M. BRAY

Sur le mouvement isentropique en magnétohydrodynamique

Annales de l'I. H. P., section A, tome 29, nº 2 (1978), p. 233-240
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1978__29_2_233_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XXIX, n° 2, 1978, p. 233-240.

Section A :
Physique théorique.

Sur le mouvement isentropique en magnétohydrodynamique

par

M. BRAY

657, rue de Robbé, 02120 Guise

ABSTRACT. — A study of the isentropic flow in magnetohydrodynamics is completed by some considerations based on different hypotheses.

I. INTRODUCTION

Le tenseur d'impulsion-énergie de la magnétohydrodynamique s'écrit

$$T_{\alpha\beta} = (c^2rf + \mu|h|^2)U_\alpha U_\beta - \left(p + \frac{1}{2}\mu|h|^2\right)g_{\alpha\beta} - \mu h_\alpha h_\beta$$

Dans cette expression r désigne la densité de masse propre, ρ la densité d'énergie propre $\rho = c^2r\left(1 + \frac{\varepsilon}{c^2}\right)$ et ε l'énergie spécifique interne. Définissant l'enthalpie spécifique par $i \equiv \varepsilon + \frac{p}{r}$ nous avons

$$f = (1 + c^{-2}i) > 0 \tag{1}$$

La vitesse d'univers U^α est normée $U^\alpha U_\alpha = 1$; $\vec{h}$ est orthogonal à $\vec{U}$

$$|h|^2 = -(h^\alpha h_\alpha)$$

(1) A. LICHNEROWICZ, Ondes de choc en magnétohydrodynamique relativiste. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. V, n° 1, 1966, p. 37-75, Section A.

Rappelons également la formule fondamentale $TdS = d\varepsilon + pd(r^{-1})$ T : température propre ; S : entropie. On peut écrire

$di = d\varepsilon + pd(r^{-1}) + r^{-1}dp \rightarrow TdS = di - r^{-1}dp$; $\quad dp = c^2rdf - rTdS$

La densité d'énergie mesurée par un observateur associé à $\vec{U}$ est :

$$\tilde{\rho} = c^2rf + \frac{\mu}{2}|h|^2 - p .$$

Introduisant alors la pression totale $\tilde{p} \equiv p + \frac{1}{2}\mu|h|^2$ il vient

$$T_{\alpha\beta} = [(\tilde{\rho} + \tilde{p})U_\alpha U_\beta - \tilde{p}g_{\alpha\beta}] - \mu h_\alpha h_\beta$$

$T_{\alpha\beta}$ est donc la somme d'un tenseur de type fluide parfait et d'un tenseur résiduel $-\mu h_\alpha h_\beta$.

Aux équations fondamentales

$$\mathscr{C} : \nabla_\alpha(rU^\alpha) = 0 ; \qquad \mathscr{M} : \nabla_\beta[h^\alpha U^\beta - h^\beta U^\alpha] = 0 ; \qquad \mathscr{E} : \nabla_\beta(T^{\alpha\beta}) = 0$$

nous ajoutons le postulat de conservation du courant numérique $\mathscr{N} : \nabla_\alpha(nU^\alpha) = 0$ n étant la densité numérique propre.

De $\mathscr{C}$ et $\mathscr{N}$ on déduit $U^\alpha\nabla_\alpha \log\left(\frac{r}{n}\right) = 0$. La masse propre $\frac{r}{n} = m_0$ d'une particule devant être une constante absolue on a $\frac{r_\alpha}{r} = \frac{n_\alpha}{n}$; $r_\alpha \equiv \nabla_\alpha(r)$.

