ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

BERNARD LÉAUTÉ

Sur l'électrostatique dans l'espace-temps de Schwarzschild

Annales de l'I. H. P., section A, tome 29, nº 3 (1978), p. 273-284

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1978__29_3_273_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XXIX, n° 3, 1978, p. 273-284. *Physique théorique.*

Sur l'électrostatique dans l'espace-temps de Schwarzschild

par

Bernard LÉAUTÉ

Équipe de Recherche Associée au C. N. R. S. n° 533,
Laboratoire de Physique Théorique. Institut Henri Poincaré,
11, rue Pierre-et-Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — Dans cet article nous considérons certains aspects de l'électrostatique dans l'espace-temps de Schwarzschild en nous plaçant successivement dans deux cadres théoriques possibles. Le potentiel électrostatique engendré par une source électrique ponctuelle en mouvement adiabatique très lent vers l'horizon est, en particulier, étudié. Dans le premier contexte, le plus couramment accepté, toute contribution autre que monopolaire tend à disparaître de l'expression du potentiel, au fur et à mesure que la source s'approche de l'horizon; à terme, un trou noir de Reissner-Nordstrom est formé. Dans le second (L. Bel [*1*]) toute possibilité de trou noir est éliminée, par contre, il existe une singularité ponctuelle (x_0) ; nous montrons qu'à celle-ci peuvent être associés, au terme du lent mouvement précité, un potentiel monopolaire électrique, un potentiel dipolaire...

ABSTRACT. — In this article, some aspects of electrostatic in the Schwarzschild space-time are successively considered according to two possible theoretical points of view. The electrostatic field generated by a punctual electric source, moving very slowly towards the horizon, is studied. From the first point of view, the most usually accepted, all the multipole contributions except the monopole tend to disappear of the electric field expression as the source comes near the horizon. Finally a Reissner-Bordstrom black hole is produced. From the second point of view (L. Bel [*1*]) the possibility of occurence of black hole is excluded, but there exists a punctual singularity (x_0). We show that, at the end of the slow motion mentionned above, a monopole electric field, a dipole electric field... can be associated to that singularity (x_0).

INTRODUCTION

L'étude de l'électromagnétisme dans l'espace-temps de Schwarzschild donne un moyen pour préciser la structure de cet espace-temps, et, par suite, améliorer la compréhension de la situation physique qu'il décrit. Cependant les conclusions que l'on peut tirer de l'étude des grandeurs électromagnétiques afférentes à tel ou tel phénomène particulier, ne sont pas univoques et peuvent conduire à des interprétations diverses suivant le point de vue retenu quant à la nature de la singularité de Schwarzschild et aux considérations subséquentes — éventuelles — relatives aux « trous noirs ». L'objet de la présente étude est précisément d'illustrer cet état de choses. Pour ce faire, on va considérer quelques exemples particulièrement simples : la charge électrique ponctuelle, le dipôle électrique pontuel et voir à quelles déductions donne lieu l'examen des potentiels et champ électriques dûs à ces sources tout d'abord en nous plaçant dans le cadre théorique le plus couramment retenu puis ensuite en nous référant à une autre approche théorique, initialement développée par L. Bel [*1*].

1. CHAMP ÉLECTROSTATIQUE ET « TROU NOIR »

1.1. Source monopolaire électrique ponctuelle

Nous envisageons l'espace-temps de Schwarzschild, dont la métrique, dans sa formulation habituelle, s'écrit :

$$(1.1)\quad ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\,; \qquad (\mathrm{G} = c = 1)$$

et considérons une charge électrique ponctuelle q, au repos, en un point P_0 $(r = r_0,\ \theta = 0,\ \varphi = 0)$ extérieur à l'horizon $(r_0 > 2m)$. L'expression du potentiel électrostatique V, solution des équations de Maxwell écrites en se référant à (1.1), a été obtenue sous forme de séries de multipôles par Cohen et Wald [*2*], Hanni et Ruffini [*3*], et sous forme analytique close par Linet [*4*]; soit :

$$(1.2)\quad \mathrm{V}(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) = \frac{q}{r_0 r}\left\{ m + \frac{(r - m)(r_0 - m) - m^2 \cos\theta}{[(r - m)^2 + (r_0 - m)^2 - 2(r - m)(r_0 - m)\cos\theta - m^2 \sin^2\theta]^{1/2}} \right\}.$$

