ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

M. BRAY

Espaces-temps non vides à métrique de Taub en relativité générale

Annales de l'I. H. P., section A, tome 27, nº 2 (1977), p. 193-206
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1977__27_2_193_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XXVII, n° 2, 1977, p. 193 à 206. *Physique théorique.*

Espaces-temps non vides à métrique de Taub en relativité générale

par

M. BRAY

C. N. R. S.

ABSTRACT. — Exact solutions of the Einstein gravitational field equations are derived in the following conditions: Taub's metric, pure radiation field source-tensor. It is shown that such solutions cannot represent neutrino fields. Exact solutions for more general source-tensors are given.

I. INTRODUCTION

L'élément de ligne à symétrie plane de Taub (1) s'écrit

$$ds^2 = e^{2\alpha}[(dx^0)^2 - (dx^1)^2] - e^{2\gamma}[(dx^2)^2 + (dx^3)^2] \quad ; \quad \alpha,\ \gamma(x^0, x^1)$$

Le présent article se propose d'intégrer le système des équations de champ d'Einstein $R_{\alpha\beta} = \chi\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T\right) + \Lambda g_{\alpha\beta}$; $\chi > 0$ correspondant à une telle métrique lorsque $T_{\alpha\beta}$ décrit un champ de radiation pure, puis dans des hypothèses plus générales (2).

Le tenseur de Ricci

$$R_{\alpha\beta} = R^{\nu}{}_{\alpha\beta\nu} = -\,\partial_\beta(\Gamma_\alpha{}^\nu{}_\nu) + \partial_\nu(\Gamma_\alpha{}^\nu{}_\beta) - \Gamma_\alpha{}^\rho{}_\nu\Gamma_\rho{}^\nu{}_\beta + \Gamma_\alpha{}^\rho{}_\beta\Gamma_\rho{}^\nu{}_\nu$$

a pour seules composantes non nulles R_{00}, R_{11}, $R_{22} = R_{33}$, R_{01}.

(1) A. TAUB, Empty space-times admitting a three parameter group of motions, *Ann. Math.*, t. **53**, p. 472-490.

(2) T. SINGH, A plane symmetric solution of Einstein's field equations of General Relativity containing zero-rest-mass scalar fields, *GRG*, t. **5**, n° 6, 1974, p. 657-662.

II. LE SCHÉMA RADIATION PURE

Un champ de radiation pure est décrit par un tenseur d'impulsion-énergie $T_{\alpha\beta} = \sigma k_\alpha k_\beta$, σ étant un scalaire positif et $\vec{k}$ un vecteur nul réel. Les équations d'Einstein exigent $k_2 = k_3 = 0$; $k^\alpha k_\alpha = 0$ impose alors la condition $k_0^2 = k_1^2$. Nous écrirons $k_1 = \varepsilon k_0$, $\varepsilon = \pm 1$. Le système à intégrer se compose des quatre relations

$$-\gamma_{00} - \gamma_0^2 + 2\alpha_0\gamma_0 - \gamma_{11} - \gamma_1^2 + 2\alpha_1\gamma_1 = \chi\sigma k_0^2 \tag{1}$$

$$\alpha_{00} - \gamma_0^2 = \alpha_{11} - \gamma_1^2 \tag{2}$$

$$-\gamma_{00} - 2\gamma_0^2 + \gamma_{11} + 2\gamma_1^2 = \Lambda e^{2\alpha} \tag{3}$$

$$-\gamma_{00} - \gamma_0^2 + 2\alpha_0\gamma_0 - \gamma_{11} - \gamma_1^2 + 2\alpha_1\gamma_1 = 2\varepsilon[-\gamma_{01} - \gamma_0\gamma_1 + \alpha_0\gamma_1 + \alpha_1\gamma_0] \tag{4}$$

$$\alpha_0 \equiv \partial_0(\alpha) \ldots$$

Les solutions statiques ou du type de Ricci sont interdites par (1) et (4) ($k_0 = 0$).

En variables séparées, le choix $\gamma_0 = \Lambda = 0$ conduit aisément à la solution

$$\gamma = \frac{1}{2}\log(2x^1 + a) + b \quad ; \quad \alpha = \varepsilon m(x^1 + \varepsilon x^0) - \frac{1}{4}\log(2x^1 + a) + \text{cte} ;$$

$$a,\ b,\ m\ ;\ \text{ctes}$$

$$\chi\sigma k_0^2 = 2m\varepsilon/(2x^1 + a)$$

Si $(2x^1 + a)$ est toujours > 0, ceci exige $m\varepsilon > 0$. La solution se réduit à la solution statique de Taub si $m \to 0$.

Le cas similaire $\alpha_0 = \Lambda = 0$ menant à l'impossibilité $k_0^2 < 0$, nous cherchons en premier lieu, pour le système général, des expressions α et γ linéaires : $\alpha_0 = m$, $\gamma_0 = n$, $\alpha_1 = p$, $\gamma_1 = q$. Il vient $a = -n^2$; $b = 2n^2$; $q^2 = n^2$; $-n^2 + 2mn - n^2 + 2pq = 2\varepsilon[-nq + mq + np]$. Chaque membre de la dernière équation doit en outre être positif.

Si $q = n$, $n(m - n + p)(1 - \varepsilon) = 0$; $n \neq 0$, sinon $k_0 = 0$, donc $(m - n + p)(1 - \varepsilon) = 0$. On ne peut avoir $m - n + p = 0$; il faut prendre $\varepsilon = 1$.

Le choix $q = -n$ demanderait $\varepsilon = -1$. Nous obtenons

$$\left\{\begin{array}{l} a)\ \gamma = n(x^0 + x^1) \quad ; \quad \alpha = mx^0 + px^1 \quad ; \quad n(m - n + p) > 0 ; \\ \qquad\qquad \chi\sigma k_0^2 = 2n(m - n + p) \\ b)\ \gamma = n(x^0 - x^1) \quad ; \quad \alpha = mx^0 + px^1 \quad ; \quad n(m - n - p) > 0 ; \\ \qquad\qquad \chi\sigma k_0^2 = 2n(m - n - p) \end{array}\right.$$

Les équations (2) et (3) du système d'Einstein fournissent, en variables séparées, les relations

$$\alpha_{00} - \gamma_0^2 = a = \alpha_{11} - \gamma_1^2 \quad ; \quad \gamma_{00} + 2\gamma_0^2 = b = \gamma_{11} + 2\gamma_1^2 \qquad \text{(on a posé } \Lambda = 0\text{)}$$

On en déduit

$$2\alpha = C(x^0)^2 + dx^0 + f + C(x^1)^2 + gx^1 + h - \gamma \quad ;$$

$$C,\ d,\ f,\ g,\ h : \text{ctes} \quad ; \quad 2a + b = 2C$$

$$2\gamma = \begin{cases} \log[\operatorname{ch} 2n(x^0 - A) . \operatorname{ch} 2n(x^1 - B)] & \text{si } b = 2n^2 \quad ; \quad A,\ B : \text{ctes} \\ \log(|\cos 2n(x^0 - A)| \ . \ |\cos 2n(x^1 - B)|) & \text{si } b = -2n^2 \end{cases}$$

Ces expressions doivent satisfaire (4). Posant $C = 0$, $\gamma_0 = n$, il vient $b = 2n^2$, $a = -n^2$, $\alpha_0 = m$, $2m = d - n$.

