

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

I. T. TODOROV

Sur la quantification d'un système mécanique avec des contraintes de deuxième classe

Annales de l'I. H. P., section A, tome 28, n° 2 (1978), p. 207-223

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1978__28_2_207_0

© Gauthier-Villars, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur la quantification d'un système mécanique avec des contraintes de deuxième classe

par

I. T. TODOROV (*)

Institut des Hautes Études Scientifiques,
91440 Bures-sur-Yvette, France

ABSTRACT. — We consider examples of systems of a finite number of degrees of freedom with homogeneous constraints that can be written in terms of a commuting set of (complex) variables. A quantization procedure is proposed which does not require that the original variables are canonically normalized. The method is first illustrated on the example of a system of two (interacting) relativistic particles of masses m_1 and m_2 , whose coordinates x_1 and x_2 and momenta p_1 and p_2 are subject to the constraints $p_1^2 - p_2^2 = m_2^2 - m_1^2$, $(p_1 + p_2)(x_1 - x_2) = 0$. A more sophisticated example is provided by the non-relativistic hydrogen atom. The quantization problem is reduced to finding a « lowering » differential operator D_μ on a complex cone $\mathcal{L}^2 = 0$ and to studying the Lie algebra generated by \mathcal{L}_μ and D_ν . It is solved using recent results of V. Bargmann and the author. The Balmer formula for the energy levels is reproduced for a space of an arbitrary number of dimensions. Classically the \mathcal{L} 's are expressed in terms of the Bacry-Györgyi variables.

On considère des exemples de systèmes d'un nombre fini de degrés de liberté avec des contraintes homogènes, qui peuvent être écrites en termes de variables commutatives (complexes). Une méthode de quantification est proposée qui n'exige pas que les variables utilisées soient canoniques. Elle est d'abord illustrée par l'exemple du mouvement relatif de deux particules relativistes (en interaction) de masses m_1 et m_2 , dont les coordonnées x_1 , x_2 et les impulsions p_1 , p_2 sont soumises aux contraintes

(*) En congé de l'Institut de Recherches Nucléaires et de l'Énergie Nucléaire de l'Académie Bulgare des Sciences, Sofia 1113, Bulgarie.

$p_1^2 - p_2^2 = m_2^2 - m_1^2$, $(p_1 + p_2)(x_1 - x_2) = 0$. Un exemple plus compliqué est fourni par l'atome d'hydrogène non-relativiste. La quantification de ce système est réduite au problème (résolu récemment par V. Bargmann et l'auteur) de trouver des opérateurs différentiels D_μ sur le cône complexe $\mathcal{L}^2 = 0$ qui diminuent le degré d'homogénéité et d'étudier l'algèbre de Lie engendrée par \mathcal{L}_μ et D_ν . On reproduit la formule de Balmer pour un espace de dimension quelconque. Dans la théorie classique « les variables de création » \mathcal{L}_μ sont exprimées en termes des variables de Bacry et Györgyi.

INTRODUCTION

Le plan de cette note est le suivant :

Dans section 1 on rappelle brièvement certaines notions de la théorie de Dirac [1] (v. aussi [2]) sur la méthode hamiltonienne dans le cas d'un système mécanique avec des contraintes. Ensuite (§ 2), on décrit une méthode directe de quantification qui ne demande pas la normalisation habituelle des variables canoniques. On se borne à une classe spéciale des contraintes qui s'expriment en termes des fonctions homogènes des variables commutatives complexes (correspondant aux opérateurs de création). La méthode est illustrée par l'exemple d'un système de deux particules relativistes en interaction. Un autre exemple d'un système avec des contraintes quadratiques (qui nous semble plus intéressant du point de vue technique) est considéré dans § 3. Il s'agit en effet d'une classe de systèmes dont l'espace des phases est un cône (quadratique) complexe. Dans cet exposé on traduit essentiellement dans le langage du problème de quantification le travail récent de Bargmann et de l'auteur [3] consacré aux espaces des fonctions analytiques sur un cône complexe. On applique (§ 4) les résultats obtenus à l'atome d'hydrogène non-relativiste. Pour établir la correspondance on se sert des coordonnées de Bacry [4] et de Györgyi [5] qui sont aussi utilisées dans les travaux sur la quantification géométrique (v. par exemple [6] [9]).

1. RÉSUMÉ DE LA THÉORIE DE DIRAC DANS LE CAS DE CONTRAINTES DE DEUXIÈME CLASSE

Soit \mathbb{R}^{2h} l'espace euclidien à $2h$ dimensions ($2h = 2, 3, \dots$). Nous allons considérer un système mécanique aux coordonnées $q = (q_1, \dots, q_{2h})$ et impulsions $p = (p_1, \dots, p_{2h})$ canoniques soumises aux contraintes

$$\varphi_a(p, q) = 0 \quad a = 1, 2, \dots, 2m \quad (m < 2h). \quad (1.1)$$

(Pour définir les paires canoniques (p, q) Dirac [I] travaille dans le cadre du formalisme lagrangien.) On dit qu'une quantité $F = F(p, q)$ est égale faiblement au zéro ($F \approx 0$), si $F = 0$ sur la surface (1.1). On dit, selon Dirac, qu'une quantité $f = f(p, q)$ est de la première classe, si ses crochets de Poisson avec les contraintes sont égaux faiblement à zéro :

$$\{f, \varphi_a\} = \frac{\partial f}{\partial q_\mu} \frac{\partial \varphi_a}{\partial p_\mu} - \frac{\partial f}{\partial p_\mu} \frac{\partial \varphi_a}{\partial q_\mu} \approx 0 \quad (a = 1, \dots, 2m). \quad (1.2)$$

Si ce n'est pas le cas, on dit que f est de la deuxième classe. Pour éviter l'introduction de contraintes secondaires nous allons supposer que l'hamiltonien $H = H(p, q)$ du système est une quantité de la première classe, ce qui implique que les contraintes sont faiblement conservées :

$$\varphi_a = \{\varphi_a, H\} \approx 0. \quad (1.3)$$

On n'aura pas besoin de spécifier l'hamiltonien plus précisément pour poser (et résoudre) le problème de la quantification.

