

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

M. BRAY

Sur les tenseurs de polarisation électromagnétique en relativité générale

Annales de l'I. H. P., section A, tome 27, n° 1 (1977), p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1977__27_1_1_0

© Gauthier-Villars, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur les tenseurs de polarisation électromagnétique en relativité générale

par

M. BRAY

657, rue de Robbé, 02120 Guise

SUMMARY. — Electromagnetic polarisation tensors are calculated in General Relativity according to Fokker's method (*).

Dans une congruence définie par les formules $x^\alpha = x^\alpha(s, y^k)$ $k = 1, 2, 3$, choisissons deux lignes de courant particulières : $L_1(y^k)$ et $L_2(y^k + \delta y^k)$.

Leur vecteur de connexion $X^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^k} \delta y^k$ doit satisfaire l'équation

$$\vec{\mathcal{L}}(X^\alpha) = 0 \Leftrightarrow \dot{X}^\alpha = U^\alpha{}_{;\beta} X^\beta$$

\vec{U} : vitesse d'Univers $U^\alpha U_\alpha = +1$; $U^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial s}$; $\dot{X}^\alpha \equiv U^\beta \nabla_\beta (X^\alpha)$.

A tout ensemble de lignes de courant parallèles traversant la cellule infinitésimale $d\tau = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ associons un vecteur d'agrégat $S^\alpha = \sum_{(q)} \Delta x^\alpha$, la sommation portant sur les ensembles de lignes parallèles q .

Pour une distribution homogène, nous aurons $S^\alpha = s^\alpha \sqrt{-g} d\tau$ (**).
D'après l'interprétation dans l'espace associé à \vec{U} , $\sqrt{-g} s^0$ représente la

(*) A. D. FOKKER, *Time and Space Weight and Inertia*, ch. IX, The equations of the theory of electrons, p. 117.

(**) A. D. FOKKER, *Time and Space Weight and Inertia*, ch. VIII, The dynamical tensor, p. 107.

densité de présence dans $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$, $\sqrt{-g} s^1$ représente la densité de passage à travers l'élément $dx^2 \wedge dx^3$ durant le temps dt , etc.

$e\sqrt{-g} s^\alpha$ décrira donc la densité de courant-charge.

Une paire de charges, $-e$ décrivant L_1 et $+e$ décrivant L_2 engendrera le courant-charge résiduel $e\sqrt{-g} \vec{s}$.

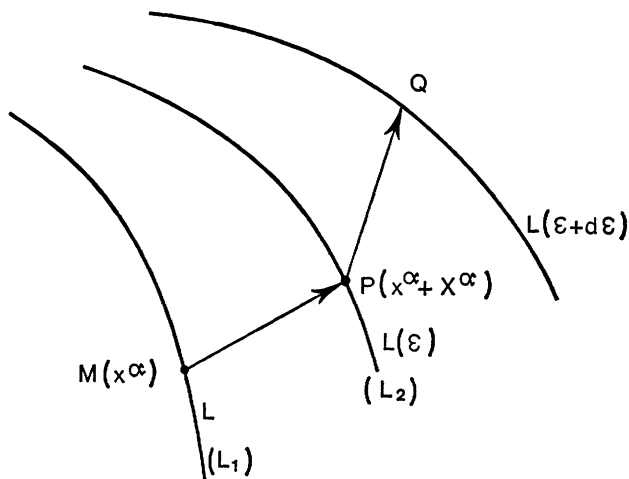


FIG. 1.

Posant $X^\alpha = \epsilon \xi^\alpha$, ϵ : paramètre infinitésimal, nous avons

$$\begin{aligned} x_P^\alpha &= x_M^\alpha + \epsilon (\xi^\alpha)_M & ; & & x_Q^\alpha &= x_P^\alpha + d\epsilon (\xi^\alpha)_P \\ x_Q^\alpha &= x_M^\alpha + \epsilon (\xi^\alpha)_M + d\epsilon \langle (\xi^\alpha)_M + \epsilon \xi^\beta \nabla_\beta (\xi^\alpha) \rangle \\ \vec{PQ} &: d(\delta x^\alpha) &= & d\epsilon \langle \xi^\alpha + \epsilon \xi^\beta \nabla_\beta (\xi^\alpha) \rangle \end{aligned}$$

L'intégration en ϵ donne alors $\delta x^\alpha = \epsilon \xi^\alpha + \frac{\epsilon^2}{2} \xi^\beta \nabla_\beta (\xi^\alpha)$.

