variable. Après avoir intégré (2.1) par rapport à η on obtient directement :

$$(u * v) * w(x) = \frac{1}{(2\pi)^{2q}} \int e^{i\langle x, \xi - \tilde{\eta} \rangle + \langle x, \eta + \zeta \rangle} \Phi(\lambda, \tilde{y}, \xi) a(\lambda, \eta, \zeta) \hat{v}(\xi) \hat{w}(\zeta) d\xi d\tilde{y} d\eta d\zeta.$$

Dans la relation précédente on remplace $d\xi d\tilde{y}$ par $d\tilde{y} d\xi$ grâce au théorème de Fubini. Après avoir intégré par rapport à \tilde{y} et effectué le changement de variable $\eta - \xi \rightarrow \eta$ on obtient :

$$(u * v) * w(x) = \frac{1}{(2\pi)^{2q}} \int e^{i\langle x, \eta + \xi + \zeta \rangle} a(\lambda, \eta, \xi) a(\lambda, \eta + \xi, \zeta) \hat{u}(\eta) \hat{v}(\xi) \hat{w}(\zeta) d\eta d\xi d\zeta$$

de même :

$$u * (v * w)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{2q}} \int e^{i\langle x, \eta + \xi + \zeta \rangle} a(\lambda, \xi, \zeta) a(\lambda, \eta, \xi + \zeta) \hat{u}(\eta) \hat{v}(\xi) \hat{w}(\zeta) d\eta d\xi d\zeta$$

donc

$$(3.1.2) \quad a(\lambda, \eta, \xi) a(\lambda, \eta + \xi, \zeta) = a(\lambda, \xi, \zeta) a(\lambda, \eta, \xi + \zeta)$$

si et seulement si $*$ est associatif. Comme $a(0, \eta, \xi) = 1$ on peut poser $b(\lambda, \eta, \xi) = \text{Log } a(\lambda, \eta, \xi)$, d'où la conclusion.

(3.2) *Exemples.* — (3.2.1) Soit $\varphi_k : W^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $k \geq 1$, une suite d'appli-

cations \mathbb{R} -bilinéaires et $C \in \mathbb{C}[[\lambda]]$ une série formelle telle que $C(0) = 0$, le symbole

$$a(\lambda, \eta, \xi) = \exp \left[C(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \varphi_k(\eta, \xi) \right]$$

vérifie les conditions (3.1.1).

(3.2.2) Dans l'exemple précédent si $C = 0$, $\varphi_1 = -F$ et $\varphi_k = 0$ pour $k \geq 2$; on obtient le produit de Moyal ([I]).

(3.2.3) Pour $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{2n})$ et $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^{2n})$ dans \mathbb{R}^{2n} on pose

$$G(\eta, \xi) = \sum_{i=1}^n \eta^{n+i} \xi^i.$$

La déformation associative du produit ordinaire des fonctions définie par le symbole exp $[\lambda G(\eta, \xi)]$ est notée #.

On a $u \# v = u \cdot v + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k P_k(u, v)$ avec

$$P_k(u, v)(p, q) = \sum_{|\gamma|=k} \frac{(-1)^{|\gamma|}}{\gamma!} \cdot D_q^\gamma u(p, q) \cdot D_p^\gamma v(p, q)$$

où $(p, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$,

$$\gamma! = (\gamma_1!) (\gamma_2!) \dots (\gamma_n!), \quad D_q^\gamma = \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \right)^{\gamma_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial q_n} \right)^{\gamma_n}.$$

Pour $\lambda = 1$ et u et v dans l'algèbre des symboles de $W = T^*(\mathbb{R}^n)$ (cf. [3]), $u \#_{i,\lambda} v$ est le symbole, écrit sous la forme d'un développement asymptotique du produit $A \circ B$ (quand il existe) des opérateurs pseudo-différentiels A et B de symboles totaux respectifs u et v ([3]).

(3.2.4) Soit $R_s(\eta^1, \dots, \eta^q)$ une suite de polynômes. On pose

$$b_s(\eta, \xi) = R_s(\eta + \xi) - R_s(\eta) - R_s(\xi).$$

Pour $d^0 R_s > 2$, R_s n'est pas bilinéaire. Dans le cas $q = 1$ on obtient ainsi tous les polynômes vérifiant (3.1.1) ii).

(3.3) *Remarques.* — i) Soit $\varphi : W^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. On considère le symbole $a(\lambda, \eta, \xi) = \exp [\lambda \varphi(\eta, \xi)]$, pour $\lambda = i$ la relation (2.1) devient

$$u * v(x) = \frac{1}{(2\pi)^{2q}} \int e^{i(\langle x, \eta + \xi \rangle + \varphi(\eta, \xi))} \widehat{u}(\eta) \widehat{v}(\xi) d\eta d\xi.$$

La relation précédente définit une application bilinéaire continue

$*$: $\mathcal{S}(W) \times \mathcal{S}(W) \rightarrow \mathcal{S}(W)$, et comme pour le produit de Moyal on montre que $\int u * v(x)dx = \int u(x)v(x)dx$ si φ est antisymétrique.

ii) Soient $*$ une déformation de l'algèbre associative $C^\infty(W)$,

$$u_\lambda = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s u_s \quad \text{et} \quad w_\lambda = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s w_s$$

deux éléments de $E(W, \lambda)$. On suppose que $u_0(x) \neq 0$ pour tout x de W .

Alors il existe un unique élément $v_\lambda = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s v_s$ de $E(W, \lambda)$ tel que $u_\lambda * v_\lambda = w_\lambda$.

Les v_k sont donnés par les relations de récurrence :

$$(3.3.1) \quad \begin{cases} v_0 = \frac{w_0}{u_0} \\ v_h = \frac{1}{u_0} \left[w_h - \sum_{\substack{s+t+k=h \\ t < h}} P_k(u_s, v_t) \right] \end{cases}$$

On obtient les relations (3.3.1) en remarquant que :

$$u_\lambda * v_\lambda = \sum_{h=0}^{\infty} \lambda^h \sum_{s+t+k=h} P_k(u_s, v_t) = w_\lambda.$$

On résout de manière semblable l'équation $x * u_\lambda = w_\lambda$.

