

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

M. COURBAGE

Une classe d'invariants réguliers en tant que limites asymptotiques ou moyennes ergodiques

Annales de l'I. H. P., section A, tome 27, n° 4 (1977), p. 387-405

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1977__27_4_387_0

© Gauthier-Villars, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Une classe d'invariants réguliers en tant que limites asymptotiques ou moyennes ergodiques

par

M. COURBAGE

Faculté des Sciences, Université Libre de Bruxelles, C. P. 231,
1050 Bruxelles, Belgique

ABSTRACT. — We study the asymptotic or ergodic behavior of a class of initial states for quantum statistical systems where the collision operator, introduced by Prigogine and coworkers, is non-vanishing. In this case, they distinguish two particular classes of invariants, called respectively regular and collisional invariants, among the invariants of the motion. A class of initial states which tend to those invariants asymptotically or in the ergodic mean is characterized using the destruction operator and some spectral properties of the representation in the case of systems whose hamiltonians have an absolutely continuous part in their spectrum.

Furthermore, collisional invariants which can be obtained as ergodic means of some equivalence class of one initial state are characterized in terms of the Γ^+ Friedrichs operator. Uniqueness of that initial state is lost when the asymptotic collision operator is non-vanishing.

RÉSUMÉ. — Nous étudions le comportement asymptotique ou ergodique d'une classe d'états initiaux pour des systèmes statistiques quantiques où l'opérateur de collision, introduit par Prigogine et ses collaborateurs, est non nul. Ils distinguent dans ce cas deux classes particulières d'invariants, appelés respectivement invariants réguliers et collisionnels, parmi les invariants du mouvement. Une classe d'états initiaux qui tendent à ces invariants asymptotiquement ou en moyenne ergodique est caractérisée en utilisant l'opérateur de destruction et certaines propriétés spectrales dans le cas des systèmes à spectre continu.

De plus, certains invariants collisionnels qui peuvent être obtenus comme des moyennes ergodiques de certaines classes d'équivalence d'états initiaux

sont caractérisés au moyen de l'opérateur Γ^+ de Friedrichs. L'unicité de ces états initiaux est perdue quand l'opérateur de collision asymptotique est non nul.

1. INTRODUCTION

Les difficultés de la théorie ergodique conduisent aujourd'hui à rechercher d'autres voies pour justifier l'approche vers l'équilibre des systèmes thermodynamiques. Il a été remarqué récemment [21] que les systèmes qui ont la propriété de l'ergodicité ne forment qu'une partie des systèmes physiques. Ceci est vrai pour les systèmes à spectre discret où l'ergodicité est équivalente à la non-dégénérescence du spectre de l'hamiltonien : propriété plutôt rare. Ceci est également vrai pour les systèmes à spectre continu où peu de travaux sont connus à ce sujet. Par conséquent il est nécessaire de dépasser cette notion, et depuis quelque temps plusieurs auteurs ont cherché à caractériser certaines observables qui sont ergodiques [3] en utilisant la borne inférieure des fonctions d'auto-corrélations de ces observables.

Cependant Prigogine et ses collaborateurs [2] ont souligné qu'une recherche systématique de la classe des états initiaux suffisamment réguliers pour tendre vers les ensembles d'équilibre peut être entreprise à partir d'une théorie cinétique pour des systèmes non ergodiques. Leur théorie est fondée sur une décomposition de l'espace des états en deux sous-espaces orthogonaux. Dans une telle « représentation » ils définissent un opérateur de collision asymptotique qui, lorsqu'il existe, contient dans son noyau une sous-classe particulière d'invariants du mouvement appelés les invariants collisionnels. Dans ce cas, seule une classe d'états initiaux peut tendre vers ces invariants collisionnels. Si, en plus, ces invariants sont des fonctions de l'énergie, alors pour cette seule classe d'états initiaux il est possible de parler d'approche vers l'équilibre. Nous avons d'une certaine manière un triage des états initiaux.

Examinant ces questions pour des systèmes de dimension finie, G. Stey a montré dans des notes non publiées que si $\psi(+i0)$ est non nul, alors il n'existe pas nécessairement une correspondance biunivoque entre la projection de l'état initial sur un sous-espace déterminé et la projection de l'état final sur le même sous-espace. Ces mêmes questions viennent d'être examinées dans un modèle quantique [20].

Nous examinons ici ces problèmes rigoureusement dans un modèle mathématique, relativement simple mais qui décrit un système physique non restreint à un volume fini. Notre hamiltonien aura un spectre continu qui sera responsable de l'approche vers un état stationnaire. Il induira un

groupe d'évolution dynamique sur l'espace des opérateurs de type Hilbert-Schmidt.

Pour situer le lien entre ce que nous venons de dire et la théorie cinétique rappelons brièvement les idées de base des équations maîtresses [1]. Partant de l'équation de Von Neumann pour les matrices densité :

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \rho(t) &= [H, \rho(t)] \\ &= L\rho(t) \end{aligned} \quad (1)$$

où L est l'opérateur de Liouville-Von Neumann, Prigogine et Résibois [1] ont écrit une équation maîtresse qui décrit l'évolution des éléments diagonaux dans une représentation, de la matrice densité $\rho(t)$. D'une manière plus générale on peut introduire deux projecteurs orthogonaux et complémentaires, P et Q sur un espace approprié contenant les matrices densité. Utilisant l'équation de Von Neumann (1) on écrit une équation maîtresse pour $P\rho(t)$. Cette équation est une équation intégral-différentielle contenant deux termes : le premier peut être interprété comme dépendant des collisions dans le système, le second dépend de l'état initial $\rho(0)$, ou plus précisément de $Q\rho(0)$. Généralement, pour certaines conditions initiales de régularité qui font « oublier » l'effet des corrélations initiales, c'est le premier terme qui domine l'évolution du système. Ce terme est un opérateur intégral dont le noyau est le transformé de Laplace inverse de ce qu'on appelle l'opérateur de collision $\psi(z)$ (voir la définition plus bas). Le passage de cette équation non markovienne à une équation markovienne pour la partie $P\rho(t)$ constitue le pas important pour faire apparaître une évolution irréversible de l'état du système. Ce passage a fait l'objet de nombreux travaux formellement (cf. réf. dans [1], cf. également [4]).

Plus récemment, E. B. Davies [5] a dérivé rigoureusement une équation maîtresse markovienne pour un faible couplage.

De même que pour $P\rho(t)$, une autre équation maîtresse a été dérivée pour $Q\rho(t)$, dont l'évolution dépend de celle de $P\rho(t)$ par l'intermédiaire de ce qu'on appelle l'opérateur de création $\mathcal{C}(z)$ (voir la définition plus bas).

