ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

PIERRE RENOUARD

Analyticité et sommabilité « de Borel » des fonctions de Schwinger du modèle de Yukawa en dimension $d = 2$. I. Approximation « à volume fini »

Annales de l'I. H. P., section A, tome 27, nº 3 (1977), p. 237-277

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1977__27_3_237_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XXVII, n° 3, 1977, p. 237-277.

Section A :
Physique théorique.

Analyticité et sommabilité « de Borel » des fonctions de Schwinger du modèle de Yukawa en dimension $d = 2$. I. Approximation « à volume fini »

par

Pierre RENOUARD
Centre de Physique Théorique de l'École Polytechnique,
Route de Saclay, 91128 Palaiseau Cedex, France

RÉSUMÉ. — On montre que les fonctions de Schwinger du modèle Yukawa$_2$ « dans un volume fini », admettent, en tant que fonctions de la constante de couplage, un prolongement holomorphe dans un domaine de la forme $\left\{ \lambda \in \mathbb{C} ; |\operatorname{Arg} \lambda^2| < \frac{\pi}{4}, |\lambda| < a \right\}$, dont la dérivée $n^{\text{ème}}$ admet une majoration de la forme $bc_\varepsilon^n(n!)^{1+\varepsilon}$, $\forall \varepsilon > 0$, d'où l'on déduit une propriété de sommabilité de Borel pour leur série de Taylor à l'origine. D'autre part, on obtient, pour une constante de couplage complexe, une majoration en fonction du volume de l'interaction de la forme $c^{|\Lambda|}$.

ABSTRACT. — We show that the Schwinger functions of the finite volume Yukawa$_2$ model have, as functions in the coupling constant, an analytic continuation in a domain of the form $\left\{ \lambda \in \mathbb{C} ; |\operatorname{Arg} \lambda^2| < \frac{\pi}{4}, |\lambda| < a \right\}$, such that the n^{th} derivative is bounded by $bc_\varepsilon^n(n!)^{1+\varepsilon}$, $\forall \varepsilon > 0$, it follows a summability property of Borel type for their Taylor series at the origin. We also obtain, for complex coupling constant, a bound of the form $c^{|\Lambda|}$ with respect to the volume of the interaction.

INTRODUCTION

L'une des tâches de la théorie constructive des champs est de justifier l'introduction, jusqu'alors formelle, des « séries de perturbations renormalisées », et, si celles-ci caractérisent la théorie, d'expliciter un procédé de reconstruction de la théorie à partir des séries correspondantes.

Ces questions ont été étudiées pour les fonctions de Schwinger des modèles $P(\varphi)_2$, [*15*] [*16*], et $(\varphi^4)_3$, [*17*]. Comme première étape de l'étude du modèle Y_2, le présent travail concerne l'approximation « à volume fini » de ses fonctions de Schwinger.

On montre que ces fonctions de Schwinger, considérées comme fonctions de la constante de couplage, sont C^∞ dans un voisinage de zero et que leur série de Taylor à l'origine (c'est-à-dire la série de perturbations correspondante) les caractérise *via* une propriété du type « sommabilité de Borel »; la démonstration consiste à établir l'existence, intéressante en soi, d'un prolongement analytique dans un domaine de la forme $D = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} ; |\operatorname{Arg} \lambda^2| < \frac{\pi}{4}, |\lambda| < a \right\}$, (§ 2), puis une majoration des dérivées successives de la forme $\left| \frac{d^n}{d\lambda^n} S_\lambda \right| \leq ab_\varepsilon^n (n\,!)^{1+\varepsilon}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \lambda \in \bar{D}$, (§ 3).

D'autre part, en vue de l'étude de la « limite adiabatique » (en préparation), on montre une majoration de la forme $|Z_{\lambda,\Lambda}| \leq c^{|\Lambda|}$, $\forall \lambda \in \bar{D}$ en fonction du « volume d'interaction » (§ 4).

Pour rendre l'exposé raisonnablement indépendant (et fixer les notations) on a rappelé (§ 1) la définition des principaux éléments du modèle.

Je remercie MM. J. Magnen, J. Lascoux et R. Sénéor pour d'utiles discussions.

1. DESCRIPTION DU MODÈLE. NOTATIONS

On étudie les fonctions de Schwinger du modèle de Yukawa dans un espace-temps de dimension 2, telles qu'elles sont introduites dans [*1*] [*2*] pour la théorie « dans un volume fini » et dans [*3*] [*4*] pour la théorie sans cut-off, dans le cas de couplage faible. On utilisera ici les notations suivantes :

1.1. On désigne par E un espace euclidien de dimension 2 — le produit scalaire sur E est noté $(.,.)$ —, par V un espace de Hilbert complexe de dimension 2, et par $p \mapsto \not p$ une application linéaire de E dans L(V) vérifiant $\not p^* = -\not p$, $\forall p \in E$ [1] et

$$\not p \not q + \not q \not p = -2(p, q)\mathbf{1}_V, \qquad \forall p, q \in E.$$

On désigne d'autre part par γ_5 un élément de L(V) tel que $\gamma_5 \not p + \not p \gamma_5 = 0$, $\forall p \in E$ et $(\gamma_5)^2 = \mathbf{1}_V$, on a alors $(\gamma_5)^* = \gamma_5$.

---

[1] On notera que les fonctions de Schwinger construites *via* la formule de Matthews et Salam ne dépendent pas du produit scalaire choisi sur V : la condition $\not p^* = -\not p$, $\forall p \in E$ peut être arbitrairement imposée pour une raison de commodité.

1.2. Soit $M > 0$ une constante fixée, on désigne par $(\mathscr{K}, \langle .,. \rangle)$ l'espace d'Hilbert $\mathscr{K}^{1/2}(E) \otimes V$, où l'espace de Sobolev $\mathscr{K}^{1/2}(E)$ est muni du produit scalaire hermitien

$$(1.2.1) \qquad \{ f, g \} \mapsto \int_E (-\Delta + M^2)^{1/4}\bar{f}(x)(-\Delta + M^2)^{1/4}g(x)dx$$

Pour $p \geq 1$, on pose $\mathscr{C}_p = \{ A \in L(\mathscr{K}) ; \operatorname{Tr} |A|^p < +\infty \}$ et, si $A \in \mathscr{C}_p$, $\| A \|_p = (\operatorname{Tr} |A|^p)^{1/p}$.

1.3. On désigne par C l'application de $\mathscr{K}^{-1/2}(E) \otimes V$ dans $\mathscr{K}$ définie par

$$(1.3.1) \qquad \widehat{C\psi}(p) = \frac{\not{p} + M}{|p|^2 + M^2}\hat{\psi}(p), \qquad (p \in E, \psi \in \mathscr{K}^{-1/2}(E) \otimes V), \quad (^2)$$

aussi bien que ses restrictions à $L^2(E) \otimes V$ ou à $\mathscr{K}$. Si

$$(1.3.2) \qquad \widehat{|C|\psi}(p) = (|p|^2 + M^2)^{-1/2}\hat{\psi}\,|p|, \qquad (p \in E, \psi \in \mathscr{K}^{-1/2}(E) \otimes V)$$

on a $|C| = (C^*C)^{1/2} = (CC^*)^{1/2}$, ces égalités ayant lieu dans $L(\mathscr{K}^{-1/2}(E) \otimes V)$ ou $L(L^2(E) \otimes V)$ ou $L(\mathscr{K})$.

1.4. Si $h \in L^\infty(E)$ on note $M(h)$ l'application linéaire continue de $L^2(E) \otimes V$ dans lui-même définie par

$$(1.4.1) \qquad M(h)\psi(x) = h(x)\psi(x) \qquad (x \in E, \psi \in \mathscr{K}).$$

Soit Γ l'un des deux opérateurs **1** ou $i\gamma_5$, pour tout $h \in L^\infty(E)$, on pose,

$$(1.4.2) \qquad K(h) = C.\Gamma.M(h),$$

alors $K(h)$ définit par restriction un opérateur sur $\mathscr{K}$.

1.5. On désigne par $\mathscr{S}$ l'espace vectoriel topologique réel $\mathscr{S}(E, \mathbf{R})$, par $\mathscr{S}'$ son dual, par $\mathscr{A}$ la tribu canonique sur $\mathscr{S}'$ [c'est-à-dire la plus petite tribu rendant mesurable les fonctions linéaires $\omega \mapsto \langle \omega, f \rangle$, $\omega \in \mathscr{S}'$, $f \in \mathscr{S}$].

Soit $m > 0$ une constante fixée et soit $\mu_m \in \mathscr{M}^1(\mathscr{S}', \mathscr{A})$ la mesure gaussienne dont la transformée de Fourier $\hat{\mu}_m$ est donnée par :

$$(1.5.1) \qquad \hat{\mu}_m(f) \equiv \int_{\mathscr{S}'} e^{i\langle \omega, f \rangle}\mu_m(d\omega) = e^{-\frac{1}{2}(f,(-\Delta+m^2)^{-1}f)}, \qquad (f \in \mathscr{S})$$

où $(.,.)$ est le produit scalaire dans $L^2(E)$.

D'autre part, on désigne par Φ le processus canonique [pour chaque $f \in \mathscr{S}$, $\Phi(f)$ est la classe (mod. μ_m) de la fonction $\omega \mapsto \langle \omega, f \rangle$, $(\omega \in \mathscr{S}')$] et par Ω la classe (mod. μ_m) de la fonction constante égale à 1.

---

(2) $\hat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f spécifiée par

$$\hat{f}(p) = \int_E e^{-i(p,x)} f(x)dx, \qquad (p \in E).$$

1.6. Soit $\mathscr{V}$ l'ensemble des fonctions $g : \mathrm{E} \to [0, 1]$ nulles en dehors d'un compact et telles qu'il existe $\alpha > 0$ pour lequel $g \in \mathscr{H}^{\alpha}(\mathrm{E})$ (3). Pour tous $g \in \mathscr{V}$ et $k \in \mathscr{S}$, on définit la fonction $\mathbf{K}_{g,k} : \mathscr{S}' \to \mathrm{L}(\mathscr{H})$ en posant

(1.6.1) $$\mathbf{K}_{g,k}(\omega) = \mathbf{K}(g.(\omega * k)), \qquad \forall \omega \in \mathscr{S}',$$

On a alors

Proposition [1] [2] [5] (4). — *i)* Pour tous $g \in \mathscr{V}$, $k \in \mathscr{S}$, $\omega \in \mathscr{S}'$ on a $\mathbf{K}_{g,k}(\omega) \in \mathscr{C}_3$.

ii) Si $(k_j)_{j \in \mathrm{N}}$ est un échelon unité tel que $k_j \in \mathscr{S}$, $\forall j \in \mathrm{N}$, pour tout $g \in \mathscr{V}$, $(\mathbf{K}_{g,k_j})_{j \in \mathrm{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathrm{L}^2_{\mathscr{C}_3}(\mathscr{S}', \mu_m)$ dont la limite, notée $\mathbf{K}_g$, est indépendante de l'échelon unité considéré.

1.7. Soit B l'opérateur de convolution défini par

$$\widehat{Bh}(p) = \underset{\sim}{\mathrm{B}}(p)\hat{h}(p), \qquad \forall p \in \mathrm{E}, \quad \forall h \in \mathscr{S}$$

avec

$$\underset{\sim}{\mathrm{B}}(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathrm{E}} \left[\frac{\dfrac{|p|^2}{4} - |q|^2 + \varepsilon_\Gamma \mathrm{M}^2}{\left(\left| q + \dfrac{p}{2} \right|^2 + \mathrm{M}^2 \right)\left(\left| q - \dfrac{p}{2} \right|^2 + \mathrm{M}^2 \right)} + \frac{1}{|q|^2 + \mathrm{M}^2} \right] dq,$$

(où $\varepsilon_\Gamma = 1$ si $\Gamma = \mathbf{1}$ et $\varepsilon_\Gamma = -1$ si $\Gamma = i\gamma_5$), pour tout $g \in \mathscr{V}$, on désigne par $\mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}}\, \mathbf{K}_g^2$ l'unique élément de $\mathrm{L}^1(\mathscr{S}', \mu_m)$ tel que :

$$\int_{\mathscr{S}'} \mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}}\, \mathbf{K}_g^2(\omega) e^{i\langle \omega, f \rangle} \mu_m(d\omega) = -\left((g.\Sigma_m^{-1} f), \mathrm{B}(g.\Sigma_m^{-1} f)\right)\hat{\mu}_m(f), \qquad \forall f \in \mathscr{S}$$

où $\Sigma_m = (-\Delta + m^2)$, $\hat{\mu}_m$ est défini en (1.5.1) et $(.,.)$ désigne le produit scalaire dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{E})$.

Pour tout $g \in \mathscr{V}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose (5) ;

(1.7.3) $$\det_{\mathrm{ren}} (\mathrm{I} + \lambda \mathbf{K}_g) = e^{-\frac{\lambda^2}{2} \mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}} \mathbf{K}_g^2} \det_3 (1 + \lambda \mathbf{K}_g)$$

ou, pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{C}_3$ on a posé, comme dans [6] :

(1.7.4) $$\det_3 (1 + \mathrm{A}) = \det \left[(1 + \mathrm{A}) e^{-\mathrm{A} + \frac{1}{2}\mathrm{A}^2} \right]$$

1.8. Pour tout $r \in \mathrm{N}$ et tout $\mathrm{A} \in \mathrm{L}(\mathscr{H})$ on désigne par $\Lambda^r(\mathrm{A})$ l'opérateur défini sur l'espace antisymétrique $\mathscr{H}^{\otimes r}$ par

$$\Lambda^r(\mathrm{A})\left(\bigwedge_{j=1}^{r} \psi_j \right) = \bigwedge_{j=1}^{r} \mathrm{A}\psi_j, \qquad \forall \psi_1, \ldots, \psi_r \in \mathscr{H}$$

(3) On a en particulier $g \in \mathscr{V}$ si g est la fonction caractéristique d'une union finie de rectangles $\left(\text{dans ce cas } g \in \mathscr{H}^{\alpha}(\mathrm{E}),\ \forall \alpha < \dfrac{1}{2}\right)$.

(4) Cet énoncé est une conséquence facile de l'inégalité (2.3.4) ci-dessous (avec $\zeta = 0$), de plus la convergence a lieu dans $\mathrm{L}^p_{\mathscr{C}_\delta}(\mathscr{S}', \mu_m)$, $\forall p \in [1, +\infty[$, $\forall \delta > 2$.

(5) Cette définition correspond au choix $\mathrm{M} = 0$ dans [1].

On a alors :

THÉORÈME [*1*] [*2*] [*5*]. — Pour tous $g \in \mathscr{V}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $\sigma \in \mathbf{R}$, $(\lambda, \sigma) \notin \{0\} \times [-m^2, -\infty)$, $r \in \mathbf{N}$, $p \in [1, \infty[$, on a ([6])

$$(1.8.1) \quad \| \Lambda^r([1 + \lambda \mathbf{K}_g]^{-1}) \| \, e^{-\frac{\sigma}{2}\Phi^{:2:}_{\mu_m}(g^2)} \det_{\text{ren}} (1 + \lambda \mathbf{K}_g) \in \mathrm{L}^p(\mathscr{S}', \mu_m),$$

de plus $\det_{\text{ren}} (1 + \lambda \mathbf{K}_g) \geq 0$ et (sauf peut-être pour une suite de valeurs isolées de λ, dans le cas $\Gamma = 1$)

$$\mathrm{E}_{\mu_m} [\det_{\text{ren}} (1 + \lambda \mathbf{K}_g)] > 0 \qquad (^7).$$

On définit alors les fonctions de Schwinger du modèle « dans un volume fini » comme suit :

Soient $r \in \mathbf{N}$ et $s \in \mathbf{N}$, pour $1 \leq j \leq r$ soient $u_j \in \mathscr{S}(\mathrm{E}, \mathrm{V})$, $v_j \in \mathscr{S}(\mathrm{E}, \mathrm{V}')$ ([8]) et pour $1 \leq k \leq s$ soit $f_k \in \mathscr{S}$, pour tous $\lambda \in \mathbf{R}$, $\sigma \in \mathbf{R}$, $g \in \mathscr{V}$, on pose ([9]) :

$$(1.8.2) \quad \mathrm{Z}^{(r,s)}_{\lambda,\sigma,g}\left(\bigwedge_{j=1}^{r} u_j, \bigwedge_{j'=1}^{r} v_{j'}, \bigvee_{k=1}^{s} f_k \right)$$
$$= \mathrm{E}_{\mu_m}\left[\left\langle \bigwedge_{j=1}^{r} |\mathrm{C}| \bar{v}_j, \Lambda^r([1 + \lambda \mathbf{K}_g]^{-1}) \bigwedge_{j'=1}^{r} \mathrm{C} u_{j'} \right\rangle_{\mathscr{K}^{\otimes r}} \cdot \prod_{k=1}^{s} \Phi(f_k) e^{-\frac{\sigma}{2}\Phi^{:2:}_{\mu_m}(g^2)} \det_{\text{ren}} (1 + \lambda \mathbf{K}_g) \right],$$

et ([10])

$$(1.8.3) \quad \mathrm{S}^{(r,s)}_{\lambda,\sigma,g}\left(\bigwedge_{j=1}^{r} u_j, \bigwedge_{j'=1}^{r} v_{j'}, \bigvee_{k=1}^{r} f_k \right)$$
$$= \mathrm{Z}^{(r,s)}_{\lambda,\sigma,g}\left(\bigwedge_{j=1}^{r} u_j, \bigwedge_{j'=1}^{r} v_{j'}, \bigvee_{k=1}^{s} f_k \right) \Big/ \mathrm{Z}^{(0,0)}_{\lambda,\sigma,g}$$

1.9. Les fonctions de Schwinger du modèle « sans cut off » sont définies grâce au théorème suivant : étant donné un réseau à mailles carrées de

---

([6]) $\Phi^{:2:}_{\mu_m}(h) \in \mathrm{L}^1(\mathscr{S}', \mu_m)$ est caractérisé par

$$\mathrm{E}_{\mu_m}[\Phi^{:2:}_{\mu_m}(h) e^{i\Phi(f)}] = -(h, (\Sigma_m^{-1} f)^2) \hat{\mu}_m(f), \qquad \forall f \in \mathscr{S}.$$

([7]) Pour $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1(\mathscr{S}', \mu_m)$ on pose $\mathrm{E}_{\mu_m}[\mathrm{F}] = \int_{\mathscr{S}'} \mathrm{F}(\omega) \mu_m(d\omega)$.

([8]) V' est le dual de V et $v \mapsto \bar{v} : \mathrm{V}' \to \mathrm{V}$ l'anti-isomorphisme canonique.

([9]) Le produit scalaire sur $\mathscr{K}^{\otimes r}$ est normalisé de sorte que

$$\left\langle \bigwedge_{i=1}^{r} \chi_i, \bigwedge_{j=1}^{r} \psi_j \right\rangle_{\mathscr{K}^{\otimes r}} = \det ((\langle \chi_i, \psi_j \rangle)_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r})$$

pour tous $\chi_i \in \mathscr{K}$, $\psi_i \in \mathscr{K}$, $1 \leq i \leq r$. On suppose $(\lambda, \sigma) \notin \{0\} \times [-m^2, -\infty)$.

([10]) En supposant (si $\Gamma = 1$) que λ est tel que $\mathrm{E}_{\mu_m} [\det_{\text{ren}} (1 + \lambda \mathbf{K}_g)] > 0$.

pas $l > 0$, dans E, on désigne par $\mathscr{X}_0$ l'ensemble des unions finies de mailles ; pour tout $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, on a $\mathbf{1}_\Lambda \in \mathscr{V}$ [voir 1.6] et on substitue Λ à $g = \mathbf{1}_\Lambda$ dans les notations précédentes, on a alors

THÉORÈME ([*3*]-[*4*]). — Il existe $\lambda_0 > 0$, $\sigma_0 \in \mathbf{R}$ tels que si $|\lambda| \leq \lambda_0$, $\sigma \geq \sigma_0$ — et si l est assez grand — chaque famille $(S^{(r,s)}_{\lambda,\sigma,\Lambda})_{\Lambda \in \mathscr{X}_0}$ admet une limite simple, notée $S^{(r,s)}_{\lambda,\sigma}$ lorsque Λ tend vers E, de plus les fonctions $S^{(r,s)}_{\lambda,\sigma}$ sont indépendantes du réseau choisi (de pas assez grand) et satisfont les axiomes d'Osterwalder-Schrader [*7*].

2. PROLONGEMENT ANALYTIQUE DES FONCTIONS $\lambda \mapsto Z^{(r,s)}_{\lambda,\sigma,g}$

On établit dans ce paragraphe le

THÉORÈME I. — Pour tout $\sigma > -m^2$ ([11]), il existe $a_\sigma > 0$ tel que, pour tous $g \in \mathscr{V}$, $r \in \mathbf{N}$, $s \in \mathbf{N}$, $u_j \in \mathscr{S}(\mathrm{E}, \mathrm{V})$, $v_j \in \mathscr{S}(\mathrm{E}, \mathrm{V}')$, $(1 \leq j \leq v)$ et $f_k \in \mathscr{S}$, $(1 \leq k \leq s)$, la fonction ([12])

$$\lambda \mapsto Z^{(r,s)}_{\lambda,\sigma,g}\left(\bigwedge_{j=1}^{r} u_j, \bigwedge_{j'=1}^{r} v_{j'}, \bigvee_{k=1}^{s} f_k\right), \qquad \lambda \in \mathbf{R},$$

admet un prolongement holomorphe dans

$$D\left(\frac{\pi}{8}, a_\sigma\right) \equiv \left\{ \lambda \in \mathrm{C} ; |\operatorname{Arg} \lambda^2| < \frac{\pi}{4}, |\lambda| < a_\sigma \right\},$$

continu au bord.

Remarque. — Un énoncé similaire s'applique aux fonctions

$$\lambda \mapsto S^{(r,s)}_{\lambda,\sigma,g}\left(\bigwedge_{j=1}^{r} u_j, \bigwedge_{j=1}^{r} v_{j'}, \bigvee_{k=1}^{s} f_k\right),$$

si $D\left(\frac{\pi}{8}, a_\sigma\right)$ est remplacé par $D\left(\frac{\pi}{8}, a_\sigma(g)\right)$, où $a_\sigma(g) \leq a_\sigma$ est tel que $Z^{(0,0)}_{\lambda,\sigma,g} \neq 0$, si $|\lambda| \leq a_\sigma(g)$.