Considérons la déformation $\#_{i\lambda}$ de l'exemple (3.2.3) et (u_j) une suite de symboles de $S^{m_j}(T^*(\mathbb{R}^n))$ avec $\lim_{j \rightarrow +\infty} (m_j) = -\infty$ ([3]), alors v_λ pour $w_\lambda = 1$ et $\lambda = 1$ donne, sous la forme d'un développement asymptotique, le symbole de la paramétrix à droite de l'opérateur elliptique associé au symbole :

$$u \sim \sum_{k=0}^{\infty} u_k \quad ([3]).$$

Soient $b(\lambda, \eta, \xi) = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^s b_s(\eta, \xi)$ un symbole non constant en (η, ξ) véri-

fiant la condition (3.1.1) ii) et $f(Z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k Z^k$ une série formelle à coefficients complexes. La proposition suivante généralise un résultat prouvé dans [1] pour le produit de Moyal.

(3.4) PROPOSITION — *Le produit défini par le symbole $f[b(\lambda, \eta, \xi)]$ est associatif si et seulement si $f(Z) = \exp(KZ)$, où $K \in \mathbb{C}$.*

Preuve. — On a $f(Z) = \exp g(Z)$ où $g(Z) = \text{Log } f(Z) = \sum_{k \geq 1} a_k Z^k$, il faut prouver que $g(Z) = a_1 Z$. Supposons $g(Z) \neq a_1 Z$ et soit $h = \text{Min} \{ k \geq 2, a_k \neq 0 \}$. On a $a_h \neq 0$ et :

$$(3.4.1) \quad g[b(\lambda, \eta, \zeta)] = a_1 \left[\sum_{s \geq 1} \lambda^s b_s(\eta, \zeta) \right] + \sum_{k \geq h} a_k \left[\sum_{s \geq 1} \lambda^s b_s(\eta, \zeta) \right]^k.$$

Dans (3.4.1) le coefficient du terme de degré h est $a_1 h_n(\eta, \zeta) + a_h [b_1(\eta, \zeta)]^h$. D'après la proposition (3.1), $g[b(\lambda, \eta, \zeta)]$ vérifie la relation (3.1.1) ii), on en déduit que :

$$(3.4.2) \quad [b_1(\eta + \zeta, \zeta)]^h - [b_1(\zeta, \zeta)]^h = [b_1(\eta, \zeta + \zeta)]^h - [b_1(\eta, \zeta)]^h$$

Comme par hypothèse $b(\lambda, \eta, \zeta)$ vérifie la relation (3.1.1) ii), on a aussi :

$$(3.4.3) \quad b_1(\eta + \zeta, \zeta) - b_1(\zeta, \zeta) = b_1(\eta, \zeta + \zeta) - b_1(\eta, \zeta).$$

On fait $\zeta = \eta = 0$ dans la dernière relation et on obtient :

$$(3.4.4) \quad b_1(0, \zeta) = b_1(0, 0) \quad \text{pour tout } \zeta \in \mathbb{R}^q.$$

$$1^{\text{er}} \text{ CAS. — } b_1(\eta + \zeta, \zeta) - b_1(\zeta, \zeta) = 0.$$

On fait $\zeta = 0$ dans la dernière relation, on obtient : $b_1(\eta, \zeta) = b_1(0, \zeta)$, d'où $b_1(\eta, \zeta) = b_1(0, 0) = \text{Cte}$.

$$2^{\text{e}} \text{ CAS. — } b_1(\eta + \zeta, \zeta) - b_1(\zeta, \zeta) \neq 0.$$

On divise la relation (3.4.2) par la relation (3.4.3). En faisant $\eta = 0$ dans le résultat et en tenant compte de la relation (3.4.4) on obtient :

$$[b_1(\zeta, \zeta)]^{h-1} = [b_1(0, 0)]^{h-1},$$

on en déduit $b_1(\zeta, \zeta) = b_1(0, 0) = \text{Cte}$.

Supposons $b_s = \text{Cte}$ pour $s = 1, \dots, p-1 > 0$. On pose :

$$n = \text{Inf} \{ s \in [1, p-1], b_s \neq 0 \},$$

on va montrer que $b_p = \text{Cte}$.

$$1^{\text{er}} \text{ CAS. — } b_1 = b_2 = \dots = b_{p-1} = 0 \text{ (i. e. } n = 0).$$

Le coefficient du terme de degré ph dans $g[b(\lambda, \eta, \zeta)]$ est

$$a_1 b_{ph}(\eta, \zeta) + a_h [b_p(\eta, \zeta)]^h.$$

On conclut comme pour b_1 que $b_p(\eta, \zeta) = \text{Cte}$.

2^e CAS. — $n \geq 1$, on pose $C(\lambda) = \sum_{s=n}^{p-1} \lambda^s b_s$. On montre que :

$$g[b(\lambda, \eta, \zeta)] = g[C(\lambda)] + g'[C(\lambda)] \left\{ \sum_{k \geq p} \lambda^k b_k(\eta, \zeta) \right\} + \theta(\lambda, \eta, \zeta)$$

où

$$\theta(\lambda, \eta, \xi) = \sum_{s \geq h} a_s \left\{ \sum_{i=0}^{s-2} C_s^i \left[\sum_{k=n}^{p-1} \lambda^k b_k \right]^i \left[\sum_{k \geq p} \lambda^k b_k(\eta, \xi) \right]^{s-i} \right\}.$$

$g[b(\lambda, \eta, \xi)]$ vérifie la relation (3.1.1) ii) (th. 3.1), il en est de même de $g[C(\lambda)]$ et d'après les hypothèses de $g'[C(\lambda)] \left\{ \sum_{k \geq p} \lambda^k b_k(\eta, \xi) \right\}$, donc $\theta(\lambda, \eta, \xi)$ vérifie la relation (3.1.1) ii). Le coefficient du terme de plus bas degré de $\theta(\lambda, \eta, \xi)$ est $\frac{h(h-1)}{2} a_h b_n^{h-2} [b_p(\eta, \xi)]^2$, on en déduit comme pour b_1 que $b_p = \text{Cte}$, d'où la conclusion.