Nous allons considérer dans ce qui suit un exemple où les contraintes sont elles-mêmes de la deuxième classe. Ceci signifie que la matrice $\{\varphi_a, \varphi_b\}$ a un inverse C_{ab} de telle sorte que

$$C_{as} \{\varphi_s, \varphi_b\} = \delta_{ab} \quad (1.4)$$

(on entend une sommation sur l'indice répété s). Dans ce cas on peut introduire des crochets modifiés $\{, \}_*$, que nous appellerons crochets de Dirac qui satisfont à toutes les conditions algébriques partagées par les crochets de Poisson et par rapport auxquelles chaque quantité $f(p, q)$ est de la première classe. Autrement dit, on suppose que l'opération $\{, \}_*$ (i) définit une algèbre de Lie : elle est antisymétrique

$$\{f, g\}_* = -\{g, f\}_* \quad (1.5 a)$$

et satisfait l'identité de Jacobi

$$\{f, \{g, h\}_*\}_* + \{g, \{h, f\}_*\}_* + \{h, \{f, g\}_*\}_* = 0; \quad (1.5 b)$$

(ii) elle est une différentiation dans l'algèbre associative des fonctions $f(p, q)$:

$$\{fg, h\}_* = f\{g, h\}_* + g\{f, h\}_* \quad (1.6 a)$$

et si $f = f[\lambda(p, q)]$,

$$\{f, g\}_* = f'(\lambda)\{\lambda, g\}_*; \quad (1.6 b)$$

(iii) pour chaque fonction différentiable $f(p, q)$ on a

$$\{f, \varphi_a\}_* = 0, \quad a = 1, \dots, 2m. \quad (1.7)$$

Dans le cas des variables canoniques p, q , Dirac a même évalué les crochets modifiés en termes des crochets de Poisson originaux

$$\{f, q\}_* = \{f, g\} - \{f, \varphi_a\} C_{ab} \{\varphi_b, g\} \quad (1.8)$$

où C_{ab} est la matrice définie par (1.4).

La connaissance des crochets de Dirac ne résout pas d'ailleurs le problème de quantification, c'est-à-dire, le problème de trouver des opérateurs p et q qui satisfont aux relations de commutation

$$[f, g] = i\{f, g\}_* \quad (1.9)$$

au moins pour une certaine classe de fonctions $f(p, q)$ et $g(p, q)$. En effet, (1.8) n'est, en général, qu'une équation implicite pour le commutateur ; de plus, la question de l'ordre des opérateurs pose dans ce cas des problèmes difficiles. On verra aussi que la formulation lagrangienne canonique n'est pas nécessairement la plus naturelle (particulièrement quand les contraintes (1.1) sont non holonomes et définissent une variété symétrique par rapport à p et q).

Dans les exemples qu'on va envisager par la suite, on va se débarrasser de la condition que les variables p et q soient canoniques. Dans ce cas, on ne pourra plus se servir de la formule (1.8) mais les crochets de Dirac généralisés satisferont toujours aux conditions (i), (ii), (iii) ci-dessus. D'ailleurs, on va essayer de déterminer directement les commutateurs des opérateurs (quantifiés), ce qui assurera automatiquement la présence des propriétés algébriques des crochets classiques correspondants.

2. QUANTIFICATION SUR UN CÔNE. EXEMPLE : SYSTÈME DE DEUX PARTICULES RELATIVISTES

Nous allons nous borner à une classe de systèmes assez spéciaux qui admettent ce qu'on appelle « une polarisation complexe » (v. [6]). On va supposer que les contraintes peuvent être exprimées en termes de m fonctions $\Phi_\kappa(z)$ de $2h$ variables commutatives complexes $z = (z_1, \dots, z_{2h})$ (qui vont jouer le rôle des opérateurs de création). De plus, on ne considérera que le cas des fonctions Φ_κ homogènes (en z) de manière que la surface des contraintes représente un cône K dans \mathbb{C}^{2h} :

$$K = (z \in \mathbb{C}^{2h} ; \Phi_\kappa(z) = 0, \quad \kappa = 1, \dots, m). \quad (2.1)$$

(La surface K est appelée un cône lorsque $z \in K, \rho > 0$ implique que $\rho z \in K$.)

Considérons les z comme des opérateurs de multiplication dans l'espace vectoriel \mathcal{P} des polynômes $\psi(z)$. [En effet, on ne s'intéressera qu'à la restriction de ψ sur le cône (2.1).] L'espace \mathcal{P} peut être envisagé comme la somme directe

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{v=0}^{\infty} \mathcal{H}^v \quad (2.2)$$

de sous-espaces \mathcal{H}^v de polynômes homogènes en z de degré v . Alors chaque opérateur z_μ définit une application de \mathcal{H}^v à \mathcal{H}^{v+1} .

Dans les exemples que nous allons considérer on aura toujours un groupe de symétrie G , qui laisse les contraintes invariantes et par rapport auquel z est un « vecteur » aux propriétés de transformation bien définies. L'hypothèse que la variété K (2.1) est un cône, implique que ce groupe inclue les dilatations.

Le problème de la quantification dans ce cas sera posé de la manière suivante.

On cherche des opérateurs différentiels D_μ satisfaisant aux conditions A)-C) ci-dessous (qui peuvent être déduites des formules canoniques (1.8)

(1.9) si $z_\mu = (q_\mu - ip_\mu)/\sqrt{2}$.

A) D_μ se transforment comme $\frac{\partial}{\partial z^\mu}$ sous l'action du groupe G ; en particulier,

$$\left[D_\mu, z \frac{\partial}{\partial z} \right] = D_\mu \tag{2.3}$$

(D_μ est donc, une application de \mathcal{H}^{v+1} dans \mathcal{H}^v ; on va supposer aussi que $D_\mu \mathcal{H}^0 = 0$).

B) D_μ est une opération intérieure. Cela veut dire que pour n'importe quel choix du polynôme $\psi(z)$ on a

$$D_\mu [\Phi_\kappa(z)\psi(z)] \approx 0 \quad \kappa = 1, \dots, m \tag{2.4}$$

(les équations étant satisfaites dans le sens faible — pour z appartenant à la surface (2.1)).

Dans le cas de contraintes homogènes, qu'on traite ici, le générateur des dilatations $z \frac{\partial}{\partial z}$ peut servir comme exemple d'une opération intérieure.