L'étude de cette quantité conduit à observer que :

a) Le potentiel électrostatique $\mathrm{V}(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0)$, ainsi que le champ électrique F_{0i} qui en dérive, sont réguliers en tout point y compris ceux de l'horizon, hormis le lieu de la charge bien sûr;

b) Le potentiel électrostatique $V(P, P_0)$ pourvu en général de la symétrie axiale, tend à admettre la symétrie sphérique lorsque le point P_0, support de la charge, tend à se rapprocher de l'horizon; soit en abrégé :

$$r_0 \to 2m \Rightarrow V(P, P_0) \to \frac{q}{r}. \tag{1.3}$$

Les conclusions que l'on tire habituellement de ces propriétés (du potentiel V) sont : (*a*) que l'horizon de Schwarzschild n'est pas perturbé; (*b*) qu'un « trou noir » de Reissner-Nordström est formé, au terme du lent mouvement de la charge q vers l'horizon. Les paramètres caractéristiques de ce « trou noir » étant la masse m de Schwarzschild et la charge q. Il importe de noter que ces conclusions valent seulement sous l'hypothèse que le phénomène électromagnétique envisagé constitue une perturbation infiniment faible dont on retient l'incidence seulement au premier ordre (en q), l'apport énergétique, proportionnel à q^2, se trouvant ainsi tout à fait négligé.

1.2. Source dipolaire

Examinons maintenant, toujours dans le même esprit, le cas du dipôle électrique ponctuel, dans l'espace-temps de Schwarzschild. A partir du potentiel V_q (P, P_0) noté en (1.1), on peut, par une procédure bien connue, former l'expression du potentiel V_d (P, P_0) relatif à un dipôle électrique pontuel localisé en P_0 ($r = r_0 > 2m$, $\theta = 0$, $\varphi = 0$). Tout naturellement, il y a lieu de requérir que la grandeur du moment dipolaire électrique soit, dans l'espace-temps de Schwarzschild, une constante pure, indépendante du lieu où est situé le dipôle. Il résulte de la formulation de cette requête que les composantes du moment dipolaire $\vec{d}$ contiennent un facteur proportionnel à ($r_0 - 2m$) et, de ce fait, tendent ainsi que le potentiel V_d (P, P_0) à s'annuler lorsque le point P_0, support du dipôle, s'approche de l'horizon. On constate ainsi la disparition à l'horizon de toute source dipolaire et multipolaire.

2. CHAMP ÉLECTROSTATIQUE. ESPACE $\overline{V}_3$. SINGULARITÉ (x_0)

2.1. Espace $\overline{V}_3$. Singularité (x_0)

Après avoir analysé précédemment quelques-uns des aspects de l'électromagnétisme dans l'espace-temps de Schwarzschild à la lumière des conceptions théoriques de mise actuellement, nous allons voir maintenant qu'une autre analyse des phénomènes mentionnés est possible, fondée sur une approche théorique différente. Celle-ci, initialement élaborée par L. Bel [*1*], consiste, dans la situation qui nous occupe, à raisonner à partir du cadre géométrique tridimensionnel de l'espace quotient V_3 muni de la métrique $\bar{g}$, conforme à la métrique quotient $\widehat{g}$ déduite de la métrique d'espace-temps de Schwarzschild; le facteur de conformité étant $\xi^2 \equiv |\vec{\xi}|^2$, $\vec{\xi}$ désignant le vecteur de Killing temporel générateur du groupe d'isométries. Dans des coordonnées adaptées à $\vec{\xi}$, comme (t, r, θ, φ) le sont, on a $\xi^2 = -g_{00}$ et par suite la métrique d'espace déduite de (1.1) s'écrit :