Cet énoncé résultera facilement [en 2.9] de la

PROPOSITION. — Pour tout $p \in [1, +\infty[$, il existe $\rho_p > 0$, et pour cha-

([11]) On conjecture que l'énoncé est vrai pour tout $\sigma \in \mathbf{R}$, toutefois la méthode utilisée ici ne permet pas — semble-t-il — une adaptation facile de l'estimation des « bas moments » développée en [*2*]. De plus, si $\sigma \leqslant -m^2$, on exclut la continuité à l'origine.

([12]) Voir 1.8.

que $g \in \mathscr{V}$ une fonction positive $F_g^{(p)} \in L^p(\mathscr{S}', \mu_m)$ telle que, pour tout $\lambda \in D\left(\frac{\pi}{2}, \rho_p\right)$, on ait :

$$\| \Lambda^r([1 + \lambda K_g]^{-1}) \det_{ren}(1 + \lambda K_g) \| \leq e^{\frac{15}{2}r} F_g^{(p)}, \qquad \forall r \in \mathbf{N}.$$

Cette proposition est démontrée en 2.8, en utilisant les lemmes suivants :

2.1. Lemme. — Pour tout $g \in \mathscr{V}$, on a :

(2.1.1) $$\det_3(1 + \lambda K_g) = \det_3(1 + \lambda K_g^*), \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

et,

(2.1.2) $$\| \Lambda^r([1 + \lambda K_g]^{-1}) \| = \| \Lambda^r([1 + \lambda K_g^*]^{-1}) \|, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \forall r \in \mathbf{N}.$$

Démonstration. — L'égalité (2.1.1) est établie pour $\lambda \in \mathbf{R}$ dans [*1*], elle est donc vraie pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, puisque, μ_m presque partout, chacun des deux membres est une fonction entière de λ. D'après [*1*], si $\Gamma = \mathbf{1}$, K_g et K_g^* sont unitairement conjugués, donc aussi $\Lambda^r([1 + \lambda K_g]^{-1})$ et $\Lambda^r([1 + \lambda K_g^*]^{-1})$ donc (2.1.2) est vérifié et si $\Gamma = i\gamma_5$, K_g est réel (relativement à une involution convenable) donc

$$\| \Lambda^r([1 + \lambda K_g]^{-1}) \| = \| \Lambda^r([1 + \bar{\lambda} K_g]^{-1}) \|,$$

et (2.1.2) en résulte, en prenant l'adjoint au second membre. cqfd

2.2. Lemme. — Soit $K \in \mathscr{C}_3$ un opérateur vérifiant (2.1.1) et (2.1.2), si $|\operatorname{Arg} \lambda^2| \leq \frac{\pi}{4}$, on a, pour tout $r \in \mathbf{N}$,

(2.2.1) $$\| \Lambda^r([1 + \lambda K]^{-1}) \det_3(1 + \lambda K) \| \leq e^{\frac{15}{2}r} \, | e^{\frac{1}{2}\operatorname{Tr} S(\lambda, K)} | \det_3(1 + O_{\lambda N}^+)^{\frac{1}{4}} e^{-\operatorname{Tr}\left\{\frac{|\lambda|^4}{8}(NN^*)^2 + \frac{|\lambda|^2}{4} NN^*(\lambda N + \bar{\lambda} N^*)\right\}}$$

où l'on a posé ([13]) $N = [1 + \lambda^2 KK^*]^{-1/2}(K + K^*)[1 + \lambda^2 KK^*]^{-1/2}$, ainsi que $O_{\lambda N} = \lambda N + \bar{\lambda} N^* + |\lambda|^2 NN^*$, $O_{\lambda N}^+ = \frac{1}{2}(O_{\lambda N} + |O_{\lambda N}|)$, et

(2.2.2) $$S(\lambda, K) = \lambda^3[1 + \lambda^2 KK^*]^{-1} KK^*(K + K^*) \left\{ -1 + \frac{\lambda}{2}(1 + [1 + \lambda^2 KK^*]^{-1})(K + K^*) \right\}.$$

Démonstration. — Posant $\mathscr{B}_r = \{ B \in \mathscr{C}_1 ; \| B \|_1 \leq r, \| B \| \leq 1 \}$, et

(2.2.3) $$D(X, Y) = \det_3(1 + X + Y) e^{\operatorname{Tr}\left\{Y\left(1 - X - \frac{1}{2}Y\right)\right\}}, \qquad X \in \mathscr{C}_3, \quad Y \in \mathscr{C}_1,$$

on a pour tout $r \in \mathbf{N}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

(2.2.4) $$\| \Lambda^r([1 + \lambda K]^{-1}) \det_3(1 + \lambda K) \| \leq \sup_{B \in \mathscr{B}_r} | D(\lambda K, B) |.$$

([13]) Pour $A \geq 0$ et $\operatorname{Arg} z \neq \pi$, $[1 + zA]^{-1/2}$ est défini par le calcul fonctionnel.

L'inégalité (2.2.4) résulte d'une variante de la démonstration de [2] (Appendice, Proposition 1), où la première égalité (A.3) est remplacée par :

$$(2.2.5)\quad \left\langle \bigwedge_{s=1}^{r} \chi_s, \Lambda^r([1+\lambda K]^{-1}) \bigwedge_{t=1}^{r} \psi_t \right\rangle_{\mathcal{K}^{\otimes r}} . \det_3(1+\lambda K) = \prod_{j=1}^{r} \frac{\partial}{\partial \alpha_j}\bigg|_{\alpha_j=0} D\Big(\lambda K, \sum_{j=1}^{r} \alpha_j C_j\Big)$$

ou $(\psi_j)_{1 \le j \le r}$ et $(\chi_j)_{1 \le j \le r}$ sont deux systèmes orthonormés dans $\mathcal{K}$, et où $C_j = \langle \chi_j, . \rangle \psi_j$, $j = 1, \ldots, r$.

[L'égalité (2.2.5) résulte par continuité — théorème 6.5 de [6] — de la première égalité (A.3) de [2], en appliquant le théorème de Vitali au second membre].

D'après (2.1.1), (2.1.2) et l'inégalité (2.2.4) appliquée à K et à K*, on a

$$(2.2.6)\quad \| \Lambda^r([1+\lambda K]^{-1}) \det_3(1+\lambda K) \|^2$$
$$= \| \Lambda^r([1+\lambda K]^{-1}) \det_3(1+\lambda K) \| \; \| \Lambda^r([1+\lambda K^*]^{-1}) \det_3(1+\lambda K^*) \|$$
$$\le \sup_{\substack{B \in \mathcal{B}_r \\ B' \in \mathcal{B}_r}} | D(\lambda K, B) D(\lambda K^*, B') |$$

Ensuite, posant

$$(2.2.7)\quad J = [1+\lambda^2 KK^*]^{-1/2} [(1+\lambda K)B' + B(1+\lambda K^*) + BB'][1+\lambda^2 KK^*]^{-1/2},$$

et rappelant que,

$$(2.2.8)\quad N = [1+\lambda^2 KK^*]^{-1/2}(K+K^*)[1+\lambda^2 KK^*]^{-1/2},$$

on obtient, compte tenu de (2.2.2),

$$(2.2.9)\quad D(\lambda K, B) D(\lambda K^*, B') = \det_2(1+\lambda^2 KK^*) D(\lambda N, J) e^{\operatorname{Tr} S(\lambda, K)}.$$

Or on a

$$(2.2.10)\quad |\det_2(1+\lambda^2 KK^*)| \le 1, \qquad \text{si } |\operatorname{Arg} \lambda^2| \le \frac{\pi}{4},$$

en effet $KK^* \ge 0$ et $\operatorname{Re}(\operatorname{Log}(1+z) - z) \le 0$ si $|\operatorname{Arg} z| \le \frac{\pi}{4}$, puis, d'après [2], lemme 3.5

$$(2.2.11)\quad |D(\lambda N, J)| = \left| \det\left([1+\lambda N + J] e^{-\lambda N + \frac{\lambda^2}{2} N^2}\right) \right|$$
$$\le e^{3\|J\|_1} \det_3(1 + O_{\lambda N}^+)^{1/2} e^{-\operatorname{Tr}\left\{\frac{|\lambda|^4}{4}(NN^*)^2 + \frac{|\lambda|^2}{2} NN^*(\lambda N + \bar{\lambda} N^*)\right\}},$$

enfin, en notant que si $|\operatorname{Arg} \lambda^2| \le \frac{\pi}{4}$, on a

$$(2.2.12)\qquad \| [1+\lambda^2 KK^*]^{-1/2} \| \le 1$$

et

(2.2.13) $$\| \lambda[1 + \lambda^2 KK^*]^{-1/2} | K^* | \| \leq \operatorname*{Sup}_{\rho \geq 0} \left| \frac{\lambda\rho}{(1 + \lambda^2\rho^2)^{1/2}} \right| = 1$$

on obtient (pour tous B, $B' \in \mathscr{B}_r$),

(2.2.14) $$\| J \|_1 \leq 5r,$$

et (2.2.1) résulte de (2.2.6), (2.2.9), (2.2.10), (2.2.11) et (2.2.14).

cqfd

2.3. L'étude par la méthode de Nelson ([14]) de l'intégrabilité du second membre de (2.2.1) [avec $\mathbf{K}_g(g \in \mathscr{V})$ mis pour K] va reposer sur les estimations suivantes, où, pour tout $\zeta \geq 0$, $P_\zeta \in L(\mathscr{K})$ est le projecteur orthogonal défini par

(2.3.1) $$\widehat{P_\zeta \psi}(p) = Y(\zeta M^2 - |p|^2)\hat{\psi}(p), \qquad (p \in E, \psi \in \mathscr{K})$$

[Y est la fonction de Heaviside] et où

(2.3.2) $$N_t^{(2)}(h)^2 = \frac{2}{(2\pi)^4} \int_{E^2} |\hat{h}(p_1 - p_2)|^2 \frac{dp_1}{(|p_1|^2 + M^2)^t} \frac{dp_2}{(|p_2|^2 + M^2)^t}$$
$$\left(t > \frac{1}{2}, h \in L^2(E)\right),$$

(2.3.3) $$N_t^{(4)}(h)^4$$
$$= \frac{2}{(2\pi)^8} \int_{E^4} \hat{h}(p_1 - p_2)\hat{\bar{h}}(p_2 - p_3)\hat{h}(p_3 - p_4)\hat{\bar{h}}(p_4 - p_1) \prod_{j=1}^{4} \frac{dp_j}{(|p_j|^2 + M^2)^t},$$
$$\left(t > \frac{1}{4}, h \in L^4(E)\right),$$

(2.3.4) $$Q(h)^2$$
$$= \frac{2}{(2\pi)^4} \int_{E^2} |\hat{h}(p - q)|^2 \frac{dpdq}{(|p|^2 + M^2)^{1/2}(|q|^2 + M^2)}, (h \in L^2(E)).$$

LEMME ([15]). — Soit $h \in L^\infty_{\mathbf{R}}(E)$, [K($h$) est défini en 1.4], pour tout $\zeta \geq 0$ on pose $L_\zeta(h) = P_\zeta K(h)$ et $H_\zeta(h) = K(h) - L_\zeta(h)$.

i) On suppose $h \in L^2(E)$, alors, pour tout $\delta > 2$, on a $H_\zeta(h) \in \mathscr{C}_\delta$ pour tout $\zeta \geq 0$ et il existe une constante $c_1 > 0$ telle que, si $2 < \delta \leq 4$,

(2.3.5) $$\| H_\zeta(h) \|_\delta \leq c_1(1 + \zeta)^{-\frac{\delta - 2}{8\delta}} N^{(2)}_{\frac{3\delta - 2}{4\delta}}(h)^{\frac{4 - \delta}{\delta}} N^{(4)}_{\frac{\delta - 1}{2\delta}}(h)^{\frac{2\delta - 4}{\delta}}, \qquad \forall \zeta \geq 0.$$

([14]) Voir [9], la variante de ce théorème utilisée ici est énoncée en 2.5 ci-dessous.

([15]) Ce lemme réunit des estimations qui pour l'essentiel se trouvent dans [*1*] et [*2*], de plus on a préféré s'en tenir à des écritures simples, de sorte que la plupart des inégalités peuvent être facilement renforcées.

ii) On suppose d'une part que $h \in L^1(E)$ et, d'autre part, qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $h \in \mathscr{K}^\alpha(E)$, alors, pour tout

$$\xi > \max\left\{\frac{1+\alpha}{1/2+\alpha}, \frac{4}{3}\right\},$$

on a $K(h) + K(h)^* \in \mathscr{C}_\xi$ et, si

$$\max\left\{2-\alpha, \frac{3}{2}\right\} < \xi \leq 2,$$

il existe une constante $c_2(\xi) > 0$ telle que

$$\text{(2.3.6)} \qquad \| K(h) + K(h)^* \|_\xi \leq c_2(\xi) \| h \|_1^{\frac{2-\xi}{\xi}} \| h \|_{\mathscr{K}^{\frac{\xi}{2}-\xi}}^{\frac{2\xi-2}{\xi}}.$$

iii) Si h est nulle en dehors d'un compact, on a $L_\zeta(h) \in \mathscr{C}_1$ pour tout $\zeta \geq 0$, et, pour tout compact $\Lambda \subset E$, il existe une constante $c_3(\Lambda)$ telle que, si h est nulle en dehors de Λ :

$$\text{(2.3.7)} \qquad \| L_\zeta(h) \|_1 \leq c_3(\Lambda)(1+\zeta)^{\frac{3}{4}} Q(h), \qquad \forall \zeta \geq 0.$$

Démonstration. — En vue d'appliquer le théorème d'interpolation ([2], § 2, proposition) on introduit pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\left(\operatorname{Re} z \geqslant -\frac{1}{2}\right)$:

$$\text{(2.3.8)} \qquad H_{\zeta,z}(h) = | C |^z H_\zeta(h) | C |^z,$$

et

$$\text{(2.3.9)} \qquad \bar{H}_{\zeta,z}(h) = H_{\zeta,\bar{z}}(h)^* = | C |^z H_\zeta(h)^* | C |^z$$

(de sorte que $H_\zeta(h) = H_{\zeta,0}(h)$ et $H_\zeta(h)^* = \bar{H}_{\zeta,0}(h)$).

i) D'abord, si $z_1 > 0$, $(z = z_1 + iz_2)$, on a

$$\text{(2.3.10)} \qquad \| H_{\zeta,z}(h) \|_2^2 = \frac{2}{(2\pi)^4} \int_{|p|^2 > \zeta M^2} | \hat{h}(p-q) |^2 \frac{dpdq}{(|p|^2 + M^2)^{1/2+z_1}(|q|^2+M^2)^{1/2+z_1}}$$
$$\leq M^{-2z_1}(1+\zeta)^{-\frac{z_1}{2}} N^{(2)}_{\frac{1+z_1}{2}}(h)^2,$$

ensuite, si $z_1 > -\frac{1}{4}$,

$$\text{(2.3.11)} \qquad \| H_{\zeta,z}(h) \|_4^4 = \frac{2}{(2\pi)^8} \int_{\substack{|p_2|^2 > \zeta M^2 \\ |p_4|^2 > \zeta M^2}} \hat{h}(p_1 - p_2)\hat{h}(p_2 - p_3)\hat{h}(p_3 - p_4)\hat{h}(p_4 - p_1)$$
$$\prod_{j=1}^{4} \frac{dp_j}{(|p_j|^2 + M^2)^{1/2+z_1}} \leq M^{-(1+4z_1)}(1+\zeta)^{-\left(\frac{1}{4}+z_1\right)} N^{(4)}_{\frac{3+4z_1}{8}}(h)^4.$$

L'inégalité (2.3.5) résulte alors de (2.3.10) et (2.3.11) en appliquant le théorème d'interpolation cité ci-dessus à la fonction analytique $z \mapsto H_{\zeta,z}(h), \left(\frac{\delta-4}{4\delta} < z_1 < \frac{\delta-2}{2\delta}\right)$.

$\Big[$On a noté que $\left(\text{d'après l'inégalité } \prod_{j=1}^{k} a_j \leq \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} a_j^k,\ a_j \geq 0\right)$, on a

$$N_t^{(2n)}(h)^{2n}$$

$$\leq \frac{2}{(2\pi)^{4n}}\frac{1}{2n}\int_{E^{2n}} \hat{h}(p_1-p_2)\ldots\hat{h}(p_{2n}-p_1)\sum_{j=1}^{2n}\frac{1}{(|p|^2+M^2)^{2nt}}dp_1\ldots dp_{2n}$$

$$= \frac{1}{\pi}\|h\|_{2n}^{2n}\int_E \frac{dp}{(|p|^2+M^2)^{2nt}} < +\infty,$$

si $t > \frac{1}{2n}$ et $h \in L^2(E) \cap L^\infty(E)\Big]$.

ii) On pose $W_z(h) = H_{0,z}(h) + \bar{H}_{0,z}(h)$

Si $z_1 > -\frac{1}{2}$ et $z_1 \geq -\frac{\alpha}{2}$, on a [avec $\varepsilon_\Gamma = +1$ si $\Gamma = \mathbf{1}$, $\varepsilon_\Gamma = -1$, si $\Gamma = i\gamma_5$]

(2.3.12) $\|W_z(h)\|_2^2$

$$= \frac{4}{(2\pi)^4}\int_{E^2}|\hat{h}(p-q)|^2\frac{\{(|p|^2+M^2)^{1/2}(|q|^2+M^2)^{1/2}-(p,q)+\varepsilon_\Gamma M_2^2\}}{(|p|^2+M^2)^{1+z_1}(|q|^2+M^2)^{1+z_1}}dpdq$$

$$\leq \frac{4}{(2\pi)^4}\int_{E^2}|\hat{h}(p-q)|^2\left(\frac{|p-q|^2}{2}+(1+\varepsilon_\Gamma)M^2\right)\frac{dpdq}{(|p|^2+M^2)^{1+z_1}(|q|^2+M^2)^{1+z_1}}.$$

Or, si $\frac{1}{2} < s < 1$, il existe une constante $c_s > 0$ telle que

$$X(k) \equiv \int_E \frac{dp}{\left(\left|p+\frac{k}{2}\right|^2+M^2\right)^s\left(\left|p-\frac{k}{2}\right|^2+M^2\right)^s} \leq \frac{c_s}{(|k|^2+M^2)^{2s-1}}, \quad \forall k \in E,$$

$\Big[$en effet, d'une part, $\forall k \in E$, $X(k) \leq \int_E \frac{dp}{(|p|^2+M^2)^{2s}} < +\infty$ d'après l'inégalité de Schwarz, et d'autre part, si $k \neq 0$, en posant $u = \frac{k}{|k|}$,

$$X(k) \leq \int_E \frac{dp}{\left|p+\frac{k}{2}\right|^{2s}\left|p-\frac{k}{2}\right|^{2s}} = \frac{1}{|k|^{4s-2}}\int_E \frac{dq}{\left|q+\frac{u}{2}\right|^{2s}\left|q-\frac{u}{2}\right|^{2s}} < +\infty\Big],$$

donc (si $z_1 < 0$) ([16]),

$$(2.3.13) \quad \| W_z(h) \|_2^2 \leq \frac{4c_{(1+z_1)}}{(2\pi)^4} \int_{E^2} | \hat{h}(k) |^2 \left(\frac{|k|^2}{2} + (1+\varepsilon_\Gamma)M^2 \right) \frac{dk}{(|k|^2 + M^2)^{1+2z_1}} \leq \frac{8c_{(1+z_1)}}{(2\pi)^2} \| h \|^2_{\mathscr{H}^{-2z_1}} .$$

D'autre part, si $T_y(h) = | C |^{y+1} M(h) | C |^y$, on a

$$H_{0,z}(h) = U_1 T_{z_1}(h) U_2 \qquad \text{et} \qquad \bar{H}_{0,z}(h) = U'_1 T_{z_1}(h) U'_2 ,$$

où

$$U_1 = | C |^{iz_2} . C | C |^{-1} . \Gamma, \qquad U_2 = U'_1 = | C |^{iz_2}$$

et

$$U'_2 = \Gamma^* . C^* | C |^{-1} . | C |^{iz_2}$$

sont des unitaires, donc $W_z(h) \in \mathscr{C}_1$ dès que $T_{z_1}(h) \in \mathscr{C}_1$, et

$$(2.3.14) \qquad \| W_z(h) \|_1 \leq 2 \| T_{z_1}(h) \|_1 .$$

Or si l'on pose $h_1 = \dfrac{h}{|h|^{1/2}}$ $\left(\text{c'est-à-dire } h_1(x) = \dfrac{h(x)}{|h(x)|^{1/2}} \text{ si } h(x) \neq 0 \text{ et}\right.$ $h_1(x) = 0$ si $h(x) = 0$) et $h_2 = | h |^{1/2}$ — de sorte que $h = h_1 h_2$ et $h_j \in L^2(E) \cap L^\infty(E)$, $j = 1, 2$ — on a

$$T_{z_1}(h) = | C |^{1+z_1} M(h_1) | C |^{-1/2} | C |^{1/2} M(h_2) | C |^{z_1} .$$

Posant alors $A_{z_1}(h_j) = | C |^{1+z_1} M(h_j) | C |^{-1/2}$, $j = 1, 2$, on a pour tout $z_1 > \dfrac{1}{2}$,

$$(2.3.15) \quad \| A_{z_1}(h_j) \|_2^2 = \frac{2}{(2\pi)^4} \int_{E^2} | \hat{h}_j(p-q) |^2 \frac{dpdq}{(|p|^2 + M^2)^{1/2+z_1}} = \frac{2}{(2\pi)^2} \| h_j \|_2^2 \int_E \frac{dp}{(|p|^2 + M^2)^{1/2+z_1}} = \frac{1}{2\pi\left(z_1 - \frac{1}{2}\right) M^{(2z_1-1)}} \| h \|_1 , \quad (j = 1, 2)$$

donc $T_{z_1}(h) = A_{z_1}(h_1) A_{z_1}(h_2)^* \in \mathscr{C}_1$, et

$$(2.3.16) \quad \| T_{z_1}(h) \|_1 \leq \| A_{z_1}(h_1) \|_2 \, \| A_{z_1}(h_2) \|_2 = \frac{1}{2\pi\left(z_1 - \frac{1}{2}\right) M^{(2z_1-1)}} \| h \|_1$$

Enfin l'inégalité (2.3.6) résulte de (2.3.13), (2.3.14) et (2.3.16) en appliquant le théorème d'interpolation déjà mentionné à la fonction analytique $z \mapsto W_z(h)$, $\left(\dfrac{\xi}{2} - 1 < z_1 < \xi - 1\right)$.