C) Il existe un produit scalaire $(,)$ en \mathcal{P} et une forme hermitique

$$\bar{z} g z = \bar{z}^\mu g_{\mu\nu} z^\nu \tag{2.5}$$

définie positive sur le cône (2.1) tels que l'opérateur D_μ est l'adjoint hermitien à $z_\mu = g_{\mu\nu} z^\nu$:

$$(\Phi, D_\mu \psi) = (z_\mu \Phi, \psi), \quad \text{ou} \quad D_\mu = z_\mu^* \tag{2.6}$$

Dans le cas d'absence de contraintes de la première classe le produit scalaire $(,)$ doit être défini positif.

Pour rendre la solution du problème de la quantification unique, on va ajouter dans chaque cas particulier des conditions de simplicité et de normalisation qui remplaceront, en général, l'hypothèse que (z, D) soient des variables canoniques. On peut demander, par exemple, que les z_μ et D_ν engendrent une algèbre de Lie de dimension finie (ce qui n'est pas en général vrai pour la quantification canonique de Dirac).

Pour illustrer le schéma général, nous considérons l'exemple du système de deux particules relativistes en interaction.

Soit p_1, p_2 et m_1, m_2 les impulsions et les masses des deux particules et soit x_1 et x_2 leur (4-)coordonnées. On va supposer que ce système est sujet aux contraintes suivantes :

$$p_1^2 - p_2^2 = m_2^2 - m_1^2 \quad (p^2 = \underline{p}^2 - p_0^2) \quad (2.7)$$

$$Px = 0 \quad \text{où} \quad P = p_1 + p_2, \quad x = x_1 - x_2 \quad (2.8)$$

et que l'impulsion totale P est du genre temps :

$$s \equiv -P^2 (= P_0^2 - \underline{P}^2) > 0, \quad P_0 > 0. \quad (2.9)$$

Notons que la condition (2.7) (cp. [10]) est plus faible, que l'exigence que chacune des deux particules appartienne à sa couche de masse (cette exigence serait trop forte pour des particules en interaction).

Introduisons l'impulsion relative

$$p = \mu_2 p_1 - \mu_1 p_2 = p_1 - \mu_1 P, \quad (2.10)$$

où

$$\mu_1 = \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2s}, \quad \mu_2 = \frac{s - m_1^2 + m_2^2}{2s}. \quad (2.11)$$

La contrainte (2.7) s'exprime en terme des variables p et P comme une condition d'orthogonalité

$$Pp = 0 \quad (2.12)$$

analogue à (2.8).

Il est facile de voir que les contraintes (2.8) (2.12) sont de la deuxième classe (pourvu que $P^2 \neq 0$). En effet, notant que les variables x, p forment une paire canonique, nous nous apercevons que les crochets de Poisson de ces deux contraintes sont donnés par

$$\{Px, Pp\} = P^2 = -s. \quad (2.13)$$

D'autre part on a (même dans le sens fort)

$$\{P_\mu, Px\} = \{P_\mu, Pp\} = 0, \quad (2.14)$$

ce qui implique, en particulier, que les contraintes ne changent pas avec le temps.

Le problème est de trouver les relations de commutation des variables p, x (pour un P fixe du genre temps) qui respectent les contraintes (2.8), (2.12).

Pour placer ce problème dans le cadre général décrit au début de la section, nous introduisons les opérateurs de création

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - ip) \quad (2.15)$$

et notons que les contraintes (2.8) (2.12) sont équivalentes à une contrainte complexe

$$Pz = 0. \quad (2.16)$$

En supposant que les D_μ sont des opérateurs différentiels du premier ordre qui satisfont (en plus de A), B)) aux conditions de normalisation

$$[D, \Pi z] = \Pi, \Pi_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \frac{1}{s} P^\mu P_\nu, \tag{2.17}$$

on arrive aux expressions

$$D_\mu = \Pi_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial z_\nu} = \frac{1}{s} P_\mu \left(P \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z^\mu}. \tag{2.18}$$

Ceci implique les relations de commutation suivantes pour les variables x et p :

$$[x_\mu, x_\nu] = [p_\mu, p_\nu] = 0, \quad [x_\mu, p_\nu] = i\Pi_{\mu\nu} \tag{2.19}$$

Dans ce cas le résultat est conforme à la prescription canonique (1.8) (1.9); pour le vérifier, il faut noter que dans l'espace de phases relativiste (avec notre choix de la métrique $(-+++)$, dans l'espace de Minkowski) les crochets de Poisson (1.2) prennent la forme

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial g}{\partial p_\mu} - \frac{\partial f}{\partial p_\mu} \frac{\partial g}{\partial x^\mu}. \tag{2.20}$$

Pour montrer que la condition C) est aussi satisfaite nous allons introduire le produit scalaire

$$(\Phi, \Psi) = \frac{s}{\pi^3} \int \overline{\Phi(z)} \Psi(z) e^{-z\bar{z}} \delta(Pz) dz \tag{2.21}$$

où l'intégrale s'étend sur l'espace complexe \mathbb{C}^4 (cp. [11]) $dz = d^4x d^4y$ (pour $z_\mu = x_\mu + iy_\mu$) et $\delta(Pz) = \delta(Px)\delta(Py)$. Avec la normalisation ainsi choisie on a $(1, 1) = 1$. Alors Eq. (2.6) est une conséquence de l'identité

$$-e^{z\bar{z}} \Pi_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial z_\nu} e^{-z\bar{z}} \delta(Pz) = \Pi_{\mu\nu} \bar{z}^\nu \delta(Pz) = \bar{z}_\mu \delta(Pz). \tag{2.22}$$

Remarque. — Les relations de commutation (2.19) sont différentes de celles qu'on utilise ordinairement (v. [12] [13]). L'origine de la différence est dans la forme (2.8) de la seconde contrainte. Les coordonnées de Newton et Wigner [12] correspondraient à la contrainte noncovariante $x_1^0 = x_2^0$ qui est indépendante de P (cp. aussi [2]).

3. SYSTÈMES AVEC DES CONTRAINTES QUADRATIQUES

Comme second exemple nous allons considérer un système (ou plutôt une famille de systèmes) aux « coordonnées » $Q = (Q_1, \dots, Q_{2h})$ et « impulsions » $P = (P_1, \dots, P_{2h})$ satisfaisant aux contraintes

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(Q^2 - P^2) = 0, \quad \varphi_2 = \frac{1}{2}(QP + PQ) = 0 \tag{3.1}$$

Les guillemets indiquent qu'on ne demande pas que les paires (P, Q) soient nécessairement canoniques; si elles l'étaient alors les crochets de Poisson des contraintes seraient

$$\{ \varphi_1, \varphi_2 \}_{\text{can}} = Q^2 + P^2$$

(ce qui impliquerait que φ_1 et φ_2 sont de seconde classe).