Il suffit alors de prendre $g = \varepsilon(d - 4n) = \varepsilon(2m - 3n)$ $(\neq 0)$.

Dans ces conditions

$$\gamma_1 = \frac{n \operatorname{sh} 2n(x^1 - B)}{\operatorname{ch} 2n(x^1 - B)} \quad ; \quad \chi\sigma k_0^2 = (dn - 4n^2)\left[1 + \frac{\varepsilon \operatorname{sh} 2n(x^1 - B)}{\operatorname{ch} 2n(x^1 - B)}\right]$$

Soit

$$\chi\sigma k_0^2 = n(d - 4n)\left[\frac{e^{\theta}(1 + \varepsilon) + e^{-\theta}(1 - \varepsilon)}{2 \operatorname{ch} \theta}\right] \qquad \text{avec} \qquad \theta \equiv 2n(x^1 - B)$$

La condition de positivité se réduit à $n(d - 4n) > 0$. D'où la solution

$$2\gamma = 2nx^0 + \log[\operatorname{ch} \theta] + \text{cte} \quad ; \quad 2\alpha = 2mx^0 + gx^1 - \frac{1}{2}\log[\operatorname{ch} \theta] + \text{cte}$$

$$n(2m - 3n) > 0 \quad ; \quad g = \varepsilon(2m - 3n)$$

Si l'on pose $C = 0$, $\gamma_1 = n$, une solution similaire à la précédente apparaît par l'échange $x^0 \rightleftarrows x^1$.

La norme du champ gravitationnel définie par l'invariant

$$4\mathscr{K} \equiv (R^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu})$$

s'écrit, en vertu des équations d'Einstein :

$$\mathscr{K} = e^{-4\alpha} \langle 2(\alpha_{11} - \alpha_{00})^2 + (\gamma_0^2 - \gamma_1^2)^2 \rangle$$

Le premier type de solution ($\Lambda = 0$, $\gamma_0 = 0$, $\alpha_0 = m$) a donc pour seule singularité essentielle $2x^1 + a = 0$. $\mathscr{K}$ s'annule pour les solutions linéaires. Le dernier groupe de solutions ($\Lambda = 0$, $C = 0$, $\gamma_0 = n$) nous donne

$$\mathscr{K} = 3n^4 e^{-4\alpha} (\operatorname{ch} \theta)^{-4} ;$$

il n'y a par conséquent aucune singularité essentielle.

Les équations de conservation $\nabla_\beta(T^{\alpha\beta}) = 0 \rightleftarrows k^\beta \nabla_\beta(k^\alpha) = \phi k^\alpha$ avec $\phi = -\frac{1}{\sigma} \nabla_\beta(\sigma k^\beta)$ montrent que les trajectoires de $\vec{k}$ sont autoparallèles. On peut toujours prendre un paramètre affine v tel que $k^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{dv}$ satisfasse $k^\beta \nabla_\beta(k^\alpha) = 0$.

Soit $k^\nu \{ \zeta, \zeta, 0, 0 \}$; l'équation des géodésiques nulles fournit l'unique relation

$$\partial_0(\zeta) + \partial_1(\zeta) + 2\zeta(\alpha_0 + \alpha_1) = 0$$

En variables séparées ∂_0 (log ζ)$+2\alpha_0=$N; ∂_1 (log ζ)$+2\alpha_1=-$N, N : cte

$$\zeta = \mathscr{A} e^{-2\alpha+\mathrm{N}(x^0-x^1)} \quad , \quad \mathscr{A} : \text{cte}$$

La nullité de ϕ, $\nabla_\beta(\sigma k^\beta) = 0$ entraîne, compte tenu de l'équation de ζ

$$\partial_0 \; (\log \sigma) + \partial_1 \; (\log \sigma) + 2(\gamma_0 + \gamma_1) = 0$$

d'où

$$\sigma = \mathscr{B} e^{\mathrm{M}(x^0-x^1)-2\gamma}, \; \mathrm{M}, \; \mathscr{B} : \text{ctes.}$$

Donc

$$\chi\sigma k_0^2 = \chi \mathscr{B} \mathscr{A}^2 e^{(\mathrm{M}+2\mathrm{N})(x^0-x^1)-2\gamma}$$

Considérons par exemple la première classe de solutions ($\Lambda = 0$, $\gamma_0 = 0$, $\alpha_0 = m$), il vient

$$2\varepsilon m = \chi \mathscr{B} \mathscr{A}^2 e^{(\mathrm{M}+2\mathrm{N})(x^0-x^1)}$$

en prenant

$$2\gamma = \log \Delta \quad , \quad \Delta \equiv (2x^1 + a)$$

Nécessairement $\mathrm{M} + 2\mathrm{N} = 0 \to 2\varepsilon m = \chi \mathscr{B} \mathscr{A}^2$; $\sigma = \frac{\mathscr{B}}{\Delta} e^{\mathrm{M}(x^0-x^1)}$. $\mathscr{B}\Delta$ doit être > 0. $\mathscr{B}$ a le signe de εm.

En étudiant la congruence des géodésiques nulles trajectoires de $\vec{k}$, nous trouvons

$$2\tilde{\theta} \equiv \nabla_\nu(k^\nu) = 2\zeta(\gamma_0 + \gamma_1) \; ;$$

$$\tilde{\omega}_{\alpha\beta} \equiv \nabla_{[\alpha} k_{\beta]} \to \tilde{\omega}_{01} = -\frac{\zeta}{2} e^{2\alpha}[\partial_0 \; (\log \zeta) + \partial_1 \; (\log \zeta) + 2(\alpha_0 + \alpha_1)]$$

$\tilde{\omega}_{01} = 0$ en vertu de l'équation en ζ; toutes les autres composantes étant nulles, $2\tilde{\omega}^2 \equiv k_{[\alpha;\beta]} k^{[\alpha;\beta]} = 0$.

Le calcul des quantités $k_{(\alpha;\beta)}$ permet d'évaluer l'invariant $k_{(\alpha;\beta)} k^{(\alpha;\beta)}$, soit $2\zeta^2(\gamma_0 + \gamma_1)^2$. Donc $\tilde{\sigma}^2 \equiv \frac{1}{2} k_{(\alpha;\beta)} k^{(\alpha;\beta)} - \tilde{\theta}^2 = 0$. La congruence est donc shear and twist-free ([3]).