$$d\bar{s}^2 = dr^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{2.1}$$

On définit maintenant, suivant [*1*], l'espace métrique (V_3, d) comme la sous-variété ouverte V_3 des points x de R_3 tels que $r > 2m$, munie de la distance d canoniquement associée à la métrique riemannienne définie positive (2.1). Cet espace métrique est incomplet; ceci se voit en considérant les suites de Cauchy :

a) les unes : (x_m), telles qu'il existe une valeur k telle que pour tout $n > k$ on ait $r_n > a > 2m$, convergent vers des points de V_3;

b) les autres : (x_n), telles que pour tout $\eta > 0$ il existe un entier n tel que $r_n - 2m < \eta$, ne convergent pas mais sont toutes équivalentes deux à deux, de ce fait elles déterminent une seule classe d'équivalence (x_0). Par suite l'espace métrique $(\bar{V}_3, \bar{d})$ complété de (V_3, d) contient un seul point additionnel x_0 tel que

$$\bar{d}(x, x_0) \equiv \lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = r - 2m \quad \text{quel que soit} \quad x \in V_3. \tag{2.2}$$

L'espace métrique complet $(\bar{V}_3, \bar{d})$ peut être muni d'une structure différentiable compatible avec celle de (V_3, d). Pour ce faire, il suffit de définir une carte locale (B, Φ) : B étant une boule ouverte centrée en x_0 et de rayon b, Φ un homéomorphisme de B sur la boule euclidienne de centre 0. Nous définissons Φ par

$$\begin{aligned} \Phi : x_0 &\to 0 \{ 0, 0, 0 \}; \\ x &\to y \{ y^1 = u \sin\theta \sin\varphi,\ y^2 = u \sin\theta\cos\varphi,\ y^3 = u\cos\theta \} \end{aligned} \tag{2.3}$$

où u est déduit de :

$$r - 2m = f(u); \tag{2.4}$$

$f(u)$ étant définie en requérant que $\bar{g}_{\{y\}}$, le déterminant de la métrique (2.1) rapportée au système de coordonnées $\{ y \}$, vérifie :

$$\bar{g}_{\{y\}} = 1 \quad , \quad \text{en tout point de } V_3(^1). \tag{2.5}$$

(1) Si l'on requiert la satisfaction de (2.5) seulement pour $u \to 0$ et $u \to \infty$, alors on a :

$$r - 2m = \frac{u^{3/2}}{(u + m)^{1/2}}$$

La relation correspondante est

$$f'f(f+2m) = u^2 \quad , \quad \left(\text{où } f' \equiv \frac{df}{du}\right) ; \tag{2.6}$$

elle conduit, par une quadrature suivie de la résolution d'une équation algébrique du troisième degré, à la connaissance explicite de $f(u)$. Celle-ci n'est pas nécessaire pour la suite, le comportement au voisinage de l'origine x_0 suffit; il est le suivant :

$$f(u) \underset{u\to 0}{\simeq} \frac{u^{3/2}}{(3m)^{1/2}} + \ldots \tag{2.7}$$

Ajoutons que pour $u \to \infty$ on a :

$$\frac{f(u)}{u} \to 1, \tag{2.7 bis}$$

de ce fait le système de coordonnées $\{ y \}$ est compatible avec le comportement asymptotiquement euclidien du $d\bar{s}^2$.

La métrique (2.1) rapportée aux coordonnées (u, θ, φ) — d'un maniement plus aisé que celui des $\{ y^i \}$ — s'écrit :

$$\begin{gathered} d\bar{s}^2 = f'^2(u)du^2 + f(u)[f(u) + 2m](d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \\ \sqrt{\bar{g}} = u^2 \sin\theta. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Le point x_0 est singulier pour la structure riemannienne de $\bar{V}_3$.

2.2. Source monopolaire électrique, ponctuelle et singularité (x_0)

On revient maintenant à l'électromagnétisme. Dans l'espace-temps V_4 les équations de Maxwell s'écrivent localement

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.9}$$

avec $F_{\mu\nu}$, le tenseur champ électromagnétique, A_ν, le quadri-potentiel, et J_ν la densité de courant. Nous ne nous intéressons ici qu'à l'électrostatique; du système précédent, il subsiste alors :

$$\nabla_i F^{0i} = J^0, \qquad F_{0i} = -\partial_i V \tag{2.10}$$

avec V le potentiel électrostatique.