Nous n'allons retenir des relations de commutation canoniques que la commutativité des opérateurs de création

$$\mathcal{L}_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_\mu - iP_\mu) \quad (3.2)$$

entre eux

$$[\mathcal{L}_\mu, \mathcal{L}_\nu] = 0 \quad (3.3 a)$$

(ou, en termes de P et Q,

$$[Q_\mu, Q_\nu] = [P_\mu, P_\nu], [Q_\mu, P_\nu] = [Q_\nu, P_\mu] \quad (3.3 b)$$

et les propriétés A)-C) du paragraphe précédent. En termes des \mathcal{L} les contraintes (3.1) se réduisent à une seule équation complexe

$$\mathcal{L}^2 = 0 \quad (3.4)$$

qui définit un cône, disons K_{2h} , de dimension $2h - 1$ dans \mathbb{C}^{2h} .

Le groupe G dans ce cas comprend les rotations orthogonales de $SO(2h)$ et les dilatations dont les générateurs

$$L_{\mu\nu} = iX_{\mu\nu}, X_{\mu\nu} = \mathcal{L}_\nu \partial_\mu - \mathcal{L}_\mu \partial_\nu, \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial \mathcal{L}_\mu} \quad \mu, \nu = 1, \dots, 2h \quad (3.5)$$

et

$$N = \mathcal{L} \partial + h - 1 \quad (3.6)$$

sont, par conséquent, des opérateurs intérieurs.

On s'aperçoit que c'est l'usage des dérivations ∂_μ (qui ne s'expriment pas d'une manière simple en termes des variables originelles P et Q) en plus des \mathcal{L}_μ qui nous permet de nous débarrasser effectivement de la condition que P_μ et Q_ν soient canoniques.

La forme générale des opérateurs D_μ satisfaisant la condition A) est donnée par

$$D_\mu = a(N)\partial_\mu - \frac{1}{2} b(N)\mathcal{L}_\mu \Delta. \quad (3.7)$$

Notant que, quelle que soit la fonction f définie sur le spectre $\{v + h - 1, v = 0, 1, \dots\}$ de N, on a

$$f(N)\mathcal{L}_\mu = \mathcal{L}_\mu f(N + 1) \quad (3.8 a)$$

$$\partial_\mu f(N) = f(N + 1)\partial_\mu, \quad (3.8 b)$$

on trouve

$$D_\mu \mathcal{Z}^2 = \mathcal{Z}^2 \left[a(N + 2) \partial_\mu - \frac{1}{2} b(N + 2) \mathcal{Z}_\mu \Delta \right] + 2[a(N) - b(N)N] \mathcal{Z}_\mu. \quad (3.9)$$

L'hypothèse que D_μ soit intérieur (condition B)) implique que le second terme dans la partie droite de (3.9) doit s'annuler, c'est-à-dire, que

$$a(N) = Nb(N),$$

or par (3.7)

$$D_\mu^{(b)} = b(N) \left(N \partial_\mu - \frac{1}{2} \mathcal{Z}_\mu \Delta \right). \quad (3.10)$$

on voit qu'il n'y a aucun opérateur différentiel du premier ordre parmi les générateurs (3.10). La relation de commutation

$$[D_\mu^{(b)}, \mathcal{Z}_\nu] = b(N)(N \partial_{\mu\nu} + X_{\mu\nu}) + \mathcal{Z}_\nu [b(N + 1) - b(N)] \left(N \partial_\mu - \frac{1}{2} \mathcal{Z}_\mu \Delta \right) \quad (3.11)$$

nous montre que l'algèbre de Lie engendrée par les opérateurs \mathcal{Z}_μ et D_ν est de dimension finie exactement si la fonction $b(N)$ est une constante.

En choisissant $b(N) = 1$, on a

$$D_\mu = N \partial_\mu - \frac{1}{2} \mathcal{Z}_\mu \Delta. \quad (3.12)$$

D_μ est le seul opérateur différentiel du second ordre (à un facteur constant près) qui satisfait les conditions A) et B) (v. [3]). Les opérateurs $L_{\mu\nu}$ (3.5), N (3.6), et

$$Q_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{Z}_\mu + D_\mu), \quad P_\nu = \frac{i}{\sqrt{2}} (\mathcal{Z}_\nu - D_\mu) \quad (3.13)$$

engendrent une représentation hermitienne de l'algèbre de Lie $so(2h, 2)$ qui provient d'une représentation unitaire irréductible du groupe conforme $SO_0(2h, 2)$ (notamment une des représentations dites du type échelle, v. [14]).

La condition C) est satisfaite dans le cas général (3.10) exactement si $b(N) > 0$ sur le spectre de l'opérateur N . En écrivant le produit scalaire sous la forme

$$(\Phi, \Psi)_b = \int_{\mathbb{C}^{2h}} \overline{\Phi(\mathcal{Z})} \Psi(z) \rho_b(\mathcal{Z}, \bar{\mathcal{Z}}) \delta(\mathcal{Z}^2) d\mathcal{Z} \quad (3.14)$$

où $\delta(\mathcal{Z}^2) = \delta(\text{Re } \mathcal{Z}^2) \delta(\text{Im } \mathcal{Z}^2)$, on obtient de (2.6) l'équation suivante pour le poids ρ_b :

$$b(-N - 1) N \rho'_b = \rho_b \quad (3.15)$$

où

$$\rho' \equiv \frac{d}{dt} \rho(t), \quad N = h - 1 + t \frac{d}{dt}. \quad (3.16)$$