([16]) Si $z_1 = 0$, d'après [*1*] (A.7), (A.15) il existe une constante $c' > 0$ telle que $\| W_0(h) \|_2^2 \leq c' \| h \|_2^2$.

iii) Soit $f \in \mathcal{S}$ une fonction telle que $f(x) = 1$, $\forall x \in \Lambda$, on pose

$$\text{(2.3.17)} \qquad A_\zeta = P_\zeta K(f) \,|\, C \,|^{-\frac{3}{2}}, \qquad B(h) = |\, C \,|^{\frac{3}{2}} M(h)$$

on a $L_\zeta(h) = A_\zeta B(h)$ si h est nulle en dehors de Λ.

Or on a

$$(|\, q \,|^2 + M^2) \leq 2[\,|\, p \,|^2 + |\, p - q \,|^2 + M^2] \leq \frac{2}{M^2}(|\, p \,|^2 + M^2)(|\, p - q \,|^2 + M^2)$$

pour tous $q \in E$, $p \in E$, donc

$$\text{(2.3.18)} \quad \|\, A_\zeta \,\|_2^2 = \frac{2}{(2\pi)^4} \int_{|p|^2 < \zeta M^2} |\, \hat{f}(p-q) \,|^2 \frac{dp}{(|\, p \,|^2 + M^2)^{1/2}} (|\, q \,|^2 + M^2) dq$$
$$\leq \frac{4}{(2\pi)^4 M^2} \int_E |\, \hat{f}(q) \,|^2 (|\, q \,|^2 + M^2) dq \int_{|p|^2 < \zeta M^2} (|\, p \,|^2 + M^2)^{1/2} dp$$
$$\leq c(\Lambda)^2 (1 + \zeta)^{3/2}$$

et d'autre part,

$$\text{(2.3.19)} \qquad \|\, B(h) \,\|_2^2 = Q(h)^2 \,,$$

[$Q(h) < +\infty$ d'après l'inégalité de Young], alors (2.3.7) résulte de (2.3.18) et (2.3.19) puisque,

$$\|\, L_\zeta(h) \,\|_1 \leq \|\, A_\zeta \,\|_2 \;\|\, B(h) \,\|_2 \,.$$

cqfd

2.4. On donne maintenant une estimation du second membre de (2.2.1) lorsque K est de la forme K(h) plus précisément, on a

LEMME. — *i*) Il existe une constante positive c_1 telle que pour tout $h \in L^\infty_{\mathbf{R}}(E) \cap L^2(E)$, si $A \in L(\mathcal{K})$ vérifie $\|\, A \,\| \leq 1$ et si $N(h) = A(K(h) + K(h)^*)A$, on a, si $|\, \mathrm{Arg}\, \lambda^2 \,| \leq \frac{\pi}{4}$ (17).

$$\text{(2.4.1)} \quad \det{}_3 (1 + O^+_{\lambda N(h)})^{1/4} e^{-\mathrm{Tr}\left\{\frac{|\lambda|^4}{8}(N(h)N(h)^*)^2 + \frac{|\lambda|^2}{4} N(h)N(h)^*(N(h) + N(h)^*)\right\}} \leq e^{c_1 |\lambda|^2 \|h\|_2^2}$$

ii) Étant donnés $\Lambda \subset E$ un compact, $\varepsilon > 0$ et $\zeta \geq 0$, il existe des constantes $c_1 > 0$, $c_2(\Lambda, \varepsilon) > 0$, $c_3(\Lambda, \zeta) > 0$, $\beta_\varepsilon > 0$ et $t_\varepsilon > \frac{1}{4}$ telles que pour toute $h \in L^\infty_{\mathbf{R}}(E) \cap \mathcal{K}^\varepsilon(E)$, nulle en dehors de Λ on ait pour tout $\zeta \geq 0$, si $|\, \mathrm{Arg}\, \lambda^2 \,| \leq \frac{\pi}{4}$ (17)

$$\text{(2.4.2)} \quad \left| e^{\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, S(\lambda, K(h))} \right| \leq \left| e^{\frac{\lambda^2}{4}\mathrm{Tr}(K(h) + K(h)^*)^2} \right| e^{c_1 |\lambda|^2 \|h\|_2^2} \cdot e^{c_2(\Lambda,\varepsilon)|\lambda|^2(1+\zeta)^{-\beta_\varepsilon}[N^{(4)}_{t_\varepsilon}(h)^2 + \|h\|^2_{\mathcal{K}^\varepsilon}] + c_3(\Lambda,\zeta) Q(h)} .$$

---

(17) Plus généralement, si $|\, \mathrm{Arg}\, \lambda^2 \,| \leq \theta_0 < \pi$.

$\left[\mathrm{S}(\lambda, \mathrm{K}) \text{ est défini en } 2.2\,;\ \mathrm{N}_t^{(4)},\ t > \frac{1}{4} \text{ et Q en } 2.3\right]$

Démonstration. — On pose K = K(h), N = N(h), $L_\zeta = L_\zeta(h)$, $H_\zeta = H_\zeta(h)$.
i) D'après le lemme 2.3 (*ii*), on a $N \in \mathscr{C}_2$, donc $O_{\lambda N}^+ \in \mathscr{C}_2$, donc

$$(2.4.3)\qquad \det{}_3(1 + O_{\lambda N}^+) = e^{\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(O_{\lambda N}^+)^2}\det{}_2\left(1 + O_{\lambda N}^+\right) \leq e^{\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(O_{\lambda N})^2}$$

en effet $\mathrm{Tr}\left(O_{\lambda N}^+\right)^2 \leq \mathrm{Tr}\left(O_{\lambda N}\right)^2$ et $\det_2\left(1 + O_{\lambda N}^+\right) \leq 1$, donc

$$(2.4.4)\quad \det{}_3\left(1 + O_{\lambda N}^+\right)e^{-\mathrm{Tr}\left\{\frac{|\lambda|^4}{2}(NN^*)^2 + |\lambda|^2 NN^*(\lambda N + \bar\lambda N^*)\right\}} \leq e^{\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{(\lambda N + \bar\lambda N^*)^2\}} \leq e^{2|\lambda|^2\|K + K^*\|_2^2},$$

puisque $\| A \| \leq 1$, et (2.4.1) résulte de (2.3.6) et (2.4.4).
ii) Comme $K + K^* \in \mathscr{C}_2$, on a

$$(2.4.5)\quad \mathrm{Tr}\, S(\lambda, K) = \mathrm{Tr}\left\{\frac{\lambda^2}{2}(K + K^*)^2 - \frac{\lambda^2}{2}([1 + \lambda^2 KK^*]^{-1}(K + K^*))^2 - \lambda^3[1 + \lambda^2 KK^*]^{-1}KK^*(K + K^*)\right\},$$

or

$$(2.4.6)\quad \left|\mathrm{Tr}\left\{\frac{\lambda^2}{2}([1 + \lambda^2 KK^*]^{-1}(K + K^*))^2\right\}\right| \leq \frac{|\lambda|^2}{2}\| K + K^* \|_2^2$$

$\left[\| [1 + \lambda^2 KK^*]^{-1} \| \leq 1 \text{ puisque } | \mathrm{Arg}\, \lambda^2 | < \frac{\pi}{2}\right]$, et, pour tout $\zeta \geq 0$,

$$(2.4.7)\quad | \lambda^3\, \mathrm{Tr}\, \{ [1 + \lambda^2 KK^*]^{-1}KK^*(K + K^*) \} | \leq | \lambda |^2\, \| H_\zeta \|_\delta\, \| K + K^* \|_{\delta'} + 2 | \lambda |\, \| L_\zeta \|_1$$

où $\max\left\{2 - \varepsilon, \frac{3}{2}\right\} < \delta' < 2$ et $\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta'} = 1$, en effet,

$$\begin{aligned}(2.4.8)\quad \lambda^3\, \mathrm{Tr}\, \{ [1 + \lambda^2 KK^*]^{-1}KK^*(K + K^*) \} &= \lambda^2\, \mathrm{Tr}\, \{ (\lambda[1 + \lambda^2 KK^*]^{-1}K)H_\zeta^*(K + K^*) \} \\ &+ \lambda\, \mathrm{Tr}\, \{ (\lambda^2 K^*[1 + \lambda^2 KK^*]^{-1}K)L_\zeta^* \} \\ &+ \lambda\, \mathrm{Tr}\, \{ (\lambda^2[1 + \lambda^2 KK^*]^{-1}KK^*P_\zeta)L_\zeta \}.\end{aligned}$$

[puisque $P_\zeta H_\zeta = 0$], et $\left(\text{puisque } | \mathrm{Arg}\, \lambda^2 | \leq \frac{\pi}{4}\right)$,

$$\| \lambda[1 + \lambda^2 | K^* |^2]^{-1} | K^* |^2 \| \leq \sup_{\rho \geq 0}\left|\frac{\lambda\rho}{1 + \lambda^2\rho^2}\right| = \frac{1}{2 | \cos \mathrm{Arg}\, \lambda |} < 1,$$

$$\| \lambda^2[1 + \lambda^2 | K^* |^2]^{-1} | K^* |^2 \| \leq \sup_{\rho \geq 0}\left|\frac{\lambda^2\rho}{1 + \lambda^2\rho}\right| = 1.$$

Maintenant, d'après le lemme 2.3, on a

$$(2.4.9) \qquad \| \mathrm{K} + \mathrm{K}^* \|_2^2 \leq c_2(2)^2 \| h \|_2^2$$

et, compte tenu des inégalités $\| h \|_1 \leq | \Lambda |^{1/2} \| h \|_2 \leq | \Lambda |^{1/2} \mathrm{M}^{-\alpha} \| h \|_{\mathscr{K}^\alpha}$ et $\mathrm{N}_s^{(2)}(h) \leq c(s) \| h \|_2 \leq c(s) \mathrm{M}^{-\alpha} \| h \|_{\mathscr{K}^\alpha} \left(s > \frac{1}{2}, \alpha > 0, | \Lambda | = \int_\Lambda dx \right)$,

$$(2.4.10) \quad \| \mathrm{H}_\zeta \|_\delta \| \mathrm{K} + \mathrm{K}^* \|_{\delta'}$$

$$\leq c_1 c_2(\delta')(1 + \zeta)^{-\frac{\delta-2}{8\delta}} \mathrm{N}^{(2)}_{\frac{3\delta-2}{4\delta}}(h)^{\frac{4-\delta}{\delta}} \mathrm{N}^{(4)}_{\frac{\delta-1}{\delta}}(h)^{\frac{2\delta-4}{\delta}} \| h \|_1^{\frac{2-\delta'}{\delta'}} \| h \|_{\mathscr{K}^{2-\delta'}}^{\frac{2\delta'-2}{\delta'}}$$

$$\leq c(\Lambda, \delta, \delta')(1 + \zeta)^{-\frac{\delta-2}{8\delta}} \mathrm{N}^{(4)}_{\frac{\delta-1}{\delta}}(h)^{\frac{2\delta-4}{\delta}} \| h \|_{\mathscr{K}^{2-\delta'}}^{1+\frac{4-\delta}{\delta}}$$

$$\leq \frac{1}{2} c(\Lambda, \delta, \delta')(1 + \zeta)^{-\frac{\delta-2}{8\delta}} \left[\frac{2\delta - 4}{\delta} \mathrm{N}^{(4)}_{\frac{\delta-1}{\delta}}(h)^2 + \left(1 + \frac{4-\delta}{\delta} \right) \| h \|_{\mathscr{K}^{2-\delta'}}^2 \right].$$

(d'après l'inégalité $a^t b^{(1-t)} \leq ta + (1 - t)b$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $0 \leq t \leq 1$). L'inégalité (2.4.2) résulte de (2.4.5), (2.4.6), (2.4.7), (2.4.9), (2.4.10) et (2.3.7). cqfd

2.5. Passant maintenant à la démonstration de la proposition 2, on va, comme en [*1*] [*2*], utiliser l'argument de Nelson dont on retiendra la variante suivante [où pour chaque $n \in \mathbf{N}$, $\mathfrak{F}_n \subset \mathrm{L}^2(\mathscr{S}', \mu_m)$ désigne « l'espace à n particules » ([18])]

THÉORÈME [*9*] ([19]). — Soit $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^0(\mathscr{S}', \mu_m)$, on suppose qu'il existe $q \in]1, +\infty]$, des entiers n et l, des constantes $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, $a > 0$, $b > 0$ et $\nu_j \geq 1$, $(1 \leq j \leq l)$, telles que $\varepsilon < \dfrac{2\eta}{n . \max (\nu_j)_{j \leq j \leq l}}$ et, pour tout $\varkappa \in [\varkappa_0, +\infty)$ ([20]) des fonctions réelles $\mathrm{A}_\varkappa$, $(\mathrm{G}_{\varkappa,j})_{1 \leq j \leq l}$ vérifiant

$$(2.5.1) \qquad e^{\mathrm{A}_\varkappa} \in \mathrm{L}^q(\mathscr{S}', \mu_m) \qquad \text{et} \qquad \| e^{\mathrm{A}_\varkappa} \|_q \leq a,$$

et

$$(2.5.2) \quad | \mathrm{G}_{\varkappa,j} |^{\nu_j} \in \bigoplus_{k=0}^{n} \mathfrak{F}_k \qquad \text{et} \qquad \| | \mathrm{G}_{\varkappa,j} |^{\nu_j} \|_2 \leq \varkappa^{-\eta}, \qquad j = 1, \ldots, l,$$

([18]) On rappelle que $\forall q \in [1, +\infty[$, $\mathfrak{F}_n$ est un sous-espace fermé de $\mathrm{L}^q(\mathscr{S}', \mu_m)$ ([*18*], théorème III.1), et que (par conséquent) les normes induites sont deux à deux équivalentes, en particulier si $1 < q_1 \leqslant q_2$, on a l'inégalité « d'hypercontractivité » de Nelson [*8*] :

$$\| \mathrm{F} \|_{q_2} \leq \left(\frac{q_2 - 1}{q_1 - 1} \right)^{n/2} \| \mathrm{F} \|_{q_1}, \qquad \forall \mathrm{F} \in \mathfrak{F}_n$$

([19]) Voir aussi [*10*], théorème 2.1.4.

([20]) Il suffit de supposer la propriété vraie pour $\varkappa = e^s$, $s \in \mathbf{N}$, $s \geq s_0$.

et telles que

$$\operatorname{Re} F \leq A_\varkappa + b\left[\varkappa^\varepsilon \Omega + \sum_{j=1}^{l} G_{\varkappa,j}\right], \qquad \forall \varkappa \in [\varkappa_0, +\infty),$$

alors

$$e^F \in \bigcap_{1 \leq p < q} L^p(\mathscr{S}', \mu_m).$$

Pour tout $g \in \mathscr{V}$, on va appliquer cet énoncé à la fonction ([21])

$$(2.5.3) \quad F_{g,\lambda} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \operatorname{Tr} S(\lambda, \mathbf{K}_g) - \lambda^2 \operatorname{Tr}^{:}_{\text{reg}} \mathbf{K}_g^2 \}$$
$$+ \frac{1}{4} \log \det{}_3 (1 + O^+_{\lambda N_g}) - \operatorname{Tr} \left\{ \frac{|\lambda|^4}{8} (N_g N_g^*)^2 + \frac{|\lambda|^2}{4} N_g N_g^* (\lambda N_g + \bar{\lambda} N_g^*) \right\},$$

(où on a utilisé les notations de 2.2).

Soit, pour chaque $\varkappa > 0$, $k_\varkappa \in \mathscr{S}$ une fonction telle que $\| k_\varkappa \|_1 \leq 1$, $\hat{k}_\varkappa(p) = 1$ si $|p| \leq \varkappa m$ et $\hat{k}_\varkappa(p) = 0$ si $|p| \geq 2\varkappa m$, $(p \in E)$, on pose

$$(2.5.4) \quad F_{g,\lambda,\varkappa} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \operatorname{Tr} S(\lambda, \mathbf{K}_{g,k_\varkappa}) - \lambda^2 \operatorname{Tr}^{:}_{\text{reg}} \mathbf{K}_g^2 \}$$
$$+ \frac{1}{4} \log \det{}_3 (1 + O^+_{\lambda N_\varkappa}) - \operatorname{Tr} \left\{ \frac{|\lambda|^4}{8} (N_\varkappa N_\varkappa)^* + \frac{|\lambda|^2}{4} N_\varkappa N_\varkappa^* (\lambda N_\varkappa + \bar{\lambda} N_\varkappa^*) \right\},$$

où

$$(2.5.5) \quad N_\varkappa = [1 + \lambda^2 \mathbf{K}_g \mathbf{K}_g^*]^{-1/2} (\mathbf{K}_{g,k_\varkappa} + \mathbf{K}^*_{g,k_\varkappa}) [1 + \lambda^2 \mathbf{K}_g \mathbf{K}_g^*]^{-1/2}$$

Soient $\alpha > 0$ et $\Lambda \subset E$ un compact tels que $g \in \mathscr{K}^\alpha(E)$ et g est nulle en dehors de Λ, alors, si pour $\varepsilon \in]0, \alpha]$ et $k \in \mathscr{S}$, on définit les fonctions $B^{(i)}_{g,\varepsilon}(k)$ par

$$\begin{aligned}
&(2.5.6) \qquad B_g^{(1)}(k, \omega) = \| g.(\omega * k) \|_2^2 \\
&(2.5.7) \qquad B_{g,\varepsilon}^{(2)}(k, \omega) = N_{t_\varepsilon}^{(4)}(g.(\omega * k))^2 \\
&(2.5.8) \qquad B_{g,\varepsilon}^{(3)}(k, \omega) = \| g.(\omega * k) \|^2_{\mathscr{K}^\varepsilon} \\
&(2.5.9) \qquad B_g^{(4)}(k, \omega) = Q(g.(\omega * k))
\end{aligned} \qquad (\omega \in \mathscr{S}')$$

on a, d'après le lemme 2.4 :

$$(2.5.10) \quad F_{g,\lambda} \leq |F_{g,\lambda} - F_{g,\lambda,\varkappa}| + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \lambda^2 . \left[\frac{1}{2} \operatorname{Tr} (\mathbf{K}_{g,k_\varkappa} + \mathbf{K}^*_{g,k_\varkappa})^2 - \operatorname{Tr}^{:}_{\text{reg}} \mathbf{K}_g^2 \right]$$
$$+ c_1 |\lambda|^2 B_g^{(1)}(k_\varkappa) + c_2(\Lambda, \varepsilon) |\lambda|^2 (1 + \zeta)^{-\beta_\varepsilon} (B^{(2)}_{g,\varepsilon}(k_\varkappa) + B^{(3)}_{g,\varepsilon}(k_\varkappa))$$
$$+ c_3(\Lambda, \zeta) |\lambda| B_g^{(4)}(k_\varkappa)$$

pour tous $\varkappa > 0$ et $\zeta \geq 0$.

([21]) ou plus précisément à une fonction $J_{g,\rho}$ vérifiant $F_{g,\lambda} \leq J_{g,\rho}$ si $|\lambda| \leq \rho$, que l'on construira.

Maintenant (Π_n désignant le projecteur orthogonal sur $\mathfrak{F}_n$) on pose

(2.5.11) $$B_g^{(5)}(k) = \sup\left\{0, \left[\frac{1}{4}\Pi_2 \operatorname{Tr}(\mathbf{K}_{g,k}+\mathbf{K}_{g,k}^*)^2 - \frac{1}{2}\operatorname{Tr}_{\mathrm{reg}}^{:}\mathbf{K}_g^2\right]\right\}, \quad (k\in\mathcal{S})$$

alors, comme d'après (2.3.6) — avec $\xi = 2$ — et (2.5.6), il existe $c_4 > 0$ telle que

$$(1-\Pi_2)\operatorname{Tr}(\mathbf{K}_{g,k}+\mathbf{K}_{g,k}^*)^2 = \mathrm{E}_{\mu_m}[\operatorname{Tr}(\mathbf{K}_{g,k}+\mathbf{K}_{g,k}^*)^2]\Omega \le c_4\Pi_0 B_g^{(1)}(k), \quad (k\in\mathcal{S}),$$

si

(2.5.12) $$A_{g,\lambda,\varkappa}^{\varepsilon,\zeta} = |\lambda|^2[c_1\Pi_2 B_g^{(1)}(k_\varkappa) + c_2(\Lambda,\varepsilon)(1+\zeta)^{-\beta_\varepsilon}(B_{g,\varepsilon}^{(2)}(k_\varkappa) + \Pi_2 B_{g,\varepsilon}^{(3)}(k_\varkappa)) + B_g^{(5)}(k_\varkappa)] + |\lambda| c_3(\Lambda,\zeta)B_g^{(4)}(k_\varkappa)$$

on a, d'après (2.5.10), pour tous $\varepsilon\in]0,\alpha]$, $\zeta \ge 0$, $\varkappa > 0$,

(2.5.13) $$F_{g,\lambda} \le |F_{g,\lambda} - F_{g,\lambda,\varkappa}| + A_{g,\lambda,\varkappa}^{\varepsilon,\zeta} + |\lambda|^2 c_5(\Lambda,\zeta,\varepsilon)\Pi_0 B_{g,\varepsilon}^{(3)}(k_\varkappa),$$

[puisque $B_{g,\varepsilon}^{(i)}(k)\in\mathfrak{F}_0\oplus\mathfrak{F}_2$, $i = 1, 3$, et $B_g^{(1)}(k) \le M^{-2\varepsilon}B_{g,\varepsilon}^{(3)}(k)$].