En se référant à la métrique d'espace $(\bar{V}_3)$ on peut écrire :

$$\nabla_i F^{0i} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i(\sqrt{-g}F^{0i}) = \frac{\xi^2}{\sqrt{\bar{g}}}\partial_i\left(\xi^{-2}\sqrt{\bar{g}}F^{0i}\right) = J^0$$

d'où il suit :

$$\bar{\nabla}_i D^i = -\rho \tag{2.11}$$

avec les notations :

$$\begin{aligned} \rho &= \xi^{-2}\mathrm{J}^0 && \text{la densité de charge,} \\ \mathrm{D}^i &= \xi^{-2}\mathrm{F}^{i0} && \text{l'induction électrique et} \\ \mathrm{E}_i &= \mathrm{F}_{0i} && \text{le champ électrique} \end{aligned} \tag{2.12}$$

et la relation vectorielle, au sens de l'espace $\overline{\mathrm{V}}_3$:

$$\vec{\mathrm{D}} = \xi^{-2}\vec{\mathrm{E}}. \tag{2.13}$$

L'équation (2.11) peut être considérée au sens de la théorie des distributions pour une densité ρ singulière. Précisément pour une charge ponctuelle q située en (y_0^1, y_0^2, y_0^3) la densité correspondante s'écrit à l'aide de la distribution δ de Dirac :

$$\rho(x) = 4\pi q\delta(y^1 - y_0^1)\delta(y^2 - y_0^2)\delta(y^3 - y_0^3) \tag{2.14}$$

ou

$$\rho(x) = \frac{4\pi q}{u_0^2}\delta(u - u_0)\delta(\cos\theta - \cos\theta_0)\delta(\varphi - \varphi_0)$$

en se référant aux coordonnées (u, θ, φ). Et le potentiel électrostatique dû à cette source est, rappelons le [*4*] :

(2.15)

$$\mathrm{V}(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) = \frac{q}{rr_0}\left\{ m + \frac{(r-m)(r_0-m) - m^2\lambda}{[(r-m)^2 + (r_0-m)^2 - m^2 - 2(r-m)(r_0-m)\lambda + m^2\lambda^2]^{1/2}} \right\}$$

avec la notation

$$\lambda \equiv \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0)$$

et en tenant compte que

$$r \equiv r(u) = 2m + f(u), \quad \text{suivant (2.4).}$$

Cette formule vaut, on le sait, pour tout point source P_0 situé, suivant le langage de 1, à l'extérieur de l'horizon ($r_0 \geqslant a > 2m$); soit dans les termes actuels, à l'extérieur d'un domaine incluant le point singulier x_0. On va montrer que cette restriction peut être levée et qu'ainsi la validité de (2.15) s'étend à une source ponctuelle pouvant être située dans l'espace $\overline{\mathrm{V}}_3$ *entier*. Pour ce faire, il y a lieu de formuler avec précision la propriété du potentiel V (P, P_0) relevée au 1.1(*b*) et notée en bref en (1.5). Se reportant aux suites du second type, mentionné au paragraphe précédent 2.1(*b*), nous sommes fondés à écrire : quelle que soit la quantité $\varepsilon > 0$ il existe un nombre entier $\mathrm{N}(\varepsilon)$ tel que, pour deux quelconques de ces suites (x_n) et (x'_m) on ait, dès que $n, m > \mathrm{N}$:

$$| \mathrm{V}(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0(x_m)) - \mathrm{V}(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0(x'_m)) | < \varepsilon, \tag{2.16}$$

ceci quel que soit $\mathrm{P} \neq \mathrm{P}_0$. Les suites considérées sont donc équivalentes deux à deux, relativement au potentiel V (P, P_0); de ce fait elles appartiennent toutes à une classe d'équivalence unique (x_0).