Dans ce cadre les états d'équilibre seront les états stationnaires Φ des équations cinétiques, et satisfont formellement aux deux équations [6] [7] :

$$\psi(+i0)P\Phi = 0 \quad (2)$$

$$Q\Phi = \mathcal{C}(+i0)P\Phi. \quad (3)$$

L'équation (2) signifie que $P\Phi$ appartient au noyau de l'opérateur $\psi(+i0)$ (on notera dans la suite le noyau d'un opérateur A par $N(A)$).

Dans le paragraphe II, nous donnons une formulation générale de la théorie pour des hamiltoniens non bornés, et nous montrons que pour de tels systèmes il est nécessaire de choisir d'une manière restrictive le projecteur P .

Dans le paragraphe III nous donnons les conditions initiales générales

pour engendrer des invariants réguliers. Dans le paragraphe IV nous donnons leur expression spectrale. Dans le paragraphe V nous donnons à l'aide de l'opérateur Γ^+ de Friedrichs les conditions pour qu'un invariant soit une moyenne ergodique d'une certaine classe d'états initiaux.

II. FORMALISME GÉNÉRAL

Un état de notre système sera décrit par une matrice densité sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . Nous nous restreignons donc à l'ensemble des états normaux. Nous plongeons les états dans l'ensemble des opérateurs de type Hilbert-Schmidt sur \mathcal{H} . Rappelons qu'un opérateur ρ est de type Hilbert-Schmidt si $\text{Tr}(\rho^*\rho) < +\infty$. On définit sur cet ensemble le produit scalaire :

$$(\rho', \rho) = \text{Tr}(\rho'^*\rho).$$

Nous obtenons ainsi un espace de Hilbert d'opérateurs que nous notons \mathcal{L} . On désignera par $\|\rho\|_2$ la norme de $\rho \in \mathcal{L}$ qui découle de ce produit scalaire.

L'hamiltonien du système, H , est un opérateur auto-adjoint sur \mathcal{H} , non nécessairement borné et son domaine de définition peut ne pas être \mathcal{H} tout entier. L'évolution d'un état $\rho \in \mathcal{L}$ est donnée par :

$$U(t)\rho = e^{-itH}\rho e^{itH} \quad (4)$$

$U(t)$ est un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires sur \mathcal{L} , fortement continu. Son générateur infinitésimal, L , est un opérateur auto-adjoint de \mathcal{L} , à domaine dense, $D(L)$. On montre [8] que $\rho \in D(L)$ si et seulement si $\rho D(H) \subset D(H)$ et $(H\rho - \rho H)$ est un opérateur qui admet une extension à un opérateur de type Hilbert-Schmidt. Si $\rho \in D(L)$, alors :

$$L\rho = [H\rho, -\rho H] \quad (5)$$

[] désigne l'extension de l'opérateur à tout \mathcal{H} . On notera désormais $U(t) = e^{-itL}$.

Comme $U(t)$ est un groupe fortement continu, l'équation de Von Neumann en découle pour tout $\rho \in D(L)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{-itL}\rho = -iLe^{-itL}\rho \quad (6)$$

On montre également [8] que L est caractérisé de la manière suivante :

Soit $D_0 = \{ |\varphi\rangle\langle\psi|, \varphi, \psi \in D(H) \}$, où nous notons par $|\varphi\rangle\langle\psi|$ l'opérateur qui à $\phi \in \mathcal{H}$ associe $\langle\psi, \phi\rangle\varphi$, \langle, \rangle désigne le produit scalaire sur \mathcal{H} . Et soit L' l'opérateur défini sur D_0 par :

$$L'|\varphi\rangle\langle\psi| = |H\varphi\rangle\langle\psi| - |\varphi\rangle\langle H\psi|$$

alors L' est essentiellement auto-adjoint et son extension $\tilde{L}' = L$.

On introduit un couple de projecteurs complémentaires et orthogonaux sur \mathcal{L} , P et $Q = I - P$. A partir d'équations maîtresses généralisées équivalentes à l'équation de Von Neumann (6) pour $\rho(t)$ on dérive formellement [1] des équations cinétiques de type :

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(t) = -i\tilde{\theta}P\tilde{\rho}(t) \tag{7}$$

$$Q\tilde{\rho}(t) = CP\tilde{\rho}(t) \tag{8}$$

pour une fonction $\tilde{\rho}(t)$ de $\rho(t)$, où $\tilde{\theta}$ est un opérateur non auto-adjoint. Les solutions $\tilde{\rho}(t)$ de ces équations représentent l'approximation asymptotique des solutions $\rho(t)$ de (6) en ce sens que les valeurs moyennes de certaines observables macroscopiques dans l'état $\rho(t)$ peuvent être approximées par leurs valeurs moyennes dans l'état $\tilde{\rho}(t)$ lorsque t est très grand par rapport au temps de collision des particules.

Sans entrer dans le détail de la construction des opérateurs $\tilde{\theta}$ et C rappelons brièvement les opérateurs fondamentaux qui nous serviront à la définition des états stationnaires de (7) et (8) dans notre modèle mathématique :

Pour tout $\rho \in D(L)$ on a la formule [9] : $t > 0, c > 0$

$$e^{-itL}\rho = -1/2i\pi \int_{\infty+ic}^{-\infty+ic} e^{-izt} \frac{1}{L-z} \rho dz \tag{9}$$

On décompose la résolvante $\frac{1}{L-z}$ ⁽¹⁾ en quatre parties

$$P \frac{1}{L-z} P, \quad P \frac{1}{L-z} Q, \quad Q \frac{1}{L-z} P \quad \text{et} \quad Q \frac{1}{L-z} Q$$

qu'on exprime en fonction de la résolvante de QLQ.

On montre [8] que si $R(P) \subset D(L)$ ⁽²⁾, alors QLQ est un opérateur auto-adjoint (cette propriété est importante pour qu'il soit le générateur d'un groupe d'évolution dans $Q\mathcal{L}$) et pour tout $z \in \rho(L) \cap \rho(QLQ)$, intersection des ensembles résolvants de L et de QLQ, on a :

$$\frac{1}{L-z} = (P + \mathcal{C}(z)) \frac{1}{\psi(z) - z} (P + \mathcal{D}(z)) + \frac{1}{QLQ - z} Q \tag{10}$$

où $\psi(z)$, $\mathcal{D}(z)$ et $\mathcal{C}(z)$ sont des opérateurs bornés sur \mathcal{L} analytiques dans $\rho(QLQ)$ appelés respectivement opérateurs de collision, de destruction et de création des corrélations, donnés par :

$$\psi(z) = -PLQ \frac{1}{QLQ - z} QLP \tag{11}$$

⁽¹⁾ Par abus de notation $[L - z]^{-1}$ remplace $[L - zI]^{-1}$ où I est l'opérateur identité sur \mathcal{L} .