2.6. Avec les notations du paragraphe 2.5, on a :

LEMME. — *i*) Pour tout $q \ge 1$, il existe $\rho_q > 0$ et pour tous $g\in\mathcal{V}$ et $\varepsilon > 0$ (assez petit) il existe $\zeta_{g,\varepsilon,q} \ge 0$ et $a_{g,\varepsilon,q} > 0$ tels que

(2.6.1) $$e^{A_{q,\lambda,\varkappa}^{\varepsilon,\zeta_{g,\varepsilon,q}}}\in L^q(\mathcal{S}',\mu_m) \quad \text{et} \quad \| e^{A_{g,\lambda,\varkappa}^{\varepsilon,\zeta_{g,\varepsilon,q}}}\|_q \le a_{g,\varepsilon,q}, \quad \forall\varkappa > \varkappa_0,$$

si $|\lambda| \le \rho_q$.

ii) Pour tout $g\in\mathcal{V}$ et tout $\varepsilon > 0$ (assez petit), il existe $b_{g,\varepsilon} > 0$ tel que

(2.6.2) $$\Pi_0 B_{g,\varepsilon}^{(3)}(k_\varkappa) \le b_{g,\varepsilon}\varkappa^{2\varepsilon}\Omega, \quad \forall\varkappa > 1.$$

Démonstration. — *i*) *a*) On a, d'après (2.5.6),

(2.6.3) $$\lim_{\varkappa\to\infty}\Pi_2 B_g^{(1)}(k_\varkappa) = \Phi_{\mu_m}^{:2:}(g^2)$$

[convergence dans $L^2(\mathcal{S}',\mu_m)$], or, d'après [*1*], lemme 3.3, si $\rho_q^{(1)} > 0$ vérifie $16\, c_1\rho_q^{(1)2} < m^2$, on a, pour tout $g\in\mathcal{V}$

$$e^{|\lambda|^2 c_1\Phi_{\mu_m}^{:2:}(g^2)}\in L^{8q}(\mathcal{S}',\mu_m), \quad \text{si} \quad |\lambda| \le \rho_q^{(1)},$$

et d'autre part, d'après l'inégalité d'hypercontractivité de Nelson on a, pour tout $n\in\mathbf{N}$

$$\|(\Pi_2 B_g^{(1)}(k_\varkappa) - \Phi_{\mu_m}^{:2:}(g^2))^n\|_1 = \|\Pi_2 B_g^{(1)}(k_\varkappa) - \Phi_{\mu_m}^{:2:}(g^2)\|_n^n \le n^n\|\Pi_2 B_g^{(1)}(k_\varkappa) - \Phi_{\mu_m}^{:2:}(g^2)\|_2^n$$

donc, comme $\lim_{\varkappa\to\infty}\|\Pi_2 B_g^{(1)}(k_\varkappa) - \Phi_{\mu_m}^{:2:}(g^2)\|_2 = 0$, il existe $\varkappa_0^{(1)} > 0$ tel que pour tout $\varkappa > \varkappa_0^{(1)}$ on ait

$$\| e^{c_1|\lambda|^2(\Pi_2 B_g^{(1)}(k_\varkappa) - \Phi_{\mu_m}^{:2:}(g^2))}\|_{8q} \le 2, \quad \text{si} \quad |\lambda| \le \rho_q^{(1)},$$

Alors, d'après l'inégalité de Hölder, il existe $a^{(1)}_{g,p} > 0$, tel que

$$(2.6.4) \qquad \| e^{c_1|\lambda|^2\Pi_2 B^{(1)}_g(k_\varkappa)} \|_{4q} \leq a^{(1)}_{g,q}, \qquad \text{si} \quad |\lambda| \leq \rho^{(1)}_q, \qquad \varkappa > \varkappa^{(1)}_0$$

b) D'après [*1*], (A.9), $(\Pi_2 \operatorname{Tr} (\mathbf{K}_{g,k_\varkappa} + \mathbf{K}^*_{g,k_\varkappa})^2)_{\varkappa\to\infty}$ admet une limite, notée $\operatorname{Tr}^{:} (\mathbf{K}_g + \mathbf{K}^*_g)^2$, dans $\mathfrak{F}_2$ et d'après [*1*], (3.32) et lemme 3.3, il existe $\rho^{(2)}_q > 0$ tel que, pour tout $g \in \mathscr{V}$

$$e^{|\lambda|^2\left[\frac{1}{4}\operatorname{Tr}^{:}(\mathbf{K}_g+\mathbf{K}^*_g)^2 - \frac{1}{2}\operatorname{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}}\mathbf{K}^2_g\right]} \in L^{8q}(\mathscr{S}', \mu_m), \qquad \text{si} \quad |\lambda| < \rho^{(2)}_q .$$

Alors, en raisonnant comme en *a*), on voit qu'il existe $a^{(2)}_{g,q} > 0$ et $\varkappa^{(2)}_0 > 0$ tels que

$$(2.6.5) \qquad \| e^{|\lambda|^2 B^{(5)}_g(k_\varkappa)} \|_{4q} \leq a^{(2)}_{g,q}, \qquad \text{si} \quad |\lambda| \leq \rho^{(2)}_q, \quad \varkappa > \varkappa^{(2)}_0,$$

[On a noté que, d'après (2.5.11),

$$\| e^{|\lambda|^2 B^{(5)}_g(k_\varkappa)} \|_{4q} \leq \| e^{|\lambda|^2\left[\frac{1}{4}\operatorname{Tr}(\mathbf{K}_{g,k} + \mathbf{K}^*_{g,k})^2 - \frac{1}{2}\operatorname{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}}\mathbf{K}^2_g\right]} \|_{4q} + 1] .$$

c) On a $B^{(2)}_{g,\varepsilon}(k_\varkappa)^2 \in \mathfrak{F}_0 \oplus \mathfrak{F}_2 \oplus \mathfrak{F}_4$, donc d'après l'inégalité d'hypercontractivité on a, pour $n \geq 4$

$$\| B^{(2)}_{g,\varepsilon}(k_\varkappa)^n \|_1 = \| B^{(2)}_{g,\varepsilon}(k_\varkappa)^2 \|^{\frac{n}{2}}_{\frac{n}{2}} \leq \left(\frac{n}{2}\right)^n \| B^{(2)}_{g,\varepsilon}(k_\varkappa)^2 \|^{\frac{n}{2}}_2 ,$$

et il existe $c > 0$ tel que

$$\begin{aligned}(2.6.6) \quad \| B^{(2)}_{g,\varepsilon}(k_\varkappa)^2 \|_2 &\leq c \| B^{(2)}_{g,\varepsilon}(k_\varkappa)^2 \|_1 = c\mathrm{E}_{\mu_m}[B^{(2)}_{g,\varepsilon}(k_\varkappa)^2] \\ &\leq \frac{2c}{(2\pi)^4} \int_{\mathrm{E}^6} \hat{g}(p_1-p_2-q_1)\hat{g}(p_2-p_3+q_1)\hat{g}(p_3-p_4-q_2)\hat{g}(p_4-p_1+q_2) \\ &\quad \cdot \prod_{j=1}^4 \frac{dp_j}{(|p_j|^2 + \mathrm{M}^2)^{t_\varepsilon}} \prod_{i=1}^2 \frac{dq_i}{|q_i|^2 + m^2} \\ &\quad + \frac{c}{(2\pi)^4} \int_{\mathrm{E}^6} \hat{g}(p_1-p_2-q_1)\hat{g}(p_2-p_3-q_2)\hat{g}(p_3-p_4+q_1)\hat{g}(p_4-p_1+q_2) \\ &\quad \cdot \prod_{j=1}^4 \frac{dp_j}{(|p_j|^2 + \mathrm{M}^2)^{t_\varepsilon}} \prod_{i=1}^2 \frac{dq_i}{|q_i|^2 + m^2} \equiv u^{(1)}_{g,\varepsilon}\end{aligned}$$

$[u^{(1)}_{g,\varepsilon} < +\infty$, voir [*1*] [*2*]], donc il existe $\zeta^{(1)}_{g,\varepsilon,q} \geq 0$ tel que, pour tout $\varkappa > 0$,

$$(2.6.7) \quad \| e^{c_2(\Lambda,\varepsilon)|\lambda|^2(1+\zeta)^{-\beta_\varepsilon} B^{(2)}_{g,\varepsilon}(k_\varkappa)} \|_{8q} \leq 2, \qquad \text{si} \quad |\lambda| \leq \rho_q, \quad \zeta \geq \zeta^{(1)}_{g,\varepsilon,q},$$

[où $\rho_q = \min \{ \rho^{(1)}_q, \rho^{(2)}_q \}$].

d) Comme $\Pi_2 B^{(3)}_{g,\varepsilon}(k_\varkappa) \in \mathfrak{T}_2$, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\| (\Pi_2 B^{(3)}_{g,\varepsilon}(k_\varkappa))^n \|_1 = \| \Pi_2 B^{(3)}_{g,\varepsilon}(k_\varkappa) \|_n^n \leq n^n \| \Pi_2 B^{(3)}_{g,\varepsilon}(k_\varkappa) \|_2^n ,$$

et,

$$(2.6.8) \quad \| \Pi_2 B^{(3)}_{g,\varepsilon}(k_\varkappa) \|_2^2$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{E^2} \left| \int_E \hat{g}(p-q_1)\hat{g}(p-q_2)(|p|^2+M^2)^\varepsilon dp \right|^2 \prod_{j=1}^{2} |\hat{k}_\varkappa(q_j)|^2 \frac{dq_j}{|q_j|^2+m^2}$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{E^2} \left| \int_E \hat{g}(p-q_1)\hat{g}(p-q_2)(|p|^2+M^2)^\varepsilon dp \right|^2 \prod_{j=1}^{2} \frac{dq_j}{|q_j|^2+m^2} \equiv u^{(2)}_{g,\varepsilon}$$

Or, (d'après l'inégalité $(a + b)^t \leq a^t + b^t$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $0 \leq t \leq 1$), on a $\forall h \in E$, $\forall q \in E$

$$(2.6.9) \quad (|h + q|^2 + M^2)^\varepsilon \leq 2^\varepsilon[(|h|^2 + M^2)^\varepsilon + (|q|^2 + M^2)^\varepsilon]$$
$$\leq \frac{2^{1+\varepsilon}}{M^{2\varepsilon}}(|h|^2 + M^2)^\varepsilon(|q|^2 + M^2)^\varepsilon$$

donc si

$$\theta(p) = \int_E |\hat{g}(h)\hat{g}(p - h)|(|h|^2 + M^2)^\varepsilon dh , \qquad \forall p \in E,$$

on a, pour tout $p \in E$ et tout $q \in E$

$$\left| \int_E \hat{g}(h)\hat{g}(p - h)(|h + q|^2 + M^2)^\varepsilon dh \right| \leq \frac{2^{1+\varepsilon}}{M^{2\varepsilon}} \theta(p)(|q|^2 + M^2)^\varepsilon ,$$

mais, d'après l'inégalité de Schwarz, si $\alpha > 0$ est tel que $g \in \mathscr{H}^\alpha(E)$,

$$\theta(p) \leq (2\pi)^2 \| g \|^2_{\mathscr{H}^\alpha} \int_E |\hat{g}(p - h)|^2 \frac{dh}{(|h|^2 + M^2)^{\alpha - 2\varepsilon}} ,$$

donc, d'après l'inégalité de Young, $\theta \in L^s(E)$, $\forall s > \max \left\{ \frac{1}{\alpha - 2\varepsilon}, 1 \right\}$ [puisque $|\hat{g}|^2 \in L^1(E)$] et, par conséquent,

$$(2.6.10) \quad u^{(2)}_{g,\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{E^2} \left| \int_E \hat{g}(h)\hat{g}(p-h)(|h+q|^2+M^2)^\varepsilon dh \right|^2 \frac{dp}{|p+q|^2+m^2} \frac{dq}{|q|^2+m^2}$$

$$\leq \frac{4^{1+\varepsilon}}{(2\pi)^4 M^{4\varepsilon}} \int_E \theta(p)^2 dp \int_E \frac{1}{|p+q|^2+m^2} \frac{(|q|^2+M^2)^{2\varepsilon}}{|q|^2+m^2} dq < +\infty$$

si $\varepsilon < \min \left\{ \frac{\alpha}{3}, \frac{1}{2} \right\}$, d'après les inégalités de Young et de Hölder.

Donc il existe $\zeta^{(2)}_{g,\varepsilon,q} \geq 0$ tel que, pour tout $\varkappa > 0$,

$$(2.6.11) \quad \| e^{c_2(\Lambda,\varepsilon)|\lambda|^2(1+\zeta)^{-\beta_\varepsilon}\Pi_2 B^{(3)}_{g,\varepsilon}(k_\varkappa)} \|_{8q} \leq 2 , \qquad \text{si} \quad |\lambda| \leq \rho_q , \quad \zeta \geq \zeta^{(2)}_{g,\varepsilon,q}$$

e) Comme $B_g^{(4)}(k_\varkappa)^2 \in \mathfrak{F}_0 \oplus \mathfrak{F}_2$, on a pour $n \geq 4$

$$\| B_g^{(4)}(k_\varkappa) \|_1 = \| B_g^{(4)}(k_\varkappa)^2 \|_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} \leq \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} \| B_g^{(4)}(k_\varkappa)^2 \|_2^{\frac{n}{2}}$$

et,

$$\| B_g^{(4)}(k_\varkappa)^2 \|_2 \leq c \| B_g^{(4)}(k_\varkappa)^2 \|_1 = c E_{\mu_m}[B_g^{(4)}(k_\varkappa)^2]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{E^3} | \hat{g}(p_1 + p_2 + q) |^2 \frac{dp_1}{(|p_1|^2 + M^2)^{1/2}} \frac{dp_2}{(|p_2|^2 + M^2)} | \hat{k}_\varkappa(q) |^2 \frac{dq}{|q|^2 + m^2}$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{E^3} | \hat{g}(p_1 + p_2 + q) |^2 \frac{dp_1}{(|p_1|^2 + M^2)^{1/2}} \frac{dp_2}{(|p_2|^2 + M^2)} \frac{dq}{|q|^2 + m^2} < +\infty$$

d'après l'inégalité de Young, donc $e^{B_g^{(4)}(k_\varkappa)} \in \bigcap_{1 \leq s < \infty} L^s(\mathscr{S}', \mu_m)$ et en particulier il existe $a_{g,\varepsilon,q}^{(3)} > 0$ tel que, pour tout $\varkappa > 0$

$$\| e^{c_3(\Lambda, \zeta_{g,\varepsilon,q})|\lambda| B_g^{(4)}(k_\varkappa)} \|_{4q} \leq a_{g,\varepsilon,q}^{(3)}, \qquad \text{si } |\lambda| \leq \rho_q \tag{2.6.12}$$

[avec $\zeta_{g,\varepsilon,q} = \max \{ \zeta_{g,\varepsilon,q}^{(1)}, \zeta_{g,\varepsilon,q}^{(2)} \}$].

Enfin, d'après (2.5.12), (2.6.1) résulte de (2.6.4), (2.6.5), (2.6.7), (2.6.11), (2.6.12) et de l'inégalité de Hölder.

ii) On a $\Pi_0 B_{g,\varepsilon}^{(3)}(k_\varkappa) = E_{\mu_m}[B_{g,\varepsilon}^{(3)}(k_\varkappa)]\Omega$, et

$$E_{\mu_m}[B_{g,\varepsilon}^{(3)}(k_\varkappa)]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{E^2} | \hat{g}(p - q) |^2 (|p|^2 + M^2)^\varepsilon dp \, | \hat{k}_\varkappa(q) |^2 \frac{dq}{|q|^2 + m^2}$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{|q| \leq 2\varkappa m} \frac{dq}{|q|^2 + m^2} \int_E | \hat{g}(p) |^2 (|p + q|^2 + M^2)^\varepsilon dp$$

$$\leq \frac{2^{1+\varepsilon}}{(2\pi)^4 M^{2\varepsilon}} \int_E | \hat{g}(p) |^2 (|p|^2 + M^2)^\varepsilon dp \int_{|q| \leq 2\varkappa m} \frac{(|q|^2 + M^2)^\varepsilon}{|q|^2 + m^2} dq,$$

d'après (2.6.9), d'où (2.6.2) [si $g \in \mathscr{K}^\varepsilon(E)$ et $\varepsilon < 1$].

cqfd

2.7. On établit maintenant une majoration du premier terme de (2.5.13) :

LEMME. — Si $F_{g,\lambda}$ et $F_{g,\lambda,\varkappa}$ ($\varkappa > 0$) sont définis par (2.5.3) et (2.5.4) respectivement, il existe des entiers l et n, et ($\rho > 0$ étant donné) pour tout $\varkappa > 0$ des fonctions positives $(G_{g,\rho,\varkappa,j})_{1 \leq j \leq l}$ vérifiant

$$(G_{g,\rho,\varkappa,j})^6 \in \bigoplus_{k=0}^{n} \mathfrak{F}_k \qquad (1 \leq j \leq l)$$

et telles que si $|\lambda| \leq \rho \left(\text{et } |\operatorname{Arg} \lambda^2| \leq \frac{\pi}{4} \right)^{(22)}$

$$(2.7.1) \qquad |F_{g,\lambda} - F_{g,\lambda,\varkappa}| \leq \sum_{j=1}^{l} G_{g,\rho,\varkappa,j},$$

et telles que, pour tout $\eta < \frac{1}{3}$, il existe $c > 0$ tel que

$$(2.7.2) \qquad \| G^6_{g,\rho,\varkappa,j} \|_2 \leq c \varkappa^{-\eta}$$

Démonstration. — Un calcul sans difficulté [utilisant essentiellement l'inégalité

$$|\log \det_3(1 + O^+_{\lambda N_g}) - \log \det_3(1 + O^+_{\lambda N_\varkappa})| \\ \leq \| O_{\lambda N_g} - O_{\lambda N_\varkappa} \|_3 (\| O_{\lambda N_g} \|_3 + \| O_{\lambda N_\varkappa} \|_3)^2,$$

obtenue comme en [*1*], lemmes 3.1 et 3.2, et l'inégalité de Hölder] montre qu'il existe $c' > 0$ telle que

$$(2.7.3) \quad |F_{g\lambda} - F_{g,\lambda,\varkappa}| \leq c' |\lambda| \, \| \mathbf{K}_g - \mathbf{K}_{g,k_\varkappa} \|_3 \sum_{j=2}^{5} |\lambda|^j \sum_{h=0}^{j} \| \mathbf{K}_g \|_3^h \| \mathbf{K}_{g,k_\varkappa} \|_3^{j-h}$$
$$\leq 6c' |\lambda| \, \| \mathbf{K}_g - \mathbf{K}_{g,k_\varkappa} \|_3 \sum_{j=2}^{5} |\lambda|^j (\| \mathbf{K}_{g,k_\varkappa} \|_3 + \| \mathbf{K}_g - \mathbf{K}_{g,k_\varkappa} \|_3)^j.$$

Ensuite — désignant, pour tout $k \in \mathscr{S}$, par $\underline{N}^{(2)}(k)$ (resp. $\underline{N}^{(4)}(k)$) la fonction $\omega \mapsto N^{(2)}_{\frac{7}{12}}(g.(\omega * k))$ (resp. $\omega \mapsto N^{(4)}_{\frac{1}{3}}(g.(\omega * k))$) — la famille $(\underline{N}^{(2)}(k_{\varkappa'} - k_\varkappa))_{\varkappa' \to \infty}$ (resp. $(\underline{N}^{(4)}(k_{\varkappa'} - k_\varkappa))_{\varkappa' \to \infty}$) admet une limite $P^{(2)}_\varkappa$ (resp. $P^{(4)}_\varkappa$) dans $L^p(\mathscr{S}', \mu_m)$, $(1 \leq p < \infty)$, en effet,

$$|\underline{N}^{(j)}(k_{\varkappa'} - k_\varkappa) - \underline{N}^{(j)}(k_{\varkappa''} - k_\varkappa)| \leq \underline{N}^{(j)}(k_{\varkappa'} - k_{\varkappa''}),$$

$j = 2, 4$, donc (si $p \geq 2$),

$$\| \underline{N}^{(2)}(k_{\varkappa'} - k_\varkappa) - \underline{N}^{(2)}(k_{\varkappa''} - k_\varkappa) \|_p \leq \| \underline{N}^{(2)}(k_{\varkappa'} - k_{\varkappa''}) \|_p = \| \underline{N}^{(2)}(k_{\varkappa'} - k_{\varkappa''})^2 \|_{p/2}^{1/2}$$
$$\leq c^{1/2}_{(p/2)} \| \underline{N}^{(2)}(k_{\varkappa'} - k_{\varkappa''})^2 \|_1^{1/2} = c^{1/2}_{(p/2)} E_{\mu_m}[\underline{N}^{(2)}(k_{\varkappa'} - k_{\varkappa''})^2]^{1/2}$$

et, de même (si $p \geq 4$),

$$\| \underline{N}^{(4)}(k_{\varkappa'} - k_\varkappa) - \underline{N}^{(4)}(k_{\varkappa''} - k_\varkappa) \|_p \leq c^{1/4}_{(p/4)} E_{\mu_m}[\underline{N}^{(4)}(k_{\varkappa'} - k_{\varkappa''})^4]^{1/4}$$

[On a utilisé l'équivalence des normes L^p et L^1 sur $\mathfrak{F}_n$ ([23])], la convergence résulte alors de

$$(2.7.4) \quad E_{\mu_m}[\underline{N}^{(2)}(k)^2] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{E^3} |\hat{g}(p_1 + p_2 + q)|^2 \prod_{j=1}^{2} \frac{dp_j}{(|p_j|^2 + M^2)^{7/12}} |\hat{k}(q)|^2 \frac{dq}{|q|^2 + m^2}, \qquad (k \in \mathscr{S})$$

([22]) Ou plus généralement si $|\operatorname{Arg} \lambda^2| \leq \theta_0 < \pi$.