Nous introduisons maintenant la tétrade canonique

$$k^\alpha \{ \zeta, \zeta, 0, 0 \} \quad ; \quad n^\alpha \left\{ \frac{e^{-2\alpha}}{2\zeta}, \frac{-e^{-2\alpha}}{2\zeta}, 0, 0 \right\} \quad ; \quad m^\alpha \left\{ 0, 0, \frac{e^{-\gamma}}{\sqrt{2}}, \frac{ie^{-\gamma}}{\sqrt{2}} \right\} ;$$
$$\overline{m}^\alpha \left\{ 0, 0, \frac{e^{-\gamma}}{\sqrt{2}}, \frac{-ie^{-\gamma}}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Les vecteurs $\vec{k}$, $\vec{n}$, $\vec{m}$, $\vec{\overline{m}}$ satisfont les conditions normatives $k^\alpha k_\alpha = 0$; $n^\alpha n_\alpha = 0$; $m^\alpha m_\alpha = 0$; $\overline{m}^\alpha \overline{m}_\alpha = 0$; $k_\alpha n^\alpha = 1$; $k_\alpha m^\alpha = 0$; $k_\alpha \overline{m}^\alpha = 0$; $n_\alpha m^\alpha = 0$; $n_\alpha \overline{m}^\alpha = 0$; $m_\alpha \overline{m}^\alpha = -1$.

([3]) R. K. SACHS, *Proceedings of the Royal Society*, t. **264**, p. 309-338. Gravitational Waves in General Relativity. VI. The outgoing radiation condition.

La métrique est liée à ces vecteurs par les relations $g_{\alpha\beta} = 2k_{(\alpha}n_{\beta)} - 2m_{(\alpha}\overline{m}_{\beta)}$. Quant au tenseur $S^{\alpha\beta} = 2k^{[\alpha}m^{\beta]}$, il a pour composantes $S^{01} = 0$; $S^{02} = 2^{-1/2}e^{-\gamma}\zeta$; $S^{03} = i2^{-1/2}e^{-\gamma}\zeta$; $S^{23} = 0$; $S^{31} = -\,i2^{-1/2}e^{-\gamma}\zeta$; $S^{12} = 2^{-1/2}e^{-\gamma}\zeta$.

L'équation de Newing-Griffiths du neutrino à deux composantes s'écrit alors

$$\nabla_\beta(S^{\alpha\beta}) = m^\beta k_{\beta;\nu}g^{\alpha\nu} \text{ (4)}$$

Les relations d'indices 0 et 1 sont des identités; celles d'indices 2 et 3, identiques entre elles donnent $\zeta(\gamma_0 + \gamma_1) = 0$, soit $(\gamma_0 + \gamma_1) = 0$ puisque ζ doit être $\neq 0$.

Toute solution telle que $(\gamma_0 + \gamma_1) = 0$ satisferait donc les équations du neutrino. Pour une telle solution $\tilde{\theta}=0$ et les trois scalaires optiques sont nuls.

Pour exprimer le tenseur d'impulsion-énergie en termes de tétrade, nous devons calculer les coefficients de spin de Newman-Penrose suivants :

$$\tilde{\varkappa} = k_{\alpha;\beta}m^\alpha k^\beta \quad ; \quad \tilde{\rho} = k_{\alpha;\beta}m^\alpha\overline{m}^\beta \quad ; \quad \tilde{\sigma} = k_{\alpha;\beta}m^\alpha m^\beta \quad ; \quad \tilde{\tau} = k_{\alpha;\beta}m^\alpha n^\beta$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2}(k_{\alpha;\beta}n^\alpha\overline{m}^\beta - m_{\alpha;\beta}\overline{m}^\alpha\overline{m}^\beta) \quad ; \quad \tilde{\gamma} = \frac{1}{2}(k_{\alpha;\beta}n^\alpha n^\beta - m_{\alpha;\beta}\overline{m}^\alpha m^\beta)$$

$$\tilde{A} = i(\tilde{\gamma} - \overline{\tilde{\gamma}}) \quad ; \quad \tilde{B} = i(\tilde{\alpha} - 2\overline{\tilde{\tau}}) \quad ; \quad \tilde{\omega} = \mathrm{I}m(\tilde{\rho})$$

Tous les coefficients sont nuls, de sorte que l'expression

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} = 2\,\{ & -\tilde{A}k_\alpha k_\beta + \tilde{B}k_{(\alpha}m_{\beta)} + \overline{\tilde{B}}k_{(\alpha}\overline{m}_{\beta)} + 2\tilde{\omega}k_{(\alpha}n_{\beta)} + 2\tilde{\omega}m_{(\alpha}\overline{m}_{\beta)} \\ & + i\overline{\tilde{\sigma}}m_\alpha m_\beta - i\tilde{\sigma}\overline{m}_\alpha\overline{m}_\beta + i\tilde{\varkappa}n_{(\alpha}\overline{m}_{\beta)} - i\overline{\tilde{\varkappa}}n_{(\alpha}m_{\beta)}\,\} \end{aligned}$$

est identiquement nulle. Ceci nous ramène au cas du vide et demande

$$\sigma = 0 \rightarrow \mathscr{B} = 0$$

Or la solution se présente sous la forme

$$\alpha = \mathrm{M}[(x^0)^2 + (x^1)^2] + \mathrm{L}x^0 + \mathrm{Q}x^1 + \text{cte} \quad ; \quad \gamma = \mathrm{N}(x^1 - x^0) + \text{cte} \; ;$$

$$\mathrm{M, L, Q, N} : \text{ctes}$$

$$\zeta = \mathscr{A}e^{-2\alpha + \mathscr{N}(x^0 - x^1)} \; ; \; \sigma = \mathscr{B}e^{\mathscr{M}(x^0 - x^1) - 2\gamma} \; ; \; \chi\sigma k_0^2 = \chi\mathscr{B}\mathscr{A}^2 e^{(\mathscr{M} + 2\mathscr{N} + 2\mathrm{N})(x^0 - x^1)}$$

et l'équation (1) s'écrit

$$2\mathrm{N}\,\langle\, 2\mathrm{M}(x^1 - x^0) + \mathrm{Q} - \mathrm{L} - \mathrm{N}\,\rangle = \chi\mathscr{B}\mathscr{A}^2 e^{(\mathscr{M} + 2\mathscr{N} + 2\mathrm{N})(x^0 - x^1)}$$

Puisque $\mathscr{B} = 0$, nous devons poser $\mathrm{M} = 0$; il reste $\mathrm{N}(\mathrm{Q} - \mathrm{L} - \mathrm{N}) = 0$.

Or toutes les composantes non nulles du tenseur de courbure, savoir R_{0202}, R_{0212}, R_{0303}, R_{0331}, R_{3131}, R_{1212} sont égales au signe près à $e^{2\gamma}\mathrm{N}(\alpha_1 - \alpha_0 - \mathrm{N})$.