II. LE MOUVEMENT ISENTROPIQUE

Posons $\tilde{\mathscr{H}} \equiv \left(\frac{\tilde{\rho} + \tilde{p}}{n}\right) = \mathscr{H} + \sigma$ avec $\mathscr{H} \equiv \left(\frac{\rho + p}{n}\right)$; $\sigma \equiv \mu\frac{|h|^2}{n}$. En vertu de $\mathscr{N}$ nous tirons de ξ : $nU^\beta\nabla_\beta(\tilde{\mathscr{H}}U_\alpha) - \nabla_\alpha(\tilde{p}) = \mu\nabla_\beta(h_\alpha h^\beta)$ soit

$$nU^\beta[\nabla_\beta(\tilde{\mathscr{H}}U_\alpha) - \nabla_\alpha(\tilde{\mathscr{H}}U_\beta)] + (n\tilde{\mathscr{H}}_\alpha - \tilde{p}_\alpha) = \mu\nabla_\beta(h_\alpha h^\beta) ; \qquad \tilde{\mathscr{H}}_\alpha \equiv \nabla_\alpha(\tilde{\mathscr{H}})$$

Si dans l'expression de $d\mathscr{H}$ nous portons $\rho = c^2r + r\varepsilon$ il vient compte tenu de $\partial_\alpha(\log r) = \partial_\alpha(\log n)$

$$\frac{d\rho}{n} - \left(\frac{\rho + p}{n}\right)\left(\frac{dn}{n}\right) = \frac{r}{n}\left[d\varepsilon - \frac{p}{r}\left(\frac{dr}{r}\right)\right] = m_0TdS$$

d'où

$$d\mathscr{H} = \frac{dp}{n} + \frac{r}{n}TdS \rightarrow d\tilde{\mathscr{H}} = d\mathscr{H} + d\sigma$$

puis

$$nU^\beta[\nabla_\beta(\tilde{\mathscr{H}}U_\alpha) - \nabla_\alpha(\tilde{\mathscr{H}}U_\beta)] + rTS_\alpha + \mu\xi_\alpha = 0$$

avec

$$\xi_\alpha \equiv \left\langle \nabla_\alpha\left(\frac{|h|^2}{2}\right) - |h|^2\nabla_\alpha(\log r) - \nabla_\nu(h_\alpha h^\nu) \right\rangle$$

$$U^\alpha\xi_\alpha = 0\,; \qquad h^\alpha\xi_\alpha = r\nabla_\beta\left(\frac{|h|^2}{r}h^\beta\right)$$

D'autre part

$$d\tilde{\mathscr{H}} = \frac{d\tilde{p}}{n} + \frac{r}{n}\mathrm{T}d\mathrm{S} + \frac{\sigma}{2}d\log\left(\frac{\sigma}{r}\right) = \frac{d\tilde{p}}{n} + \frac{r}{n}\left\langle \mathrm{T}d\mathrm{S} + \frac{\mu|h|^2}{2r}d\log\left(\frac{|h|^2}{r^2}\right)\right\rangle$$

Pour tout $\vec{h}$ tel que $|h|^2 = \mathrm{K}r^2$, K : c^{te} on a donc

$$d\tilde{\mathscr{H}} = \frac{d\tilde{p}}{n} + \frac{r}{n}\mathrm{T}d\mathrm{S}$$

et en cas d'isentropie $d\tilde{\mathscr{H}} = \dfrac{d\tilde{p}}{n}$. Nous avons dans ce cas $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(r)$, $\tilde{p} = \tilde{p}(r)$ et ξ_α se réduit à $-\nabla_\nu(h_\alpha h^\nu)$.

Si $|h|^2 = \mathrm{K}r^2$, $\frac{1}{2}(|h|^2)^{\cdot} + |h|^2\theta = 0$ avec $(\ )^{\cdot} \equiv \mu^\beta\nabla_\beta(\ )$; $\theta \equiv \nabla_\nu(\mathrm{U}^\nu)$.

Donc la relation générale $h^\alpha h^\beta \mathrm{U}_{\beta;\alpha} + \frac{1}{2}(|h|^2)^{\cdot} + |h|^2\theta = 0$ tirée de $\mathscr{M}$ devient $h^\alpha h^\beta \mathrm{U}_{(\alpha;\beta)} = 0$.