4. ÉQUIVALENCE DES DÉFORMATIONS

Soient P_λ et Q_λ deux opérateurs bidifférentiels formels à coefficients constants de symboles respectifs $p(\lambda, \eta, \xi)$ et $q(\lambda, \eta, \xi)$. On rappelle :

(4.1) DÉFINITION ([1]). — P_λ et Q_λ sont équivalents s'il existe un opérateur

différentiel formel $T_\lambda = \text{Id} + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^s T_s$ (à coefficients quelconques) tel que :

$$(4.1.1) \quad \forall u, v \in C^\infty(W), \quad T_\lambda[P_\lambda(u, v)] = Q_\lambda[T_\lambda(u), T_\lambda(v)].$$

(4.2) PROPOSITION. — Les opérateurs P_λ et Q_λ sont équivalents par l'intermédiaire d'un opérateur T_λ à coefficients constants de symbole $a(\lambda, \eta)$ si et seulement si :

$$(4.2.1) \quad p(\lambda, \eta, \xi)a(\lambda, \eta + \xi) = q(\lambda, \eta, \xi)a(\lambda, \eta)a(\lambda, \xi)$$

Preuve. — On peut se limiter à $\mathcal{S}(W)$. Un calcul similaire à celui effectué dans la preuve de la proposition (3.1) donne

$$T_\lambda[P_\lambda(u, v)] = \frac{1}{(2\pi)^{2q}} \int e^{i\langle x, \eta + \xi \rangle} p(\lambda, \eta, \xi) a(\lambda, \eta + \xi) \hat{u}(\eta) \hat{v}(\xi) d\eta d\xi.$$

Comme $T_\lambda(u) \hat{(\eta)} = a(\lambda, \eta) \hat{u}(\eta)$ on a aussi :

$$Q_\lambda[T_\lambda(u), T_\lambda(v)] = \frac{1}{(2\pi)^{2q}} \int e^{i\langle x, \eta + \xi \rangle} q(\lambda, \eta, \xi) a(\lambda, \eta) a(\lambda, \xi) \hat{u}(\eta) \hat{v}(\xi) d\eta d\xi$$

(4.3) COROLLAIRE. — Si $P_\lambda \neq 0$, les automorphismes à coefficients constants de P_λ (cas où $P_\lambda = Q_\lambda$) sont donnés par les symboles $a(\lambda, \eta) = \exp [b(\lambda, \eta)]$

avec $b(\lambda, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k b_k(\eta)$ où $b_k : W \rightarrow \mathbb{C}$ est une application \mathbb{R} -linéaire.

Preuve. — On remarque que T_λ est toujours un isomorphisme linéaire de $E(W, \lambda)$. On a $p(\lambda, \eta, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k p_k(\eta, \xi)$ et

$$\{(\eta, \xi), p(\lambda, \eta, \xi) \neq 0\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{(\eta, \xi), p_k(\eta, \xi) \neq 0\}$$

est dense dans \mathbb{R}^{2a} puisque $P_\lambda \neq 0$.

On déduit de (4.2.1), par un argument de continuité, que :

$$a(\lambda, \eta + \xi) = a(\lambda, \eta)a(\lambda, \xi), \quad \forall \eta, \xi.$$

Comme $T_0 = \text{Id}$, on a $a(0, \eta) = 1$ et on peut poser $b(\lambda, \eta) = \text{Log } a(\lambda, \eta)$,

alors $a(\lambda, \eta) = \exp [b(\lambda, \eta)]$ avec $b(\lambda, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k b_k(\eta)$ où pour tout $k \geq 1$, $b_k(\eta + \xi) = b_k(\eta) + b_k(\xi)$.

5. TRIVIALITÉ DES PRODUITS * A COEFFICIENTS CONSTANTS

Soit * une déformation (associative ou non) du produit ordinaire des fonctions de symbole $\exp [a(\lambda, \eta, \xi)]$ avec $a(\lambda, \eta, \xi) = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^s a_s(\eta, \xi)$.

(5.0) DÉFINITIONS ([I]).

(5.0.1) Le produit * est trivial s'il est équivalent au produit ordinaire des fonctions, c'est-à-dire s'il existe un opérateur différentiel formel T_λ (à coefficients quelconques, mais avec $T_0 = \text{Id}$) tel que

$$(5.0.2) \quad T_\lambda(u * v) = T_\lambda(u) \cdot T_\lambda(v)$$

Le corollaire (4.3) prouve qu'il n'y a pas unicité de T_λ .

(5.0.3) * est k -trivial si la relation (5.0.2) est vérifiée jusqu'à l'ordre k , c'est-à-dire s'il existe k opérateurs différentiels T_1, \dots, T_k tels que si on pose $T_\lambda = \text{Id} + \sum_{s=1}^k \lambda^s T_s$ la relation (5.0.2) soit vérifiée jusqu'à l'ordre k .

(5.1) PROPOSITION. — *Le produit * est k -trivial si et seulement si :*

$$(5.1.1) \quad a_h(\eta, \xi) = c_h + \theta_h(\eta, \xi), \quad 1 \leq h \leq k,$$

où c_h est une constante et $\theta_h : W^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une application \mathbb{R} -bilinéaire symétrique.

Dans ce cas si $\varphi_h(\eta) = c_h - \frac{1}{2}\theta_h(\eta, \eta)$ le symbole de l'opérateur T_λ peut être

$$\exp \left[\sum_{h=1}^k \lambda^h \varphi_h(\eta) \right].$$

Preuve.

(5.1.1) LEMME. — Soit

$$e(\lambda) = 1 + \sum_{h=1}^{\infty} e_h \lambda^h \quad \text{et} \quad d(\lambda) = 1 + \sum_{h=1}^{\infty} d_h \lambda^h$$

deux séries formelles de $\mathbb{C}[[\lambda]]$. On pose $E(\lambda) = \text{Log } e(\lambda)$ et $D(\lambda) = \text{Log } d(\lambda)$. On a

$$E(\lambda) = \sum_{h=1}^{\infty} E_h \lambda^h \quad \text{et} \quad D(\lambda) = \sum_{h=1}^{\infty} D_h \lambda^h.$$

Alors $e_h = d_h$ pour $1 \leq h \leq k$ si et seulement si $E_h = D_h$ pour $1 \leq h \leq k$.

Preuve du lemme. — Une récurrence immédiate montre que :

$$(\text{Log } [e(\lambda)])^{(h)} = \frac{P_h[e(\lambda), e'(\lambda), \dots, e^{(h)}(\lambda)]}{e(\lambda)^h}$$

où P_h est un polynôme de $(h + 1)$ variables. Donc si $e^{(h)}(0) = d^{(h)}(0)$ pour $1 \leq h \leq k$, on a $E^{(h)}(0) = D^{(h)}(0)$ pour $1 \leq h \leq k$.

Réciproquement si $E^{(h)}(0) = D^{(h)}(0)$, $1 \leq h \leq k$, le raisonnement est le même. On a $e(\lambda) = \exp E(\lambda)$ donc

$$e^{(h)}(\lambda) = Q_h[E'(\lambda), \dots, E^{(h)}(\lambda)] \exp E(\lambda)$$

où Q_h est un polynôme.