Elles s'annulent donc; le champ gravitationnel disparaît et l'espace-temps

(4) B. Kuchowicz, Neutrinos in General Relativity: Four (?) levels of Approach, *GRG*, t. **5**, n° 2, 1974, p. 201-234.

est « plat ». Nous voyons donc que, dans les conditions considérées, les équations d'Einstein et l'équation de Dirac généralisée ne peuvent être satisfaites simultanément. Les solutions indiquées ne peuvent pas décrire le champ du neutrino (même si l'on admet qu'un tel champ peut correspondre à un tenseur $T_{\alpha\beta}$ nul).

III. LE SCHÉMA MATIÈRE PURE RADIATION

On porte dans les équations d'Einstein le tenseur $T_{\alpha\beta} = \rho U_\alpha U_\beta + \sigma k_\alpha k_\beta$; $U^\alpha U_\alpha = 1$, $k^\alpha k_\alpha = 0$ avec $U_2 = U_3 = k_2 = k_3 = 0$, $\Lambda = 0$.

Le système est alors

$$R_{00} = \chi \left\langle \rho U_0^2 + \sigma k_0^2 - \frac{\rho}{2} e^{2\alpha} \right\rangle \quad ; \quad \alpha_{00} + \gamma_{00} + \gamma_0^2 = \alpha_{11} + \gamma_{11} + \gamma_1^2$$

$$\chi\rho = 2e^{-2\alpha} \langle \gamma_{00} + 2\gamma_0^2 - \gamma_{11} - 2\gamma_1^2 \rangle \quad ; \quad R_{01} = \chi \langle \rho U_0 U_1 + \sigma k_0 k_1 \rangle ;$$

$$U_0^2 - U_1^2 = e^{2\alpha} \quad ; \quad k_1^2 = k_0^2$$

Nous étudierons d'abord les solutions indépendantes du temps en posant

$$U_0 = e^\alpha \operatorname{ch} \phi \quad ; \quad U_1 = e^\alpha \operatorname{sh} \phi \quad ; \quad k_1 = - k_0.$$

Les équations se réduisent aux suivantes

$$- 2\gamma_{11} - 3\gamma_1^2 + 2\alpha_1\gamma_1 = \chi \langle \rho U_0^2 + \sigma k_0^2 \rangle \quad ; \quad \alpha_{11} + \gamma_{11} + \gamma_1^2 = 0$$

$$\chi\rho e^{2\alpha} = - 2 \langle \gamma_{11} + 2\gamma_1^2 \rangle \quad ; \quad \rho U_0 U_1 + \sigma k_0 k_1 = 0 \quad ; \quad k_1 = - k_0$$

Le choix $k^1 = Ce^{-2\alpha}$, C : cte $\to k_0 = - k_1 = C$ entraîne $k^\beta \nabla_\beta(k^\alpha) = 0$. Dans ce cas $k_\alpha = \nabla_\alpha(S)$ avec $S = C(x^0 - x^1)$; il en résulte $\nabla_{[\alpha} k_{\beta]} = 0$. D'autre part

$$2\tilde{\theta} \equiv \nabla_\nu(k^\nu) = 2Ce^{-2\alpha}\gamma_1 \to \tilde{\theta} \neq 0$$

et

$$k_{(\alpha;\beta)} k^{(\alpha;\beta)} = 2C^2 e^{-4\alpha} \gamma_1^2 ;$$

donc

$$\tilde{\sigma}^2 \equiv \frac{1}{2} k_{(\alpha;\beta)} k^{(\alpha;\beta)} - \tilde{\theta}^2 = 0$$

La congruence des géodésiques nulles trajectoires de $\vec{k}$ est encore shear and twist-free.

D'autre part $C^2\sigma = \rho U_0 U_1$, on en tire $e^{2\phi} = (\gamma_{11} + \gamma_1^2 - 2\alpha_1\gamma_1)/(\gamma_{11} + 2\gamma_1^2)$ et l'on vérifie que l'unique équation de conservation

$$\partial_1 \langle \sqrt{-g}(\rho e^{-2\alpha+2\phi} - \rho e^{-2\alpha}) \rangle + 2\sqrt{-g}\alpha_1(\rho e^{-2\alpha+2\phi}) = 0$$

est bien une conséquence des équations d'Einstein. Une des fonctions α, γ peut être choisie arbitrairement sous réserve de satisfaire les conditions de positivité $\rho > 0$, $e^{2\phi} > 0$, $\sigma > 0$.

Prenons par exemple $\gamma_{11} = - n\gamma_1^2$, n : cte > 2; il vient

$$e^{2\gamma} = (x^1 - a)^{n} e^{\overset{*}{2}2\gamma_0} \quad ; \quad e^{2\alpha} = e^{2bx^1}(x^1 - a)^{\frac{-2(n-1)}{n^2}} \quad ; \quad a, b, \overset{*}{\gamma}_0 : \text{ctes}$$

$$\chi\rho = \frac{2(n-2)}{n^2} e^{-2bx^1}(x^1 - a)^{-2\frac{(n^2-n+1)}{n^2}} ;$$

$$e^{2\phi} = \frac{(n-1)(n-2) + 2bn^2(x^1 - a)}{n(n-2)}$$

La relation $\rho U_0 U_1 = \sigma k_0^2$ exige sh $\phi > 0 \rightleftharpoons$ sh $2\phi > 0$. $e^{2\phi}$ devant être > 0, la condition se réduit à $\gamma_1^2 + 2\alpha_1\gamma_1 > 0$, soit

$$(x^1 - a) > \left(\frac{n-2}{2bn^2}\right)$$

Avec $b > 0$, cette condition est suffisante. On trouve ensuite

$$\chi\sigma = \frac{-(2n-1)(n-2)^2 + [2bn^2(x^1-a)][2(n-1)(n-2)] + 4b^2n^4(x^1-a)^2}{2c^2n^3(x^1-a)^2[(n-1)(n-2) + 2bn^2(x^1-a)]}$$

L'invariant

$$\mathscr{K} = \frac{1}{4}(R^{\alpha\beta\mu\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu})$$

$$= \frac{e^{-4bx^1}}{n^4} \Delta^{-\frac{4}{n^2}(n^2-n+1)} \left\langle \left[\frac{(1-n)(2-n) + 2bn^2\Delta}{n}\right]^2 + 1 + 2(1-n)^2 \right\rangle$$

met en évidence l'unique singularité essentielle $x^1 = a$ $(\Delta \equiv (x^1 - a))$. Quant à l'équation de Newing-Griffiths écrite dans la tétrade du paragraphe II, elle fournit la relation $\gamma_1 = 0$ évidemment à rejeter.