D'après $\sigma_{\alpha\beta} = \mathrm{U}_{(\alpha;\beta)} - \mathrm{U}_{(\alpha}\dot{\mathrm{U}}_{\beta)} - \frac{\theta}{3}\pi_{\alpha\beta}$; $\pi_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta} - \mathrm{U}_\alpha \mathrm{U}_\beta$ on a

$$h^\alpha h^\beta \mathrm{U}_{(\alpha;\beta)} = 0 \rightleftharpoons \sigma_{\alpha\beta}h^\alpha h^\beta = \frac{\theta}{3}|h|^2 = \frac{\mathrm{K}}{6}(r^2)^{\cdot}$$

Puisque $\mathrm{T}h^\alpha\nabla_\alpha(\mathrm{S}) = c^2\nabla_\alpha(fh^\alpha)$ l'hypothèse isentropique entraîne

$$\nabla_\alpha\left\langle h^\alpha + \frac{i}{c^2}h^\alpha\right\rangle = 0 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_\alpha = \frac{p}{r}\nabla_\alpha(\log r)$$

On a toujours $\dot{\varepsilon} = -\frac{p}{r}\theta$ (loi générale) mais aussi $h^\alpha\varepsilon_\alpha = \frac{p}{r}h^\alpha\nabla_\alpha(\log r)$

Dans la formule $n\mathrm{U}^\beta[\nabla_\beta(\tilde{\mathscr{H}}\mathrm{U}_\alpha) - \nabla_\alpha(\tilde{\mathscr{H}}\mathrm{U}_\beta)] + r\mathrm{TS}_\alpha + \mu\xi_\alpha = 0$ décomposons $\tilde{\mathscr{H}}$ selon $\tilde{\mathscr{H}} = \mathscr{H} + \sigma$, il vient

$$n\mathrm{U}^\beta[\nabla_\beta(\mathscr{H}\mathrm{U}_\alpha) - \nabla_\alpha(\mathscr{H}\mathrm{U}_\beta)] + n[\dot{\sigma}\mathrm{U}_\alpha + \sigma\dot{\mathrm{U}}_\alpha - \sigma_\alpha] + r\mathrm{TS}_\alpha + \mu\xi_\alpha = 0$$

Considérons le terme $n[(\sigma\mathrm{U}_\alpha)^{\cdot} - \sigma_\alpha] = n\sigma\left[\mathrm{U}_\alpha\left(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\right) + \dot{\mathrm{U}}_\alpha - \frac{\sigma_\alpha}{\sigma}\right]$,

$$\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} = (\log|h|^2)^{\cdot} - (\log n)^{\cdot} = \frac{\dot{r}}{r}$$

en vertu de $|h|^2 = \mathrm{K}r^2$ et $\nabla_\alpha(\log\sigma) = \nabla_\alpha(\log r)$.

Pour $S_\alpha = 0$ nous obtenons ainsi

$$nU^\beta[\nabla_\beta(\mathcal{H}U_\alpha) - \nabla_\alpha(\mathcal{H}U_\beta)] + n\sigma[\dot{U}_\alpha - \pi_\alpha{}^\beta\nabla_\beta\,(\log r)] + \mu\xi_\alpha = 0$$

L'obtention de la relation $d\tilde{\mathcal{H}} = n^{-1}d\tilde{p}$ est fondée sur les postulats

$$S_\alpha = 0 \qquad \text{(isentropie)} \qquad \text{et} \qquad |\,h\,|^2 = Kr^2$$

On obtient la même relation si, abandonnant l'hypothèse isentropique on admet

$$TdS + \frac{\mu\,|\,h\,|^2}{2r}\,d\log\frac{|\,h\,|^2}{r^2} = 0 \rightleftharpoons TdS + \mu\frac{r}{2}d\left(\frac{|\,h\,|^2}{r^2}\right) = 0$$

$$S_\alpha = -\frac{\mu r}{2T}\nabla_\alpha\left(\frac{|\,h\,|^2}{r^2}\right)$$

$\mathscr{C}$ entraînant $\dot{S} = 0$ on déduit $(\,|\,h\,|^2r^{-2})^\cdot = 0$.

De $\nabla_\alpha(S_\beta) = \nabla_\beta(S_\alpha)$ découle la proportionnalité des gradients $\nabla_\alpha\left(\frac{|\,h\,|^2}{r^2}\right)$ et $\nabla_\alpha\left(\frac{r}{T}\right)$.