⁽²⁾ R(P) désigne « range » ou ensemble des valeurs de P.

$$\mathcal{D}(z) = -\text{PLQ} \frac{1}{\text{QLQ} - z} \text{Q} \quad (12)$$

$$\mathcal{C}(z) = -\text{Q} \frac{1}{\text{QLQ} - z} \text{QLP} \quad (13)$$

où nous avons supposé que $\text{PLP} = 0$.

La formule (10) est une formule très connue [10], [11] pour le cas où L est borné.

Notons qu'avec nos hypothèses PLQ est un opérateur borné sur $\text{D}(\text{L})$.

L'hypothèse $\text{R}(\text{P}) \subset \text{D}(\text{L})$ impose un choix de l'espace $\text{P}\mathcal{L}$. En pratique on décompose H en somme d'un hamiltonien libre H_0 et d'une interaction V , où V est un opérateur symétrique. Avec H_0 on construit l'opérateur de Von Neumann L_0 et on choisit P comme projecteur sur un sous-espace de $\text{N}(\text{L}_0)$, noyau de L_0 . Si V est borné alors l'hypothèse $\text{R}(\text{P}) \subset \text{D}(\text{L})$ est trivialement vérifiée. Si V est relativement borné, [12], et si $\{\psi_i\}$ est une famille orthonormale de vecteurs propres de H_0 correspondant aux valeurs propres $\{E_i\}$, et tels que

$$\sum_i E_i^2 < +\infty$$

on montre alors [8] que le projecteur P défini par :

$$\text{P} = \sum_i |ii\rangle\langle ii|$$

où $|ii\rangle$ désigne l'opérateur $|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ vérifie l'hypothèse

$$\text{R}(\text{P}) \subset \text{D}(\text{L}).$$

Nous désignons dans ce qui suit par $\psi(+i0)$ la limite forte de $\psi(z)$ lorsque $z \rightarrow 0$ par valeurs dans un secteur du demi-plan supérieur

$$\text{C}_\theta^+ = \left\{ z \in \mathbb{C}/\theta \leq \arg(z) < \pi - \theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right\}$$

lorsque cette limite existe. $\psi'(+i0)$ désigne la limite forte de $\frac{\psi(z) - \psi(+i0)}{z}$

pour $z \rightarrow 0^+$ par valeurs dans C_θ^+ lorsque la limite existe. On a montré formellement, [6], que si $\tilde{\rho}(t)$ correspond à l'approximation asymptotique de $\rho(t)$ alors, les états stationnaires des équations (7) et (8) sont les invariants dits réguliers (Φ est un invariant si $\text{L}\Phi = 0$), qui satisfont aux deux équations (2) et (3). Un invariant qui satisfait à (2) seulement sera dit invariant collisionnel. Rappelons qu'un état qui satisfait aux équations (2) et (3) est un invariant, l'inverse n'est pas toujours vraie [7].

III. UNE CLASSIFICATION DES CONDITIONS INITIALES

Nous utilisons dans la suite les deux théorèmes suivants connus pour la transformation de Laplace des fonctions numériques et dont nous donnons la preuve pour l'espace \mathcal{L} dans l'appendice.

THÉORÈME I. — Si $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-itL} \rho$ existe alors $\lim_{z \rightarrow 0} z \frac{1}{L - z} \rho, z \in C_0^+,$ existe également, et dans ce cas on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-itL} \rho = - \lim_{z \rightarrow 0^+} z \frac{1}{L - z} \rho \tag{14}$$

THÉORÈME II.

$$\begin{aligned} s\text{-}\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-itL} dt &= - s\text{-}\lim_{z \rightarrow 0^+} z \frac{1}{L - z} \\ &= E_0 \end{aligned} \tag{15}$$

(s-lim désigne la limite au sens de la convergence forte des opérateurs bornés sur \mathcal{L}),

où E_0 est le projecteur orthogonal sur $N(L)$, la dernière limite étant prise par valeurs dans C_0^+ .

THÉORÈME III. — Supposons que $\psi(+i0)$ existe.

i) Si $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-itL} P \rho = \rho_0(\infty)$ existe, alors $P \rho_0(\infty) = \rho_{0,0}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} P e^{-itL} P \rho$ est un élément de $N(\psi(+i0))$, i. e. $\rho_0(\infty)$ est un invariant collisionnel.

ii)
$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P e^{-itL} P \rho dt = P E_0 P \rho$$

est un élément de $N(\psi(+i0))$, $\forall \rho \in \mathcal{L}$

iii) Supposons en plus que $\psi'(+i0)\rho$ existe pour tout $\rho \in N(\psi(+i0))$ alors $N(\psi(+i0)) = R(PE_0P)$. En d'autres termes pour tout élément $\rho \in N(\psi(+i0))$, il existe $\rho' \in \mathcal{L}$ tel que

$$P \rho = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P e^{-itL} P \rho' dt$$

Preuve. — Prouvons d'abord ii), i) en découlera par application des théorèmes I et II.

D'après le théorème II et la formule (10), on a :

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P e^{-itL} P \rho dt &= - \lim_{z \rightarrow 0^+} z \frac{1}{\psi(z) - z} P \rho \\ &= P E_0 P \rho \end{aligned} \tag{16}$$

Comme $\psi(z) \xrightarrow{s} \psi(+i0)$ et $z \frac{1}{\psi(z) - z} P \rho \xrightarrow{s} P E_0 P \rho$ on a :

$$\psi(+i0) P E_0 P \rho = \lim_{z \rightarrow 0^+} - z \psi(z) \frac{1}{\psi(z) - z} P \rho \tag{17}$$

$$= - \lim_{z \rightarrow 0^+} \left[z P \rho + z^2 \frac{1}{\psi(z) - z} P \rho \right] \tag{18}$$

le second membre tend vers zéro puisque $z \frac{1}{\psi(z) - z} P\rho$ converge lorsque $z \rightarrow 0^+$. D'où le résultat.

iii) Nous venons de prouver que $R(PE_0P) \subset N(\psi(+i0))$. Supposons $P\rho \in N(\psi(+i0))$, alors de (16) on a :

$$\begin{aligned} PE_0P\rho &= - \lim_{y \rightarrow 0^+} z \frac{1}{\psi(z) - z} P\rho \\ &= P\rho - \lim_{z \rightarrow 0^+} z \frac{1}{\psi(z) - z} \frac{\psi(z)}{z} P\rho \end{aligned} \quad (19)$$

Or, $\frac{\psi(z)}{z} P\rho \rightarrow \psi'(+i0)P\rho$ lorsque $z \rightarrow 0^+$, $Z \in C_\theta^+$. De (16) et (19) on tire :

$$P\rho = PE_0P[P - \psi'(+i0)]P\rho. \quad (20)$$

Ceci prouve que $N(\psi(+i0)) \subset R(PE_0P)$; et achève la preuve du théorème.