Construites à l'aide de techniques analogues les solutions de Ricci apparaissent aisément. Nous avons maintenant

$$e^{2\phi} = \left(-\gamma_{00} - \gamma_0^2 + 2\alpha_0\gamma_0\right)/\left(\gamma_{00} + 2\gamma_0^2\right)$$

Exemple. — $\alpha_0 = n \rightarrow \gamma_{00} + \gamma_0^2 = 0$, d'où

$$e^{2\gamma} = \Delta^2 \quad ; \quad e^{2\alpha} = e^{2(nx^0+l)} \quad ; \quad \chi\rho = e^{-2nx^0}\left(\frac{K}{\Delta}\right)^2$$

avec

$$l = 0 \quad ; \quad L, n, K : \text{ctes} \quad ; \quad \Delta \equiv (Kx^0 + L)$$

$$\chi\sigma = \frac{K}{8c^2n}\left(\frac{4n^2\Delta^2 - K^2}{\Delta^3}\right)$$

L'unique condition restrictive est $\sigma > 0$. En prenant $Kn > 0$, K, L, $x^0 > 0$ on doit avoir $4n^2\Delta^2 > K^2$. Cette condition sera toujours satisfaite si $4n^2L^2 > K^2$. Ici encore les équations de conservation sont identiquement satisfaites en vertu des équations d'Einstein, la congruence $\vec{k}$ est shear and twist-free et l'équation du neutrino $\gamma_0 = 0$ ne peut être satisfaite.

Cherchons à présent quelques solutions mixtes en posant $\alpha_0 = \gamma_1 = 0$. Comme précédemment $U_0 = e^\alpha \operatorname{ch} \phi$, $U_1 = e^\alpha \operatorname{sh} \phi$, $k_1 = - k_0$. Nous choisirons $k_0 = C$, ce qui entraîne $k^\beta \nabla_\beta(k^\alpha) = 0$. Les équations sont

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma_{00}+\gamma_0^2=K \quad ; \quad \alpha_{11}=K \quad ; \quad \chi\rho e^{2\alpha}=2(K+\gamma_0^2) \quad ; \quad e^{2\phi}=\left(\dfrac{2\gamma_0\alpha_1-K}{\gamma_0^2+K}\right) \\ \chi\sigma k_0^2=(K+\gamma_0^2)\operatorname{sh} 2\phi-2\gamma_0\alpha_1 . \end{array}\right.$$

K ne peut être positif (ceci entraîne $\sigma < 0$ en vertu de $e^{2\phi} > 0$). Prenons $K = - n^2$, il vient

$$e^{2\gamma} = \cos^2 \Psi \quad ; \quad e^{2\alpha} = e^{-(nx^1)^2+mx^1+l} \quad ; \quad \chi\rho = 2n^2 e^{(nx^1)^2-mx^1-l}(\operatorname{tg}^2 \Psi - 1)$$
$$\Psi \equiv n(x^0 - a) \quad ; \quad a, n, m, l : \text{ctes}$$

puis

$$\chi\sigma = \left(\frac{\gamma_0}{c}\right)^2 \left\langle \frac{2n^2 - 4\alpha_1^2 - \gamma_0^2}{2(2\gamma_0\alpha_1 + n^2)} \right\rangle$$

Supposant $\gamma_0^2 - n^2 > 0$, on doit avoir $2\gamma_0\alpha_1 + n^2 > 0$ ($e^{2\varphi} > 0$); il faut en outre $2n^2 - 4\alpha_1^2 - \gamma_0^2 > 0$ ($\sigma > 0$). Observant l'équivalence des conditions $\gamma_0^2 > n^2$ et $\operatorname{tg}^2 \Psi > 1$ ($\rho > 0$), nous prendrons

$$\frac{\pi}{4} < \Psi < \frac{\pi}{2} \quad , \quad 2\gamma_0\alpha_1 + n^2 > 0 \rightarrow (n \operatorname{tg} \Psi)(2n^2x^1 - m) + n^2 > 0$$

Avec $\operatorname{tg} \Psi > 1$, l'inégalité sera satisfaite si elle l'est pour $\operatorname{tg} \Psi = 1$, soit

$$n(2n^2x^1 - m) + n^2 > 0.$$

Pour $n > 0$, il faut $x^1 > \left(\dfrac{m - n}{2n^2}\right)$.

Des conditions $\gamma_0^2 > n^2$ et $2n^2 - 4\alpha_1^2 - \gamma_0^2 > 0$, on déduit $n^2 - 4\alpha_1^2 > 0$, soit

$$4n^4(x^1)^2 - 4mn^2x^1 + m^2 - n^2 < 0$$

d'où le domaine de validité

$$\frac{\pi}{4} < \Psi < \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \left(\frac{m - n}{2n^2}\right) < x^1 < \left(\frac{m + n}{2n^2}\right)$$

Notons la possibilité de traiter d'une manière analogue les hypothèses

$$\alpha_1 = \gamma_0 = 0 \quad ; \quad k_1 = - k_0 = - C.$$

IV. LE SCHÉMA FLUIDE PARFAIT RADIATION

Dans les équations d'Einstein avec $\Lambda = 0$, nous écrivons

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)U_\alpha U_\beta - pg_{\alpha\beta} + \sigma k_\alpha k_\beta$$

Comme dans III on suppose $U_2 = U_3 = k_2 = k_3 = 0$; $k_1 = -k_0$. On tire du système les expressions

$$\left\{\begin{aligned} &\chi p e^{2\alpha} = -\alpha_{00} - \gamma_{00} - \gamma_0^2 + \alpha_{11} + \gamma_{11} + \gamma_1^2 \quad ; \quad \chi\rho e^{2\alpha} = -\alpha_{00} + \gamma_{00} + 3\gamma_0^2 + \alpha_{11} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \gamma_{11} - 3\gamma_1^2 \\ &e^{2\phi} = \langle -\gamma_{00} - \gamma_0^2 + 2\alpha_0\gamma_0 - \gamma_{11} - \gamma_1^2 + 2\alpha_1\gamma_1 + 2[-\gamma_{01} - \gamma_0\gamma_1 + \alpha_1\gamma_0 + \alpha_0\gamma_1]\rangle / \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (-\alpha_{00} + \gamma_0^2 + \alpha_{11} - \gamma_1^2) \\ &\chi\sigma k_0^2 = (-\alpha_{00} + \gamma_0^2 + \alpha_{11} - \gamma_1^2)\,\mathrm{sh}\,2\phi - 2[-\gamma_{01} - \gamma_0\gamma_1 + \alpha_1\gamma_0 + \alpha_0\gamma_1] \end{aligned}\right.$$

Toutes doivent être positives.

Il est avantageux de choisir $k_0 = C$, ceci entraîne $k^\beta\nabla_\beta(k^\alpha) = 0$.

Les solutions indépendantes de x^0 sont obtenues en posant

$$\alpha_0 = \gamma_0 = 0 \to R_{01} \equiv 0$$

Exemple

$$\gamma_{11} = -n\gamma_1^2 \quad ; \quad n > 1 \to \gamma = \frac{1}{n}\log\Delta \quad ; \quad \Delta \equiv (x^1 - a) \quad , \quad a : \text{cte.}$$

Soit

$$\alpha_1 = m\Delta \quad , \quad \alpha = \frac{m}{2}(x^1)^2 - max^1 + \text{cte.}$$

On doit avoir

$$mn^2\Delta^2 - (n-1) > 0 \quad (p > 0) \quad ; \quad mn^2\Delta^2 + (n-3) > 0 \quad (\rho > 0)$$

$$e^{2\phi} = \frac{2mn\Delta^2 + (n-1)}{(mn^2\Delta^2 - 1)} > 0 \quad ; \quad \frac{[2mn\Delta^2 + n - 1]^2 - [mn^2\Delta^2 - 1]^2}{2n^2\Delta^2(2mn\Delta^2 + n - 1)} > 0 \; (\sigma k_0^2 > 0)$$

n étant > 1, m doit être > 0; $(\rho + p) > 0 \to mn^2\Delta^2 > 1$.