([23]) Voir la remarque ([18]).

et

(2.7.5) $E_{\mu_m}[\underline{N}^{(4)}(k)^4]$

$$= \frac{2}{(2\pi)^4} \int_{E^6} \hat{g}(p_1 - p_2 - q_1)\hat{g}(p_2 - p_3 + q_1)\hat{g}(p_3 - p_4 - q_2)\hat{g}(p_4 - p_1 + q_2) \,.$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{4} \frac{dp_j}{(|p_j|^2 + M^2)^{1/3}} \prod_{i=1}^{2} |\hat{k}(q_i)|^2 \frac{dq_i}{|q_i|^2 + m^2}$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{E^6} \hat{g}(p_1 - p_2 - q_1)\hat{g}(p_2 - p_3 - q_2)\hat{g}(p_3 - p_4 + q_1)\hat{g}(p_4 - p_1 + q_2) \,.$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{4} \frac{dp_j}{(|p_j|^2 + M^2)^{1/3}} \prod_{i=1}^{2} |\hat{k}(q_i)|^2 \frac{dq_i}{|q_i|^2 + m^2} \,.$$

On a $(P_\varkappa^{(2)})^2 \in \mathfrak{F}_0 \oplus \mathfrak{F}_2$ et $(P_\varkappa^{(4)})^4 \in \mathfrak{F}_0 \oplus \mathfrak{F}_2 \oplus \mathfrak{F}_4$ [puisque (24), pour tout $k \in \mathscr{S}$, $\underline{N}^{(2)}(k)^2 \in \mathfrak{F}_0 \oplus \mathfrak{F}_2$, $\underline{N}^{(4)}(k)^4 \in \mathfrak{F}_0 \oplus \mathfrak{F}_2 \oplus \mathfrak{F}_4$ et, d'après l'inégalité de Hölder $(P_\varkappa^{(2)})^2 = \lim_{\varkappa' \to \infty} \underline{N}^2(k_{\varkappa'} - k_\varkappa)^2$, $(P_\varkappa^{(4)})^4 = \lim_{\varkappa' \to \infty} \underline{N}^{(4)}(k_{\varkappa'} - k_\varkappa)^4]$ et d'autre part, pour tout $p \in [1, +\infty[$, on a :

$$\| (P_\varkappa^{(2)})^2 \|_p \leq \sup_{\varkappa' \geq \varkappa} \| \underline{N}^{(2)}(k_{\varkappa'} - k_\varkappa)^2 \|_p \leq c_{(p)} \sup_{\varkappa' \geq \varkappa} E_{\mu_m}[\underline{N}^{(2)}(k_{\varkappa'} - k_\varkappa)^2]$$

et

$$\| (P^{(4)})^4 \|_p \geq \sup_{\varkappa' \geq \varkappa} \| \underline{N}^{(4)}(k_{\varkappa'} - k_\varkappa)^4 \|_p \leq c_{(p)} \sup_{\varkappa' \geq \varkappa} E_{\mu_m}[\underline{N}^{(4)}(k_{\varkappa'} - k_\varkappa)^4] \,.$$

Alors, d'après (2.7.4) et (2.7.5), étant donné $p \in [1, +\infty[$, d'une part pour tout $\eta < \frac{1}{3}$ il existe $c_1 > 0$ telle que

(2.7.6) $$\| (P_\varkappa^{(2)})^2 \|_p \leq c_1 \varkappa^{-\eta}, \qquad \forall \varkappa > 0$$

et d'autre part, il existe $c_2 > 0$, telle que

(2.7.7) $$\| (P_\varkappa^{(4)})^4 \|_p \leq c_2 \,, \qquad \forall \varkappa > 0 \text{ (25)}$$

(2.7.8) $$\| \underline{N}^{(2)}(k_\varkappa)^2 \|_p \leq c_2 \,, \qquad \forall \varkappa > 0 \,,$$

(2.7.9) $$\| \underline{N}^{(4)}(k_\varkappa)^4 \|_p \leq c_2 \,, \qquad \forall \varkappa > 0 \,.$$

Enfin, d'après (2.3.4) — avec $\zeta = 0$ — on a,

(2.7.10) $$\| \mathbf{K}_{g,k_\varkappa} \|_3 \leq c_3 \underline{N}^{(2)}(k_\varkappa)^{1/3} \underline{N}^{(4)}(k_\varkappa)^{2/3}$$

et, pour tout $\varkappa' > 0$,

$$\| \mathbf{K}_{g,k_{\varkappa'}} - \mathbf{K}_{g,k_\varkappa} \|_3 = \| \mathbf{K}_{g,(k_{\varkappa'} - k_\varkappa)} \|_3 \leq c_3 \underline{N}^{(2)}(k_{\varkappa'} - k_\varkappa)^{1/3} \underline{N}^{(4)}(k_{\varkappa'} - k_\varkappa)^{2/3}$$

(24) Voir la remarque (18).

(25) On a aussi $\| (P_\varkappa^{(4)})^4 \|_p \leq c_1' \varkappa^{-\eta}$ pour η assez petit, mais (2.7.7) suffit.

donc, d'après la proposition 1.6,

$$(2.7.11) \qquad \| \mathbf{K}_g - \mathbf{K}_{g,k_\varkappa} \|_3 \leq c_3 \mathrm{P}_\varkappa^{(2)1/3} \mathrm{P}_\varkappa^{(4)2/3} .$$

Portant (2.7.10) et (2.7.11) dans (2.7.3), on obtient, si $|\lambda| \leq \rho$,

$$(2.7.12) \quad | \mathrm{F}_{g,\lambda} - \mathrm{F}_{g,\lambda,\varkappa} | \leq c \sum_{j=2}^{5} \rho^{j+1} \sum_{h=0}^{j} [(\mathrm{P}_\varkappa^{(2)2} \mathrm{P}_\varkappa^{(4)4})^{h+1} (\underline{\mathrm{N}}^{(2)}(k_\varkappa)^2 \underline{\mathrm{N}}^{(4)}(k_\varkappa)^4)^{j-h}]^{1/6}$$

qui équivaut, en changeant de notations, à (2.7.1), et (2.7.2) résulte alors de (2.7.6), (2.7.7), (2.7.8) et (2.7.9), d'après l'inégalité de Hölder.

cqfd

2.8. La proposition 2 résulte facilement des lemmes précédents :

Étant donnés $g \in \mathscr{V}$ et $p \geq 1$, on choisit $\eta < \frac{1}{3}$ et $\varepsilon < \frac{\eta}{3n}$ (assez petit), n étant introduit au lemme 2.7, puis $q > p$, alors si $\rho = \rho_q$ est comme dans le lemme 2.6, si $b_{g,\varepsilon}$ est comme en (2.6.2) et $(\mathrm{G}_{g,\rho,\varkappa,j})_{1 \leq j \leq l}$ comme en (2.7.1), on a d'après (2.5.13)

$$(2.8.1) \quad \mathrm{F}_{g,\lambda} \leq \mathrm{J}_{g,\rho} \equiv \inf_{\log \varkappa \in \mathbf{N}} \left(\mathrm{A}_{g,\rho,\varkappa}^{\varepsilon,\zeta_{g,\varepsilon,q}} + \sum_{j=1}^{l} \mathrm{G}_{g,\rho,\varkappa,j} + \rho^2 c_5'(g, \varepsilon, q) b_{g,\varepsilon} \varkappa^{2\varepsilon} \Omega \right),$$

si $\lambda \in \mathrm{D}\left(\frac{\pi}{8}, \rho\right)$, et, d'après les lemmes 2.6, 2.7 et le théorème 2.5, on a

$$(2.8.2) \qquad e^{\mathrm{J}_{g,\rho}} \in \mathrm{L}^p(\mathscr{S}', \mu_m) .$$

Alors, d'après (1.7.3), (2.2.1) et (2.5.3), on a pour tout $r \in \mathbf{N}$

$$(2.8.3) \qquad \| \Lambda^r([1 + \lambda \mathbf{K}_g]^{-1}) \det_{\mathrm{ren}} (1 + \lambda \mathbf{K}_g) \| \leq e^{\frac{15}{2} r} e^{\mathrm{J}_{g,\rho}} ,$$

pour tout $\lambda \in \mathrm{D}\left(\frac{\pi}{8}, \rho\right)$, ce qui achève la démonstration de la proposition 2.

2.9. Enfin le théorème I est une conséquence immédiate de la proposition 2. Si $\sigma > -m^2$, il existe $q > 1$ tel que $e^{-\frac{\sigma}{2} \Phi_{\mu_m}^{:2:}(g^2)} \in \mathrm{L}^q(\mathscr{S}', \mu_m)$, pour tout $g \in \mathscr{V}$ [d'après [1] lemme 3.3] soit alors $p > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$ et soient $\rho_p > 0$ et, pour tous $g \in \mathscr{V}$, $\mathrm{F}_g^{(p)} \in \mathrm{L}^p(\mathscr{S}', \mu_m)$ comme dans la proposition 2, alors posant

$$(2.9.1) \quad \mathrm{Y}_{\lambda,\sigma,g}^{(r,s)} = \left\langle \bigwedge_{j=1}^{r} | \mathrm{C} | \bar{v}_j, \Lambda^r([1 + \lambda \mathbf{K}_g]^{-1}) \bigwedge_{j'=1}^{r} \mathrm{C} u_{j'} \right\rangle_{\mathscr{K}^{\otimes_r}} \prod_{k=1}^{s} \Phi(f_k) e^{-\frac{\sigma}{2} \Phi_{\mu_m}^{:2:}(g^2)} \det_{\mathrm{ren}} (1 + \lambda \mathbf{K}_g)$$

[où $(v_j)_{1 \leq j \leq r}$, $(u_j)_{1 \leq j \leq r}$, $\overline{(f_k)_{1 \leq k \leq s}}$ sont comme en (1.8.2)], d'après la proposition 2, on a, si $\lambda \in D\left(\frac{\pi}{8}, \rho_p\right)$,

$$(2.9.2) \quad | Y^{(r,s)}_{\lambda,\sigma,g} | \leq \prod_{j=1}^{r} \| u_j \|_{\mathcal{H}^{-1/2}} \prod_{j'=1}^{r} \| v_{j'} \|_{\mathcal{H}^{-1/2}} \left| \prod_{k=1}^{s} \Phi(f_k) \right| e^{-\frac{\sigma}{2} \Phi^{:2:}_{\mu_m}(g^2)} e^{\frac{15}{2} r} F^{(p)}_g ,$$

où la fonction du second membre est intégrable, d'après l'inégalité de Hölder, puisque $\prod_{k=1}^{s} \Phi(f_k) \in \bigcap_{1 \leq t < +\infty} L^t(\mathcal{S}', \mu_m)$. Comme pour μ_m presque tout $\omega \in \mathcal{S}'$, la fonction $\lambda \mapsto Y^{(r,s)}_{\lambda,\sigma,g}(\omega)$ est entière, il résulte de (2.9.2) et d'un lemme classique de dérivation sous le signe somme ([26]) que la fonction $\lambda \mapsto E_{\mu_m}[Y^{(r,s)}_{\lambda,\sigma,g}]$ est holomorphe dans $D\left(\frac{\pi}{8}, \rho_p\right)$, elle est continue au bord de $D\left(\frac{\pi}{8}, \rho_p\right)$, d'après le théorème de Lebesgue. Comme, d'après (1.8.2) cette fonction prolonge la fonction

$$\lambda \mapsto Z^{(r,s)}_{\lambda,\sigma,g}\left(\bigwedge_{j=1}^{r} u_j, \bigwedge_{j'=1}^{r} v_{j'}, \bigvee_{k=1}^{s} f_k \right), \qquad (\lambda \in \mathbf{R}),$$

ceci achève la démonstration du théorème I.

3. SOMMATION DES SÉRIES ASYMPTOTIQUES AUX FONCTIONS $\lambda \mapsto S^{(r,s)}_{\lambda,\sigma,g}$

Désignant encore par $\lambda \mapsto S^{(r,s)}_{\lambda,\sigma,g}$, $\left(\lambda \in \overline{D\left(\frac{\pi}{8}, a_\sigma(g)\right)}\right)$, $[\sigma > -m^2]$, le prolongement défini au paragraphe 2, on a

THÉORÈME II. — Les fonctions

$$\lambda \mapsto S^{(r,s)}_{\lambda,\sigma,g}\left(\bigwedge_{j=1}^{r} u_j, \bigwedge_{j=1}^{r} v_{j'}, \bigvee_{k=1}^{s} f_k \right), \quad \lambda \in \overline{D\left(\frac{\pi}{8}, a_\sigma(g)\right)}$$

([26]) On utilise l'inégalité $| f'(z_0) | \leq \frac{1}{d} \sup_{|z|=d} | f(z_0 + z) |$ (si f est holomorphe dans un ouvert contenant $\{ z \in \mathbb{C} ; | z - z_0 | \leq d \}$) pour obtenir la majoration de la dérivée qui permet d'utiliser le théorème de Lebesgue.

sont de classe C^∞ au bord de $D\left(\frac{\pi}{8}, a_\sigma(g)\right)$, de plus, il existe $b_\sigma(g) > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$, $c_{\varepsilon,\sigma}(g) > 0$, telles que

$$(3.0.1)\quad \left| \frac{d^n}{d\lambda^n} S^{(r,s)}_{\lambda,\sigma,g}\left(\bigwedge_{j=1}^{r} u_j, \bigwedge_{j'=1}^{r} v_{j'}, \bigvee_{k=1}^{s} f_k \right) \right| \leq \prod_{j=1}^{r} \| u_j \|_{\mathscr{H}^{-1/2}} \prod_{j'=1}^{r} \| v_{j'} \|_{\mathscr{H}^{-1/2}} \prod_{k=1}^{s} \| f_k \|_{\mathscr{H}^{-1}} (s!)^{1/2} e^{\frac{17}{2}r} b_\sigma(g) [(r+1)c_{\varepsilon,\sigma}(g)]^n (n!)^{1+\varepsilon},$$

pour tous $n \in \mathbf{N}$ et $\lambda \in \overline{D\left(\frac{\pi}{8}, a_\sigma(g)\right)}$ ([27]).

Cet énoncé découle de la proposition 3.3 ci-dessous.

Il résulte immédiatement du théorème II que, si l'on pose

$$(3.0.2)\quad \underline{S}^{(r,s)}_{n,\sigma,g}\left(\bigwedge_{j=1}^{r} u_j, \bigwedge_{j'=1}^{r} v_{j'}, \bigvee_{k=1}^{s} f_k \right) = \frac{d^n}{d\lambda^n}\bigg|_{\lambda=0} S^{(r,s)}_{\lambda,\sigma,g}\left(\bigwedge_{j=1}^{r} u_j, \bigwedge_{j'=1}^{r} v_{j'}, \bigvee_{k=1}^{s} f_k \right),$$

La série formelle $\lambda \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \underline{S}^{(r,s)}_{n,\sigma,g}$ est asymptotique en $\lambda = 0$ ([28]) à la fonction $\lambda \mapsto S^{(r,s)}_{\lambda,\sigma,g}$, de plus, on peut reconstruire cette fonction à partir de sa série de Taylor comme suit :

THÉORÈME III. — Pour tout $\nu > 0$, la série entière

$$(3.0.3)\quad A_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!\,\Gamma\left(\frac{n}{\nu}+1\right)} \underline{S}^{(r,s)}_{n,\sigma,g}\left(\bigwedge_{j=1}^{r} u_j, \bigwedge_{j'=1}^{r} v_{j'}, \bigvee_{k=1}^{s} f_k \right)$$

converge pour tout $z \in \mathbb{C}$, et vérifie

$$| A_\nu(z) | \leq \prod_{j=1}^{r} \| u_j \|_{\mathscr{H}^{-1/2}} \prod_{j'=1}^{r} \| v_j \|_{\mathscr{H}^{-1/2}} \prod_{k=1}^{s} \| f_k \|_{\mathscr{H}^{-1}} (s!)^{1/2} e^{\frac{17}{2}r} b_\sigma(g) e^{a_\sigma(g)^{-\nu}|z|^\nu}$$

([27]) Les fonctions $\lambda \mapsto Z^{(r,s)}_{\lambda,\sigma,g}$, $\left(\lambda \in \overline{D\left(\frac{\pi}{8}, a_\sigma\right)}\right)$ donnent lieu à un énoncé similaire.

([28]) Voir [11], II, 2.5, d'autre part cette série formelle est bien entendu la « série de perturbation renormalisée ».

pour tout $z \in \mathrm{D}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2\nu}, \infty\right)$ et, pour tout $\lambda \in \mathrm{D}\left(\frac{\pi}{8}, a_\sigma(g)\right)$ on a pour tout $\nu > \dfrac{\pi}{2\left(\frac{\pi}{8} - |\operatorname{Arg} \lambda|\right)}$ (29),

$$(3.0.4) \qquad \mathrm{S}^{(r,s)}_{\lambda,\sigma,g}\left(\bigwedge_{j=1}^{r} u_j, \bigwedge_{j'=1}^{r} v_{j'}, \bigvee_{k=1}^{s} f_k\right) = \int_0^\infty \mathrm{A}_\nu(x^{1/\nu}\lambda)e^{-x}dx$$

Le théorème III est une variante de la sommabilité de Borel qui s'obtient en paraphrasant la démonstration du théorème de Watson ([*11*], theorem 136) (30).

On a résumé les définitions et résultats nécessaires d'algèbre extérieure à l'appendice A (31) auquel on renvoie pour les notations.

3.1. Le calcul des dérivées successives des fonctions $\lambda \mapsto \mathrm{Y}^{(r,s)}_{\lambda,\sigma,g}$, [voir (2.9.1)], va s'appuyer sur l'application itérée de (3.1.1) ci-dessous :

LEMME. — Soient $\mathrm{L} \in \mathscr{C}_1$, $\mathrm{H} \in \mathscr{C}_3$ et soit $\mathrm{K} = \mathrm{L} + \mathrm{H}$, pour tout $\mathrm{X} \in \mathscr{C}_1^{(t)}$, $(t \in \mathbf{N})$, on a $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

$$(3.1.1) \qquad \begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}[\operatorname{Tr}\{\Lambda^t([1+\lambda\mathrm{K}]^{-1})\mathrm{X}\}\det{}_3(1+\lambda\mathrm{K})] &= \det{}_3(1+\lambda\mathrm{K})\,[\operatorname{Tr}\{\lambda\mathrm{LK}\}\operatorname{Tr}\{\Lambda^t([1+\lambda\mathrm{K}]^{-1})\mathrm{X}\} \\ &\quad + \operatorname{Tr}\{\Lambda^t([1+\lambda\mathrm{K}]^{-1})\mathscr{M}^{[\lambda\mathrm{HK}-\mathrm{K}]}\mathrm{X}\} \\ &\quad + \operatorname{Tr}\{\Lambda^{t+1}([1+\lambda\mathrm{K}]^{-1}, \mathscr{C}^{[\lambda^2\mathrm{HK}^2-\lambda\mathrm{LK}]}\mathrm{X}\}]\,. \end{aligned}$$

---

(29) D'après le théorème de Lebesgue, on déduit de l'inégalité

$$|\mathrm{A}_\nu(z)| \leq c^{(r,s)}_{\sigma,g} e^{a_\sigma(g)-\nu|z|^\nu}, \qquad \forall z \in \mathrm{D}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2\nu}, \infty\right),$$

et de (3.0.4), des procédés d'approximation convergents, ne faisant intervenir que les premiers termes de la série, par exemple :

$$\mathrm{S}^{(r,s)}_{\lambda,\sigma,g} = \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{\lambda^n \underline{\mathrm{S}}^{(r,s)}_{n,\sigma,g}}{n!} \chi^{\mathrm{N}}_n(\nu, c, \rho), \qquad \left(\lambda \in \mathrm{D}\left(\frac{\pi}{8}, a_\sigma(g)\right)\right),$$

où

$$\chi^{\mathrm{N}}_n(\nu, c, \rho) = \int_0^\infty \mathrm{Y}\left(ce^{\rho x} - \left|\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{\lambda^k \underline{\mathrm{S}}^{(r,s)}_{k,\sigma,g}}{k!} \frac{x^{\frac{k}{\nu}}}{\Gamma\left(\frac{k}{\nu}+1\right)}\right|\right) \frac{x^{\frac{n}{\nu}}}{\Gamma\left(\frac{n}{\nu}+1\right)} e^{-x}dx, \qquad (n \leq \mathrm{N}),$$

avec

$$\nu > \frac{\pi}{2\left(\frac{\pi}{8} - |\operatorname{Arg}\lambda|\right)}, \qquad c \geq c^{(r,s)}_{\sigma,g}, \qquad \left(\frac{|\lambda|}{a_\sigma(g)}\right)^\nu \leq \rho < 1\,.$$

(30) Voir en 3.4 l'énoncé de la variante utilisée.

(31) Voir aussi [*4*], Appendix.

Démonstration. — On a

$$(3.1.2)\quad \frac{d}{d\lambda}[\mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^t([1+\lambda K]^{-1})X\,\}\,\det{}_3\,(1+\lambda K)]$$
$$= [-\,\mathrm{Tr}\,\{\,\mathcal{M}^{[(1+\lambda K)^{-1}K]}\Lambda^t([1+\lambda K]^{-1})X\,\}$$
$$+\lambda^2\,\mathrm{Tr}\,\{\,[1+\lambda K]^{-1}K^3\,\}\,\mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^t([1+\lambda K]^{-1})X\,\}\,]\,\det{}_3\,(1+\lambda K)$$
$$= [-\,\mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^t([1+\lambda K]^{-1})\mathcal{M}^{[K]}X\,\}$$
$$+\lambda\,\mathrm{Tr}\,\{\,\mathcal{M}^{[(1+\lambda K)^{-1}(L+H)K]}\Lambda^t([1+\lambda K]^{-1})X\,\}$$
$$+\lambda^2\,\mathrm{Tr}\,\{\,[1+\lambda K]^{-1}(L+H)K^2\,\}\,\mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^t([1+\lambda K]^{-1})X\,\}\,]\,\det{}_3\,(1+\lambda K),$$

puis,

$$(3.1.3)\quad \lambda\,\mathrm{Tr}\,\{\,\mathcal{M}^{[(1+\lambda K)^{-1}LK]}\Lambda^t([1+\lambda K]^{-1})X\,\}$$
$$+\,\lambda^2\,\mathrm{Tr}\,\{\,[1+\lambda K]^{-1}LK^2\,\}\,\mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^t([1+\lambda K]^{-1})X\,\}$$
$$=\lambda\,\mathrm{Tr}\,\{\,LK\,\}\,\mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^t([1+\lambda K]^{-1})X\,\}$$
$$-\,\lambda\,\mathrm{Tr}\,\{\,\mathcal{C}^{[(1+\lambda K)^{-1}LK]}\Lambda^t([1+\lambda K]^{-1})X\,\}$$
$$=\lambda\,\mathrm{Tr}\,\{\,LK\,\}\,\mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^t([1+\lambda K]^{-1})X\,\}$$
$$-\,\lambda\,\mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^{t+1}([1+\lambda K]^{-1})\mathcal{C}^{[LK]}X\,\},$$

[la première égalité d'après (A.3.3), la seconde d'après (A.1.4) et (A.2.2)],

$$(3.1.4)\quad \lambda\,\mathrm{Tr}\,\{\,\mathcal{M}^{[(1+\lambda K)^{-1}HK]}\Lambda^t([1+\lambda K]^{-1})X\,\}$$
$$=\lambda\,\mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^t([1+\lambda K]^{-1})\mathcal{M}^{[HK(1+\lambda K)^{-1}]}X\,\}$$
$$=\lambda\,\mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^t([1+\lambda K]^{-1})\mathcal{M}^{[HK]}X\,\}$$
$$-\,\lambda^2\,\mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^t([1+\lambda K]^{-1})\mathcal{M}^{[HK^2(1+\lambda K)^{-1}]}X\,\}$$
$$=\lambda\,\mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^t([1+\lambda K]^{-1})\mathcal{M}^{[HK]}X\,\}$$
$$-\,\lambda^2\,\mathrm{Tr}\,\{\,\mathcal{M}^{[(1+\lambda K)^{-1}HK^2]}\Lambda^t([1+\lambda K]^{-1})X\,\},$$

[la première et la troisième égalités résultent de (A.1.4), (A.1.5) et (A.2.1)], donc,

$$(3.1.5)\quad \lambda\,\mathrm{Tr}\,\{\,\mathcal{M}^{[(1+\lambda K)^{-1}HK]}\Lambda^t([1+\lambda K]^{-1})X\,\}$$
$$+\,\lambda^2\,\mathrm{Tr}\,\{\,[1+\lambda K]^{-1}HK^2\,\}\,\mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^t([1+\lambda K]^{-1})X\,\}$$
$$=\lambda\,\mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^t([1+\lambda K]^{-1})\mathcal{M}^{[HK]}X\,\}+\lambda^2\,\mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^{t+1}([1+\lambda K]^{-1})\mathcal{C}^{[HK^2]}X\,\},$$

d'après (3.1.4), (A.3.3) et (A.1.4).