Pour déduire (3.15) nous nous sommes servis de l'intégration par parties et de l'identité

$$\begin{aligned} (h - 1 - \partial \mathcal{L}) \delta(\mathcal{L}^2) \rho(\mathcal{L} \bar{\mathcal{L}}) &= - (h + 1 + \mathcal{L} \partial) \delta(\mathcal{L}^2) \rho(\mathcal{L} \bar{\mathcal{L}}) \\ &= - \delta(\mathcal{L}^2) \mathbf{N} \rho(\mathcal{L} \bar{\mathcal{L}}) \left(\partial \equiv \frac{\partial}{\partial \mathcal{L}} \right). \end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de résoudre (3.15) au moins dans les deux cas qui sont les plus intéressants pour nous : le cas $b(\mathbf{N}) = 1$, quand D_μ est donné par (3.12) (et \mathcal{L} et \mathbf{D} engendrent une algèbre de Lie de dimension finie), et le cas

$$b_{\text{can}}(\mathbf{N}) = \frac{1}{\mathbf{N}} \quad (3.17)$$

quand

$$D_\mu^{\text{can}} = \partial_\mu - \frac{1}{2\mathbf{N}} \mathcal{L}_\mu \Delta \quad (3.18)$$

se réduit à ∂_μ sur les fonctions harmoniques et on retrouve les formules de Dirac (1.8) (1.9). Imposant la condition de normalisation

$$(1, 1)_b = 1 \quad (3.19)$$

(cp. (2.27)) on arrive aux expressions suivantes pour le poids dans ces deux cas :

$$(b = 1) \rho(t) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{2h-1} (16t)^{1-\frac{h}{2}} K_{h-2}(2\sqrt{t}) \quad (3.20 a)$$

K_ν étant la fonction de Hankel modifiée :

$$\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}z\right)^{-\nu} K_\nu(z) = \sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-zch\alpha} (sh\alpha)^{2\nu} d\alpha; \quad (3.20 b)$$

$$\left(b = \frac{1}{\mathbf{N}}\right) \rho_{\text{can}}^{(t)} = \frac{2(2h-1)}{\pi^{2h-1}} (t+1-h)e^{-t} = \frac{\Gamma(h-1)}{\Gamma(-\mathbf{N})} \rho(t). \quad (3.21 b)$$

Le produit scalaire (3.14) dans le cas général s'exprime en termes du produit (,) pour $b = 1$ par

$$(\Phi, \Psi)_b = (\Phi, \mathbf{B}(\mathbf{N})\Psi) \quad (3.22 a)$$

où

$$\mathbf{B}(h-1) = 1, \mathbf{B}(h+\nu) = b(h-1) \dots b(h+\nu-1), \nu = 0, 1, \dots; \quad (3.22 b)$$

on peut aussi écrire

$$\rho_b(t) = \mathbf{B}(-\mathbf{N})\rho(t). \quad (3.22 c)$$

Dans le cas canonique (3.17) (3.18) on a

$$\mathbf{B}_{\text{can}}(\mathbf{N}) = \frac{\Gamma(h-1)}{\Gamma(\mathbf{N})}. \quad (3.23)$$

Pour $h > 1$ ceci implique que

$$(\Psi, \Psi)_{\text{can}} \leq (\Psi, \Psi) \max \left(1, \frac{1}{h-1} \right).$$

(Pour $h = 1$, la forme hermitique (\cdot, \cdot) dans \mathcal{H} est dégénérée :

$$(\Phi, \Psi) = \bar{\Phi}(0)\Psi(0),$$

tandis que le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{\text{can}}$ reste strictement positif.)

Soit \mathcal{H}_b l'espace de Hilbert qu'on obtient en complétant l'espace \mathcal{P} des polynômes par rapport au produit scalaire (3.14). On s'aperçoit que les espaces \mathcal{H}_b sont (partiellement) ordonnés par rapport à l'inclusion, l'ordre étant défini par le comportement asymptotique de $b(N)$:

$$\mathcal{H}_{b_1} \subset \mathcal{H}_{b_2} \quad \text{si} \quad \overline{\lim} \frac{b_2(N)}{b_1(N)} < \infty.$$

En particulier, on a

$$\mathcal{H} (= \mathcal{H}_{b=1}) \subset \mathcal{H}_{\text{can}}. \tag{3.24}$$

Remarques. — 1. Pour $h = 2$, l'espace \mathcal{H} peut être identifié avec un sous-espace MB_4 de l'espace B_4 de Bargmann des fonctions de deux paires de variables complexes $z = (z_1, z_2)$, $\bar{w} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ pourvu du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi^4} \iint \overline{f(z, \bar{w})} g(z, \bar{w}) e^{-z\bar{z} - w\bar{w}} dz d\bar{w}.$$

Soit

$$\text{M}f(z, \bar{w}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(ze^{i\alpha}, \bar{w}e^{-i\alpha}) d\alpha,$$

et soit MB_4 le sous-espace des fonctions $f \in \text{B}_4$ telles que $\text{M}f = f$. Introduisons les matrices 2×2 q_μ de l'algèbre des quaternions :

$$q_j = -i\sigma_j, \quad q_4 = 1.$$

Alors l'application $\text{I} : \mathcal{H} \rightarrow \text{MB}_4$ défini par

$$\Phi(\mathcal{Z}) \xrightarrow{\text{I}} f(z, \bar{w}) = \Phi(\bar{w}q_\mu z),$$

établit une isométrie des espaces \mathcal{H} et MB_4 et montre l'équivalence des représentations respectives du groupe conforme. En termes des z l'opérateur D_μ (3.12) a la forme

$$\text{D}_\mu = \frac{\partial}{\partial z} q_\mu^* \frac{\partial}{\partial w}$$

(pour une dérivation v. [3]).

2. Chacun des espaces \mathcal{H}_b possède un noyau reproduisant $\delta_b(\bar{\mathcal{Z}}, \mathcal{Z}')$ tel que pour chaque $\Psi \in \mathcal{H}_b$ on a

$$\Psi(\mathcal{Z}) = (\delta_b(\bar{\mathcal{Z}}, \cdot), \Psi)_b = \int_{\mathbb{C}^{2n}} \rho_b(\bar{\mathcal{Z}}' \mathcal{Z}') \delta_b(\mathcal{Z}, \bar{\mathcal{Z}}') \psi(\mathcal{Z}') \delta(\mathcal{Z}'^2) d\mathcal{Z}'. \tag{3.25}$$