Physiquement $\rho > p$, soit $n > 2$. $e^{2\phi}$ est certainement > 0. Il reste donc à assurer $\sigma k_0^2 > 0$, condition satisfaite pour $\Delta^2 < 1/m(n-2)$. Nous avons alors

$$e^{2\gamma} = \Delta^{2/n} \quad ; \quad e^{2\alpha} = e^{m[(x^1)^2 - 2ax^1] + 2l} \quad ; \quad n > 2 \quad ; \quad m > 0 \quad ; \quad k_1 = -k_0 = -c$$

$$\chi p = \left[\frac{mn^2\Delta^2 - (n-1)}{n^2\Delta^2}\right] e^{-m[(x^1)^2 - 2ax^1] - 2l} \; ;$$

$$\chi\rho = \left[\frac{mn^2\Delta^2 + (n-3)}{n^2\Delta^2}\right] e^{-m[(x^1)^2 - 2ax^1] - 2l}$$

$$\chi c^2\sigma = \frac{[mn\Delta^2(2+n) + n - 2][mn\Delta^2(2-n) + n]}{2n^2\Delta^2(2mn\Delta^2 + n - 1)} \quad ; \quad \Delta^2 < \frac{1}{m(n-2)}$$

Posant $(n - 2) = \xi > 0$, on dispose à volonté de la limite supérieure de x^1 définie par $\Delta^2 < 1/m\xi$.

Finalement $U_0 = e^\alpha\,\mathrm{ch}\,\phi$, $U_1 = e^\alpha\,\mathrm{sh}\,\phi$.

Nous traiterons brièvement les solutions de Ricci :

$$\gamma_{00} = n\gamma_0^2 \quad ; \quad n > 0 \quad ; \quad \alpha_0 = -m\Delta \quad ; \quad m > 0 \quad ; \quad \Delta \equiv (x^0 - a)$$

En étudiant les conditions de positivité qui se réduisent ici à $p > 0$, $e^{2\phi} > 0$, $\sigma k_0^2 > 0$, on voit que ρ est $> p$.

Il suffit de prendre $2mn\Delta^2 - (n+1) > mn^2\Delta^2 + 1$ pour assurer les deux dernières. Nécessairement $n < 2$, sinon $\Delta^2 < 0$. Il vient par conséquent

$$e^{2\gamma} = \Delta^{-2/n} \quad ; \quad e^{2\alpha} = e^{-m(x^0)^2 + 2max^0 + 2l} \quad ; \quad n<2 \quad ; \quad m>0 \quad ; \quad k_0 = -k_1 = c$$

$$\chi p = \left[\frac{mn^2\Delta^2 - (n+1)}{n^2\Delta^2}\right] e^{m(x^0)^2 - 2amx^0 - 2l}$$

$$\chi \rho = \left[\frac{mn^2\Delta^2 + (n+3)}{n^2\Delta^2}\right] e^{m(x^0)^2 - 2amx^0 - 2l}$$

$$\chi c^2 \sigma = \frac{[2mn\Delta^2 - (n+1)]^2 - [mn^2\Delta^2 + 1]^2}{2n^2\Delta^2[2mn\Delta^2 - (n+1)]}$$

Domaine de validité

$$\mathscr{D} = \mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 \quad ; \quad \mathscr{D}_1 \left\{ \Delta^2 > \left(\frac{n+1}{mn^2}\right) \right\} \quad ; \quad \mathscr{D}_2 \left\{ \Delta^2 > \frac{(n+2)}{mn(2-n)} \right\}$$

$$\mathscr{K} = \frac{1}{4}(R^{\alpha\beta\mu\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu}) = e^{-4\alpha}\left\langle \frac{m^2n^4\Delta^4 + 2[mn\Delta^2 - (n+1)]^2 + 1}{n^4\Delta^4} \right\rangle$$

$$\rightarrow \text{singularité essentielle } x^0 = a$$

Nous nous contenterons de mentionner quelques solutions mixtes en omettant les calculs intermédiaires et la discussion des conditions de positivité. Posons $\alpha_0 = 0$; $\gamma_1 = 0$; $\gamma = -\frac{N}{n}e^{-nt}$; $n > 0$; $\alpha_1 = m$; $N > 0$; $t \equiv x^0$, il vient

$$\begin{cases} e^{2\gamma} = e^{-\frac{2N}{n}e^{-nt}} \quad ; \quad e^{2\alpha} = e^{2mx^1} \\ \chi p = Ne^{-nt-2mx^1}[n - Ne^{-nt}] \quad ; \quad \chi\rho = Ne^{-nt-2mx^1}[3Ne^{-nt} - n] \\ \chi c^2\sigma = N\left\{\frac{K(KN-4m) + 2e^{-nt}(2m-KN)}{2[Ke^{nt}-1]}\right\} \quad ; \quad n>N>0 \quad ; \quad m<0 \quad ; \quad K>1 \\ \qquad KN(K-2) + 4m(1-K) > 0 \end{cases}$$

Domaine de validité $t < \frac{1}{n}\log\left(\frac{3N}{n}\right)$. Les hypothèses $\alpha_0 = \gamma_0$, $\gamma_1\alpha_1 \neq 0$, $\gamma_{00} = -m^2\gamma_0^2$; $\gamma_{11} = -n^2\gamma_1^2$ avec $1 < 2m^2 \leqslant 4$; $n^2 - 3 > 0$ permettent d'obtenir des expressions telles que $\rho > p$ pour toutes valeurs de x^0 et x^1.

Posant en outre $\alpha_{11} = N\gamma_1^2$, nous avons

$$\chi p e^{2\alpha} = (2m^2 - 1)\gamma_0^2 + (N + 1 - n^2)\gamma_1^2 \quad ; \quad \chi\rho e^{2\alpha} = 3\gamma_0^2 + (N + n^2 - 3)\gamma_1^2$$

$$e^{2\phi} = \left(\frac{A\gamma_0^2 + B\gamma_1^2 - 2\mathscr{N}\gamma_0\gamma_1}{\Delta}\right) \quad ; \quad A \equiv (m^2 + 1) \; ;$$

$$B \equiv (n^2 - 1) - 2\mathscr{N} \quad ; \quad \mathscr{N} \equiv \frac{N}{n^2}$$

$$\Delta \equiv (m^2 + 1)\gamma_0^2 + (N - 1)\gamma_1^2$$

$$\chi\sigma k_0^2 = \frac{[B^2 - (N-1)^2]\gamma_1^4 + 2\gamma_0^2\gamma_1^2[A\langle B - (N-1)\rangle - 2\mathcal{N}^2]}{2[A\gamma_0^2 + B\gamma_1^2 - 2\mathcal{N}\gamma_0\gamma_1]}$$

Si $\mathcal{N}$ est inférieur au plus petit des trois nombres $\left(\frac{n^2-1}{2}\right)$, $\left(\frac{n^2}{n^2+2}\right)$, $\frac{1}{4}\langle [A^2(n^2+2)^2 + 8An^2]^{1/2} - A(n^2+2)\rangle$, on a $B > 0$, $(N-1) < B$, $2\mathcal{N}^2 < A[B - (N-1)]$.