COROLLAIRE 1. — *Supposons que $\psi(+i0)$ existe. Si PE_0P est inversible dans $P\mathcal{L}$ alors $\psi(+i0) = 0$.*

Preuve. — En effet on a l'identité :

$$-z \frac{1}{\psi(z) - z} \psi(z)P\rho = -zP\rho - z^2 \frac{1}{\psi(z) - z} P\rho$$

Le membre gauche tend fortement vers $PE_0P\psi(+i0)\rho$ (cf. (16)) alors que le membre droit tend vers zéro. Ainsi on conclut que $R(\psi(+i0)) \subset N(PE_0P) = \{0\}$. Ce qui prouve que $\psi(+i0) = 0$.

COROLLAIRE 2. — *Si $\psi(+i0) = 0$ et $\psi'(+i0)$ existe, alors PE_0P est inversible et $R(PE_0P) = P\mathcal{L}$.*

Preuve. — On a l'identité :

$$-z \frac{1}{\psi(z) - z} P\rho = P\rho - z \frac{\psi(z)}{z} \frac{1}{\psi(z) - z} P\rho$$

Par passage à la limite dans cette identité on a :

$$P\rho = [P - \psi'(+i0)]PE_0P\rho. \quad (21)$$

L'inversibilité de PE_0P découle de (21) et iii) du théorème III implique que $R(PE_0P) = N(\psi(+i0)) = P\mathcal{L}$.

Remarque. — Si $P\mathcal{L}$ est à une dimension alors $\psi(+i0) \neq 0$ implique que $\lim_{t \rightarrow \infty} Pe^{-itL}P\rho = 0$ pour tout $P\rho$ lorsque cette limite existe, puisque $N(\psi(+i0))$ est réduit à zéro. Nous retrouvons là le résultat de [13].

LEMME 1. — Supposons que $\psi(+i0)$ existe. Si ρ est tel que :

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} z\mathcal{D}(z)Q\rho = 0 \tag{22}$$

alors $E_0\rho$ est un invariant de collision.

Preuve. — Du théorème II et de la formule (10) on a :

$$\begin{aligned} \psi(+i0)E_0\rho &= - \lim_{z \rightarrow 0^+} z\psi(z)P \frac{1}{L-z} \rho \\ &= - \lim_{z \rightarrow 0^+} z\psi(z) \frac{1}{\psi(z)-z} [P\rho + \mathcal{D}(z)Q\rho] \end{aligned} \tag{23}$$

Or le premier terme du second membre tend vers zéro puisque

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} z \frac{1}{\psi(z)-z} \rho \in N(\psi(+i0)) \text{ (cf. th. III),}$$

d'un autre côté, pour $Z \in C_0^+$ on a :

$$z\psi(z) \frac{1}{\psi(z)-z} \mathcal{D}(z)Q\rho = z\mathcal{D}(z)Q\rho - z^2 \frac{1}{\psi(z)-z} \mathcal{D}(z)Q\rho$$

qui tend vers zéro en vertu du théorème III.

LEMME 2. — Si la limite faible de $e^{-itL}\rho$ existe lorsque $t \rightarrow \infty$:

$$w\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-itL}\rho = \rho(\infty)$$

Alors :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-itL}\rho dt = \rho(\infty)$$

Preuve. — De manière analogue à la preuve du théorème I on prouve que :

$$w\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-itL}\rho = - w\text{-}\lim_{z \rightarrow 0^+} z \frac{1}{L-z} \rho$$

Le résultat découle immédiatement par application du théorème II.

THÉORÈME IV. — Supposons que $\mathcal{C}(+i0)$ existe. Si

$$w\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-itQLQ}Q\rho = 0 \tag{24}$$

ou bien si

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-itQLQ}Q\rho dt = - \lim_{z \rightarrow 0^+} z \frac{1}{QLQ-z} Q\rho = 0 \tag{25}$$

alors $E_0\rho$ est un invariant régulier.

Preuve. — En appliquant les théorèmes I et II à QLQ , de la définition de $\mathcal{D}(z)$ et du fait que PLQ est borné, il résulte que $\lim_{z \rightarrow 0^+} z\mathcal{D}(z)Q\rho = 0$ et

que $\psi(+i0)$ existe. Du lemme 1 on déduit que $E_0\rho$ est un invariant de collision. D'un autre côté, du théorème II et de (10) on a :

$$\begin{aligned} QE_0\rho &= - \lim_{z \rightarrow 0^+} z\mathcal{C}(z) \frac{1}{\psi(z) - z} [P\rho + \mathcal{D}(z)Q\rho] \\ &\quad - \lim_{z \rightarrow 0^+} z \frac{1}{QLQ - z} Q\rho \\ &= \mathcal{C}(+i0)PE_0\rho \end{aligned}$$

On retrouve l'équation (3) des invariants réguliers.

Le théorème précédent peut être interprété physiquement de la manière suivante : si $Q\rho$ est la partie de ρ décrivant les corrélations, alors QLQ est le générateur infinitésimal d'un groupe d'évolution qu'on appelle le groupe dynamique des corrélations. A ce titre, le théorème IV signifie que si un état $\rho(0)$ tend asymptotiquement vers un état $\rho(\infty)$, alors cet état asymptotique est un invariant régulier si l'évolution de ses corrélations initiales par la dynamique des corrélations tend à décroître vers zéro. Une des conséquences physiques de cette condition c'est que les corrélations initiales ne contribuent pas asymptotiquement à la variation de $P\rho(t)$. En effet, si $\rho \in \mathcal{D}(L)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-itL}P\rho$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-itL}Q\rho$ existent, alors l'équation de Von Neumann implique :

$$\frac{\partial}{\partial t} P\rho(t) = -iPLe^{-itL}P\rho - iPLe^{-itL}Q\rho(0) \tag{26}$$

puisque PL est borné. On montre que si $z\mathcal{D}(z)Q\rho \rightarrow 0, z \rightarrow 0^+$, alors le second terme de (26) tend vers zéro. De même on voit aisément par un calcul direct que le premier terme de (26) tend également vers zéro, et on a

$$\frac{\partial}{\partial t} P\rho(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, [14].$$

On dira que les corrélations $Q\rho$ sont de portée limitée si $Q\rho$ satisfait à l'équation (24) ou (25); ce qui implique que $z\mathcal{D}(z)Q\rho \rightarrow 0, z \rightarrow 0^+$. Une exigence physique plus forte serait que les corrélations initiales $Q\rho$ disparaissent en moyenne ergodique ou asymptotiquement, i. e.

$$w\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-itL}Q\rho = 0 \tag{27}$$

$$s\text{-}\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-itL}Q\rho dt = 0 \tag{28}$$

$Q\rho$ satisfaisant à (27) ou (28) sera appelé « corrélation de portée très limitée ».