(5.1.2) LEMME. — * est k -trivial si et seulement si il existe k symboles $b_h(x, \eta)$, $1 \leq h \leq k$, tels que :

$$(5.1.3) \quad a_h(\eta, \zeta) + b_h(x, \eta + \zeta) = b_h(x, \eta) + b_h(x, \zeta), \quad 1 \leq h \leq k$$

Dans ce cas le symbole de l'opérateur T_λ peut être $\exp \left[\sum_{h=1}^k \lambda^h b_h(x, \eta) \right]$.

Preuve du lemme. — Soient T_1, T_2, \dots, T_k , k opérateurs différentiels de symboles respectifs $\sigma_1(x, \eta), \dots, \sigma_k(x, \eta)$, on pose

$$T_\lambda = \text{Id} + \sum_{h=1}^k \lambda^h T_h \quad \text{et} \quad \sigma(\lambda, x, \eta) = 1 + \sum_{h=1}^k \lambda^h \sigma_h(x, \eta).$$

On montre de la même façon que pour la proposition (4.2) que la relation (5.0.2) est vérifiée jusqu'à l'ordre k si et seulement si la relation suivante est vérifiée jusqu'à l'ordre k .

$$\exp [a(\lambda, \eta, \xi)]. \sigma(\lambda, x, \eta + \xi) = \sigma(\lambda, x, \eta). \sigma(\lambda, x, \xi).$$

On pose $b(\lambda, x, \eta) = \text{Log} [\sigma(\lambda, x, \eta)]$, on a $\sigma(\lambda, x, \eta) = \exp [b(\lambda, x, \eta)]$ avec

$$b(\lambda, x, \eta) = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda^h b_h(x, \eta)$$

et le lemme (5.1.1) permet de conclure.

Preuve de la proposition (5.1). — On a

$$a_h(\eta, \xi) = P_h(\eta) + Q_h(\xi) + \theta_h(\eta, \xi) + R_h(\eta, \xi)$$

où P_h et Q_h sont des polynômes sur W , $\theta_h : W^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une application

$$\mathbb{R}\text{-bilineaire et } R_h(\eta, \xi) = \sum_{|\alpha + \beta| \leq m} r_{\alpha, \beta} \eta^\alpha \xi^\beta \text{ un polynôme tel que}$$

$$\begin{cases} r_{0, \beta} = r_{\alpha, 0} = 0, & \text{pour tous les } q\text{-indices } \alpha \text{ et } \beta \\ r_{\alpha, \beta} = 0, & \text{pour } |\alpha| = |\beta| = 1. \end{cases}$$

i) Supposons que $*$ soit k -trivial, en différenciant par rapport à η dans la relation (5.1.3) et en faisant $\xi = 0$ dans le résultat on obtient $P'_h(\eta) = 0$, donc $P_h = \text{Cte}$, de même $Q_h = \text{Cte}$. On pose $c_h = P_h + Q_h$.

Si $R_h \neq 0$ soit $a_{\alpha, \beta} \eta^\alpha \xi^\beta$ un terme de R_h tel que $a_{\alpha, \beta} \neq 0$ et $|\alpha + \beta| = m$, avec par exemple $|\alpha| \geq 1$ et $|\beta| \geq 2$. Soient β' tel que $|\beta| = |\beta'| + 1$ (par exemple les $i^{\text{ième}}$ composantes de β et β' diffèrent d'une unité) et l'opérateur différentiel $\Omega = \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^\alpha \circ \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\beta'}$. En appliquant Ω aux deux membres de (5.1.3) on obtient :

$$c + K. \xi^i + \Omega b_h(x, \eta + \xi) = 0$$

où c et K sont des constantes, $K \neq 0$. D'où $-\Omega b_h(x, \xi) = c = c + K \xi^i$, absurde, donc $R_h = 0$. On déduit des relations (5.1.3) que θ_h est symétrique.

ii) Si a vérifie les relations (5.1.1) les relations (5.1.3) sont vérifiées avec

$$b_h(x, \eta) = \varphi_h(\eta) = c_h - \frac{1}{2} \theta_h(\eta, \eta).$$

(5.2) COROLLAIRE. — *Le produit de Moyal (ex. (3.2.2) et le produit # (ex. (3.2.3)) ne sont pas 1-triviaux.*

6. INVARIANCE DES PRODUITS *

On suppose dans ce chapitre que $W = \mathbb{R}^{2n}$ et que la déformation * n'est pas nécessairement à coefficients constants, son symbole est noté :

$$a(\lambda, x, \eta, \zeta) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^s a_s(x, \eta, \zeta)$$

(6.1) DÉFINITION ([I]). — Soit φ un élément de $C^\infty(W)$, on dit que * est φ -invariant si :

$$(6.1.1) \quad \{ \varphi, u * v \} = \{ \varphi, u \} * v + u * \{ \varphi, v \}, \quad \forall u, v \in C^\infty(W).$$

On note $INV(*)$ la sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Poisson $C^\infty(W)$ constituée des φ vérifiant (6.1.1).

(6.2) Remarque. — $\mathcal{S}(W)$ étant dense dans $C^\infty(W)$ on a :

$$INV(*) = \{ \varphi \in C^\infty(W), \{ \varphi, u * v \} = \{ \varphi, u \} * v + u * \{ \varphi, v \}, \forall u, v \in \mathcal{S}(W) \}$$

(6.3) Exemple. — Si * est le produit de Moyal, $INV(*)$ est l'algèbre de Lie des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 (cf. [I]).

$$(6.4) \text{ PROPOSITION. — Soit } p(\lambda, x, \eta, \zeta, \xi) = a(\lambda, x, \eta, \zeta)F(\xi, \eta + \zeta) - a(\lambda, x, \xi + \eta, \zeta)F(\xi, \eta) - a(\lambda, x, \eta, \xi + \zeta)F(\xi, \zeta).$$

$p(\lambda, x, \eta, \zeta, \xi)$ est par rapport à ξ le symbole d'un opérateur différentiel formel, noté $P_\lambda\left(\eta, \zeta, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, dépendant des paramètres η et ζ . φ est *-invariant si et seulement si :

$$P_\lambda\left(\eta, \zeta, \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi = \{ \varphi(\cdot), a(\lambda, \cdot, \eta, \zeta) \}, \quad \forall \eta, \zeta \in W.$$