Donc

$$U^\beta\nabla_\beta\left(\frac{r}{T}\right) = 0 \rightleftharpoons \frac{\dot{r}}{r} = \frac{\dot{T}}{T} \quad (\log T)^\cdot = -\theta$$

Ceci donne la loi de variation de T le long des lignes de courant dans le cas considéré. Tandis que la formule fondamentale $TdS = d\varepsilon + pd(r^{-1})$ donne maintenant

$$\varepsilon_\alpha = \frac{p}{r}\nabla_\alpha\,(\log r) - \mu\frac{r}{2}\nabla_\alpha\left(\frac{|\,h\,|^2}{r^2}\right)$$

L'énergie spécifique interne varie donc dans les directions $\vec{U}$ et $\vec{h}$ selon les lois

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{p}{r}\theta \qquad \text{et} \qquad h^\alpha\varepsilon_\alpha = \frac{p}{r}h^\alpha\nabla_\alpha\,(\log r) - \mu\frac{r}{2}h^\alpha\nabla_\alpha\left(\frac{|\,h\,|^2}{r^2}\right)$$

Étudions maintenant le cas

$$\xi_\alpha = 0 \rightleftharpoons \frac{|\,h\,|^2}{2}\nabla_\alpha\log\left(\frac{|\,h\,|^2}{r^2}\right) - \eta_\alpha = 0$$

en posant $\eta_\alpha \equiv \nabla_\beta(h_\alpha h^\beta)$.

Nous avons

$$\nabla_\alpha\,(\log\,|\,h\,|^2) = \nabla_\alpha\,(\log r^2) + 2\frac{\eta_\alpha}{|\,h\,|^2}$$

On en tire $\nabla_\alpha(\eta_\beta\,|\,h\,|^{-2}) = \nabla_\beta(\eta_\alpha\,|\,h\,|^{-2})$. En développant on constate que cette relation peut être remplacée par la suivante $\partial_\alpha(\eta_\beta r^{-2}) = \partial_\beta(\eta_\alpha r^{-2})$ soit $\eta_\alpha = r^2\nabla_\alpha\tilde{\phi}$; $\tilde{\phi}$ scalaire. Donc

$$r^2\dot{\tilde{\phi}} = h^\beta U^\alpha\nabla_\beta(h_\alpha) = -h^\alpha h^\beta U_{(\alpha;\beta)} = -\sigma_{\alpha\beta}h^\alpha h^\beta + \frac{\theta}{3}|\,h\,|^2$$

D'après une relation générale rappelée antérieurement nous pouvons écrire :

$$\left(\tilde{\phi} - \frac{|h|^2}{2r^2}\right)^{\cdot} = 0$$

Tout écoulement isentropique tel que $\xi_\alpha = 0$ satisfait les équations

$$U^\beta[\nabla_\beta(\tilde{\mathscr{H}}U_\alpha) - \nabla_\alpha(\tilde{\mathscr{H}}U_\beta)] = 0$$

Posons $\phi \equiv \tilde{\mathscr{H}}U_\beta dx^\beta \rightarrow d\phi = \nabla_\alpha(\tilde{\mathscr{H}}U_\beta)dx^\alpha \wedge dx^\beta = \nabla_{[\alpha}\langle \tilde{\mathscr{H}}U_{\beta]}\rangle dx^\alpha \wedge dx^\beta$

$$d\phi = -\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

avec $F_{\alpha\beta} \equiv [\nabla_\beta(\tilde{\mathscr{H}}U_\alpha) - \nabla_\alpha(\tilde{\mathscr{H}}U_\beta)]$. Puisque $F_{\alpha\beta}U^\beta = 0$,

$$\text{dét}\,|F_{\alpha\beta}| = 0 \rightarrow \overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = 0 \rightleftharpoons F_{[\alpha\beta}F_{\gamma\delta]} = 0$$

Soit $d\phi \wedge d\phi = 0$.

D'après A. Krasinski ([2]) ceci entraîne l'existence de 3 fonctions τ, ν et ζ telles que

$$\tilde{\mathscr{H}}U_\beta = \nabla_\beta(\tau) + \nu\nabla_\beta(\zeta) \rightleftharpoons \phi = d\tau + \nu d\zeta$$

On en déduit $F_{\alpha\beta} = 2\zeta_{[\alpha}\nu_{\beta]}$.

L'introduction d'un vecteur $W^\alpha = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}U_\beta U_{\gamma;\delta}$, $\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}$ tenseur de Levi-Civita; permet d'exprimer l'équivalence des conditions $F_{\alpha\beta} = 0$, $d\phi = 0$ sous la forme $\vec{W} = 0$.