En effet

$$\delta_{\text{can}}(\bar{\mathcal{L}}, \mathcal{L}') = e^{\bar{\mathcal{L}}\mathcal{L}'} \quad (3.26)$$

pour b donné par (3.17), et

$$\delta(\bar{\mathcal{L}}, \mathcal{L}') = \Gamma(h-1)(\bar{\mathcal{L}}\mathcal{L}')^{1-\frac{1}{2}h} \mathbf{I}_{h-2}(2\sqrt{\bar{\mathcal{L}}\mathcal{L}'}) \quad (3.27 a)$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\Gamma(h-1)}{\Gamma(h-1+v)} \frac{(\bar{\mathcal{L}}\mathcal{L}')^v}{v!} = \frac{\Gamma(h-1)}{\Gamma(N')} e^{\bar{\mathcal{L}}\mathcal{L}'} \quad (3.27 b)$$

(v. [3]) pour $b = 1$. Pour tout autre b on aura

$$\delta_b(\bar{\mathcal{L}}, \mathcal{L}') = \frac{1}{\mathbf{B}(N')} \delta(\bar{\mathcal{L}}, \mathcal{L}') = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\Gamma(h-1)}{\Gamma(h-1+v)\mathbf{B}(h-1+v)} \frac{(\bar{\mathcal{L}}\mathcal{L}')^v}{v!}. \quad (3.28)$$

4. APPLICATION AU CAS DE L'ATOME D'HYDROGÈNE NON-RELATIVISTE

Normalement on considère le problème de Coulomb non-relativiste comme un problème dans l'espace euclidien à trois dimensions sans liaisons. D'ailleurs cette approche ne tient pas compte de la symétrie du problème ni de la singularité de l'hamiltonien

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m} p^2 - \frac{\alpha}{r} \quad (4.1)$$

pour $r = 0$; ce dernier point est discuté par exemple dans [7] § 2C). D'autre part, en développant l'ancienne idée de la sphère de Fock dans l'espace des impulsions, on arrive à une formulation dans le cadre de la quantification avec des contraintes qui apparaît comme un cas particulier de l'exemple traité dans la section précédente.

Nous allons considérer dès le début le problème de Kepler en $2h - 1$ dimensions (v. [15] [16] [17]). En termes des variables rationalisées (sans dimension) $m\alpha r$, $(m\alpha)^{-1}p$, et $(m\alpha^2)^{-1}\mathbf{H}$ que nous noterons de nouveau par r , p et \mathbf{H} , respectivement; l'hamiltonien (4.1) s'écrit sous la forme

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{\underline{x}^2}, \quad p^2 = \underline{p}^2 = p_1^2 + \dots + p_{2h-1}^2. \quad (4.2)$$

Il est bien connu (v. [13]-[15] et les travaux originaux de Pauli, Bargmann et Fock qui y sont cités) que \mathbf{H} est invariant par rapport au groupe $\text{SO}(2h)$ avec des générateurs classiques

$$\mathbf{L}_{ij} = x_i p_j - x_j p_i \quad i, j = 1, \dots, 2h-1 \quad (4.3 a)$$

$$\mathbf{L}_{i2h}(= \mathbf{A}_i) = \mathbf{N} \left[x_i p^2 - (\underline{x}\mathbf{p}) p_i - \frac{1}{r} \underline{x} \right], \quad (4.3 b)$$

où la constante de normalisation N est donnée par

$$N = \frac{1}{\sqrt{-2H}}. \quad (4.4)$$

(Nous ne nous intéressons ici qu'aux états liés du système qui correspondent à $H < 0$.) On a

$$\{L_{\kappa\lambda}, L_{\mu\nu}\} = \delta_{\kappa\mu}L_{\lambda\nu} + \delta_{\lambda\nu}L_{\kappa\mu} - \delta_{\kappa\nu}L_{\lambda\mu} - \delta_{\lambda\mu}L_{\kappa\nu} \quad (4.5 a)$$

$$\{L_{\mu\nu}, H\} = \{L_{\mu\nu}, N\} = 0, \quad \kappa, \lambda, \mu = 1, \dots, 2h, \quad (4.5 b)$$

où $\{, \}$ sont les crochets canoniques de Poisson (de type (1.2)) :

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial x_i}. \quad (4.6)$$

Toujours dans le cadre de la théorie classique on peut exprimer les coordonnées du cône \mathcal{L}_μ de la section précédente en termes des variables de Bacry et Györgyi [4] [5] :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_j &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[rp_j + iN \left(\frac{1}{r} x_j - (\underline{x}\underline{p}) p_j \right) \right] \exp \left(\frac{-i}{N} \underline{x}\underline{p} \right) \quad j=1, \dots, 2h-1 \\ \mathcal{L}_{2h} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [N(rp^2 - 1) + i\underline{x}\underline{p}] \exp \left(\frac{-i}{N} \underline{x}\underline{p} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

(Par rapport à l'eq. (6) de [8] nous avons eu à corriger le signe de l'exposant.) Il est très facile de vérifier que les variables \mathcal{L}_μ (4.7) appartiennent au cône (3.4). Un calcul plus long (v. Annexe) nous permet de trouver que

$$\{\mathcal{L}_\mu, \mathcal{L}_\nu\} = 0, \quad (4.8)$$

$$\{\mathcal{L}_\mu, \bar{\mathcal{L}}_\nu\} = iN\delta_{\mu\nu} + L_{\mu\nu}, \quad (4.9)$$

$$\{\mathcal{L}_\mu, N\} = i\mathcal{L}_\mu, \quad (4.10)$$

$$\{\mathcal{L}_\lambda, L_{\mu\nu}\} = \mathcal{L}_\mu\delta_{\lambda\nu} - \mathcal{L}_\nu\delta_{\lambda\mu}. \quad (4.11)$$

(Indiquons que les variables de Fock originales et les coordonnées Q utilisées dans [16] ne satisfont pas les relations de l'algèbre de Lie du groupe conforme.)