La variation d'un volume $V = \int_{\mathcal{D}} \sqrt{-g} d\tau$ s'écrit $\delta V = \int_{\mathcal{D}} \epsilon \xi^\beta d\Sigma_\beta$ avec

$$d\Sigma_\beta = \frac{1}{3!} \eta_{\beta\mu\nu\rho} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho$$

soit

$$\delta V = \int_{\mathcal{D}} \partial_\beta (\epsilon \xi^\beta) d\tau = \int_{\mathcal{D}} \nabla_\beta (\epsilon \xi^\beta) \cdot \sqrt{-g} d\tau$$

Par la translation $\epsilon \vec{\xi}$, la cellule $d\tau$ prend donc un volume

$$\langle 1 + \epsilon \nabla_\beta (\xi^\beta) \rangle \sqrt{-g} d\tau$$

Étudions, au premier ordre en ϵ , la variation de l'équation $S^\alpha = \epsilon s^\alpha \sqrt{-g} d\tau$, \tilde{s}^α désignant le nouveau vecteur, il vient

$$(\tilde{s}^\alpha)_P = (\tilde{s}^\alpha)_M + \epsilon \xi^\beta \nabla_\beta (\tilde{s}^\alpha)$$

La variation de \vec{S} se met (à l'aide de la règle du parallélogramme) sous la forme $\varepsilon S^\beta \nabla_\beta(\xi^\alpha)$; par conséquent

$$S^\alpha + \varepsilon S^\beta \nabla_\beta(\xi^\alpha) = e[s^{\tilde{\alpha}} + \varepsilon \xi^\beta \nabla_\beta(\tilde{s}^\alpha)] [\sqrt{-g}(1 + \varepsilon \nabla_\nu(\xi^\nu)) d\tau]$$

Dans un terme où \tilde{s}^α est multiplié par ε , on peut remplacer \tilde{s}^α par s^α , donc

$$\begin{aligned} e\sqrt{-g} s^\alpha d\tau + e\varepsilon(\sqrt{-g} s^\beta d\tau) \nabla_\beta(\xi^\alpha) \\ = e\tilde{s}^\alpha \sqrt{-g} d\tau + e\varepsilon s^\alpha \sqrt{-g} \nabla_\beta(\xi^\beta) d\tau + e\varepsilon \xi^\beta \nabla_\beta(s^\alpha) \sqrt{-g} d\tau \\ e\sqrt{-g}(s^\alpha - \tilde{s}^\alpha) = e\varepsilon \langle \sqrt{-g} [s^\beta \nabla_\beta(\xi^\alpha) - s^\alpha \nabla_\beta(\xi^\beta) - \xi^\beta \nabla_\beta(s^\alpha)] \rangle \end{aligned}$$

La loi de conservation de la charge $\nabla_\beta(s^\beta) = 0$ permet d'écrire

$$e\sqrt{-g} \delta s^\alpha = e\varepsilon \langle \nabla_\beta(\sqrt{-g} [\xi^\alpha s^\beta - \xi^\beta s^\alpha]) \rangle$$

Dans cette relation, remplaçons ε par $d\varepsilon$ et s^α par $s^\alpha + \varepsilon \nabla_\beta[\xi^\alpha s^\beta - \xi^\beta s^\alpha]$, on a

$$d(\delta s^\alpha) = d\varepsilon \nabla_\beta \{ \xi^\alpha [s^\beta + \varepsilon \nabla_\nu(\xi^\beta s^\nu - \xi^\nu s^\beta)] - \xi^\beta [s^\alpha + \varepsilon \nabla_\nu(\xi^\alpha s^\nu - \xi^\nu s^\alpha)] \}$$