Preuve. — Un calcul immédiat montre que pour u et v dans $\mathcal{S}(W)$ on a :

$$\begin{aligned} \{ \varphi, u * v \} &= \frac{i}{(2\pi)^{4n}} \int e^{i\langle x, \eta + \zeta \rangle} a(\lambda, x, \eta, \zeta) [(\eta_j + \zeta_j) \cdot \partial_{n+j} \varphi(x) \\ &\quad - (\eta_{n+j} + \zeta_{n+j}) \cdot \partial_j \varphi(x)] \hat{u}(\eta) \cdot \hat{v}(\zeta) d\eta \cdot d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^{4n}} \int e^{i\langle x, \eta + \zeta \rangle} \{ \varphi(x), a(\lambda, x, \eta, \zeta) \} \hat{u}(\eta) \hat{v}(\zeta) d\eta d\zeta. \end{aligned}$$

Le symbole de l'opérateur bidifférentiel formel $(u, v) \rightarrow \{ \varphi, u * v \}$ est :

$$ia(\lambda, x, \eta, \zeta) [(\eta_j + \zeta_j) \partial_{n+j} \varphi(x) - (\eta_{n+j} + \zeta_{n+j}) \partial_j \varphi(x)] + \{ \varphi(x), a(\lambda, x, \eta, \zeta) \},$$

c'est par rapport à φ un opérateur différentiel formel dont le symbole s'écrit $a(\lambda, x, \eta, \zeta)F(\eta + \zeta, \xi) - i \langle H, \xi \rangle$, où $H(\lambda, x, \eta, \zeta)$ est le champ de vecteurs hamiltonien associé à $x \rightarrow a(\lambda, x, \eta, \zeta)$.

On a :

$$\{w, u\} \hat{\eta} = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int \hat{w}(\eta - \xi) \hat{u}(\xi) F(\xi, \eta) d\xi,$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} \{w, u\} * t(x) &= \frac{-1}{(2\pi)^{4n}} \int \int e^{i\langle x, \eta + \zeta \rangle} \hat{u}(\eta) \hat{v}(\zeta) \\ &\quad \times \left[\frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} F(\xi, \eta) a(\lambda, x, \xi + \eta, \zeta) \hat{w}(\xi) d\xi \right] d\eta d\zeta. \end{aligned}$$

L'expression entre crochets est, par rapport à w , un opérateur différentiel formel noté $Q_\lambda\left(\eta, \zeta, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ de symbole $a(\lambda, x, \xi + \eta, \zeta) F(\xi, \eta)$. On a :

$$\{w, u\} * v(x) = \frac{-1}{(2\pi)^{4n}} \int \int e^{i\langle x, \eta + \zeta \rangle} Q\left(\lambda, \eta, \zeta, \frac{\partial}{\partial x}\right) w \cdot \hat{u}(\eta) \hat{v}(\zeta) d\eta d\zeta.$$

On peut passer à la limite dans cette relation, si $w \in \mathcal{S}(W)$ tend vers φ dans $C^\infty(W)$ on obtient :

$$\{\varphi, u\} * v(x) = \frac{-1}{(2\pi)^{4n}} \int \int e^{i\langle x, \eta + \zeta \rangle} Q\left(\lambda, \eta, \zeta, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi(x) \cdot \hat{u}(\eta) \hat{v}(\zeta) d\eta d\zeta.$$

On fait un calcul semblable pour $u * \{\varphi, v\}$, d'où la conclusion.

(6.5) COROLLAIRE. — $\varphi \in \text{INV}(\#)$ si et seulement si $\varphi(p, q) = \chi(p, q) + \theta(p, q)$ où χ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 et $\theta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ une application bilinéaire, (p, q) désignant la variable dans $W = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Preuve. — Le symbole de $\#$ est

$$\exp[\lambda G(\eta, \xi)] = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda^s}{s!} [G(\eta, \xi)]^s$$

(cf. (3.2.3)) et le symbole de l'opérateur P_λ de la proposition (6.4) est

$$p(\lambda, \eta, \zeta, \xi) = e^{\lambda G(\eta, \xi)} \{ F(\xi, \eta) [1 - e^{\lambda G(\xi, \zeta)}] + F(\xi, \zeta) [1 - e^{\lambda G(\eta, \xi)}] \}.$$

Soit $Q_\lambda\left(\eta, \zeta, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ l'opérateur différentiel formel, dépendant des paramètres η et ζ , de symbole :

$$q(\lambda, \eta, \zeta, \xi) = F(\xi, \eta) [1 - e^{\lambda G(\xi, \zeta)}] + F(\xi, \zeta) [1 - e^{\lambda G(\eta, \xi)}]$$

D'après la proposition (6.4), $\varphi \in \text{INV}(\#)$ si et seulement si $Q_\lambda\left(\eta, \zeta, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi = 0$.

On a $Q_\lambda = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^s Q_s$ avec $q(\lambda, \eta, \zeta, \xi) = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^s q_s(\eta, \zeta, \xi)$, q_s est le symbole de Q_s et on a :

$$(6.4.1) \quad q_s(\eta, \zeta, \xi) = \frac{1}{s!} F(\eta, \xi) [G(\xi, \zeta)]^s + \frac{1}{s!} F(\xi, \zeta) [G(\eta, \xi)]^s$$

en particulier, puisque $F(\eta, \xi) = G(\eta, \xi) - G(\xi, \eta)$, on a :

$$q_1(\eta, \zeta, \xi) = G(\zeta, \xi)G(\eta, \xi) - G(\xi, \eta)G(\zeta, \xi)$$

d'où

$$Q_1\left(\eta, \zeta, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{i,j} \left(\eta^i \zeta^j \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j} - \eta^{n+i} \zeta^{n+j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \right)$$

et en choisissant correctement η et ζ on voit que $Q_1\left(\eta, \zeta, \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi = 0$ si et

seulement si quels que soient les indices i et j , on a $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_i \partial q_j} = 0$

ce qui entraîne que φ est de la forme énoncée dans le théorème. Réciproquement si φ est un polynôme du second degré, solution de $Q_1 \cdot \varphi = 0$, on déduit de (6.4.1) que $Q_s \cdot \varphi = 0$ pour $s \geq 2$, car dans ce cas $q_s(\eta, \zeta, \xi)$ est homogène de degré supérieur ou égal à 3 en ξ .