Ainsi les suites envisagées, déjà équivalentes au titre d'une première relation fondée sur la distance d associée à la métrique $\bar{g}$ (2.1), le sont aussi maintenant en vertu d'une seconde déduite du potentiel V (P, P_0). Et l'une et l'autre relations conduisent à la définition d'une classe d'équivalence unique (x_0).

Le potentiel correspondant au point x_0 s'écrit, à l'évidence :

$$V(P, P_0(x_0)) = \lim_{n\to\infty} V(P, P_0(x_n)) = \frac{q}{r(u)}. \tag{2.17}$$

Il convient de caractériser la source donnant lieu à ce potentiel. Il suffit pour cela d'évaluer le membre droit de l'équation (2.11) à partir de (2.17).

Le vecteur $\vec{D}$, dont les composantes contravariantes s'écrivent :

$$D^u = \frac{q}{u^2} \quad . \quad D^\theta = D^\varphi \equiv 0, \tag{2.18}$$

définit sur $\bar{V}_3$ un vecteur distribution :

$$\langle D^i, \Phi_i \rangle = \int D^i \Phi_i \bar{\eta} \quad , \quad \Phi_i \in \mathscr{D}^1(\bar{V}_3) \tag{2.19}$$

avec $\bar{\eta}$ élément de volume calculé à partir du $d\bar{s}^2$. Par suite, on a :

$$\langle \bar{\nabla}_i D^i, \Phi \rangle = -\langle D^i, \partial_i \Phi \rangle$$

soit

$$\langle \bar{\nabla} D^i, \Phi \rangle = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\bar{V}_3 - B(\varepsilon)} D^i \partial_i \Phi \bar{\eta} \quad , \quad \Phi \in \mathscr{D}^0(\bar{V}_3)$$

où B (ε) est une boule ouverte de centre (x_0) et de rayon ε. La formulation de cette expression peut être modifiée comme suit

$$\langle \bar{\nabla}_i D^i, \Phi \rangle = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\bar{V}_3 - B(\varepsilon)} [\bar{\nabla}_i(\Phi D^i) - \Phi \bar{\nabla}_i D^i] \bar{\eta}$$

Grâce à l'équation (2.17) le second terme sous le signe d'intégration est nul, par application au premier du théorème de Stokes, compte tenu de la condition sur le support de Φ, on obtient :

$$\langle \bar{\nabla}_i D^i, \Phi \rangle = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S_2(\varepsilon)} D^i \Phi d\sigma_i \tag{2.20}$$

avec $S_2(\varepsilon) = \partial B(\varepsilon)$ frontière de B(ε) ([2]).

([2]) La formule obtenue vaudrait aussi bien pour une source située en un point quelconque de l'espace.

L'intégration est faite sur la surface u = cte. Le calcul est élémentaire et conduit au résultat :

$$\langle \overline{\nabla}_i \mathrm{D}^i, \Phi \rangle = -4\pi q \Phi(x_0) \Leftrightarrow \overline{\nabla}_i \mathrm{D}^i = -4\pi q \delta(x_0) \tag{2.21}$$

Cette formule montre, comme il était attendu, que la source du potentiel $\mathrm{V} = \frac{q}{r}$ est une *charge ponctuelle q située au point singulier x_0*.

La caractérisation de cette source peut être complétée en remarquant que le champ qu'elle engendre possède une *énergie totale finie*.

L'énergie du champ dans tout l'espace $\overline{\mathrm{V}}_3$ s'écrit, à l'aide des notations introduites en (2.12), comme suit :

$$\mathrm{W} = \frac{1}{8\pi} \int_{\overline{\mathrm{V}}_3} \mathrm{D}^i \mathrm{E}_i \bar{\eta} \tag{2.22}$$

soit, en tenant compte de (2.6), (2.13), (2.18), la formulation explicite suivante

$$\mathrm{W} = \frac{q^2}{8\pi} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{f'(u)}{[f(u) + 2m]^2} \sin \theta du d\theta d\varphi .$$

L'intégration est aisée et conduit, vu (2.7) et (2.7 *bis*), au résultat annoncé, soit précisément la valeur finie de l'énergie totale :

$$\mathrm{W} = \frac{q^2}{2m} . \tag{2.23}$$

Il apparaît ainsi que la structure géométrique de l'espace V_3 « régularise » le champ électrostatique à symétrie sphérique produit par une source ponctuelle q située à l'origine x_0 — singulière — de telle façon que son énergie totale soit finie.