Il suffit d'assurer $2\mathcal{N}\gamma_0\gamma_1 < A\gamma_0^2 + B\gamma_1^2$ pour avoir $\sigma k_0^2 > 0$. Simultanément $e^{2\phi} > 0$, ρ est constamment positive. D'après $p > 0$, on ne peut avoir $\mathcal{N}n^2 > (n^2 - 1)$.

La condition s'écrit

$$(2m^2 - 1)(n^4)(x^1 - b)^2 > [n^2(1 - \mathcal{N}) - 1](m^4)(x^0 - a)^2$$

Avec $\sigma k_0^2 > 0$, soit

$$2\mathcal{N}m^2n^2(x^0 - a)(x^1 - b) < An^4(x^1 - b)^2 + Bm^4(x^0 - a)^2$$

nous avons les inégalités qui limitent le domaine de validité de la solution

$$e^{2\gamma} = (x^0 - a)^{2/m^2}(x^1 - b)^{2/n^2} \quad ; \quad e^{2\alpha} = (x^0 - a)^{2/m^2}(x^1 - b)^{-2N/n^4}$$

Nous étudierons pour terminer ce paragraphe des solutions du type

$$\alpha = A(x^0) + \tilde{\alpha}(\zeta) \quad ; \quad \gamma = A(x^0) + \tilde{\gamma}(\zeta) \quad ; \quad \zeta \equiv -x^0 + x^1$$

Il vient

$$\chi p e^{2\alpha} = -2A'' - A'^2 + 2A'\tilde{\gamma}' \quad ; \quad \chi\rho e^{2\alpha} = 3[A'^2 - 2A'\tilde{\gamma}'] \quad ;$$
$$e^{2\phi} = (A'^2 - A'')/(A'^2 - A'' - 2A'\tilde{\gamma}')$$

$$\chi\sigma k_0^2 = 2A'\tilde{\gamma}'\left\langle 1 - \frac{A'\tilde{\gamma}'}{(A'^2 - A'')}\right\rangle$$

$\rho > 0$ et $p > 0$ demandent $A'' < 0$. Dans ces conditions $e^{2\varphi}$ est essentiellement positive.

$$\rho > p \rightarrow 0 < (A'^2 - 2A'\tilde{\gamma}') < -2A'' < 4(A'^2 - 2A'\tilde{\gamma}')$$

$$\sigma k_0^2 > 0 \rightarrow A'\tilde{\gamma}' > \left(\frac{A'^2\tilde{\gamma}'^2}{A'^2 - A''}\right) \quad \text{d'où} \quad A'\tilde{\gamma}' > 0. \quad \text{Donc} \quad (A'^2 - A'') > A'\tilde{\gamma}'$$

Cette condition est certainement satisfaite puisque $A'^2 - A'' - 2A'\tilde{\gamma}' > 0$. σk_0^2 est donc positive

$$\text{sh}\, 2\phi = \frac{2A'\tilde{\gamma}'(A'^2 - A'') - 2A'^2\tilde{\gamma}'^2}{(A'^2 - A'' - 2A'\tilde{\gamma}')(A'^2 - A'')} > 0$$

Nous avons

$$U_0 = \frac{e^{\alpha}[(A'^2 - A'') - A'\tilde{\gamma}']}{\sqrt{(A'^2 - A'')}\sqrt{(A'^2 - A'') - 2A'\tilde{\gamma}'}} ;$$

$$U_1 = \frac{e^{\alpha}A'\tilde{\gamma}'}{\sqrt{(A'^2 - A'')}\sqrt{(A'^2 - A'') - 2A'\tilde{\gamma}'}} \quad ; \quad \frac{U^1}{U^0} = \left[\frac{-A'\tilde{\gamma}'}{A'^2 - A'' - A'\tilde{\gamma}'}\right]$$

Avec $\tilde{\gamma}' = n^2$, il faut $A'^2 - 2n^2A' > 0$; $-2A'' > A'^2 - 2n^2A'$.

Si nous écrivons $-2A'' = K[A'^2 - 2n^2A']$; $1 < K < 4$, nous parvenons à la solution

$$e^{2\gamma} = [e^{Kn^2x^0} - 1]^{4/K}e^{2n^2(x^1 - x^0)} \quad ; \quad e^{2\alpha} = [e^{Kn^2x^0} - 1]^{4/K}e^{2\tilde{\alpha}(x^1 - x^0)} ;$$

$\tilde{\alpha}$ arbitraire

V. LE SCHÉMA ÉLECTROVAC

Le tenseur $T_{\alpha\beta}$ a pour expression

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) - F_{\alpha\rho}F_{\beta}{}^{\rho}$$

Il a pour composantes

$$T_{00} = \mathscr{H} \quad ; \quad T_{11} = -\mathscr{H} \quad ; \quad T_{22} = e^{2\gamma - 2\alpha}\mathscr{H} = T_{33} \quad ; \quad T_{\alpha\beta} = 0 \quad \alpha \neq \beta$$

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\langle e^{-2\alpha}X^2 + e^{2\alpha - 4\gamma}Y^2 \rangle \quad ; \quad F_{10} \equiv X \quad ; \quad F_{23} \equiv Y ;$$

$$F_{20} = F_{30} = F_{12} = F_{31} = 0.$$

Au système d'Einstein s'ajoute celui de Maxwell $\nabla_{\beta}(F^{\alpha\beta}) = 0$. Ce dernier fournit deux relations

$$X = e^{2\alpha - 2\gamma}A \quad , \quad A : \text{cte} \quad ; \quad Y = e^{-2\alpha + 2\gamma}B(x^0, x^1)$$

Les équations d'Einstein (sans terme cosmologique) peuvent être transcrites sous la forme :

$$-\gamma_{00} - \gamma_0^2 + 2\alpha_0\gamma_0 - \gamma_{11} - \gamma_1^2 + 2\alpha_1\gamma_1 = 0 ; \tag{1}$$

$$-\alpha_{00} - 2\gamma_{00} - 3\gamma_0^2 + \alpha_{11} + 2\gamma_{11} + 3\gamma_1^2 = 0 \tag{2}$$

$$-\alpha_{00} + \gamma_0^2 + \alpha_{11} - \gamma_1^2 = \chi A^2 e^{2\alpha - 4\gamma} + \chi B^2 e^{-2\alpha} ; \tag{3}$$

$$-\gamma_{01} - \gamma_0\gamma_1 + \alpha_1\gamma_0 + \alpha_0\gamma_1 = 0 \tag{4}$$