Notons H_n l'algèbre de Lie des polynômes du premier degré. Dans les exemples (6.3) et (6.5) on a $H_n \subset INV(*)$, il est connu que cette inclusion caractérise les déformations à coefficients constants. On peut le prouver à partir de la proposition (6.4). En effet soit p le symbole de la proposition (6.4). On a :

$$p(\lambda, x, \eta, \zeta, \xi) = F(\eta, \xi)[a(\lambda, x, \xi + \eta, \zeta) - a(\lambda, x, \eta, \zeta)] + F(\zeta, \xi)[a(\lambda, x, \eta, \xi + \zeta) - a(\lambda, x, \eta, \zeta)]$$

La formule de Taylor montre que $p(\lambda, x, \eta, \zeta, \xi)$ est d'ordre supérieur ou égal à 2 en ξ , donc pour tout élément φ de H_n , $P_\lambda\left(\eta, \zeta, \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi = 0$.

i) Si $H_n \subset INV(*)$ on déduit de ce qui précède et de la proposition (6.4) que $\{\varphi(\cdot), a(\lambda, \cdot, \eta, \zeta)\} = 0$ pour tout polynôme φ du 1^{er} degré, donc a est indépendant de x .

ii) Si a est indépendant de x on déduit de la proposition (6.4) que $\varphi \in INV(*)$ si et seulement si $P_\lambda\left(\eta, \zeta, \frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot \varphi = 0$, d'où la conclusion.

7. DÉFORMATIONS DE L'ALGÈBRE DE POISSON $C^\infty(W)$

Soit $[\cdot, \cdot]_\lambda$ un opérateur bidifférentiel formel à coefficients constants de symbole $a(\lambda, \eta, \xi)$.

(7.1) PROPOSITION. — Pour que $[\cdot, \cdot]_\lambda$ soit une déformation de Poisson de $C^\infty(W)$ il faut et il suffit que :

$$(7.1.1) \quad \begin{cases} i) & a(0, \eta, \xi) = -F(\eta, \xi) \\ ii) & a(\lambda, \eta, \xi) = -a(\lambda, \xi, \eta) \\ iii) & \int a(\lambda, \eta, \xi)a(\lambda, \eta + \xi, \zeta) = 0. \end{cases}$$

Le signe \int signifie que l'on somme sur les permutations circulaires de (η, ξ, ζ) .

Preuve. — Semblable à celle de la proposition (3.1).

(7.2) *Exemples.*

(7.2.1) Soit $*$ la déformation de l'algèbre associative définie dans l'exemple (3.2.1). On peut, par antisymétrisation, définir une déformation de Poisson à partir de $*$ [I]. Pour cela on pose $[u, v]_\lambda = \frac{C}{\lambda}(u * v - v * u)$. On obtient un opérateur bidifférentiel formel dont le symbole est :

$$(7.2.2) \quad a(\lambda, \eta, \xi) = \frac{C e^{c(\lambda)}}{\lambda} [e^{\varphi(\lambda, \eta, \xi)} - e^{\varphi(\lambda, \xi, \eta)}].$$

Si $C[\varphi_1(\eta, \xi) - \varphi_1(\xi, \eta)] = -F(\eta, \xi)$ le symbole (7.2.2) vérifie les conditions (7.1.1).

(7.2.3) Si $*$ est le produit de Moyal on obtient par antisymétrisation le crochet de Moyal-Vey ([I]) dont le symbole est :

$$a_1(\lambda, \eta, \xi) = \frac{1}{\lambda} \operatorname{sh} [\lambda F(\eta, \xi)] \quad \left(\text{avec } C = \frac{1}{2} \right).$$

(7.2.4) A partir de $\#$ on obtient une déformation de Poisson de symbole

$$a_2(\lambda, \eta, \xi) = \frac{1}{\lambda} \{ \exp [\lambda G(\xi, \eta)] - \exp [\lambda G(\eta, \xi)] \}.$$

Cette déformation donne le symbole du commutateur de deux opérateurs pseudo-différentiels.

(7.2.5) Soit $G_i : W \times W \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \dots$, une suite d'applications \mathbb{R} -bilinéaires alternées et $f(Z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k Z^k$ une série formelle. On pose

$$a_3(\lambda, \eta, \xi) = -F(\eta, \xi) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda^k G_k(\eta, \xi).$$

(On obtient ainsi les déformations 1-différentiables à coefficients constants [4]).

(7.3) *Remarque.* — Soit $[u, v]_\lambda = \{u, v\} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} Q_k(u, v)$ une défor-

mation de Poisson. A toute série formelle $f(Z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!} Z^k$ non constante on associe l'opérateur bidifférentiel formel

$$\Phi_{\lambda}(u, v) = \{ u, v \} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!} \lambda^k Q_k(u, v).$$

On cherche les fonctions f telles que Φ_{λ} soit une déformation de Poisson. L'exemple (7.2.5) prouve, qu'en général, il n'y a pas unicité, cependant on peut parfois affirmer l'unicité ; c'est le cas du crochet de Moyal-Vey ([I]), c'est aussi le cas de la déformation de l'exemple (7.2.4) (unicité à un changement linéaire de variable près).

8. TRIVIALITÉ DES DÉFORMATIONS DE L'ALGÈBRE DE POISSON $C^{\infty}(W)$

Soit $[u, v]_{\lambda}$ une déformation (à coefficients constants) du crochet de Poisson de symbole

$$a(\lambda, \eta, \xi) = -F(\eta, \xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k a_k(\eta, \xi)$$

(8.1) DÉFINITION ([I]). — La déformation $[u, v]_{\lambda}$ est triviale si elle est équivalente au crochet de Poisson ; c'est-à-dire s'il existe un opérateur différentiel formel T_{λ} tel que : $T_0 = \text{Id}$ et

$$(8.1.1) \quad T_{\lambda}([u, v]_{\lambda}) = \{ T_{\lambda}u, T_{\lambda}v \}.$$

La déformation $[u, v]_{\lambda}$ est k -triviale si cette relation est vérifiée jusqu'à l'ordre k , c'est-à-dire s'il existe k opérateurs différentiels T_1, \dots, T_k tels

que si on pose : $T_{\lambda} = \text{Id} + \sum_{h=1}^k \lambda^h T_h$ la relation (8.1.1) est vérifiée jusqu'à l'ordre k .

(8.2) PROPOSITION. — Pour que la déformation $[u, v]_{\lambda}$ soit k -triviale par l'intermédiaire d'un opérateur T_{λ} de symbole $b(\lambda, x, \eta)$ il faut et il suffit que la relation suivante soit vérifiée jusqu'à l'ordre k .

$$(8.2.1) \quad a(\lambda, \eta, \xi)b(\lambda, x, \eta + \xi) = -F(\eta, \xi)b(\lambda, x, \eta)b(\lambda, x, \xi) + \{ b(\lambda, x, \eta), b(\lambda, x, \xi) \}_x + ib(\lambda, x, \eta)F[\eta, \text{grad}_x b(\lambda, x, \xi)] - ib(\lambda, x, \xi)F[\xi, \text{grad}_x b(\lambda, x, \eta)].$$

Preuve. — Les calculs sont similaires à ceux effectués dans les preuves des propositions (3.1) et (6.4).