2.3. Source dipolaire et singularité (x_0)

On considère maintenant le cas où la source du champ électrostatique est un dipôle électrique ponctuel. On pourrait envisager un dipôle situé en un point P_0 de coordonnées quelconques et dont le moment $\vec{d}$ serait orienté de façon arbitraire; cependant, vu les symétries de l'espace $\overline{\mathrm{V}}_3$, il suffit, pour couvrir l'ensemble des possibilités, d'examiner successivement deux situations particulières simples.

a) Dipôle électrique situé en $\mathrm{P}_0\left(y_0^1 = y_0^2 = 0,\ y_0^3 \neq 0\right)$ de moment $\vec{d}(d^1, 0, 0,)$.

Le potentiel $\mathrm{V}_d(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0)$ engendré par un dipôle électrique ponctuel situé en $\mathrm{P}_0\left(y_0^1, y_0^2, y_0^3\right)$ et de moment $\vec{d}\left(d^1, d^2, d^3\right)$ se déduit d'une façon générale de celui dû à une charge électrique ponctuelle unitaire située au même point P_0, par dérivation par rapport aux coordonnées (y_0^1, y_0^2, y_0^3) selon :

$$(2.24) \quad V_d(P, P_0) = d^1 \frac{\partial V}{\partial y_0^1}(P, P_0) + d^2 \frac{\partial V}{\partial y_0^2}(P, P_0) + d^3 \frac{\partial V}{\partial y_0^3}(P, P_0)$$

où $\qquad V(P, P_0) \equiv V_q(P, P_0), \qquad$ avec $\qquad q = 1.$

Dans le cas qui nous occupe dans cet alinéa, il suffit de dériver $V(P, P_0)$ noté en (2.15), par rapport à y_0^1, compte tenu de (2.3) et (2.4). Jusqu'à présent la grandeur du moment dipolaire reste arbitraire, il est nécessaire de lui imposer de ne pas dépendre du point P_0 considéré; ceci conduit à écrire :

$$(2.25) \qquad (\bar{g}_{11} d^1 d^1)^{1/2}\Big|_{P_0(0,0,y_0^3)} = d$$

avec d : constante arbitraire positive,
d'où il suit :

$$(2.26) \qquad \vec{d} : \left\{ \frac{du_0}{f^{1/2}(u_0)[f(u_0) + 2m]^{1/2}}, 0, 0 \right\}.$$

Tandis que le potentiel s'écrit :

$$(2.27) \qquad V_{d^1}(P, P_0) = \frac{df(u) f^{1/2}(u_0) \sin\theta \cos\varphi}{r_0^{1/2} \mathbb{R}^{3/2}}$$

avec

$$\mathbb{R}^2 = (r - m)^2 + (r_0 - m)^2 - m^2 - 2(r - m)(r_0 - m)\cos\theta + m^2 \cos^2\theta$$

et

$r \ = r(u)$ suivant (2.4).

De ce potentiel $V_{d^1}(P, P_0)$ on peut déduire le champ $\vec{E}(E_i = -\ \partial_i V)$ et ensuite, grâce à (2.13), l'induction $\vec{D}$; celle-ci vérifie l'équation :

$$(2.28) \quad \bar{\nabla}_i D^i = -\frac{4\pi d u_0}{f^{1/2}(u_0)[f(u_0) + 2m]^{1/2}} \delta'(y^1)\delta(y^2)\delta(y^3 - y_0^3).$$

en raison de la façon même dont a été formé le potentiel $V_{d^1}(P, P_0)$ (2.27). Une vérification directe serait d'ailleurs possible, au moyen de la formule (2.20). Cette équation fait bien apparaître la nature dipolaire électrique de la source située en $P_0(0, 0, y_0^3)$, l'orientation du moment $\vec{d}$ suivant la direction y^1 et sa valeur :

$$\left(d^1 = \frac{du_0}{f^{1/2}(u_0)[f(u_0) + 2m]^{1/2}}, \ d^2 = d^3 \equiv 0 \right).$$