THÉORÈME V. — Supposons que $\mathcal{C}(+i0)$ existe. Si $w\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-itL}Q\rho = 0$ ou si $\frac{1}{T} \int_0^T e^{-itL}Q\rho dt \rightarrow 0, T \rightarrow \infty$, alors on a :

$$i) \quad \lim_{z \rightarrow 0^+} z \frac{1}{QLQ - z} Q\rho = 0$$

ii)
$$\lim_{z \rightarrow 0^+} z \mathcal{D}(z) Q \rho = 0$$

iii) $E_0 \rho$ est un invariant régulier.

Preuve. — De nos hypothèses, du théorème II et de (10) on a :

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P e^{-itL} Q \rho dt &= - \lim_{z \rightarrow 0^+} z P \frac{1}{L - z} Q \rho \\ &= - \lim_{z \rightarrow 0^+} z \frac{1}{\psi(z) - z} \mathcal{D}(z) Q \rho \\ &= 0 \end{aligned} \tag{29}$$

D'un autre côté, et de la même manière on a :

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Q e^{-itL} Q \rho dt &= - \lim_{z \rightarrow 0^+} z \mathcal{E}(z) \frac{1}{\psi(z) - z} \mathcal{D}(z) Q \rho \\ &\quad + \lim_{z \rightarrow 0^+} z \frac{1}{QLQ - z} Q \rho \\ &= 0 \end{aligned} \tag{30}$$

De (28) et (29) on tire immédiatement :

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} z \frac{1}{QLQ - z} Q \rho = 0 \tag{31}$$

Le reste découle directement du théorème IV.

Ce théorème justifie le terme de « corrélations de portée très limitée ». En plus si initialement $Q \rho = 0$ alors le théorème montre que $\rho(t)$ tend asymptotiquement vers un invariant régulier. Ce qui confirme que lorsque les corrélations initiales $Q \rho$ sont négligeables alors la moyenne ergodique de ρ est un invariant régulier.

IV. QUELQUES PROPRIÉTÉS SPECTRALES

Nous allons caractériser dans ce paragraphe une classe d'états qui satisfont aux conditions des théorèmes IV et V, surtout $w\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-itQLQ} Q \rho = 0$ et $w\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-itL} Q \rho = 0$.

LEMME 3. — Si $Q \rho$ est absolument continu par rapport à QLQ alors

$$w\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-itQLQ} Q \rho = 0 \tag{32}$$

et

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} z \frac{1}{QLQ - z} Q \rho = 0 \tag{33}$$

Preuve. — Désignons par $Q(\lambda)$ la résolution spectrale de QLQ on a pour tout $\rho' \in \mathcal{L}$

$$(e^{-itQLQ}Q\rho, Q\rho') = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda} d(Q(\lambda)Q\rho, Q\rho') \quad (34)$$

Or, $(Q(\lambda)Q\rho, Q\rho')$ est absolument continu, d'où :

$$(e^{-itQLQ}Q\rho, Q\rho') = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda} \frac{d}{d\lambda} (Q(\lambda)Q\rho, Q\rho') d\lambda \quad (35)$$

Mais comme $d/d\lambda(Q(\lambda)Q\rho, Q\rho')$ est absolument sommable dans $(-\infty, +\infty)$ alors par application du lemme de Riemann-Lebesgue on obtient la première partie, la dernière découle du théorème I.

Nous en déduisons directement le théorème suivant :

THÉORÈME VI. — *Si $Q\rho$ est absolument continu par rapport à QLQ , alors :*

i) $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Tr} ((e^{-itQLQ}Q\rho)A) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{L}$.

ii) $\lim_{z \rightarrow 0^+} z \frac{1}{QLQ - z} Q\rho = 0$

iii) $\lim_{z \rightarrow 0^+} z \mathcal{D}(z)Q\rho = 0$

Dans ce cas $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-itL} \rho dt = E_0 \rho$ est un invariant régulier.

Bien que l'on puisse étudier dans certains cas le spectre de QLQ (par exemple le modèle de Lee [15]), il est plus naturel de caractériser les corrélations en rapport avec l'évolution e^{-itL} . Dans ces conditions, si $Q\rho$ est absolument continu par rapport à L alors (th. V) $w\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-itL}Q\rho = 0$ et $E_0 \rho$ est un invariant régulier.

En outre comme l'ensemble des opérateurs de rang fini est dense dans l'ensemble des opérateurs compacts, \mathcal{L}_∞ , alors pour tout $A \in \mathcal{L}_\infty$, et pour tout $Q\rho \in \mathcal{L}_1$, où \mathcal{L}_1 est la classe des opérateurs tels que $\text{Tr}([\rho * \rho]^{1/2}) < +\infty$, $\text{Tr}((e^{-itL}Q\rho)A) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Supposons enfin que le spectre singulièrement continu (voir [12] page 517) de H est vide et appelons $\{F_i\}$ l'ensemble des projecteurs propres de H , on a prouvé récemment [16] que $Q\rho$ est absolument continu par rapport à L si et seulement si $F_i Q\rho F_j = 0$, $\forall i, j$, ou bien si $F_i \rho F_j = F_i P \rho F_j$, $\forall i, j$. On peut résumer ce qui précède par le théorème suivant :

THÉORÈME VII. — *Avec les hypothèses du théorème V, on a :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Tr} ((e^{-itL}Q\rho)A) = 0$$

pour toute observable A compacte et pour tout ρ tel que $F_i \rho F_j = F_i P \rho F_j$, $\forall i, j$, $Q\rho \in \mathcal{L}_1$. Dans ce cas $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-itL} \rho dt = E_0 \rho$ est un invariant régulier.