(8.3) *Remarque.* — Soit $b(\lambda, x, \eta) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k b_k(x, \eta)$. La relation (8.2.1) s'écrit à l'ordre 1 :

$$(8.3.1) \quad F(\xi, \eta)[b_1(x, \eta + \xi) - b_1(x, \eta) - b_1(x, \xi)] + a_1(\eta, \xi) \\ = iF(\eta, \text{grad}_x b_1(x, \xi)) - iF(\xi, \text{grad}_x b_1(x, \eta)).$$

(8.4) **COROLLAIRE.** — La déformation $[u, v]_\lambda = \frac{-1}{\lambda}(u \# v - v \# u)$ est 1-triviale.

Preuve. — On a $a_2(\lambda, \eta, \xi) = -F(\eta, \xi) + \lambda \alpha_1(\eta, \xi) + \lambda^2 \alpha_2(\eta, \xi) + \dots$ avec

$$\alpha_1(\eta, \xi) = -\frac{1}{2} F(\eta, \xi) \sum_{i=1}^n (\eta^{n+i} \xi^i + \eta^i \xi^{n+i}).$$

Posons $c(\eta) = -\frac{1}{2} \eta^{n+i} \eta^i$, alors

$$(8.4.1) \quad \alpha_1(\eta, \xi) = F(\eta, \xi)[c(\eta + \xi) - c(\eta) - c(\xi)]$$

et (8.4.1) n'est autre que (8.3.1).

(8.5) *Remarque.* — Les conditions pour qu'une déformation de Poisson soit triviale peuvent s'exprimer en terme de cohomologie de Chevalley de l'algèbre de Poisson $C^\infty(W)$ (cf. [1], [2], [4]). La relation (8.2.1) n'est autre que l'écriture, à l'aide de symboles, de ces relations (pour les déformations à coefficients constants).

Par exemple, soit

$$[u, v]_\lambda = \{u, v\} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} Q_k(u, v)$$

une déformation de Poisson ; cette déformation est 1-triviale si et seulement si Q_1 est un deux-cocycle exact pour la cohomologie de Chevalley ([2], [4]), c'est-à-dire s'il existe un opérateur différentiel R tel que $\partial R = \frac{1}{2} Q_1$, où ∂ est l'opérateur cobord. On peut redémontrer le corollaire (8.4) ; si $[u, v]_\lambda$ est la déformation de Poisson de l'exemple (7.2.5), on a :

$$Q_1(u, v) = \partial_{n+i, n+j} v \cdot \partial_{i, j} u - \partial_{i, j} v \cdot \partial_{n+i, n+j} u$$

alors $\partial R = \frac{1}{2} Q_1$ avec $R(u) = \frac{1}{2} \partial_{i, n+i} u$ et on remarque que le symbole de R est $c(\eta) = -\frac{1}{2} \eta^{n+i} \eta^i$.

(8.6) **COROLLAIRE.** — $[u, v]_\lambda = \frac{-1}{\lambda}(u \# v - v \# u)$ est non triviale à l'ordre 2.

Preuve. — Avec les notations de la preuve du corollaire (8.4) :

$$\alpha_2(\eta, \xi) = -\frac{1}{3!} F(\eta, \xi) [G(\eta, \xi)^2 + G(\eta, \xi)G(\xi, \eta) + G(\xi, \eta)^2]$$

Si $[u, v]_\lambda$ est 2-trivial, d'après la proposition (8.2) il existe deux symboles $b_1(x, \eta)$ et $b_2(x, \eta)$ tels que la relation (8.2.1) soit vérifiée à l'ordre 2.

$b_1(x, \eta)$ est le symbole d'un opérateur différentiel S , et la condition (8.2.1) peut, à l'ordre 1, s'écrire $\partial S = \frac{1}{2} Q_1$. Si R est l'opérateur différentiel

de la remarque (8.5) on a $\partial(S - R) = 0$, donc $S - R$ est une dérivation de l'algèbre de Poisson $C^\infty(W)$ et on peut l'écrire $S - R = \mathcal{L}(Z) + K$ où Z est une transformation symplectique conforme et K une constante (cf. [4]).

Alors $b_1(x, \eta) = c(\eta) + d(x, \eta)$ où $d(x, \eta) = \sum_{i=1}^{2n} d_i(x)\eta^i + K$ est un poly-

nôme du premier degré en η à coefficients dans $C^\infty(W)$. La relation (8.2.1) s'écrit à l'ordre 1 :

$$(8.6.1) \quad F(\eta, \text{grad}_x d(x, \xi)) = F(\xi, \text{grad}_x d(x, \eta))$$

En tenant compte de la relation (8.6.1), la relation (8.2.1) s'écrit à l'ordre 2 :

$$(8.6.2) \quad -\frac{1}{6} [G(\eta, \xi)^3 - G(\xi, \eta)^3] - \frac{1}{2} [G(\eta, \xi)^2 - G(\xi, \eta)^2] b_1(x, \eta + \xi) \\ = F(\eta, \xi) [b_2(x, \eta + \xi) - b_2(x, \eta) - b_2(x, \xi)] + \{ d(x, \eta), d(x, \xi) \} \\ - F(\eta, \xi) b_1(x, \eta) b_1(x, \xi) + iF(\eta, \text{grad}_x b_2(x, \xi)) - iF(\xi, \text{grad}_x b_2(x, \eta)) \\ + iF(\eta, \text{grad}_x b_1(x, \xi)) [b_1(x, \eta) - b_1(x, \xi)].$$