Enfin (3.1.1) résulte de (3.1.2), (3.1.3) et (3.1.5). cqfd

3.2. LEMME. — Soient $L\in\mathcal{C}_1$, $H\in\mathcal{C}_3$ et $K=L+H$ et soit $B\in\mathcal{C}_1^{(r)}$, on a, pour tous $n\in\mathbf{N}$, $\lambda\in\mathbb{C}$

$$(3.2.1)\quad \left|\frac{d^n}{d\lambda^n}[\mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^r([1+\lambda K]^{-1})B\,\}\,\det{}_3\,(1+\lambda K)]\right|$$
$$\leq 2^{r+2n}(r+1)^n\,\|\,B\,\|_1\left[\sum_{\substack{n_j=0\\ \sum_{j=1}^{6}n_j=n}}^{n}\frac{n\,!}{\prod_{j=1}^{6}(n_j\,!)}\,n^{n_6}\,|\,\lambda\,|^{n_2+n_3+2n_4+n_5-n_6}\right.$$
$$\left.\cdot\,\|\,K\,\|^{n_1}\,\|\,HK\,\|^{n_2}\,\|\,LK\,\|_1^{n_3+n_5}\,\|\,HK^2\,\|_1^{n_4}\;\|\,\Lambda^{r+n_3+n_4}([1+\lambda K]^{-1})\,\det{}_3\,(1+\lambda K)\,\|\,\right].$$

Démonstration. — L'application itérée du Lemme 3.1 fait apparaître

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}[\mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^r([1+\lambda\mathrm{K}]^{-1})\mathrm{B}\,\}\,\det_3(1+\lambda\mathrm{K})]$$

comme somme de 6^n termes obtenus en effectuant successivement et dans un ordre arbitraire n opérations, chacune d'elles substituant à

$$\lambda^k\,\mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^t([1+\lambda\mathrm{K}]^{-1})\mathrm{X}\,\},\qquad (k\in\mathbf{N},\ t\in\mathbf{N},\ \mathrm{X}\in\mathscr{C}_1^{(t)}),$$

l'une des 6 expressions suivantes :

$$\begin{array}{ll}
(1) & -\lambda^k\,\mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^t([1+\lambda\mathrm{K}]^{-1})\mathscr{M}^{[\mathrm{K}]}\mathrm{X}\,\},\\
(2) & \lambda^{k+1}\,\mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^t([1+\lambda\mathrm{K}]^{-1})\mathscr{M}^{[\mathrm{HK}]}\mathrm{X}\,\},\\
(3) & -\lambda^{k+1}\,\mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^{t+1}([1+\lambda\mathrm{K}]^{-1})\mathscr{C}^{[\mathrm{LK}]}\mathrm{X}\,\},\\
(4) & \lambda^{k+2}\,\mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^{t+1}([1+\lambda\mathrm{K}]^{-1})\mathscr{C}^{[\mathrm{HK}^2]}\mathrm{X}\,\},\\
(5) & \lambda^{k+1}\,\mathrm{Tr}\,\{\,\mathrm{LK}\,\}\,\mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^t([1+\lambda\mathrm{K}]^{-1})\mathrm{X}\,\},\\
(6) & k\lambda^{k-1}\,\mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^t([1+\lambda\mathrm{K}]^{-1})\mathrm{X}\,\}.
\end{array}$$

Soit T l'un des $\dfrac{n!}{\prod_{j=1}^{6}(n_j!)}$ termes obtenus en effectuant n_j fois l'opération de type (j), $\left(0\le n_j\le n,\ j=1,\ldots,6;\ \sum_{j=1}^{6}n_j=n\right)$, ce terme est de la forme :

$$\begin{aligned}(3.2.2)\quad \mathrm{T} = a\lambda^{n_2+n_3+2n_4+n_5-n_6}\,\mathrm{Tr}\,\{\,\mathrm{LK}\,\}^{n_5}&\\ \mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^{r+n_3+n_4}([1+\lambda\mathrm{K}]^{-1})\mathrm{Y}\,\}\,\det_3(1+\lambda\mathrm{K})&\end{aligned}$$

avec $a\in\mathbf{R}$ et $\mathrm{Y}\in\mathscr{C}_1^{(r+n_3+n_4)}$ donc,

$$\begin{aligned}(3.2.3)\quad |\,\mathrm{T}\,| \le |\,a\,|\ \ |\,\lambda\,|^{n_2+n_3+2n_4+n_5-n_6}\,\|\,\mathrm{LK}\,\|_1^{n_5}&\\ \|\,\Lambda^{r+n_3+n_4}([1+\lambda\mathrm{K}]^{-1})\,\det_3(1+\lambda\mathrm{K})\,\|\ \ \|\,\mathrm{Y}\,\|_1\,.&\end{aligned}$$

D'abord si $a\neq 0$ on a $n_6\le n_2+n_3+2n_4+n_5$ et,

$$(3.2.4)\qquad |\,a\,|\le\frac{(n_2+n_3+2n_4+n_5)\,!}{(n_2+n_3+2n_4+n_5-n_6)\,!}\le(2n)^{n_6}$$

Ensuite Y est obtenu en faisant agir sur B le produit dans $\mathscr{L}(\mathscr{O})$ de n_1 opérateurs $\mathscr{M}^{[\mathrm{K}]}$, n_2 opérateurs $\mathscr{M}^{[\mathrm{HK}]}$, n_3 opérateurs $\mathscr{C}^{[\mathrm{LK}]}$ et n_4 opérateurs $\mathscr{C}^{[\mathrm{HK}^2]}$, pris dans un ordre arbitraire ; d'après la relation de commutation (A.2.4) on peut exprimer Y comme somme d'au plus $2^{n_1+n_2+n_3+n_4}\le 2^n$ termes dans chacun desquels les n_3+n_4 opérateurs $\mathscr{C}^{[\ ]}$ sont rangés à gauche. Soit Y_1 l'un de ces termes, d'après (A.1.2), (A.2.4), (A.3.1) et (A.3.2), on a

$$(3.2.5)\quad \| Y_1 \|_1 \leq \binom{r + n_3 + n_4}{r} (r + 1)^{n_1+n_2} \| K \|^{n_1} \| HK \|^{n_2} \| LK \|_1^{n_3} \| HK^2 \|_1^{n_4} \| B \|_1$$

donc

$$(3.2.6)\quad \| Y \|_1 \leq 2^{r+n_3+n_4+n}(r+1)^n \| K \|^{n_1} \| HK \|^{n_2} \| LK \|_1^{n_3} \| HK^2 \|_1^{n_4} \| B \|_1$$

et (3.2.1) résulte de (3.2.3), (3.2.4) et (3.2.6).

cqfd

3.3. Proposition. — Soient $g \in \mathscr{V}$, $p \in [1, +\infty[$, $\varepsilon > 0$, $r \in \mathbf{N}$ et $B \in \mathscr{C}_1^{(r)}$, il existe des constantes $\rho_p > 0$, $b^{(p)}(g) > 0$ et $c_\varepsilon^{(p)}(g) > 0$, telles que ([32])

$$(3.3.1)\quad \left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} [\operatorname{Tr} \{ \Lambda^r([1 + \lambda \mathbf{K}_g]^{-1}) B \} \det_{\text{ren}} (1 + \lambda \mathbf{K}_g)] \right\|_p \leq \| B \|_1 e^{\frac{17}{2}r} b^{(p)}(g)[(r + 1)c_\varepsilon^{(p)}(g)]^n (n!)^{1+\varepsilon},$$

pour tous $r \in \mathbf{N}$ et tout $\lambda \in \overline{D\left(\frac{\pi}{8}, \rho_p\right)}$.

Démonstration. — Étant donnée $g \in \mathscr{V}$, pour chaque $k \in \mathscr{S}$ on désigne par $\underline{N}_s^{(2)}(k)$, $s > \frac{1}{2}$, $\underline{N}_t^{(4)}(k)$, $t > \frac{1}{4}$ et $\underline{Q}(k)$ respectivement les fonctions $\omega \mapsto N_s^{(2)}(g.(\omega * k))$, $\omega \mapsto N_t^{(4)}(g.(\omega * k))$, $\omega \mapsto Q(g.(\omega * k))$, $(\omega \in \mathscr{S}')$. Si $(k_\varkappa)_{\varkappa\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{S}$ vérifiant $\| k_\varkappa \|_1 \leq 1$, $\hat{k}_\varkappa(p) = 1$ si $| p | \leq \varkappa m$ et $\hat{k}_\varkappa(p) = 0$ si $| p | \geq 2\varkappa m$, $(p \in E)$, les suites $(\underline{N}_s^{(2)}(k_\varkappa))_{\varkappa\in\mathbf{N}}$, $(\underline{N}_t^{(4)}(k_\varkappa))_{\varkappa\in\mathbf{N}}$ et $(\underline{Q}(k_\varkappa))_{\varkappa\in\mathbf{N}}$ convergent dans $L^q(\mathscr{S}', \mu_m)$, $(1 \leq q < +\infty)$, et leurs limites notées respectivement $\underline{N}_s^{(2)}$, $\underline{N}_t^{(4)}$ et $\underline{Q}$ vérifient $(\underline{N}_s^{(2)})^2 \in \mathfrak{F}_0 \oplus \mathfrak{F}_2$, $(\underline{N}_t^{(4)})^4 \in \mathfrak{F}_0 \oplus \mathfrak{F}_2 \oplus \mathfrak{F}_4$ et $(\underline{Q})^2 \in \mathfrak{F}_0 \oplus \mathfrak{F}_2$ [voir la démonstration en 2.7], on a donc, d'après l'inégalité « d'hypercontractivité », pour tous $q \geq 1$, $\beta > 0$:

$$(3.3.2)\quad \| (\underline{N}_s^{(2)})^\beta \|_q = \| (\underline{N}_s^{(2)})^2 \|_{q\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} \leq \left(q\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{\beta}{2}} \| (\underline{N}_s^{(2)})^2 \|_2^{\frac{\beta}{2}}, \qquad \left(q\frac{\beta}{2} \geq 1\right),$$

$$(3.3.3)\quad \| (\underline{N}_t^{(4)})^\beta \|_q = \| (\underline{N}_t^{(4)})^4 \|_{q\frac{\beta}{4}}^{\frac{\beta}{4}} \leq \left(q\frac{\beta}{4}\right)^{\frac{\beta}{2}} \| (\underline{N}_t^{(4)})^4 \|_2^{\frac{\beta}{4}}, \qquad \left(q\frac{\beta}{4} \geq 1\right),$$

$$(3.3.4)\quad \| \underline{Q}^\beta \|_q = \| \underline{Q}^{(2)} \|_{q\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} \leq \left(q\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{\beta}{2}} \| \underline{Q}^2 \|_2^{\frac{\beta}{2}}, \qquad \left(q\frac{\beta}{2} \geq 1\right).$$

([32]) Un raffinement de l'inégalité (3.3.5) ci-dessous permet de remplacer le second membre de (3.3.1) par

$$\| B \|_1 e^{\frac{17}{2}r} b^{(p)}(g)[(r + 1)c^{(p)}(g)]^n n! (\log n)^{n/2}.$$

Posant alors $\mathbf{L}_{\zeta,g} = P_\zeta \mathbf{K}_g$ et $\mathbf{H}_{\zeta,g} = \mathbf{K}_g - \mathbf{L}_{\zeta,g}$, $\zeta \geq 0$ on a d'abord, pour tout $\zeta \geq 0$ et tout $\xi \in \left[\frac{4}{3}, 2\right[$,

$$(3.3.5) \qquad \| \mathbf{L}_{\zeta,g}\mathbf{K}_g \|_1 \leq c_g(1 + \zeta)^{\frac{3}{4}(2-\xi)} \left(\mathrm{N}^{(2)}_{\frac{\xi+2}{4\xi}}\right)^{3\xi-4} \left(\mathrm{N}^{(4)}_{\frac{1}{2\xi}}\right)^{4-2\xi} \mathrm{Q}^{2-\xi},$$

en effet, soit $\Lambda \subset \mathrm{E}$ un compact tel que g soit nulle en dehors de Λ, pour toute fonction $h \in \mathrm{L}^\infty_{\mathbf{R}}(\mathrm{E})$ nulle en dehors de Λ, on a d'après (2.3.7),

$$(3.3.6) \qquad \| \mathrm{L}_\zeta(h) \|_1 \leq c_3(\Lambda)(1 + \zeta)^{3/4}\mathrm{Q}(h),$$

et, si $\xi' = \dfrac{\xi}{\xi - 1}$, ($\xi' \in]2, 4]$), d'après (2.3.5),

$$(3.3.7) \qquad \| \mathrm{L}_\zeta(h) \|_{\xi'} \leq \| \mathrm{K}(h) \|_{\xi'} \leq c_1 \mathrm{N}^{(2)}_{\frac{\xi+2}{4\xi}}(h)^{\frac{3\xi-4}{\xi}} \mathrm{N}^{(4)}_{\frac{1}{2\xi}}(h)^{\frac{4-2\xi}{\xi}},$$

or [33],

$$(3.3.8) \qquad \| \mathrm{L}_\zeta(h) \|_\xi \leq \| \mathrm{L}_\zeta(h) \|_1^{\frac{\xi'-\xi}{(\xi'-1)\xi}} \| \mathrm{L}_\zeta(h) \|_{\xi'}^{\frac{(\xi-1)\xi'}{(\xi'-1)\xi}} = \| \mathrm{L}_\zeta(h) \|_1^{2-\xi} \| \mathrm{L}_\zeta(h) \|_{\xi'}^{\xi-1},$$

donc,

$$(3.3.9) \qquad \begin{aligned} \| \mathrm{L}_\zeta(h)\mathrm{K}(h) \|_1 &\leq \| \mathrm{L}_\zeta(h) \|_\xi \, \| \mathrm{K}(h) \|_{\xi'} \\ &\leq c_1 c_3(\Lambda)(1 + \zeta)^{\frac{3}{4}(2-\xi)} \mathrm{N}^{(2)}_{\frac{\xi+2}{4\xi}}(h)^{3\xi-4} \mathrm{N}^{(4)}_{\frac{1}{2\xi}}(h)^{4-2\xi} \mathrm{Q}(h)^{2-\xi} \quad [34], \end{aligned}$$

et (3.3.5) résulte, en passant à la limite [d'après 1.6], de (3.3.9) appliqué aux fonctions $g.(\omega * k_\varkappa)$; on a de même, d'après (2.3.5) :

$$(3.3.10) \qquad \| \mathbf{H}_{\zeta,g} \|_3 \leq c_1(1 + \zeta)^{-\frac{1}{24}} (\mathrm{N}^{(2)}_{\frac{7}{12}})^{\frac{1}{3}} (\mathrm{N}^{(4)}_{\frac{1}{3}})^{\frac{2}{3}}, \qquad \forall \zeta \geq 0.$$

Soient $q_1 \geq 1$, $\zeta \geq 0$, n_j $(1 \leq j \leq 5)$ des entiers, et soit $\nu = n_1 + 2n_2 + n_3 + 3n_4 + n_5$, d'après (3.3.2), (3.3.3), (3.3.4), (3.3.5) et (3.3.10), on a pour tout $\xi \in \left[\frac{4}{3}, 2\right[$,

$$(3.3.11) \qquad \begin{aligned} &\| (\| \mathbf{K}_g \|^{n_1} \| \mathbf{H}_{\zeta,g}\mathbf{K}_g \|^{n_2} \| \mathbf{L}_{\zeta,g}\mathbf{K}_g \|_1^{n_3+n_5} \| \mathbf{H}_{\zeta,g}\mathbf{K}_g^2 \|_1^{n_4}) \|_{q_1} \\ &\leq \| (\| \mathbf{K}_g \|_3) \|_{\nu q_1}^{n_1+n_2+2n_4} \| (\| \mathbf{H}_{\zeta,g} \|_3) \|_{\nu q_1}^{n_2+n_4} \| (\| \mathbf{L}_{\zeta,g}\mathbf{K}_g \|_1) \|_{\nu q_1}^{n_3+n_5} \\ &\leq c_1^{n_1+2n_2+3n_4} c_g^{n_3+n_5} (1+\zeta)^{\frac{3}{4}(2-\xi)(n_3+n_5) - \frac{1}{24}(n_2+n_4)} (3\nu q_1)^{\frac{n_1}{2}+n_2+n_3+\frac{3}{2}n_4+n_5} \\ &\quad \cdot \left(\left\| \left(\mathrm{N}^{(2)}_{\frac{\xi+2}{4\xi}}\right)^2 \right\|_2^{\frac{3\xi-4}{2}} \left\| \left(\mathrm{N}^{(4)}_{\frac{1}{2\xi}}\right)^4 \right\|_2^{\frac{2-\xi}{2}} \| \mathrm{Q}^2 \|_2^{\frac{2-\xi}{2}} \right)^{n_3+n_5} \\ &\quad \left(\left\| \left(\mathrm{N}^{(2)}_{\frac{7}{12}}\right)^2 \right\|_2^{\frac{1}{6}} \left\| \left(\mathrm{N}^{(4)}_{\frac{1}{3}}\right)^4 \right\|_2^{\frac{1}{6}} \right)^{n_1+2n_2+3n_4}. \end{aligned}$$

---

[33] D'après le théorème d'interpolation [2], § 2, par exemple.

[34] On peut améliorer (3.3.9), donc (3.3.5) en partant de

$$\| \mathrm{L}_\zeta(h)\mathrm{K}(h) \|_1 \leq \| \mathrm{L}_\zeta(h) \|_2 \, \| \mathrm{L}_{\zeta'}(h) \|_2 + \| \mathrm{L}_\zeta(h) \|_\xi \, \| \mathrm{H}_{\zeta'}(h) \|_{\xi'}.$$

Pour tout entier n on pose $(1 + \zeta_n) = n^{12}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, $9(2 - \xi_\varepsilon) = \varepsilon$. alors d'après (3.3.11) [avec $\xi = \xi_\varepsilon$], il existe une constante $c_\varepsilon(g)$ telle que pour tous $(n_j)_{1 \leq j \leq 5}$ tels que $\sum_{j=1}^{5} n_j \leq n$ et tout $q_1 \geq 1$ on ait

$$(3.3.12) \quad \| (\| \mathbf{K}_g \|^{n_1} \| \mathbf{H}_{\zeta_n,g}\mathbf{K}_g \|^{n_2} \| \mathbf{L}_{\zeta_n,g}\mathbf{K}_g \|_1^{n_3+n_5} \| \mathbf{H}_{\zeta_n,g}\mathbf{K}_g^2 \|_1^{n_4}) \|_{q_1} \leq c_\varepsilon(g)^n q_1^{\frac{3}{2}n} n^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)+n_4+(1+\varepsilon)(n_3+n_5)}$$

[puisque $v \geq 3n$].

D'autre part, pour tout entier n', on a

$$(3.3.13) \quad \left| \frac{d^{n'}}{d\lambda^{n'}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}\mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}}\mathbf{K}_g^2} \right| \leq \sum_{n'_1=0}^{n'} \binom{n'}{n'_1} n'^{n'_1} |\lambda|^{n'-2n'_1} |\mathrm{Tr}^{:}_{\mathbf{reg}} \mathbf{K}_g^2|^{n'-n'_1} \left| e^{-\frac{\lambda^2}{2}\mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}}\mathbf{K}_g^2} \right|$$

et comme $\mathrm{Tr}^{:}_{\mathbf{reg}} \mathbf{K}_g^2 \in \mathfrak{F}_2$, pour tout $q_2 \geq 1$:

$$(3.3.14) \quad \| |\mathrm{Tr}^{:}_{\mathbf{reg}} \mathbf{K}_g^2|^{n'-n'_1} \|_{q_2} \leq (q_2(n'-n'_1) \| \mathrm{Tr}^{:}_{\mathbf{reg}} \mathbf{K}_g^2 \|_2)^{n'-n'_1}$$

Enfin, d'après la formule de Leibnitz et l'inégalité de Hölder, (3.3.1) résulte de (3.2.1), (3.3.12), (3.3.13), (3.3.14) et de la proposition 2.

cqfd

3.4. Il résulte d'abord de (3.2.1) — avec $\mathbf{K}_g$ mis pour K — et de la proposition 2 qu'il existe une fonction $\mathrm{F}^{(r,s)}_{n,\sigma,g} \in \mathrm{L}^1(\mathscr{S}', \mu_m)$ telle que [35] :

$$\left| \frac{d^n}{d\lambda^n} \mathrm{Y}^{(r,s)}_{\lambda,\sigma,g} \right| \leq \mathrm{F}^{(r,s)}_{n,\sigma,g}, \qquad \forall \lambda \in \overline{\mathrm{D}\left(\frac{\pi}{8}, a_\sigma\right)}$$

donc, par un lemme classique de dérivation sous le signe somme, que les fonctions $\lambda \mapsto \mathrm{Z}^{(r,s)}_{\lambda,\sigma,g}$ sont C^∞ dans $\overline{\mathrm{D}\left(\frac{\pi}{8}, a_\sigma\right)}$, puis d'après (3.3.1), pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $c'_{\varepsilon,\sigma}(g) > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$(3.4.1) \quad \left| \frac{d^n}{d\lambda^n} \mathrm{Z}^{(r,s)}_{\lambda,\sigma,g} \left(\bigwedge_{j=1}^{r} u_j, \bigwedge_{j'=1}^{r} v_{j'}, \bigvee_{k=1}^{s} f_k \right) \right| \leq \prod_{j=1}^{r} \| u_j \|_{\mathscr{H}^{-1/2}} \prod_{j'=1}^{r} \| v_{j'} \|_{\mathscr{H}^{-1/2}} \prod_{k=1}^{s} \| f_k \|_{\mathscr{H}^{-1}} (s!)^{1/2} c'_{\varepsilon,\sigma}(g)^{(r+1)(n+1)} (n!)^{1+\varepsilon}$$

on en déduit (3.0.1) en notant que si une fonction C^∞, F, $\left[\text{ici } \lambda \mapsto \mathrm{Z}^{(0,0)}_{\lambda,\sigma,g}, \left(\lambda \in \overline{\mathrm{D}\left(\frac{\pi}{8}, a_\sigma(g)\right)}\right)\right]$ vérifie $|\mathrm{F}^{(n)}| \leq ac^n(n!)^\alpha$, $\forall n \in \mathbf{N}$, avec $\alpha \geq 1$, et $|1/\mathrm{F}| \leq b$, alors $\mathrm{G} = 1/\mathrm{F}$ vérifie $|\mathrm{G}^{(n)}| \leq eb.(2eabc)^n(n!)^\alpha$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Ceci achève la démonstration du théorème II.