Dans la théorie classique on a aussi

$$\mathcal{L}\bar{\mathcal{L}} = N^2 \left(= -\frac{1}{2H} \right). \quad (4.12)$$

Pour passer à la quantification il suffit d'identifier $\bar{\mathcal{L}}_\mu$ avec D_μ et d'utiliser les résultats de la section précédente. En s'apercevant que le spectre de N est donné par

$$N = h - 1, h, h + 1, \dots \quad (4.13)$$

(les sous-espaces propres étant constitués par les polynômes homogènes) on retrouve de (4.4) la formule de Balmer pour le problème Coulombien dans un espace à $2h - 1$ dimension :

$$H = -\frac{1}{2N^2}. \quad (4.14)$$

Notons que dans la théorie quantique on a [au lieu de la première équation (4.12)] la relation

$$\frac{1}{2}(\mathcal{L}D + D\mathcal{L}) = N^2 + h - 1. \quad (4.15)$$

REMERCIEMENTS

J'exprime mes remerciements à MM. Y. Akyildiz, A. Matveenko, L. Michel, L. Ponomarev et D. Shirkov pour des discussions intéressantes et des indications concernant la littérature récente sur le problème de Képler. Je suis très reconnaissant à M. A. Chakrabarti pour m'avoir aidé à m'exprimer en français. J'ai le plaisir de remercier MM. N. H. Kuiper et L. Michel pour leur aimable hospitalité à l'Institut des Hautes Études Scientifiques où ce travail a été achevé.

ANNEXE

Crochets de Poisson pour les variables Z_μ (4.7) et leurs conjuguées complexes

Le but de cette annexe est de fournir au lecteur une liste de formules lui permettant de vérifier les équations (4.8)-(4.11).

Introduisons d'abord la notation

$$u = \underline{xp} \tag{A.1 a}$$

$$\eta_j = N \left(\frac{1}{r} x_j - up_j \right). \tag{A.1 b}$$

Le carré du moment angulaire

$$\lambda = \frac{1}{2} L_{ij}^2 = r^2 p^2 - u^2 \tag{A.2}$$

est naturellement une constante du mouvement :

$$\{ \lambda, H \} = \{ \lambda, N \} = 0 (= \{ \lambda, r \} = \{ \lambda, p^2 \} = \{ \lambda, u \}). \tag{A.3}$$

Il se trouve que chaque constante du mouvement scalaire (par rapport à SO(3)) est une fonction de λ et de N. On a (rappelant que, selon (4.4), $H = -\frac{1}{2N^2}$)

$$\{ x_p, H \} = \frac{1}{N^3} \{ x_p, N \} = \frac{1}{N^3} \frac{\partial N}{\partial p_j} = p_j \tag{A.4 a}$$

$$\{ H, p_j \} = \frac{1}{N^3} \{ N, p_j \} = \frac{1}{N^3} \frac{\partial N}{\partial x_j} = \frac{x_j}{r^3}; \tag{A.4 b}$$

$$\left\{ u, \frac{x_j}{r} \right\} = 0 = \{ rp_p, u \}, \{ u, p_j \} = p_j, \quad \{ x_p, u \} = x_j \tag{A.5}$$

$$\{ u, H \} = \frac{1}{N^3} \{ u, N \} = p^2 - \frac{1}{r} \left(= \frac{1}{2} p^2 + H \right). \tag{A.6}$$

De plus

$$\{ \eta_p, N \} = N^2 p_p \{ rp_p, N \} = -\frac{N^2}{r} \eta_j; \tag{A.7}$$

$$\{ rp_p, N(rp^2 - 1) \} + \{ u, \eta_j \} = N(up_j - p^2 x_j); \tag{A.8}$$

$$\left\{ \frac{u}{N}, \eta_j \right\} = \eta_j N \left(p^2 - \frac{1}{r} \right), \tag{A.9 a}$$

$$\{ N, rp^2 \} = \frac{Nu}{r}, \{ N(rp^2 - 1), u \} = -\frac{N^3}{r}, \tag{A.9 b}$$

$$\left\{ N(rp^2 - 1), \frac{u}{N} \right\} = \frac{u^2 - N^2}{r}, \tag{A.9 c}$$

$$N(rp^2 - 1) \left\{ \frac{u}{N}, \eta_j \right\} + \left\{ N(rp^2 - 1), \frac{u}{N} \right\} \eta_j = -\frac{\lambda}{r} \eta_j; \tag{A.9 d}$$

$$\left\{ \frac{u}{N}, rp_p \right\} = \frac{u}{N^2} \{ rp_p, N \} = -\frac{u}{r} \eta_j, \tag{A.10 a}$$

$$\left\{ \frac{u}{N}, u \right\} = Nu \left(p^2 - \frac{1}{r} \right), \quad (\text{A.10 } b)$$

$$u \left\{ \frac{u}{N}, rp_j \right\} + \left\{ u, \frac{u}{N} \right\} rp_j = N(up_j - p^2 x_j) + \frac{\lambda}{r} \eta_j; \quad (\text{A.10 } c)$$

$$\{ \eta_j, N(rp^2 - 1) \} = \left[N^2 \left(\frac{\lambda}{r} - 1 \right) + r \right] p_j + \frac{u}{r} \left(\frac{N^2}{r} - 1 \right) x_j; \quad (\text{A.11})$$

$$\left\{ rp_j, \frac{u}{N} \right\} = -\frac{u}{N^2} \{ rp_j, N \} = \frac{u}{r} \eta_j; \quad (\text{A.12})$$

$$\eta_j \left\{ \frac{u}{N}, u \right\} + \left\{ \eta_j, \frac{u}{N} \right\} u = 0. \quad (\text{A.13})$$

Maintenant nous sommes prêts à vérifier les équations (4.8), (4.9). Par exemple, d'après (A.8), (A.10 c), (A.9 d), (A.5), (A.11), (A.9 c), (A.10 a), (A.9 a), (A.10 b) et (4.4) on a