V. UNE CLASSIFICATION DES INVARIANTS

Il est connu que tout invariant Φ satisfait à l'équation suivante [7] :

$$\psi(z)P\Phi + z\mathcal{D}(z)Q\Phi = 0 \tag{36}$$

Il en résulte que l'invariant Φ est un invariant collisionnel si

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} z\mathcal{D}(z)Q\Phi = 0.$$

D'un autre côté, d'après le théorème III, si $\lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\psi(z)}{z} P\Phi$ existe, $\Phi \in N(\psi(+i0))$ alors il existe $\rho \in \mathcal{L}$ tel que $P\Phi = PE_0P\rho = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P\rho^{-itL}P\rho dt$. D'après (36) un tel invariant Φ satisfait à la condition : $\mathcal{D}(+i0)\Phi$ existe. Un tel invariant de collision décrit un processus asymptotique dans $\mathcal{P}\mathcal{L}$.

Définissons l'opérateur Γ_t par :

$$\rho \in \mathcal{L} \rightarrow \Gamma_t(\rho) = i \int_0^t e^{-isL} \rho ds \tag{37}$$

l'opérateur Γ^+ est défini par :

$$\Gamma^+(\rho) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma_t(\rho) \tag{38}$$

$D(\Gamma^+) = \{ \rho \in \mathcal{L}, \lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma_t(\rho) \text{ existe pour la norme } \| \cdot \|_2 \}$. On remarque aisément que si $\rho \in D(\Gamma^+)$ alors

$$\Gamma^+(\rho) = \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{1}{L - z} \rho \tag{39}$$

Ceci se prouve de la même manière que le théorème I. Supposons que $Q\rho \in D(\Gamma^+)$ alors (39) et (10) impliquent que :

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0^+} P \frac{1}{L - z} Q\rho &= P\Gamma^+(Q\rho) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{1}{\psi(z) - z} \mathcal{D}(z)Q\rho \end{aligned} \tag{40}$$

D'un autre côté on a l'identité :

$$\psi(z) \frac{1}{\psi(z) - z} \mathcal{D}(z)Q\rho = \mathcal{D}(z)Q\rho + z \frac{1}{\psi(z) - z} \mathcal{D}(z)Q\rho \tag{41}$$

Si $\psi(+i0)$ existe alors le membre de gauche de cette égalité admet une limite lorsque $z \rightarrow 0^+$.

De même le deuxième terme du membre de droite tend vers zéro, d'où $\mathcal{D}(+i0)Q\rho$ existe et est donné par :

$$\mathcal{D}(+i0)Q\rho = \psi(+i0)\Gamma^+(Q\rho).$$

Cependant, l'existence des limites (38) et (40) pour la norme $\| \cdot \|_2$ est une très forte exigence. Pour plus de simplicité, supposons que P est de

rang fini et que $R(P) \subset \mathcal{L}_1$, i. e. $\mathcal{B}(P)$ est engendré par N matrices densité. Avec ces hypothèses on a le théorème suivant :

THÉORÈME VIII. — Si $Q\rho \in \mathcal{L}$ et $Q\rho = \sum_k |f_k\rangle \langle g_k|$, où f_k et g_k sont des vecteurs absolument continus par rapport à H , et si

$$\text{Sup}_\lambda \sum_k \frac{d}{d\lambda} \langle E(\lambda) f_k, f_k \rangle = \alpha^2 < +\infty \quad (42)$$

$$\text{Sup}_\lambda \sum_k \frac{d}{d\lambda} \langle E(\lambda) g_k, g_k \rangle = \beta^2 < +\infty \quad (43)$$

où $E(\lambda)$ est la famille spectrale de H . Alors,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{P}\Gamma_t(Q\rho) = \Gamma_0^+(Q\rho)$$

existe et appartient à $\mathcal{P}\mathcal{L}$. Si $\psi(+i0)$ existe alors $\mathcal{D}(+i0)Q\rho$ existe et il est donné par :

$$\mathcal{D}(+i0)Q\rho = \psi(+i0)\Gamma_0^+(Q\rho)$$

Preuve. — Des hypothèses, il découle [12] que pour tout $\psi \in \mathcal{H}$ on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma_t(Q\rho)\psi = \Gamma^+(Q\rho)\psi$$

et $\Gamma^+(Q\rho) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, où $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est l'ensemble des opérateurs bornés sur \mathcal{H} . Il en résulte que $\text{Tr}(\Gamma_t(Q\rho)A)$ converge vers $\text{Tr}(\Gamma^+(Q\rho)A)$ pour tout A de rang fini. Mais $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est isomorphe à \mathcal{L}_1^* (dual de \mathcal{L}_1), $\Gamma_t(Q\rho)$ définit une fonctionnelle sur \mathcal{L}_1 :

$$\phi_t(A) = \text{Tr}(\Gamma_t(Q\rho)A), \quad A \in \mathcal{L}_1$$

telle que $\|\phi_t\| = \|\Gamma_t(Q\rho)\|$, comme [12]

$$\|\Gamma_t(Q\rho)\| \leq 2\pi\alpha\beta$$

alors $\phi_t(A)$ converge pour tout $A \in \mathcal{L}_1$, et puisque $P\rho \in \mathcal{L}_1$, alors $(A, \text{P}\Gamma_t(Q\rho))$ converge pour tout $A \in \mathcal{L}$. D'où $\text{P}\Gamma_t(Q\rho)$ converge faiblement vers un élément de $\mathcal{P}\mathcal{L}$. Comme P est de dimension finie, cela implique la convergence forte. Le reste du théorème a déjà été prouvé ci-dessus (cf. (40) et (41)).

Remarque. — Avec les hypothèses du théorème VIII on a prouvé la convergence faible de $\text{P}\Gamma_t(Q\rho)$ pour P de dimension quelconque. Mais de (41) on ne peut pas conclure à la convergence de $\mathcal{D}(z)Q\rho$, ni faiblement ni fortement.

IV. CONCLUSION

Nous avons, dans ce qui précède, caractérisé une classe d'états initiaux $\rho(0) \in \mathcal{L}$, tels que leur limite asymptotique ou leur moyenne ergodique soit un invariant régulier. Tout d'abord, on a montré que tout ρ qui appartient initialement à $\mathcal{P}\mathcal{L}$ tend asymptotiquement ou en moyenne ergodique vers un invariant régulier. Si $\rho(0)$ n'appartient pas à $\mathcal{P}\mathcal{L}$ alors les théorèmes IV et V déterminent une classe de corrélations initiales de portée limitée ou très limitée ($\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-itQL}Q\rho = 0$ ou $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-iL}Q\rho = 0$), telles que $\rho(t)$ tend vers un invariant régulier au moins en moyenne ergodique. Ces conditions initiales sont vérifiées si H a un spectre absolument continu et si $Q\rho$ est absolument continu par rapport à QLQ ou à L .