Soit

$$-\frac{1}{12} (\xi^{n+1} \eta^1)^3 - \frac{1}{4} (\xi^{n+1})^2 (\eta^1)^3 [\eta^{n+1} - 2d_1(x)] \\ - \frac{1}{4} (\xi^{n+1})^3 (\eta^1)^2 [\xi^1 - 2d_{n+1}(x)] \\ - (\xi^{n+1} \eta^1)^2 \left[\frac{\xi^1 \eta^{n+1}}{2} + \frac{\varphi(\eta + \xi, \eta + \xi)}{4} - d_1(x) \xi^1 - d_{n+1}(x) \eta^{n+1} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \psi(x, \eta + \xi) + d_1(x) d_{n+1}(x) \right] + P(x, \eta, \xi) \\ = F(\eta, \xi) [b_2(x, \eta + \xi) - b_2(x, \eta) - b_2(x, \xi)] + \{ d(x, \eta), d(x, \xi) \} \\ + iF(\eta, \text{grad}_x b_2(x, \xi)) - iF(\xi, \text{grad}_x b_2(x, \eta)) \\ + iF(\xi, \text{grad}_x b_1(x, \eta)) b_1(x, \eta) - iF(\eta, \text{grad}_x b_1(x, \xi)) b_1(x, \xi)$$

où

$$\varphi(\eta, \xi) = \sum_{j=2}^n \eta^{n+j} \xi^j, \quad \psi(x, \eta) = \sum_{\substack{j \neq 1 \\ j \neq n+1}} d_j(x) \eta^j + K,$$

et où $P(x, \eta, \xi)$ est un polynôme en (η, ξ) à coefficients dans $C^\infty(W)$ dont les termes en $(\xi^{n+1})^p(\eta^1)^q$ sont tels que $p < 2$ ou $q < 2$. On dérive la dernière relation deux fois par rapport à ξ^{n+1} et η^1 et on obtient une relation de la forme

$$\begin{aligned} & -3\xi^{n+1}\eta^1 - 3\eta^1[\eta^{n+1} - 2d_1(x)] - 3\xi^{n+1}[\xi^1 - 2d_{n+1}(x)] \\ & -4\left[\frac{\xi^1\eta^{n+1}}{2} + \frac{\varphi(\eta + \xi, \eta + \xi)}{4} - d_1(x)\xi^1 - d_{n+1}(x)\eta^{n+1} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}\psi(x, \eta + \xi) + d_1(x)d_{n+1}(x)\right] \\ & = F(\eta, \xi)\psi_1(x, \eta + \xi) + \eta^1\psi_2(x, \eta + \xi) + \xi^{n+1}\psi_3(x, \eta + \xi) + \psi_4(x, \eta + \xi). \end{aligned}$$

En faisant $\eta = -\xi$ dans la relation précédente on obtient une relation de la forme :

$$-\eta^1\eta^{n+1} + \eta^1f(x) + \eta^{n+1}g(x) + h(x) = 0 \quad \forall \eta^1, \eta^{n+1}, x,$$

ce qui est absurde.

On a vu dans l'étude la trivialité des déformations de l'algèbre associative $C^\infty(W)$ qu'on pouvait se limiter à ne considérer que des opérateurs T_λ à coefficients constants (prop. (5.1)). On va voir qu'il n'en est pas de même pour les déformations du crochet de Poisson.

(8.7) DÉFINITION. — La déformation $[u, v]_\lambda$ est C -triviale à l'ordre k , si elle est k -triviale et si les opérateurs T_1, \dots, T_k de la définition (8.1) peuvent être choisis à coefficients constants.

(8.8) PROPOSITION. — Soit

$$a_3(\lambda, \eta, \xi) = -F(\eta, \xi) + \sum_{h=1}^{\infty} \lambda^h G_h(\eta, \xi)$$

(où $G_h : W^2 \rightarrow \mathbb{C}$ est bilinéaire alterné) le symbole de l'exemple (7.2.5). La déformation associée à $a_3(\lambda, \eta, \xi)$ est C -triviale à l'ordre k si et seulement si il existe k constantes $K_1, \dots, K_k \in \mathbb{C}$ telles que :

$$(8.8.1) \quad G_h(\eta, \xi) = K_h F(\eta, \xi), \quad \forall \eta, \xi \in W, \quad 1 \leq h \leq k.$$

Preuve. — Pour des symboles b_h indépendants de x la relation (8.2.1) s'écrit à l'ordre $m \leq k$.

$$(8.8.2) \quad G_m(\eta, \xi) + \sum_{\substack{h+l=m \\ h < m}} G_h(\eta, \xi) b_l(\eta + \xi) = -F(\eta, \xi) \sum_{h+l=m} b_h(\eta) b_l(\xi)$$

où $G_0(\eta, \xi) = -F(\eta, \xi)$.

i) Si la relation (8.8.1) est vérifiée alors la relation (8.8.2) l'est avec $b_h(\eta) = -K_h$, pour $1 \leq h \leq m \leq k$, et la déformation est C -triviale à l'ordre k .

ii) La réciproque se démontre facilement par récurrence. On remarque que si le polynôme $G_h(\eta, \xi)$ est divisible par le polynôme $F(\eta, \xi)$, alors il existe une constante $K_h \in \mathbb{C}$ telle que $G_h(\eta, \xi) = K_h F(\eta, \xi)$ car G_h et F_h ont même degré.

(8.9) COROLLAIRE. — *La trivialité n'entraîne pas la C-trivialité.*

Preuve. — Posons $a(\lambda, \eta, \xi) = -F(\eta, \xi) + \lambda G_1(\eta, \xi)$ avec

$$G_1(\eta, \xi) = \eta^1 \xi^{n+1} - \eta^{n+1} \xi^1 \quad \text{et} \quad \dim W = 2n > 2.$$

D'après l'exemple (7.2.5) $a(\lambda, \eta, \xi)$ finit une déformation de Poisson qui n'est pas C-triviale à l'ordre 1 (prop. 8.8). Elle est cependant 1-triviale car la relation (8.3.1) est vérifiée avec $b_1(x, \eta) = ix_1 \eta^1$ où $x = (x_1, \dots, x_{2n}) \in W$.

RÉFÉRENCES

- [1] F. BAYEN, M. FLATO, C. FRONSDAL, A. LICHNEROWICZ, D. STERNHEIMER, Deformation theory and quantification I. *Deformations of Symplectic structures, Ann. of Phys.*, t. **111**, 1978, p. 61-110.
- [2] C. CHEVALLEY, S. EILENBERG, Cohomologie theory of Lie groups and Lie Algebras, *Trans. Amer. Soc.*, t. **63**, 1948, p. 85-124.
- [3] L. HORMANDER, Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations, *Amer. Math. Soc., Symp. in pure math.*, t. **10**, 1966.
- [4] M. FLATO, A. LICHNEROWICZ, D. STERNHEIMER, Déformations 1-différentiables des algèbres de LIE attachées à une variété symplectique ou de contact, *Compositio Mathematica*, Vol. **31**, Fasc. **1**, 1975, p. 47-82.
- [5] A. LICHNEROWICZ, Dérivations et automorphismes pour des algèbres formelles associées par déformation à une variété symplectique, *C. R. A. S.*, Paris, t. **286**, 9 janvier 1978.

(Manuscrit reçu le 13 mars 1979)