Supposons $\alpha_0 = \gamma_0 = 0$, $B = 0$ (champ purement électrique). L'intégration du système conduit à la solution

$$e^{2\alpha} = \frac{KM}{3\Delta^{2/3}} \quad ; \quad e^{2\gamma} = \Delta^{2/3} \quad ; \quad X = \frac{AKM}{3\Delta^{4/3}} \quad ; \quad \Delta \equiv (Mx^1 + N) ;$$

$$M = \frac{3}{2}\chi A^2 K \quad ; \quad K, N : \text{ctes}$$

$K < 0$ exige $M < 0$, il faut alors $x^1 < \frac{N}{|M|}$ si $N > 0$. $K > 0$ et $N > 0$ n'introduisent aucune restriction au domaine de variation de x^1.

Si l'on prend l'intégrale première $e^{2\gamma}2\gamma_1$, sous la forme $\chi A^2 K e^{-\gamma} + L$, L : cte, on est conduit à l'équation $\left(LU + \frac{2}{3}M\right)^{\frac{8M^2}{9L^2}} e^{U^2 - \frac{4M}{3L}U} = e^{Lx^1}$ pour déterminer $U \equiv e^\gamma$.

Le cas magnétique pur ($A = 0$) se traite de manière similaire. Avec $B = e^{2\alpha - 2\gamma}C$, nous retrouvons le système précédent, la constante C prenant la place de A.

Prenant B arbitrairement on a trois équations pour déterminer α et γ.

Exemple. — $\alpha = n\gamma$. Le choix $n = -1$ nous donne

$$\gamma = \frac{1}{3}\log(C + 3x^1) + \text{cte} \quad ; \quad \alpha = -\gamma \quad ; \quad B = \pm\left(\frac{2}{\chi}\right)^{1/2} e^{-\gamma}\gamma_1 \quad ; \quad C : \text{cte}$$

Lorsque les deux champs sont présents, on peut identifier les équations (1) et (2) en posant $\alpha + \gamma = 0$. Il vient

$$e^{2\gamma} = a^2(c + 3x^1)^{2/3} \quad ; \quad e^{2\alpha} = e^{-2\gamma} \quad ; \quad X = Aa^{-4}(c + 3x^1)^{-4/3}$$

$$Y = \left(\frac{2a^6 - \chi A^2}{\chi}\right)^{1/2} \quad ; \quad A, a, C : \text{ctes} \quad ; \quad 2a^6 - \chi A^2 > 0$$

L'abandon de l'hypothèse $\alpha + \gamma = 0$ ramène le problème de l'intégration de l'équation

$$e^{\zeta^2}[L\zeta + 2M]^{\frac{2M^2}{L^2}} = e^{\frac{M^2}{L^2} + 4Lx^1} \quad ; \quad \zeta \equiv \left(U - \frac{M}{L}\right) \quad ; \quad U \equiv e^\gamma \quad ; \quad L, M : \text{ctes}$$
$$M(LU + M) > 0$$

Nous postulerons maintenant la séparation des variables. On montre qu'il ne peut exister dans ce cas aucune solution dépendant simultanément de x^0 et x^1. La recherche de solution de Ricci fait apparaître l'intégrale première $e^{2\alpha} = Ke^\gamma\gamma_0$, d'où $K\gamma_0 > 0$. Nécessairement $\alpha_0 + \gamma_0 \neq 0$, sinon il y a incompatibilité avec l'équation (3). Nous avons ensuite

$$\alpha_0 + \gamma_0 = Le^{-2\gamma} \quad ; \quad L, K : \text{ctes}$$

puis

$$\frac{d}{dx^0}(e^{3\gamma}) = 6Le^\gamma + 6M \quad ; \quad M : \text{cte.}$$

La contrainte $-M(LU + M) > 0$ entraîne $LM < 0$ et $-LMU - M^2 > 0$. Par conséquent, il faut

$$U \equiv e^\gamma > \frac{M^2}{(-ML)} \equiv n > 0.$$

(3) donne, dans ces conditions

$$-8M(LU + M)U^{-6} = 2\chi A^2 K(LU + M)U^{-6} + \frac{\chi B^2 U^2}{2K(LU + M)}$$

En particulier, pour $B = 0$, $-8M = 2\chi A^2 K$.

L'intégration se réduit à celle de l'équation

$$U^2 U' = 2(LU + M) \rightleftharpoons \left\langle \frac{U}{L} - \frac{M}{L^2} + \frac{M^2}{L^2(LU + M)} \right\rangle dU = 2dt \quad ; \quad t \equiv x^0$$

Posant $V = \left(U - \frac{M}{L}\right)$, la relation définissant U en fonction de x^0 s'écrit

$$e^{V^2}[LV + 2M]^{\frac{2M^2}{L^2}} = e^{\frac{M^2}{L^2} + 4Lx^0}$$

Elle est formellement identique à celle obtenue dans l'étude des solutions en x^1.

$e^\gamma > n$ introduit une limite supérieure du temps. Pour $AB \neq 0$, il vient

$$\chi B^2 = -2K(LU + M)^2 U^{-8}[8M + 2\chi A^2 K]$$

soit la solution

$$X = \frac{2AK}{U^4}(LU + M) \quad ; \quad Y = \frac{BU^4}{2K(LU + M)} = \left[\frac{-4K(4M + \chi A^2 K)}{\chi}\right]^{1/2} = \text{cte}$$

L'invariant $\mathcal{K} = \frac{1}{4}(R^{\alpha\beta\mu\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu})$ a pour expression (compte tenu des équations d'Einstein)

$$\mathcal{K} = e^{-4\alpha}\langle 4\chi^2\mathcal{H}^2 - 4\chi\mathcal{H}(\gamma_0^2 - \gamma_1^2) + 2(\gamma_0^2 - \gamma_1^2)^2 - 4\mathcal{M}\mathcal{N} \rangle$$

avec

$$\mathcal{M} \equiv (-\gamma_{00} - \gamma_0^2 + \alpha_0\gamma_0 + \alpha_1\gamma_1) \quad ; \quad \mathcal{N} \equiv (-\gamma_{11} - \gamma_1^2 + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_0\gamma_0)$$

Pour les solutions en x^1, $\mathcal{K} = 2e^{-4\alpha}\gamma_1^2 \langle (\gamma_1 + 2\alpha_1)^2 + 6\alpha_1^2 \rangle$. La forme correspondant aux solutions de Ricci se déduit de la précédente en remplaçant l'indice 1 par 0. Ces formules mettent en évidence les singularités essentielles du champ gravitationnel.

(Manuscrit reçu le 19 janvier 1977).