En outre

$$F_{\alpha\beta} = \tilde{\mathscr{H}}\langle 2U_{[\alpha;\beta]} + 2U_{[\alpha}\nabla_{\beta]}\log\tilde{\mathscr{H}}\rangle$$

D'autre part $\omega_{\alpha\beta} \equiv \pi_\alpha{}^\rho\pi_\beta{}^\sigma U_{[\rho;\sigma]} = U_{[\alpha,\beta]} + U_{[\alpha}\dot{U}_{\beta]}$ d'où

$$F_{\alpha\beta} = 2\tilde{\mathscr{H}}\omega_{\alpha\beta} + \tilde{\mathscr{H}}\langle U_\alpha[\nabla_\beta(\log\tilde{\mathscr{H}}) - \dot{U}_\beta] - U_\beta[\nabla_\alpha(\log\tilde{\mathscr{H}}) - \dot{U}_\alpha]\rangle$$

Les équations $\mathscr{E}$ fournissant par ailleurs :

$$n\tilde{\mathscr{H}}\dot{U}^\alpha = \pi^{\alpha\beta}\langle\tilde{p}_\beta + \nabla_\nu(\mu h_\beta h^\nu)\rangle$$

Soit d'après l'hypothèse $\xi_\alpha = 0$

$$n\tilde{\mathscr{H}}\dot{U}^\alpha = \pi^{\alpha\beta}\left\langle\tilde{p}_\beta + \frac{\mu}{2}|h|^2\nabla_\beta\log\left(\frac{|h|^2}{r^2}\right)\right\rangle = \pi^{\alpha\beta}\langle p_\beta + n\sigma_\beta\rangle$$

Or

$$\tilde{\mathscr{H}}_\beta = \mathscr{H}_\beta + \sigma_\beta = \left(\frac{p_\beta}{n} + \frac{r}{n}TS_\beta\right) + \sigma_\beta$$

([2]) A. Krasiński, Solutions of the Einstein field equations for a rotating perfect fluid. *Acta Physica Polonica*, vol. **B 5**, n° 4, 1974, p. 411-436.

Pour un mouvement isentropique

$$\tilde{\mathcal{H}}_\beta = \frac{p^\beta}{n} + \sigma_\beta \rightarrow \dot{\mathrm{U}}_\alpha = \pi_\alpha{}^\beta \nabla_\beta (\log \tilde{\mathcal{H}})$$

Par conséquent $\nabla_\beta (\log \tilde{\mathcal{H}}) - \dot{\mathrm{U}}_\beta = \mathrm{U}_\beta (\log \tilde{\mathcal{H}})^{\cdot}$. Nous avons donc $\mathrm{F}_{\alpha\beta} = 2\tilde{\mathcal{H}}\omega_{\alpha\beta}$.

Observons que la condition $\xi_\alpha = 0$ peut être écrite $\nabla_\beta(\psi_\alpha{}^\beta) = \psi\nabla_\alpha (\log r^{1/3})$ avec

$$\psi_\alpha{}^\beta = h_\alpha h^\beta - \frac{1}{2} g_\alpha{}^\beta \,|\, h \,|^2 \rightarrow \psi = -3 \,|\, h \,|^2$$

Supposons que l'espace-temps admette un groupe d'isométries spatiales à vecteur générateur $\mathrm{Z}_\alpha = e^\phi h_\alpha$

$$\mathcal{L}(\vec{\mathrm{Z}}) g_{\alpha\beta} = 2\mathrm{Z}_{(\alpha;\beta)} = 0 \rightarrow \nabla_{(\alpha} h_{\beta)} + h_{(\alpha}\phi_{\beta)} = 0 \rightarrow \nabla_\beta(h^\beta) + (h^\beta\phi_\beta) = 0$$

Dans ces conditions l'expression de ξ_α devient

$$\xi_\alpha = h^\beta \langle 2h_{(\alpha}\phi_{\beta)} + g_{\alpha\beta}(h^\nu\phi_\nu) + h_\beta\nabla_\alpha (\log r) \rangle$$

on en tire

$$h^\alpha\xi_\alpha = (h^\alpha h_\alpha) h^\beta [3\phi_\beta + \nabla_\beta (\log r)] = 0$$

si l'on postule $\vec{\xi} = 0$.