---

[35] $\mathrm{Y}^{(r,s)}_{\lambda,\sigma,g}$ est défini en (2.9.1).

Pour obtenir le théorème III il suffit d'appliquer aux fonctions $z \mapsto F_\pm(z) = S^{(r,s)}_{\pm z^{-1},\sigma,g}\left(z^{-1} \in D\left(\frac{\pi}{8}, a_\sigma(g)\right), \pm \operatorname{Re} z > 0\right)$ la formulation suivante du théorème de Watson ([*11*], theorem 136) :

THÉORÈME. — Soit F une fonction holomorphe dans

$$\Delta(\theta, \rho) = \{ z \in \mathbb{C} ; |\operatorname{Arg} z| < \theta, |z| > \rho \}$$

on suppose qu'il existe une suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et des constantes $b > 0$, $c > 0$, $\eta \in \left[0, \frac{2\theta}{\pi}\right[$, telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|a_n| \leq bc^n(n!)^\eta \tag{3.4.2}$$

et

$$\left|F(z) - \sum_{j=0}^{n} a_j z^{-j}\right| \leq bc^{n+1}[(n+1)!]^\eta |z|^{-(n+1)}, \qquad \forall z \in \Delta(\theta, \rho). \tag{3.4.3}$$

Pour $v > \frac{\pi}{2\theta}$ et $t \in \Delta\left(\theta - \frac{\pi}{2v}, 0\right)$, on pose

$$A_v(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Delta(\delta,r)} F\left(\frac{u^{1/v}}{t}\right)\frac{e^u}{u}\,du, \tag{3.4.4}$$

avec $\frac{\pi}{2} < \delta < v(\theta - |\operatorname{Arg} t|)$, $r > \rho^v |t|^v$.

Alors,

i) Si $v < \frac{1}{\eta}$, $\left(\text{resp. } v = \frac{1}{\eta}\right)$, la série entière $t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma\left(\frac{n}{v}+1\right)} t^n$ converge pour tout $t \in \mathbb{C}$, (resp. si $|t| < v^{-\frac{1}{v}}c^{-1}$) et $\left[\text{si } v > \frac{\pi}{2\theta}\right]$,

$$A_v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma\left(\frac{n}{v}+1\right)} t^n, \qquad \forall t \in \Delta\left(\theta - \frac{\pi}{2v}, 0\right), \tag{3.4.5}$$

$$\left(\text{resp. } \forall t \in \Delta\left(\theta - \frac{\pi}{2v}, 0\right), |t| < v^{-\frac{1}{v}}c^{-1}\right),$$

ii) Pour tout $z \in \Delta\left(\theta - \frac{\eta\pi}{2}, \rho\right)$, on a,

$$F(z) = \int_0^\infty A_v\left(\frac{x^{1/v}}{z}\right)e^{-x}dx, \qquad \forall v \in \left]\frac{\pi}{2(\theta - |\operatorname{Arg} z|)}, \frac{1}{\eta}\right]. \tag{3.4.6}$$

4. MAJORATION DES FONCTIONS $\Lambda \mapsto Z^{(r,s)}_{\lambda,\sigma,\Lambda}$

Étant donné un réseau à mailles carrées, de pas $l > 0$, dans E, on a (avec les notations de 1.9)

THÉORÈME IV. — Pour tout $\sigma > -m^2$, il existe une constante $c_{(l),\sigma} > 1$ telle que, pour tout $\Lambda \in \mathscr{X}_0$ et tout $\lambda \in D\left(\frac{\pi}{8}, a_\sigma\right)$

$$(4.0.1)\quad \left| Z^{(r,s)}_{\lambda,\sigma,\Lambda}\left(\bigwedge_{j=1}^{r} u_j, \bigwedge_{j'=1}^{r} v_{j'}, \bigvee_{k=1}^{s} f_k\right)\right| \leq \prod_{j=1}^{r} \| u_j \|_{\mathscr{H}^{-1/2}} \prod_{j'=1}^{r} \| v_{j'} \|_{\mathscr{H}^{-1/2}} \prod_{k=1}^{s} \| f_k \|_{\mathscr{H}^{-1}} (s\,!)^{1/2} e^{\frac{5e^{5/4}}{2} r} c^{|\Lambda|}_{(l),\sigma} \quad (^{36})$$

La démonstration suivante est calquée sur la méthode exposée en [*12*]

4.1. Soit $\mathscr{R}$ l'ensemble des centres des mailles du réseau, on désigne par Δ_α la maille de centre $\alpha \in \mathscr{R}$, et, suivant [*12*], par $\chi_\alpha \in L(\mathscr{H})$ le projecteur orthogonal défini par $\chi_\alpha = |C|^{1/2} M(\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}) |C|^{-1/2}$ (37) — on a $\chi_\alpha \chi_\beta = 0$ si $\alpha \neq \beta$ et $\sum_{\alpha \in \mathscr{R}} \chi_\alpha = \mathbf{1}_{\mathscr{H}}$ — on pose (37)

$$K_\alpha = K_{\Delta_\alpha}, \quad D_\alpha = \chi_\alpha K_\alpha \chi_\alpha \quad \text{et} \quad R_\alpha = K_\alpha - D_\alpha = \sum_{(\beta,\gamma) \in \mathscr{R}^2 \setminus (\alpha,\alpha)} \chi_\beta K_\alpha \chi_\gamma$$

D'autre part on note $\mathscr{A}_\alpha$ la tribu sur $\mathscr{S}'$ engendrée par

$$\{ \Phi(f) \,;\, f \in \mathscr{S},\ \operatorname{supp} f \subset \Delta_\alpha \} \quad (^{38}),$$

on a

LEMME [*12*]. — Soit $\xi \in \left]2 - \frac{2}{17}, 2\right[$, il existe $a_j > 0$, $j = 1, 2$, $d > 0$ et des fonctions positives $F_{(j)\alpha} \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\mathscr{S}', \mathscr{A}_\alpha, \mu_m)$, $\alpha \in \mathscr{R}$, $j = 1, 2$ vérifiant $\| F^n_{(j)\alpha} \|_1 \leq (n a_j)^n$, $j = 1, 2$, $\forall \alpha \in \mathscr{R}$ et telles que

$$(4.1.1)\quad \| D_\alpha \|_{\xi'} \leq F^{1/2}_{(1)\alpha}, \quad \forall \alpha \in \mathscr{R}, \quad \left(\xi' = \frac{\xi}{\xi - 1}\right)$$

(36) Pour tout $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, $|\Lambda|$ est le nombre de mailles du réseau contenues dans Λ.
(37) Voir 1.3, 1.4.
(38) Voir 1.5.

et,

$$(4.1.2)\quad \| \chi_\beta \mathbf{K}_\alpha \chi_\gamma \|_\xi \leq e^{-d(|\alpha-\beta|+|\alpha-\gamma|)} \mathrm{F}^{1/2}_{(2),\alpha}, \qquad \forall \alpha \in \mathscr{R}, \quad \forall (\beta, \gamma) \in \mathscr{R}^2 \backslash (\alpha, \alpha)$$

On renvoie à [*12*] pour la démonstration de ce lemme [on pourra remplacer [*12*], (5.14) — où $\chi_\beta \,|\, \mathrm{C}\,|^k \in \mathscr{C}_{4/3}$ n'est pas établi — par l'inégalité :

$$\| \mathbf{K}_\alpha \chi_\gamma \|_1 = \| (\mathbf{K}_\alpha \,|\, \mathrm{C}\,|^{-1/2} \chi_\alpha \,|\, \mathrm{C}\,|^{1/2}) \chi_\gamma \|_1 \\ \leq a e^{-2d|\alpha-\gamma|} \| \mathbf{K}_\alpha \,|\, \mathrm{C}\,|^{k-1/2} \|_2 \, \| \,|\, \mathrm{C}\,|^k \chi_\gamma \|_2 ,$$

avec $k > 1$, d'autre part, pour estimer $\| \chi_\beta \mathbf{K}_\alpha \|_1$ si $|\alpha - \beta| > \sqrt{2l}$, on note que l'on peut substituer $\mathrm{C}\,|\,\mathrm{C}\,|^{-1/2}\Gamma$ à $|\,\mathrm{C}\,|^{1/2}$ au premier membre de [*12*], (2.2)].

4.2. Si $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, on pose $\underline{\Lambda} = \Lambda \cap \mathscr{R}$ — de sorte que $\Lambda = \bigcup_{\alpha \in \underline{\Lambda}} \Delta_\alpha$ — et $\mathrm{D}_\Lambda = \sum_{\alpha \in \underline{\Lambda}} \mathrm{D}_\alpha$, $\mathrm{R}_\Lambda = \sum_{\alpha \in \underline{\Lambda}} \mathrm{R}_\alpha$, donc $\mathbf{K}_\Lambda = \sum_{\alpha \in \underline{\Lambda}} \mathbf{K}_\alpha = \mathrm{D}_\Lambda + \mathrm{R}_\Lambda$, on a

LEMME. — Si $|\operatorname{Arg} \lambda^2| \leq \dfrac{\pi}{4}$ on a pour tous $r \in \mathbf{N}$ et $\Lambda \in \mathscr{X}_0$

$$(4.2.1)\quad \| \Lambda^r([1 + \lambda \mathbf{K}_\Lambda]^{-1}) \det_3 (1 + \lambda \mathbf{K}_\Lambda) \| \\ \leq e^{\frac{5e^{5/4}}{2} r} \left| e^{\frac{1}{2}\operatorname{Tr} \mathrm{S}(\lambda, \mathrm{D}_\Lambda)} \right| \det_3 (1 + \mathrm{O}^+_{\lambda \mathrm{A}_\Lambda})^{\frac{1}{4}} e^{-\operatorname{Tr}\left\{ \frac{|\lambda|^4}{8} (\mathrm{A}_\Lambda \mathrm{A}^*_\Lambda)^2 + \frac{|\lambda|^2}{4} \mathrm{A}_\Lambda \mathrm{A}^*_\Lambda (\lambda \mathrm{A}_\Lambda + \bar{\lambda} \mathrm{A}^*_\Lambda) \right\}} \\ .\, e^{\frac{|\lambda|^2}{2}\left[\frac{1}{2} \| \mathrm{Q}_\Lambda \|_2^2 + e^{5/4} (\| \mathrm{A}_\Lambda \mathrm{Q}_\Lambda \|_1 + 6 \| \mathrm{D}_\Lambda \mathrm{R}^*_\Lambda \|_1) + 4 \| \mathrm{D}^*_\Lambda \mathrm{R}^*_\Lambda \|_1 + (1 + 3e^{5/4}) \| \mathrm{R}_\Lambda \|_2^2 \right]}$$

où

$$\mathrm{A}_\Lambda = [1 + \lambda^2 \mathrm{D}_\Lambda \mathrm{D}^*_\Lambda]^{-1/2} (\mathrm{D}_\Lambda + \mathrm{D}^*_\Lambda) [1 + \lambda^2 \mathrm{D}_\Lambda \mathrm{D}^*_\Lambda]^{-1/2} ,$$
$$\mathrm{Q}_\Lambda = [1 + \lambda^2 \mathrm{D}_\Lambda \mathrm{D}^*_\Lambda]^{-1/2} (\mathrm{R}_\Lambda + \mathrm{R}^*_\Lambda) [1 + \lambda^2 \mathrm{D}_\Lambda \mathrm{D}^*_\Lambda]^{-1/2} ,$$

et où S est défini par (2.2.2).

Démonstration. — Si $\mathrm{X} \in \mathscr{C}_3$, $\mathrm{Y} \in \mathscr{C}_2$, $\mathrm{Z} \in \mathscr{C}_1$ sont tels que $\mathrm{XY} \in \mathscr{C}_1$, on pose

$$(4.2.2)\quad \Delta(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \det_3 (1 + \mathrm{X} + \mathrm{Y} + \mathrm{Z}) e^{\operatorname{Tr}\left\{ \mathrm{Z} - \frac{1}{2}(\mathrm{Y}+\mathrm{Z})^2 - \mathrm{X}(\mathrm{Y}+\mathrm{Z}) \right\}}$$

du théorème 4.1 de [*12*] on déduit alors par continuité

$$(4.2.3)\quad |\Delta(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})| \leq e^{e^{\frac{5}{4}}(\| \mathrm{XY} \|_1 + \| \mathrm{Z} \|_1) + \frac{1}{2} \| \mathrm{XY}^* \|_1} \\ .\ \det_3 (1 + \mathrm{O}^+_{\mathrm{X}})^{1/2} e^{-\operatorname{Tr}\left\{ \frac{1}{4}(\mathrm{XX}^*)^2 + \frac{1}{2} \mathrm{XX}^*(\mathrm{X} + \mathrm{X}^*) \right\}} .$$

Partant alors de l'inégalité (2.2.6), avec $\mathbf{K}_\Lambda$ mis pour K, avec (en omettant l'indice Λ)

$$(4.2.4)\quad \mathrm{I}^{(1)} = [1 + \lambda^2 \mathrm{DD}^*]^{-1/2} [\lambda^2 (\mathrm{DR}^* + \mathrm{RD}^* + \mathrm{RR}^*) + \mathrm{B} + \mathrm{B}' + \mathrm{BB}'] \\ [1 + \lambda^2 \mathrm{DD}^*]^{-1/2} ,$$

$$(4.2.5)\quad \mathrm{I}^{(2)} = [1 + \lambda^2 \mathrm{DD}^*]^{-1/2} \lambda (\mathbf{K}\mathrm{B}' + \mathrm{B}\mathbf{K}^*) [1 + \lambda^2 \mathrm{DD}^*]^{-1/2} ,$$

on a

(4.2.6) $D(\lambda\mathbf{K}, B)D(\lambda\mathbf{K}^*, B')$

$$= \det_2(1 + \lambda^2 DD^*)\Delta(\lambda A, \lambda Q, I^{(1)} + I^{(2)})e^{\operatorname{Tr} S(\lambda, D)} . e^{-\operatorname{Tr}\left\{\lambda^3[1+\lambda^2 DD^*]^{-1}DD^*(R+R^*)+\lambda^2\left(RD+R^*D^*+\frac{1}{2}D^2+\frac{1}{2}D^{*2}\right)\right\}} .$$

Or on a,

(4.2.7) $$|\det_2(1 + \lambda^2 DD^*)| \leq 1, \qquad \text{si} \quad |\operatorname{Arg}\lambda^2| \leq \frac{\pi}{4},$$

et

(4.2.8) $$\| I^{(1)} \|_1 \leq |\lambda|^2(2\| DR^* \|_1 + \| RR^* \|_1) + 3r,$$

puisque $\| [1 + \lambda^2 DD^*]^{-1/2} \| \leq 1$.

Ensuite,

(4.2.9) $$\begin{aligned} I^{(2)} = {} & ([1 + \lambda^2 \mathbf{KK}^*]^{-1/2}\lambda\mathbf{K})B'[1 + \lambda^2 DD^*]^{-1/2} \\ & + [1 + \lambda^2 DD^*]^{-1/2}B(\lambda\mathbf{K}[1 + \lambda^2\mathbf{KK}^*]^{-1/2}) \\ & + \{([1 + \lambda^2 DD^*]^{-1/2} - [1 + \lambda^2\mathbf{KK}^*]^{-1/2})\lambda\mathbf{K}\} B'[1 + \lambda^2 DD^*]^{-1/2} \\ & - [1 + \lambda^2 DD^*]^{-1/2}B\{\lambda\mathbf{K}^*([1 + \lambda^2\mathbf{KK}^*]^{-1/2} - [1 + \lambda^2 DD^*]^{-1/2})\} . \end{aligned}$$

D'après [*13*], (3.43), p. 282, on a pour tout $T \in L(\mathscr{H})$:

(4.2.10) $$[1+\lambda^2 TT^*]^{-1/2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty z^{-1/2}[1+z+\lambda^2 TT^*]^{-1}dz, \qquad \left(\text{si} \quad |\operatorname{Arg}\lambda^2| \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

or l'intégrale

(4.2.11) $$\begin{aligned} \mathscr{I} &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty z^{-1/2}\{[1+z+\lambda^2 DD^*]^{-1} - [1+z+\lambda^2\mathbf{KK}^*]^{-1}\}\lambda\mathbf{K}dz \\ &= \frac{\lambda^2}{\pi}\int_0^\infty z^{-1/2}[1+z+\lambda^2 DD^*]^{-1}(DR^*+RD^*+RR^*)([1+z+\lambda^2\mathbf{KK}^*]^{-1}\lambda\mathbf{K})dz \end{aligned}$$

converge dans $\mathscr{C}_1$, donc dans $L(\mathscr{H})$, donc d'après (4.2.10)

(4.2.12) $$([1 + \lambda^2 DD^*]^{-1/2} - [1 + \lambda^2\mathbf{KK}^*]^{-1/2})\lambda\mathbf{K} = \mathscr{I} \in \mathscr{C}_1,$$

et,

(4.2.13) $$\begin{aligned} \| ([1 + \lambda^2 DD^*]^{-1/2} - [1 + \lambda^2\mathbf{KK}^*]^{-1/2})\lambda\mathbf{K} \|_1 &= \| \mathscr{I} \|_1 \\ &\leq \frac{|\lambda|^2}{\pi}\| DR^* + RD^* + RR^* \|_1 \\ &\quad \sup_{u\geq 0}\| [1 + u + \lambda^2\mathbf{KK}^*]^{-1}\lambda\mathbf{K} \| \int_0^\infty z^{-1/2}(1 + z)^{-1}dz \\ &\leq |\lambda|^2(2\| DR^* \|_1 + \| RR^* \|_1), \end{aligned}$$

puisque $\| \lambda[1 + u + \lambda^2 |\mathbf{K}^*|^2]^{-1} |\mathbf{K}^*| \| \leq 1, \forall u \geq 0$.