Il importe d'observer, par inspection de (2.27) et (2.28), que si l'on approche le dipôle considéré du point singulier : $P_0 \to x_0$, alors le potentiel $V_{d^1}(P, P_0)$ et le moment $\vec{d}$ tendent à s'annuler; on a $V_{d^1}(P, x_0) = 0$.

b) Dipôle situé en $P_0\left(y_0^1 = y_0^2 = 0, y_0^3 \neq 0\right)$ et de moment $\vec{d}(0, 0, d^3 \neq 0)$.

Pour déterminer le potentiel électrostatique $V_{d^3}(P, P_0)$ engendré par ce dipôle, on applique la procédure décrite à l'alinéa précédent. On dérive cette fois $V(P, P_0)$ par rapport à y_0^3. Et, de façon similaire à (2.25), on requiert :

$$(\bar{g}_{33}d^3d^3)^{1/2}\Big|_{P_0(0,0,y_0^3)} = d. \tag{2.29}$$

d'où il résulte :

$$\vec{d} : \left\{0, 0, \frac{d}{f'(u_0)}\right\}. \tag{2.30}$$

Le potentiel obtenu s'écrit :

$$\begin{aligned} V_{d^3}(P, P_0) = &-\frac{d}{rr_0}\left\{\frac{m}{r_0}\left[1 - \frac{r - m(1 - \cos\theta)}{\mathbb{R}}\right]\right. \\ &\left. + \frac{[(r - m)(r_0 - m) - m^2 \cos\theta][(r_0 - m) - (r - m)\cos\theta)]}{\mathbb{R}^3}\right\} \end{aligned} \tag{2.31}$$

avec $\mathbb{R}^2$ déjà noté en (2.27) et $r = r(u)$ suivant (2.4).

L'induction $\vec{D}$ déduite de ce potentiel, vérifie l'équation :

$$\bar{\nabla}_i D^i = -\frac{4\pi d}{f'(u_0)}\delta(y^1)\delta(y^2)\delta'(y^3 - y_0^3) \tag{2.32}$$

dont la formulation fait bien apparaître la source envisagée dans cet alinéa.

A la différence du cas précédent, lorsque l'on approche le dipôle considéré du point singulier ($u_0 \to 0$) on constate que le potentiel $V_{d^3}(P, P_0)$ tend, non pas comme alors vers zéro, mais vers l'expression :

$$V_d(P, x_0) = \frac{d}{2r}\frac{2r\cos\theta - m(1 + \cos\theta)^2}{[r - m(1 + \cos\theta)]^2} \tag{2.33}$$

— ou, autre formulation compte tenu de (2.4) :

$$V_d(P, x_0) = \frac{d}{2[f(u) + 2m]}\frac{2f(u)\cos\theta - m(1 - \cos\theta)^2}{[f(u) + m(1 - \cos\theta)]^2} \tag{2.34}$$

tandis que la composante d^3 de $\vec{d}$: $(0, 0, d^3)$ devient infinie et le second membre de (2.31) indéterminé. Ce fait oblige à effectuer un calcul direct pour obtenir le terme de source correspondant à ce potentiel $V_d(P, x_0)$. On utilise le résultat (2.20) :

$$\langle \bar{\nabla}_i D^i, \Phi \rangle = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_2(\varepsilon)} D^i\Phi d\sigma_i.$$

Les éléments entrant dans le calcul sont :

. les composantes de $\vec{D}$

(2.35)

$$D^u = \frac{d}{2u^2} \frac{4f(f+m)\cos\theta - 4m^2(1-\cos\theta) - 3mf(1-\cos\theta)^2 - m^2(1-\cos\theta)^3}{[f+m(1-\cos\theta)]^3}$$

$$D^\theta = \frac{d}{u^2} \frac{(f+2m)f'\sin\theta}{[f+m(1-\cos\theta)]^3}, \quad D^\varphi \equiv 0;$$