De même $\mathrm{U}^\alpha\xi_\alpha = 0$ nous donne $(h^\alpha h_\alpha)\mathrm{U}^\beta[\phi_\beta + \nabla_\beta (\log r)] = 0$. Si $\phi = 0$, $\mathrm{Z}_\alpha = h_\alpha \rightarrow h_{(\alpha;\beta)} = 0$; $-\xi_\alpha = |\, h \,|^2\nabla_\alpha (\log r)$. $\xi_\alpha = 0$ exigerait alors $r = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$.

Considérons maintenant un groupe de transformations conformes tel que

$$\mathcal{L}(\vec{h}) g_{\alpha\beta} = \frac{\phi}{2} g_{\alpha\beta} = 2\nabla_{(\alpha} h_{\beta)} \rightarrow \nabla_\beta(h^\beta) = \phi$$

$$-\xi_\alpha = h^\beta \left\langle \frac{3}{2}\phi g_{\alpha\beta} - h_\beta\nabla_\alpha (\log r) \right\rangle = \frac{3}{2}\phi h_\alpha + |\, h \,|^2\nabla_\alpha (\log r)$$

Pour annuler $\vec{\xi}$ il faudrait postuler une relation $\vec{h} = \mathrm{K}\vec{\nabla} (\log r)$ avec $\mathrm{K} = -\dfrac{2\,|\, h \,|^2}{3\phi}$. On déduit alors $\dot{r} = 0$ puis $\theta = 0$ (en vertu de $\mathscr{C}$) et $\dot{\varepsilon} = 0$.

De même

$$h^\alpha\nabla_\alpha (\log r) = \frac{3}{2}\phi = \frac{3}{2}\nabla_\alpha(h^\alpha)$$

De la relation fondamentale $\mathrm{T}d\mathrm{S} = d\varepsilon + pd(r^{-1})$ écrite pour $\mathrm{S} = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$ découle de la loi de variation de ε le long de $\vec{h}$ (lorsque $\xi_\alpha = 0$) soit

$$h^\alpha\varepsilon_\alpha = \frac{3}{2}\frac{p}{r}\nabla_\alpha(h^\alpha)$$

Si $\mathrm{S}_\alpha = 0$ on a

$$d\mathcal{H} = n^{-1}dp \rightarrow d\,\frac{\rho + p}{r} = \frac{dp}{r}$$

$$\rho = \rho(r)\,; \qquad p = p(r)$$

Nous pouvons décomposer $T^{\alpha\beta}$ selon la formule

$$T^{\alpha\beta} = [(\rho + p)U^\alpha U^\beta - pg^{\alpha\beta}] + \tau^{\alpha\beta} ; \qquad \tau^{\alpha\beta} = \mu \,|\, h \,|^2 U^\alpha U^\beta - \frac{\mu}{2} \,|\, h \,|^2 g^{\alpha\beta} - \mu h^\alpha h^\beta$$

$\tau^{\alpha\beta}$ admet les vecteurs propres $\vec{U}$ et $\vec{h}$ correspondant à la même valeur propre $\frac{\mu}{2} \,|\, h \,|^2$; les équations $\mathscr{E}$ s'écrivent maintenant

$$(\rho + p)\dot{U}^\alpha = \pi^{\alpha\beta} \langle p_\beta + X_\beta \rangle ;$$
$$\nabla_\beta \langle (\rho + p)U^\beta \rangle = U^\beta \langle p_\beta + X_\beta \rangle \qquad \text{avec} \quad X^\alpha = - \nabla_\beta(\tau^{\alpha\beta})$$

Mais $\rho + p = n\mathscr{H}$ d'où $nU^\alpha\dot{\mathscr{H}} + n\mathscr{H}\dot{U}^\alpha = g^{\alpha\beta}(p_\beta + X_\beta)$. Puis

$$n\dot{\mathscr{H}} = U^\beta(p_\beta + X_\beta) \to nU^\beta \langle n^{-1}p_\beta + n^{-1}rTS_\beta \rangle = U^\beta(p_\beta + X_\beta)$$