De même

(4.2.14) $$\| \lambda\mathbf{K}^*([1 + \lambda^2\mathbf{KK}^*]^{-1/2} - [1 + \lambda^2 DD^*]^{-1/2}) \|_1 \leq |\lambda|^2(2\| DR^* \|_1 + \| RR^* \|_1).$$

D'après (4.2.13), (4.2.14) et, compte tenu de l'inégalité

$$\| \lambda[1 + \lambda^2 | \mathbf{K}^* |^2]^{-1/2} | \mathbf{K}^* | \| \leq 1 ,$$

on tire de (4.2.9)

$$\| \mathrm{I}^{(2)} \|_1 \leq 2[| \lambda |^2(2 \| \mathrm{DR}^* \|_1 + \| \mathrm{RR}^* \|_1) + r] . \tag{4.2.15}$$

Enfin,

$$| \mathrm{Tr}\, \lambda^3[1 + \lambda^2 \mathrm{DD}^*]^{-1}\mathrm{DD}^*(\mathrm{R} + \mathrm{R}^*) | \leq 2 | \lambda |^2 \| \mathrm{D}^* \mathrm{R} \|_1 \tag{4.2.16}$$

et (4.2.1) résulte de (2.2.6), (4.2.6), (4.2.3), (4.2.7), (4.2.8), (4.2.15) et (4.2.16) cqfd

4.3. Passant maintenant à la démonstration du théorème IV et posant $\mathrm{X}_\Lambda = [1 + \lambda^2 \mathrm{D}_\Lambda \mathrm{D}_\Lambda^*]^{-1/2}$, on remarque d'abord que

$$\chi_\beta \mathrm{X}_\Lambda = \mathrm{X}_\Lambda \chi_\beta , \qquad \forall \beta \in \mathscr{R} \tag{4.3.1}$$

donc, compte tenu de l'inégalité $\| \mathrm{X}_\Lambda \| \leq 1$,

$$\begin{aligned} \| \mathrm{A}_\Lambda \mathrm{Q}_\Lambda \|_1 &\leq \sum_{\substack{\alpha \in \underline{\Lambda} \\ (\beta,\gamma) \in \underline{\Lambda} \times \mathscr{R} \backslash (\alpha,\alpha)}} \| \mathrm{X}_\Lambda(\mathrm{D}_\beta + \mathrm{D}_\beta^*) \mathrm{X}_\Lambda^2 \chi_\beta (\mathbf{K}_\alpha + \mathbf{K}_\alpha^*) \chi_\gamma \mathrm{X}_\Lambda \|_1 \\ &\leq \sum_{\substack{\alpha \in \Lambda \\ (\beta,\gamma) \in \underline{\Lambda} \times \mathscr{R} \backslash (\alpha,\alpha)}} \| \mathrm{D}_\beta + \mathrm{D}_\beta^* \|_{\xi'} \, \| \chi_\beta (\mathbf{K}_\alpha + \mathbf{K}_\alpha^*) \chi_\gamma \|_\xi , \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

et,

$$\begin{aligned} \| \mathrm{Q}_\Lambda \|_2^2 & \\ &\leq \sum_{(\nu,\rho) \in \underline{\Lambda}^2} \sum_{\substack{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathscr{R}^3 \\ (\alpha,\beta) \neq (\nu,\nu) \\ (\beta,\gamma) \neq (\rho,\rho)}} \| \mathrm{X}_\Lambda^* \chi_\alpha (\mathbf{K}_\nu + \mathbf{K}_\nu^*) \chi_\beta | \mathrm{X}_\Lambda |^2 \chi_\beta (\mathbf{K}_\rho + \mathbf{K}_\rho^*) \chi_\gamma \mathrm{X}_\Lambda \|_1 \\ &\leq \sum_{(\nu,\rho) \in \underline{\Lambda}^2} \sum_{\substack{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathscr{R}^3 \\ (\alpha,\beta) \neq (\nu,\nu) \\ (\beta,\gamma) \neq (\rho,\rho)}} \| \chi_\alpha (\mathbf{K}_\nu + \mathbf{K}_\nu^*) \chi_\beta \|_2 \, \| \chi_\beta (\mathbf{K}_\rho + \mathbf{K}_\rho^*) \chi_\gamma \|_2 , \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

d'où l'on déduit (comme en [*12*], (5.16) et (5.18)), d'après (4.1.1), (4.1.2) :

$$\begin{aligned} \| \mathrm{A}_\Lambda \mathrm{Q}_\Lambda \|_1 & \\ &\leq 4 \sum_{\substack{(\alpha,\beta) \in \underline{\Lambda}^2 \\ \gamma \in \mathscr{R}}} e^{-d(|\alpha-\beta| + |\alpha-\gamma|)} \mathrm{F}_{(1)\beta}^{1/2} \mathrm{F}_{(2)\alpha}^{1/2} = 4b \sum_{(\alpha,\beta) \in \underline{\Lambda}^2} e^{-d|\alpha-\beta|} \mathrm{F}_{(1)\beta}^{1/2} \mathrm{F}_{(2)\alpha}^{1/2} \\ &\leq 4b^2 \Big(\sum_{\beta \in \underline{\Lambda}} \mathrm{F}_{(1)\beta} \Big)^{1/2} \Big(\sum_{\alpha \in \underline{\Lambda}} \mathrm{F}_{(2)\alpha} \Big)^{1/2} \leq 2b^2 \Big(\sum_{\alpha \in \underline{\Lambda}} \mathrm{F}_{(1)\alpha} + \mathrm{F}_{(2)\alpha} \Big), \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

et

$$(4.3.5)\quad \| Q_\Lambda \|_2^2 \leq 4 \sum_{\substack{(\nu,\rho)\in\underline{\Lambda}^2 \\ (\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{R}^3}} e^{-d(|\nu-\alpha|+|\nu-\beta|+|\rho-\beta|+|\rho-\gamma|)} F_{(2)\nu}^{1/2} F_{(2)\rho}^{1/2}$$

$$\leq 4b^2 \sum_{(\nu,\rho)\in\underline{\Lambda}^2} \Big(\sum_{\beta\in\mathscr{R}} e^{-d|\nu-\beta|} e^{-d|\beta-\rho|} \Big) F_{(2)\nu}^{1/2} F_{(2)\rho}^{1/2}$$

$$\leq 4b^4 \sum_{\alpha\in\underline{\Lambda}} F_{(2)\alpha},$$

$$\Big[\text{on a posé } b = \sum_{\gamma\in\mathscr{R}} e^{-d|\gamma-\gamma_0|},\ (\gamma_0 \in \mathscr{R})\Big].$$

On obtient de même

$$(4.3.6)\quad \max\{ \| D_\Lambda R_\Lambda \|_1, \| D_\Lambda^* R_\Lambda \|_1, \| D_\Lambda R_\Lambda^* \|_1, \| D_\Lambda^* R_\Lambda^* \|_1 \} \leq \frac{b^2}{2} \sum_{\alpha\in\underline{\Lambda}} (F_{(1)\alpha} + F_{(2)\alpha}),$$

et,

$$(4.3.7)\quad \| R_\Lambda \|_2^2 \leq b^4 \sum_{\alpha\in\underline{\Lambda}} F_{(2)\alpha}$$

Ensuite, (avec $X_\alpha = X_{\Delta_\alpha}$),

$$(4.3.8)\quad \chi_\alpha X_\Lambda = X_\alpha, \quad \text{si} \quad \alpha \in \underline{\Lambda},$$

donc $A_\Lambda = \sum_{\alpha\in\underline{\Lambda}} A_\alpha$ et $A_\alpha A_\beta = A_\beta A_\alpha$, $\forall \alpha, \beta \in \underline{\Lambda}$, donc

$$(4.3.9)\quad \det{}_3 (1 + O_{\lambda A_\Lambda}^+)^{1/4} e^{-\mathrm{Tr}\left\{\frac{|\lambda|^4}{8}(A_\Lambda A_\Lambda^*)^2 + \frac{|\lambda|^2}{4} A_\Lambda A_\Lambda^*(\lambda A_\Lambda + \bar\lambda A_\Lambda^*)\right\}}$$

$$= \prod_{\alpha\in\underline{\Lambda}} \det{}_3 (1 + O_{\lambda A_\alpha}^+)^{1/4} e^{-\mathrm{Tr}\left\{\frac{|\lambda|^4}{8}(A_\alpha A_\alpha^*)^2 + \frac{|\lambda|^2}{4} A_\alpha A_\alpha^*(\lambda A_\alpha + \bar\lambda A_\alpha^*)\right\}},$$

et d'autre part,

$$(4.3.10)\quad S(\lambda, D_\Lambda) = \sum_{\alpha\in\underline{\Lambda}} S(\lambda, D_\alpha).$$

Maintenant si l'on pose ([39])

$$(4.3.11)\quad U_\Lambda = \mathrm{Tr}^{\cdot} (\mathbf{K}_\Lambda + \mathbf{K}_\Lambda^*)^2 \equiv \lim_{\varkappa\to\infty} \Pi_2 \,\mathrm{Tr}\, (\mathbf{K}_{\Lambda,k_\varkappa} + \mathbf{K}_{\Lambda,k_\varkappa}^*)^2$$

([39]) Pour l'existence de ces limites (dans $\mathfrak{F}_2$) voir 2.6. [Comme dans ce paragraphe, $(k_\varkappa)_{\varkappa>0}$ est un échelon unité et Π_2 est le projecteur sur « l'espace à deux particules » $\mathfrak{F}_2$].

et

$$(4.3.12) \qquad \mathrm{V}_\alpha = \lim_{\varkappa \to \infty} \Pi_2 \operatorname{Tr} (\chi_\alpha[\mathbf{K}_{\alpha,k_\varkappa} + \mathbf{K}_{\alpha,k_\varkappa}]\chi_\alpha)^2 , \qquad \alpha \in \mathscr{R}$$

on a

$$(4.3.13) \quad \mathrm{U}_\Lambda = \sum_{\alpha \in \underline{\Lambda}} \mathrm{V}_\alpha + \Pi_2 \operatorname{Tr} \{ 2(\mathrm{D}_\Lambda + \mathrm{D}_\Lambda^*)(\mathrm{R}_\Lambda + \mathrm{R}_\Lambda^*) + (\mathrm{R}_\Lambda + \mathrm{R}_\Lambda^*)^2 \}$$

donc, d'après (4.3.6), (4.3.7) et (4.3.10)

$$(4.3.14) \quad | e^{\frac{1}{2}\operatorname{Tr} S(\lambda, D_\Lambda) - \frac{\lambda^2}{4} U_\Lambda} | \leq \prod_{\alpha \in \underline{\Lambda}} e^{|\lambda|^2\left(\frac{b^2}{2}\mathrm{E}_{\mu_m}[\mathrm{F}_{(1)\alpha}] + \left(\frac{b^2}{2} + b^4\right)\mathrm{E}_{\mu_m}[\mathrm{F}_{(2)\alpha}]\right)} \cdot e^{|\lambda|^2\left(\frac{b^2}{2}\mathrm{F}_{(1)\alpha} + \left(\frac{b^2}{2} + b^4\right)\mathrm{F}_{(2)\alpha}\right)} | e^{\frac{1}{2}\operatorname{Tr} S(\lambda, D_\alpha) - \frac{\lambda^2}{4} V_\alpha} | .$$

On a donc, d'après (4.2.1), (4.3.4), (4.3.5), (4.3.6), (4.3.7), (4.3.9) et (4.3.14) :

$$(4.3.15) \quad \| \Lambda^r([1 + \lambda \mathbf{K}_\Lambda]^{-1}) \det_{\mathrm{ren}} (1 + \lambda \mathbf{K}_\Lambda) \| \leq e^{\frac{5e^{5/4}}{2} r} e^{|\lambda|^2\left[\frac{1}{4}\mathrm{U}_\Lambda - \frac{1}{2}\operatorname{Tr}_{\mathrm{reg}}^{:} \mathbf{K}_\Lambda^2\right]} \prod_{\alpha \in \underline{\Lambda}} \mathrm{G}_\alpha(\lambda)$$

où pour chaque $\alpha \in \underline{\Lambda}$, $\mathrm{G}_\alpha(\lambda)$ est une fonction $\mathscr{A}_\alpha$-mesurable telle que — d'après la proposition 2 ([40]) et le lemme 4.1 — pour chaque $q \geq 1$, il existe $\tau_q > 0$ et $c_q > 0$ tels que

$$(4.3.16) \qquad \| \mathrm{G}_\alpha(\lambda) \|_q \leq c_q , \qquad \forall \alpha \in \underline{\Lambda} , \quad \forall \lambda \in \overline{\mathrm{D}\left(\frac{\pi}{8}, \tau_q\right)}$$

alors d'après « l'estimation du damier » ([*12*], théorème 1.1) pour tout $p \geq 1$,

$$(4.3.17) \quad \left\| \prod_{\alpha \in \underline{\Lambda}} \mathrm{G}_\alpha(\lambda) \right\|_p \leq c_q^{|\Lambda|}, \qquad \forall \lambda \in \overline{\mathrm{D}\left(\frac{\pi}{8}, \tau_q\right)}, \quad \text{si} \quad q = \frac{4p}{(1 - e^{-ml})^2} \ ^{(41)}$$

D'autre part ([*14*], lemme 2.1) pour chaque $p \geq 1$ il existe $c'_p > 0$ tel que :

$$(4.3.18) \qquad \left\| e^{|\lambda|^2\left[\frac{1}{4}\mathrm{U}_\Lambda - \frac{1}{2}\operatorname{Tr}_{\mathrm{reg}}^{:} \mathbf{K}_\Lambda^2\right]} \right\|_p \leq c_p'^{|\Lambda|} .$$

Le théorème IV résulte alors de (4.3.17) et (4.3.18), d'après l'inégalité de Hölder, en appliquant l'estimation du damier au facteur

$$e^{-\frac{\sigma^2}{2}\Phi_{\mu_m}^{:2:}(\Lambda)} = \prod_{\alpha \in \underline{\Lambda}} e^{-\frac{\sigma^2}{2}\Phi_{\mu_m}^{:2:}(\Delta_\alpha)} .$$

([40]) Ou plus précisément une variante évidente de cette proposition.

([41]) l est le pas du réseau.

APPENDICE A

COMPOSITIONS D'OPÉRATEURS SUR L'ESPACE ANTISYMÉTRIQUE ([42])

A.1. Soit $\mathscr{K}$ un espace hilbertien séparable, et, pour chaque $n \in \mathbf{N}$ $\mathscr{K}^{\otimes n}$ la n^{eme} puissance tensorielle antisymétrique hilbertienne de $\mathscr{K}$. On pose $\mathcal{O} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{L}(\mathscr{K}^{\otimes n})$. On définit une application bilinéaire de $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$, notée $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$, $(\mathrm{A} \in \mathcal{O}, \mathrm{B} \in \mathcal{O})$, en posant ([43])

$$(\text{A.1.1}) \quad (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B})\Big(\bigwedge_{j=1}^{p+q} \psi_j\Big) = \binom{p+q}{p}^{-1} \sum_{\tau \in \mathscr{I}_p^{p+q}} \eta(\tau)\Big(\mathrm{A} \bigwedge_{i=1}^{p} \psi_{\tau(i)}\Big) \wedge \Big(\mathrm{B} \bigwedge_{k=1}^{q} \psi_{\tau'(k)}\Big),$$

$$(\mathrm{A} \in \mathrm{L}(\mathscr{K}^{\otimes p})\,; \qquad \mathrm{B} \in \mathrm{L}(\mathscr{K}^{\otimes q})\,; \qquad \psi_j \in \mathscr{K}, j = 1, \ldots, p+q),$$

où $\mathscr{I}_p^{p+q}$ est l'ensemble des injections croissantes de $\mathrm{Z}_p = \{1, \ldots, p\}$ dans Z_{p+q}, et où, pour tout $\tau \in \mathscr{I}_p^{p+q}$,

$$\eta(\tau) = (-1)^{\sum_{i=1}^{p}(\tau(i) - i)} \qquad \text{et} \qquad \tau' \in \mathscr{I}_q^{p+q}$$

est défini par $\tau(\mathrm{Z}_p) \cup \tau'(\mathrm{Z}_q) = \mathrm{Z}_{p+q}$. On a d'abord,

LEMME. — *i*) On a pour tous $\mathrm{A} \in \mathrm{L}(\mathscr{K}^{\otimes p})$, $\mathrm{B} \in \mathrm{L}(\mathscr{K}^{\otimes q})$,

$$(\text{A.1.2}) \qquad \| \mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \| \leq \| \mathrm{A} \| \; \| \mathrm{B} \| .$$

ii) $(\mathcal{O}, \wedge)$ est une algèbre (graduée) associative et commutative.
iii) Si $\mathbf{1}_n \in \mathrm{L}(\mathscr{K}^{\otimes n})$ désigne l'identité, on a

$$(\text{A.1.3}) \qquad \mathbf{1}_p \wedge \mathbf{1}_q = \mathbf{1}_{p+q}, \qquad p \in \mathbf{N}, \quad q \in \mathbf{N}.$$

iv) Pour tous $\mathrm{A} \in \mathrm{L}(\mathscr{K}^{\otimes p})$, $\mathrm{B} \in \mathrm{L}(\mathscr{K}^{\otimes q})$, $\mathrm{C} \in \mathrm{L}(\mathscr{K})$, on a ([44])

$$(\text{A.1.4}) \qquad (\Lambda^p(\mathrm{C})\mathrm{A}) \wedge (\Lambda^q(\mathrm{C})\mathrm{B}) = \Lambda^{p+q}(\mathrm{C})(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}),$$

$$(\text{A.1.5}) \qquad (\mathrm{A}\Lambda^p(\mathrm{C})) \wedge (\mathrm{B}\Lambda^q(\mathrm{C})) = (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B})\Lambda^{p+q}(\mathrm{C}).$$

A.2. On définit les applications linéaires $\mathscr{M} : \mathrm{L}(\mathscr{K}) \to \mathscr{L}(\mathcal{O})$ et $\mathscr{C} : \mathrm{L}(\mathscr{K}) \to \mathscr{L}(\mathcal{O})$ par ([45])

$$(\text{A.2.1}) \qquad \mathscr{M}^{[\mathrm{A}]}\mathrm{B} = n(\mathrm{A} \wedge \mathbf{1}_{n-1}).\mathrm{B}, \qquad (\mathrm{A} \in \mathrm{L}(\mathscr{K}), \quad \mathrm{B} \in \mathrm{L}(\mathscr{K}^{\otimes n})),$$

et

$$(\text{A.2.2}) \qquad \mathscr{C}^{[\mathrm{A}]}\mathrm{B} = (n+1)\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}, \qquad (\mathrm{A} \in \mathrm{L}(\mathscr{K}), \quad \mathrm{B} \in \mathrm{L}(\mathscr{K}^{\otimes n})).$$

([42]) On renvoie, pour les démonstrations, à [*4*], Appendix.

([43]) Le second membre de (A.1.1) définit une application $p+q$-linéaire alternée de $\mathscr{K}^{p+q}$ dans $\mathscr{K}^{\otimes p+q}$ et la forme linéaire induite se prolonge par continuité à $\mathscr{K}^{\otimes p+q}$ [voir (A.1.2)].

([44]) $\Lambda^n(\mathrm{C}) \in \mathrm{L}(\mathscr{K}^{\otimes n})$ est défini en 1.8 ; on déduit de (A.1.3) et (A.1.4) que $\Lambda^n(\mathrm{C})$ est la puissance $n^{\text{ème}}$ de C pour la loi de composition $\wedge$.

([45]) Avec, pour $n = 0$, pour tous $\mathrm{A} \in \mathrm{L}(\mathscr{K})$, $\mathrm{B} \in \mathrm{L}(\mathscr{K}^{\otimes 0}) = \mathbb{C}$,

$$\mathscr{M}^{[\mathrm{A}]}\mathrm{B} = 0, \qquad \mathscr{C}^{[\mathrm{A}]}\mathrm{B} = \mathrm{BA}.$$

On a alors :

LEMME. — Pour tous $A_j \in L(\mathscr{K})$, $j = 1, 2$, on a ([46])

(A.2.3) $$\mathscr{C}^{[A_1]}\mathscr{C}^{[A_2]} - \mathscr{C}^{[A_2]}\mathscr{C}^{[A_1]} = 0,$$

(A.2.4) $$\mathscr{M}^{[A_1]}\mathscr{C}^{[A_2]} - \mathscr{C}^{[A_2]}\mathscr{M}^{[A_1]} = \mathscr{C}^{[A_1A_2]},$$

(A.2.5) $$\mathscr{M}^{[A_1]}\mathscr{M}^{[A_2]} - \mathscr{M}^{[A_2]}\mathscr{M}^{[A_1]} = \mathscr{M}^{[A_1A_2 - A_2A_1]}.$$

A.3. Pour chaque $n \in N$, on désigne par $\mathscr{C}_1^{(n)} \subset L(\mathscr{K}^{\otimes n})$ l'idéal des opérateurs à trace, $(\mathscr{C}_1^{(1)} = \mathscr{C}_1)$, on a,

LEMME. — *i*) Pour tous $A \in \mathscr{C}_1^{(p)}$, $B \in \mathscr{C}_1^{(q)}$, on a $A \wedge B \in \mathscr{C}_1^{(p+q)}$, et,

(A.3.1) $$\| A \wedge B \|_1 \leq \| A \|_1 \, \| B \|_1 .$$

ii) Si $A_j \in \mathscr{C}_1$, $j = 1, \ldots, n$, on a,

(A.3.2) $$\left\| \bigwedge_{j=1}^{n} A_j \right\|_1 \leq (n!)^{-1} \prod_{j=1}^{n} \| A_j \|_1 .$$

iii) Pour tous $A \in \mathscr{C}_1$, $B \in \mathscr{C}_1^{(n)}$, on a,

(A.3.3) $$\mathrm{Tr}\,\{ \mathscr{M}^{[A]}B \} + \mathrm{Tr}\,\{ \mathscr{C}^{[A]}B \} = \mathrm{Tr}\,A \,.\, \mathrm{Tr}\,B .$$

([46]) On n'utilisera que l'égalité (A.2.4).

RÉFÉRENCES

[*1*] E. SEILER, Schwinger functions for the Yukawa model in two dimensions with space time cut-off, *CMP*, t. **42**, 1975, p. 163.

[*2*] E. SEILER, B. SIMON, On finite mass renormalization in the two dimensional Yukawa model, *JMP*, t. **16**, 1975, p. 2289.

[*3*] J. MAGNEN, R. SENEOR, The Wightman axioms for the weakly coupled Yukawa model in two dimensions, ZIF univ. *preprint*.

[*4*] A. COOPER, L. ROSEN, *The weakly coupled Yukawa$_2$ field theory : cluster expension and Whightman axioms*, Toronto univ. preprint.

[*5*] O. MCBRYAN, Finite mass renormalizations in the Euclidean Yukawa$_2$ field theory, *CMP*, t. **44**, 1975, p. 237.

[*6*] B. SIMON, *Notes on infinite determinants of Hilbert space operators*, Princeton preprint.

[*7*] K. OSTERWALDER, R. SCHRADER, Axioms for Euclidean Green's functions, *CMP*, t. **31**, 1973, p. 83, *CMP*, t. **42**, 1975, p. 281.

[*8*] E. NELSON, The free Markov field, *Journ. funct. anal.*, t. **12**, 1973, p. 211.

[*9*] E. NELSON, *A quartic interaction in two dimensions, in Mathematical theory of elementary particles*, R. Goodmann and I. Segal, ed., MIT press, 1966, p. 69.

[*10*] J. GLIMM, A. JAFFE, *Quantum field theory models, in Statistical mechanics and quantum field theory*, C. de Witt and R. Stora, ed., Gordon and Breach, 1971, p. 1.

[*11*] G. H. HARDY, *Divergent series*, Oxford univ. press, 1973.

[*12*] E. SEILER, B. SIMON, Bounds in the Yukawa$_2$ quantum field theory : upper bound on the pressure, Hamiltonian bound and linear lower bound, *CMP*, t. **45**, 1975, p. 99.

[*13*] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*. Springer, 1966.

[14] O. McBryan, Volume dependance of Schwinger functions in the Yukawa$_2$ quantum field theory, *CMP*, t. **45**, 1975, p. 279.
[15] J. Dimock, Asymptotic perturbation expansion in the $P(\varphi)_2$ quantum field theory, *CMP*, t. **35**, 1974, p. 347.
[16] J. P. Eckmann, J. Magnen, R. Seneor, Decay properties and Borel summability for the Schwinger functions in $P(\varphi)_2$ theories, *CMP*, t. **39**, 1975, p. 251.
[17] J. Magnen, R. Seneor, *La sommabilité de Borel de la série des perturbations du modèle φ_3^4 euclidien*, in J. Magnen, thèse, Orsay, 1976.
[18] M. Schreiber, Fermeture en probabilité de certains sous-espaces d'un espace L^2, *Wahrscheinlichkeitstheorie Verw.*, t. **14**, 1969, p. 14.

(Manuscrit reçu le 26 novembre 1976).