Physiquement le théorème VIII signifie que si la projection $Q\rho$ correspond à des états de diffusion, alors $\rho(t)$ tend vers un invariant régulier.

D'un autre côté, si Φ est un invariant de collision *i. e.* $P\Phi \in N(\psi(+i0))$, il n'est pas nécessairement de la forme

$$P\Phi = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P e^{-isL} P \rho ds.$$

Pour qu'un invariant de collision Φ soit une limite asymptotique de ce genre, il suffit que $\psi'(+i0)P\Phi$ existe (cf. théorème III, *iii*) ou bien (20). D'après (36) il suffit que $\mathcal{D}(+i0)Q\Phi$ existe. Dans ce cas l'état initial $P\rho_0$ donné par :

$$P\rho_0 = [P + \mathcal{D}(+i0)Q]\Phi \tag{44}$$

évolue vers $P\Phi$ en ce sens que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P e^{-isL} P \rho_0 ds = P\Phi$$

$P\Phi$ est ainsi une moyenne ergodique. Enfin, tous les états initiaux, $\rho_t = P\rho_0 + QL P \rho'_t$, tendent vers Φ . Nous avons ainsi une infinité d'états initiaux qui diffèrent par leurs corrélations et qui tendent vers le même invariant Φ : c'est une classe d'équivalence de $P\rho_0$. Bien plus, si $\psi(+i0) \neq 0$, alors du corollaire 1 on sait que PE_0P ne peut pas être inversible. Donc l'état $P\rho_0$ déterminé par (44) ne détermine pas une unique classe d'équivalence d'états initiaux qui tendent vers Φ .

Ce que nous pouvons donc affirmer c'est que si $\mathcal{D}(+i0)Q\Phi$ existe et si $\psi(+i0) \neq 0$, alors nous avons une certaine irréversibilité en ce sens que l'invariant Φ est une moyenne ergodique qui n'est pas déterminée par un état initial $P\rho_0$ nécessairement unique (ou par une seule classe d'équivalence).

Nous avons fourni à l'aide de l'opérateur Γ^+ connu dans la théorie de la diffusion ([12], p. 551) les conditions spectrales pour qu'un invariant ait de telles propriétés.

L'opérateur de collision asymptotique a été étudié dans plusieurs modèles [17], [18], [19], [14]. Son existence dépend du choix de P et des propriétés spectrales de l'hamiltonien.

Remarquons enfin que la structure de l'espace des opérateurs Hilbert-Schmidt est relativement restreinte. Tout d'abord parce que les états des systèmes à un nombre infini de particules ne sont pas des états matrices densité. Ensuite, la convergence forte de $\mathcal{D}(+i0)$ dans \mathcal{L} est une condition très restreignante. Nous avons prouvé une convergence de $\mathcal{D}(+i0)Q\Phi$ pour tout invariant Φ tel que $Q\Phi \in D(\Gamma^+)$, lorsque P est de rang fini. On pourrait probablement relâcher ces restrictions si on considère l'évolution, dans la représentation de Heisenberg, d'une algèbre hilbertienne d'observables, décrivant le système à la limite thermodynamique. On espère que le formalisme de Liouville, adapté à ce cas plus général, pourrait préciser la structure des observables macroscopiques qui admettent une description cinétique et qui tendent vers des invariants réguliers.

En tout cas, l'introduction d'une représentation (P, Q) dans un espace des états (ou des observables) est un concept assez riche pour analyser l'approche vers l'équilibre. Une dernière application de cette technique c'est de caractériser un ensemble d'états initiaux qui tendent en moyenne ergodique vers l'ensemble microcanonique. Grâce à ce qui vient d'être dit, ceci est possible si $Q\Phi_0 \in D(\Gamma^+)$, où Φ_0 est l'ensemble microcanonique correspondant à l'énergie E_0 . Ceci est un critère pour fixer la représentation : une « bonne » représentation est telle que $Q\Phi_0 \in D(\Gamma^+)$.

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier Dr. M. Baus pour ses éclaircissements sur la théorie formelle, Dr. A. P. Grécos de nous avoir suggéré l'étude, le Professeur J. Manuceau de nous avoir précisé la preuve du théorème II, le Professeur I. Prigogine qui a stimulé ce travail par de nombreuses discussions et le Professeur A. Verbeure pour ses éclaircissements concernant la référence [13].

APPENDICE

Voici la preuve de la première partie du théorème I :

$\forall \rho$ on a :

$$z \frac{1}{L - z} \rho = iz \int_0^\infty e^{i\omega t} \rho(t) dt$$

où

$$\rho(t) = e^{-iLt} \rho$$

d'un autre côté

$$- iz \int_0^\infty e^{izt} dt = 1, \quad \text{Im}(z) > 0$$

D'où, si $z = x + iy$:

$$\begin{aligned} \left\| z \frac{1}{L - z} \rho + \rho_\infty \right\|_2 &= \left\| iz \int_0^\infty dt e^{izt} (\rho(t) - \rho_\infty) \right\|_2 \\ &\leq |z| \int_0^\infty e^{-yt} \|\rho(t) - \rho_\infty\|_2 dt \\ &= |z| \int_0^T e^{-yt} \|\rho(t) - \rho_\infty\|_2 dt \\ &\quad + |z| \int_T^\infty e^{-yt} \|\rho(t) - \rho_\infty\|_2 dt \\ &\leq |z| \int_0^T e^{-yt} \|\rho(t) - \rho_\infty\|_2 dt \\ &\quad + \sup_{t \geq T} \|\rho(t) - \rho_\infty\|_2 |z| \int_T^\infty e^{-yt} dt \end{aligned}$$

Or :

$$|z| \int_T^\infty e^{-yt} dt = \frac{|z|}{y} e^{-yT} < \alpha$$

où

$$\frac{|z|}{y} < \alpha \quad \text{et} \quad e^{-yT} < 1$$

Choisissons $T > 0$ tel que :

$$\alpha \sup_{t \geq T} \|\rho(t) - \rho_\infty\|_2 < \varepsilon/2$$

d'où :

$$\left\| z \frac{1}{L - z} \rho - \rho_\infty \right\|_2 \leq \varepsilon/2 + |z| \int_0^T e^{-yt} \|\rho(t) - \rho_\infty\|_2 dt$$

Choisissons $|z| < \varepsilon/2a(T)$ où $a(T) = \int_0^T e^{-yt} \|\rho(t) - \rho_\infty\|_2 dt$ nous avons donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \varepsilon/2a(T) \text{ t. q. } |z| < \eta \Rightarrow \left\| z \frac{1}{L - z} \rho + \rho_\infty \right\|_2 < \varepsilon$$

ce qui achève la preuve du théorème I.