Puisque $\dot{S} = 0$ on a $(U^\beta X_\beta) = 0$

$$- (X^\alpha h_\alpha) = h_\alpha \nabla_\beta(\tau^{\alpha\beta}) = \nabla_\beta(h_\alpha \tau^{\alpha\beta}) - \tau^{\alpha\beta}\nabla_\beta(h_\alpha)$$

$\tau^{\alpha\beta}h_\alpha = \frac{\mu}{2} \,|\, h \,|^2 h^\beta$. Il vient, compte tenu de la relation générale $\nabla_\beta(h^\beta) = (U^\beta \dot{h}_\beta)$: $(X^\alpha h_\alpha) = 0$.

Dans tous les cas où $\vec{X} \neq 0$ il est orthogonal à $\vec{U}$ et $\vec{h}$ d'où la possibilité de choisir un repère tel que

$$\vec{e}_0 = \vec{U} ; \qquad \vec{e}_1 = \frac{\vec{h}}{|\, h \,|} ; \qquad \vec{e}_2 = \frac{\vec{X}}{|\, X \,|} ; \qquad \vec{e}_3$$

Notons également les relations

$$\mu \,|\, h \,|^2 = (\tau^{\alpha\beta}\tau_{\alpha\beta})^{1/2} ; \qquad \tau^{\alpha\beta}\tau_{\nu\beta} = \frac{1}{4}(\tau^{\gamma\delta}\tau_{\gamma\delta})g^\alpha_\nu$$

Nous pouvons étudier la condition $\vec{X} = 0$ soit

$$\dot{U}^\alpha + \theta U^\alpha + U^\alpha (\log \,|\, h \,|^2)^{\cdot} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\nabla_\beta (\log \,|\, h \,|^2) - \frac{h^\beta \nabla_\beta(h^\alpha)}{|\, h \,|^2} - \frac{h^\alpha \nabla_\beta(h^\beta)}{|\, h \,|^2} = 0$$

Écrivons d'une manière générale $- X^\alpha = \mu \,|\, h \,|^2(\dot{U}^\alpha + Z^\alpha)$ avec

$$Z^\alpha = \theta U^\alpha + U^\alpha (\log \,|\, h \,|^2)^{\cdot} - \frac{g^{\alpha\beta}}{2} \nabla_\beta (\log \,|\, h \,|^2) - \frac{h^\beta}{|\, h \,|^2} \nabla_\beta(h^\alpha) - \frac{h^\alpha}{|\, h \,|^2} \nabla_\beta(h^\beta)$$

Les équations $\mathscr{E}$ nous donnent

$$(\rho + p) \left\langle - \frac{X^\alpha}{\mu \,|\, h \,|^2} - Z^\alpha \right\rangle = \pi^{\alpha\beta}p_\beta + X^\alpha \qquad \text{puisque} \quad (U^\beta X_\beta) = 0$$

Soit pour tout mouvement satisfaisant $\vec{X} = 0$: $- (\rho + p)Z^\alpha = \pi^{\alpha\beta}p_\beta$. On a

$$Z^\alpha U_\alpha = 0 ; \qquad Z^\alpha h_\alpha = \nabla_\alpha(h^\alpha)$$

Dans ce cas

$$\nabla_\beta \langle n\mathscr{H}U^\alpha U^\beta - pg^{\alpha\beta} \rangle = 0 \to nU^\beta[\nabla_\beta(\mathscr{H}U_\alpha) - \nabla_\alpha(\mathscr{H}U_\beta)] + n\mathscr{H}_\alpha = p_\alpha$$

Pour un mouvement isentropique, il vient

$$U^{\beta}[\nabla_{\beta}(\mathscr{H}U_{\alpha}) - \nabla_{\alpha}(\mathscr{H}U_{\beta})] = 0$$

Posant $\psi \equiv \mathscr{H}U_{\beta}dx^{\beta}$ on en déduit comme précédemment la relation

$$[\nabla_{\beta}(\mathscr{H}U_{\alpha}) - \nabla_{\alpha}(\mathscr{H}U_{\beta})] = 2\mathscr{H}\omega_{\alpha\beta}.$$

(Manuscrit reçu le 6 janvier 1978)