$$\begin{aligned} \{ \mathcal{L}_j, \mathcal{L}_{2h} \} &= \frac{1}{2} \exp \left(\frac{2u}{iN} \right) \left[\{ rp_j, N(rp^2 - 1) \} - \{ \eta_j, u \} + rp_j \left\{ \frac{u}{N}, u \right\} \right. \\ &\quad + u \left\{ rp_j, \frac{u}{N} \right\} + N(rp^2 - 1) \left\{ \eta_j, \frac{u}{N} \right\} + \eta_j \left\{ \frac{u}{N}, N(rp^2 - 1) \right\} \\ &\quad + i \left(\{ rp_j, u \} + \{ \eta_j, N(rp^2 - 1) \} - rp_j \left\{ \frac{u}{N}, N(rp^2 - 1) \right\} - N(rp^2 - 1) \left\{ rp_j, \frac{u}{N} \right\} \right. \\ &\quad \left. \left. + \left\{ \eta_j, \frac{u}{N} \right\} u + \eta_j \left\{ \frac{u}{N}, u \right\} \right) \right] = \frac{1}{2} \exp \left(\frac{2u}{iN} \right) \left[N(up_j - p^2 x_j) - N(up_j - p^2 x_j) \right. \\ &\quad - \frac{\lambda}{r} \eta_j + \frac{\lambda}{r} \eta_j + i \left(N^2 \left(\frac{\lambda}{r} - 1 \right) + r \right) p_j + \frac{u}{r} \left(\frac{N^2}{r} - 1 \right) x_j + rp_j \frac{u^2 - N^2}{r} \\ &\quad \left. - N \frac{u}{r} (rp^2 - 1) \eta_j - Nu \left(p^2 - \frac{1}{r} \right) \eta_j + Nu \left(p^2 - \frac{1}{r} \right) \eta_j \right] \\ &= \frac{i}{2} \exp \left(\frac{2u}{iN} \right) \left([N^2(rp^2 - 2) + r] p_j + \frac{u}{r} \left[N^2 \left(\frac{2}{r} - p^2 \right) - 1 \right] x_j \right) = 0; \quad (\text{A.14}) \end{aligned}$$

d'autre part, selon (A.9 b), (A.9 c) et (A.10 b), on obtient

$$\begin{aligned} \{ \mathcal{L}_{2h}, \mathcal{L}_{2h} \} &= i \left[\{ u, N(rp^2 - 1) \} - N(rp^2 - 1) \left\{ \frac{u}{N}, N(rp^2 - 1) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ u, \frac{u}{N} \right\} u \right] = iN. \quad (\text{A.15}) \end{aligned}$$

Les autres relations (4.8)-(4.11) se vérifient d'une manière analogue.

REFERENCES

- [1] P. A. M. DIRAC, *Lectures on Quantum Mechanics* (Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, N. Y., 1964).
- [2] A. J. HANSON, T. REGGE and C. TEITELBOIM, *Constraint Hamiltonian Systems*, Institute for Advanced Study, Princeton, preprint 10-74 (1975) et *Accademia Nazionale dei Lincei*. Roma, 1976.
- [3] V. BARGMANN and I. T. TODOROV, Spaces of analytic functions on a complex cone as carriers for the symmetric tensor representations of $SO(n)$, *J. Math. Phys.*, t. **18**, 1977, p. 1141.

- [4] H. BACRY, The de Sitter group $L_{4,1}$ and the bound states of hydrogen atom, *Nuovo Cimento*, t. **A 41**, 1966, p. 222.
H. BACRY, H. RUEGG and J. M. SOURIAU, Dynamical groups and spherical potentials in classical mechanics, *Commun. Math. Phys.*, t. **3**, 1966, p. 323.
- [5] G. GYÖRGI, Kepler's equation, Fock variables, Bacry's generators and Dirac brackets, *Nuovo Cimento*, t. **53**, 1968, p. 717.
G. GYÖRGI, Integration of the dynamical symmetry group for the $-\frac{1}{r}$ potential, *Acta Phys. Acad. Sci. Hungaricae*, t. **27**, 1969, p. 435.
- [6] *Convegno di Geometria Simplettica e Fisica Matematica*, Rome, 1973. v. en particulier, les articles : B. KOSTANT, *Symplectic spinors* ; D. J. SIMMS, *Geometric quantization of the energy levels in the Kepler problem* ; J. M. SOURIAU, *Sur la variété de Kepler* ; J. ELHADAD, *Sur l'interprétation en géométrie symplectique des états quantiques de l'atome d'hydrogène*.
- [7] E. ONOFRI and M. PAURI, Dynamical quantization, *J. Math. Phys.*, t. **13**, 1972, p. 533.
- [8] E. ONOFRI, *Dynamical quantization of the Kepler manifold*, Università di Parma, preprint IFPR-T-047, 1975.
- [9] E. ONOFRI, V. FOCK, 40 years later, *Lecture given at the Conference on Differential Geometric Methods in Mathematical Physics*, University of Bonn, July, 1975.
- [10] I. T. TODOROV, Quasipotential approach to the two-body problem in quantum field theory. In : *Properties of Fundamental Interactions*, vol. 9, Part C, ed. A. Zichichi (Editrice Compositori, Bologna, 1973) ; v. aussi *Phys. Rev.*, t. **D 3**, 1971, p. 2351.
V. A. RIZOV, I. T. TODOROV and B. L. ANEVA, Quasipotential approach for the Coulomb bound state problem for spin 0 and spin $\frac{1}{2}$ particles, *Nuclear Physics*, t. **B 98**, 1975, p. 447.
- [11] V. BARGMANN, On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, *Commun. Pure Appl. Math.*, t. **14**, 1961, p. 187 and t. **20**, 1967, p. 1.
- [12] T. D. NEWTON and E. P. WIGNER, Localized states for elementary systems, *Rev. Mod. Phys.*, t. **21**, 1949, p. 400.
A. S. WIGHTMAN, On the localizability of quantum mechanical systems, *Rev. Mod. Phys.*, t. **34**, 1962, p. 845.
- [13] D. G. CURRIE and T. F. JORDAN, Interactions in relativistic classical particle mechanics. In : *Lectures in Theoretical Physics*, vol. **XA Quantum Theory and Statistical Physics**, Ed. by A. O. Barut and W. E. Brittin (Gordon and Breach, N. Y., 1968), p. 91-139.
- [14] G. MACK and I. T. TODOROV, Irreducibility of the ladder representations of $U(2,2)$ when restricted to the Poincaré subgroup, *J. Math. Phys.*, t. **10**, 1969, p. 2078.
- [15] S. P. ALLILUEV, *ZhETF*, t. **33**, 1957, p. 200 (English Translation : *JETP*, t. **6**, 1958, p. 156).
- [16] M. BANDER and C. ITZYKSON, Group theory and the hydrogen atom I, *Rev. Mod. Phys.*, t. **38**, 1966, p. 330.
- [17] E. B. ARANSON, I. A. MALKIN and V. I. MANKO, Dynamical symmetries in quantum theory, *Sov. J. Particles Nucl.*, t. **5**, 1974, p. 47 (p. 122 dans l'édition russe).
- [18] H. H. ROGERS, Symmetry properties of the classical Kepler problem, *J. Math. Phys.*, t. **14**, 1973, p. 1125.

(Manuscrit reçu le 22 avril 1977)