Voici la preuve du théorème II :

La première partie de ce théorème n'est rien d'autre que le théorème ergodique moyen de Von Neumann, *i. e.*

$$s\text{-}\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-iLt} dt = E_0$$

Soit $\rho \in \mathcal{L}$, alors, à partir de la formule suivante de la résolvante ([12] page 482) :

$$\frac{1}{L - z} = i \int_0^{\infty} e^{izt} e^{-iLt} dt, \quad \text{Im}(z) > 0$$

on a :

$$z \frac{1}{L - z} \rho = iz \int_0^{\infty} e^{izt} e^{-iLt} \rho dt$$

Si on intègre cette dernière équation par parties on a :

$$\int_0^{\infty} e^{izt} \rho(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{izt} \int_0^t \rho(t') dt' - iz \int_0^{\infty} dt e^{izt} \int_0^t \rho(t') dt'$$

Or, grâce au théorème ergodique moyen on a pour $y = \text{Im}(z) > 0$:

$$\left\| e^{izt} \int_0^t \rho(t') dt' \right\|_2 \leq t e^{-yt} \left\| \frac{1}{t} \int_0^t \rho(t') dt' \right\|_2 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Il en résulte que :

$$z \frac{1}{L - z} \rho = - (-iz)^2 \int_0^{\infty} e^{izt} G(t) dt \quad (*)$$

où on a posé :

$$G(t) = \int_0^t \rho(t') dt'$$

Or on vérifie que :

$$(-iz)^2 \int_0^{\infty} e^{izt} t dt = 1, \quad \text{Im}(z) > 0$$

on a ainsi :

$$(-iz)^2 \int_0^{\infty} e^{izt} G(t) dt - E_0 \rho = (-iz)^2 \int_0^{\infty} e^{izt} [G(t) - t E_0 \rho] dt \quad (**)$$

A partir de (*) et de (**) on a :

$$\begin{aligned} \left\| z \frac{1}{L - z} \rho + E_0 \rho \right\|_2 &\leq |z|^2 \int_0^T e^{-yt} \|G(t) - t E_0 \rho\|_2 dt \\ &\quad + |z|^2 \int_T^{\infty} e^{-Tt} \|G(t) - t E_0 \rho\|_2 dt \\ &\leq \sup_{t \geq T} \left\| \frac{G(t)}{t} - E_0 \rho \right\|_2 |z|^2 \int_T^{\infty} e^{-yt} t dt \\ &\quad + |z|^2 \int_0^T e^{-yt} \|G(t) - t E_0 \rho\|_2 dt \end{aligned}$$

Or :

$$\int_T^{\infty} e^{-yt} t dt = \frac{1}{y^2} \frac{(yT + 1)}{e^{yT}}$$

Si $z \in C_{\theta}^+$ alors $\frac{|z|^2}{y^2} \leq \frac{1}{\sin^2 \theta} < \alpha^2$; d'un autre côté on a :

$$\frac{yT + 1}{e^{yT}} \leq 1 \quad \forall yT \geq 0$$

Soit $\varepsilon > 0$, on peut choisir $T > 0$ tel que :

$$\sup_{t \geq T} \left\| \frac{G(t)}{t} - E_0 \rho \right\|_2 \leq \varepsilon / 2\alpha^2$$

Pour T ainsi fixé, si $|z|^2 < \frac{\varepsilon}{2\alpha_T}$ où $\alpha_T = \int_0^T e^{-yt} \|G(t) - t E_0 \rho\|_2^2 dt$ on a donc

$$\left\| z \frac{1}{L - z} \rho + E_0 \rho \right\|_2 < \varepsilon$$

ce qui prouve le théorème.

RÉFÉRENCES

- [1] I. PRIGOGINE et P. RÉSIPOIS, *Physica*, t. 27, 1961, p. 629.
- [2] I. PRIGOGINE et A. P. GRÉCOS, *Proc. Acad. Sci. USA*, t. 73, 1976, p. 1802.
- [3] a) P. MAZUR, *Physica*, t. 43, 1969, p. 533; b) Th. J. SISKENS and P. J. M. BONGAARTS, *Physica*, t. 68, 1973, p. 315 ; t. 71, 1974, p. 529; t. 74, 1974, p. 307.
- [4] L. LANZ, L. A. LUGIATO et G. RAMELLA, *Physica*, t. 54, 1971, p. 94.
- [5] E. B. DAVIES, *Com. in Math. Phys.*, t. 39, 1970, p. 91.
- [6] R. BALESU, P. CLAVIN, P. MANDEL et J. TURNER, *Bull. Acad. Roy. Belgique Cl. Sci.*, t. 55, 1970, p. 1055.
- [7] I. PRIGOGINE et A. P. GRÉCOS, in *Cooperative Phenomena*. Eds. H. Haken and M. Wagner (Springer Verlag, Berlin, 1973).
- [8] M. COURBAGE, *to appear*.
- [9] E. HILLE et R. S. PHILLIPS, *Functional analysis and semi-groups. Am. Math. Soc. Colloq. Publ.*, t. 31, 1957.
- [10] M. BAUS, *Bull. Acad. Roy. Belgique Cl. Sci.*, t. 33, 1967, p. 1291, 1332, 1352.
- [11] R. ZWANZIG, *Lect. of Th. Phys. (Boulder)*, t. 3, 1960, p. 106.
- [12] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Springer Verlag, Berlin, 1966.
- [13] P. J. M. BONGAARTS, A. FANNÈS and A. VERBEURE, *Physica*, t. 68, 1973, p. 587.
- [14] M. COURBAGE, *Physica*, t. 82, 1975, p. 312.
- [15] M. COURBAGE, *to appear*.
- [16] H. SPOHN, *J. Math. Phys.*, t. 17, 1976, p. 57.
- [17] G. STEY, *Physica*, t. 68, 1973, p. 243.
- [18] M. MARESCAL et A. P. GRÉCOS, *Physica*, t. 76, 1974, p. 321.
- [19] A. P. GRÉCOS et I. PRIGOGINE, *Physica*, t. 59, 1972, p. 77.
- [20] A. P. GRÉCOS et M. MARESCAL, *Physica*, t. 83, 1976, p. 419.
- [21] J. MOSER, *Stable and random motion in dynamical systems*, Princeton Univ. Press, 1973.

(Manuscrit reçu le 18 janvier 1977 et révisé le 2 juin 1977)