. la surface d'intégration : une sphère centrée sur x_0, d'équation $u = \varepsilon$;

. le développement de la fonction d'essai $\Phi(x)$ au voisinage du point singulier x_0

(2.36)

$$\Phi(x) = \Phi(x_0) + u\left[\frac{\partial\Phi}{\partial y^1}\sin\theta\cos\varphi + \frac{\partial\Phi}{\partial y^2}\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial\Phi}{\partial y^3}\cos\theta\right]\Bigg|_{(x_0)} + O(u^2).$$

Le calcul à effectuer explicitement s'écrit :

$$\lim_{u=\varepsilon\to 0}\int_{S_2(\varepsilon)} D^i\Phi d\sigma_i = \lim_{u=\varepsilon\to 0} 2\pi\int_0^{2\pi}\Big\{4f(f+m)\cos\theta - 4m^2(1-\cos\theta) - 3mf(1-\cos\theta)^2$$
$$-m^2(1-\cos\theta)^3\Big\}\cdot\left[\Phi(x_0) + u\frac{\partial\Phi}{\partial y^3}\Bigg|_{(x_0)}\cos\theta\right]\frac{\sin\theta d\theta}{[f+m(1-\cos\theta)]^3}.$$

Il conduit à un *résultat nul* à la *limite* $\varepsilon = 0$.

Ainsi, bien que le potentiel $V_d(P, x_0)$ (2.34), le champ $\vec{E}$, l'induction $\vec{D}$ (2.35) soient des quantités singulières au point x_0 aucune source, ni monopolaire, ni dipolaire, ni multipolaire d'un ordre supérieur, n'y est décelée; on peut écrire par conséquent :

(2.37) $$\bar{\nabla}_i D^i = 0 \qquad \text{sur tout } \bar{V}_3.$$

Si l'on développe pour de grandes valeurs de u l'expression (2.34), en tenant compte de (2.7 *bis*), on obtient comme terme principal :

(2.38) $$V_d(P, x_0) \simeq \frac{d\cos\theta}{u^2} + \ldots,$$

soit un comportement asymptotique de type dipolaire.

Pour conclure, on fera les remarques suivantes :

. Le processus d'après lequel s'effectue le passage à la position singulière $P_0 \to x_0$ intervient de façon essentielle dans la détermination du potentiel. On a donné, aux alinéas (*a*) et (*b*), ce à quoi on aboutit en partant des deux positions extrêmes : tangentielle et radiale.

. Dans le contexte géométrique qui a cours dans cette seconde partie, le potentiel $V_d(P, x_0)$ est considéré à juste titre alors que si l'on se référait à la première, il ne serait pas admissible en raison des singularités qu'il présente sur et à l'intérieur de l'horizon $r = 2m$.

. Au paragraphe (2.2) nous avons pu montrer qu'un monopole électrique ponctuel pourrait être localisé au point singulier x_0 et indiquer l'expression du potentiel $V_q(P, x_0)$ qu'il crée. Au cours du présent paragraphe, il est apparu qu'un dipôle électrique ponctuel ne pouvait par contre être localisé en x_0, que *la structure singulière de l'espace* $\overline{V}_3$ « *l'occultait* » *de quelque facon*, cependant qu'un potentiel $V_d(P, x_0)$ était malgré cela défini... Ces faits sont significatifs de la nature complexe de la singularité (x_0).

RÉFÉRENCES

[1] L. BEL, *J. Math. Phys.*, t. **10**, 1969, p. 1501. G. R. G., t. **1**, 1971, p. 337.
[2] J. COHEN et R. WALD, *J. Math. Phys.*, t. **12**, 1971, p. 1845.
[3] R. HANNI et R. RUFFINI, *Phys. Rev.*, t. D **8**, 1973, p. 3259.
[4] B. LINET, *J. Phys. A : Math. Gen.*, t. **9**, 1976, p. 1081.

(Manuscrit recu le 13 juin 1978)