L'intégration en ε conduit à l'expression

$$\begin{aligned} e\sqrt{-g} \delta s^\alpha = e\varepsilon \nabla_\beta \langle \sqrt{-g} [\xi^\alpha s^\beta - \xi^\beta s^\alpha] \rangle \\ + \frac{e}{2} \varepsilon^2 \nabla_\beta \{ \xi^\alpha \sqrt{-g} \nabla_\nu [\xi^\beta s^\nu - \xi^\nu s^\beta] - \xi^\beta \sqrt{-g} \nabla_\nu [\xi^\alpha s^\nu - \xi^\nu s^\alpha] \} \end{aligned}$$

Cette formule se déduit de celle de Fokker par application du principe de couplage minimum. Considérons tout d'abord les termes d'ordre 1 en posant $P^{\alpha\beta} = 2e\varepsilon \xi^{[\alpha} s^{\beta]}$

$$e\sqrt{-g} \delta s^\alpha = \nabla_\beta(\sqrt{-g} P^{\alpha\beta})$$

Si l'on observe que s^k/s^0 définit une vitesse ordinaire v^k , on peut écrire

$$\sqrt{-g} P^{k0} = e\varepsilon \sqrt{-g} s^0 [\xi^k - \xi^0 v^k]$$

Or $\varepsilon(\xi^k - \xi^0 v^k)$ donne la composante k du vecteur reliant la particule M (charge $-e$) à la particule P (charge $+e$), vecteur évalué dans l'espace physique lié à l'observateur M.

$e\varepsilon(\xi^k - \xi^0 v^k)$ est donc le moment électrique des deux charges; la densité des paires étant $\sqrt{-g} s^0$ on voit que $\sqrt{-g} P^{k0}$ représente la densité de moment électrique du système, c'est-à-dire la polarisation.

L'introduction de la vitesse \vec{v} permet aussi d'écrire les composantes P^{ij} sous la forme

$$\sqrt{-g} P^{ij} = \sqrt{-g} [P^{i0} v^j - P^{j0} v^i]$$

$e\sqrt{-g} \delta s^0$ nous donne la densité de charge de polarisation diélectrique, soit

$$e\sqrt{-g} \delta s^0 = \nabla_\beta(\sqrt{-g} P^{0\beta}) = \partial_\beta(\sqrt{-g} P^{0\beta}) = \partial_k(\sqrt{-g} P^{0k})$$

Posant $P^{i0} \equiv p^i$, on peut écrire $e\sqrt{-g}\delta s^0 = -\sqrt{-g}\nabla_k(p^k)$ avec

$$\nabla_k(p^k) = \partial_k(p^k) + p^l \Gamma_l^v \quad \text{puisque} \quad p^0 = 0$$

Nous avons ensuite

$$e\sqrt{-g}\delta s^1 = \partial_0(\sqrt{-g}P^{10}) + \partial_2(\sqrt{-g}P^{12}) + \partial_3(\sqrt{-g}P^{13})$$

ou

$$e\sqrt{-g}\delta s^1 = \partial_0(\sqrt{-g}p^1) + \partial_2^*(P_{03}) - \partial_3^*(P_{02})$$

en posant $P_{03}^* = \sqrt{-g}P^{12} = \sqrt{-g}[p^1v^2 - p^2v^1]$, etc.

Le premier terme de cette expression correspond au courant de polarisation, le suivant au courant de Röntgen-Eichenwald.

La colinéarité des vecteurs \vec{s} et \vec{U} entraîne $s^\alpha = \mathcal{S}U^\alpha \rightarrow \mathcal{S} = (s^\alpha U_\alpha)$, d'où $P^{\alpha\beta} = 2e\mathcal{S}\xi^{[\alpha}U^{\beta]}$ et

$$e\sqrt{-g}\delta s^\alpha = e\mathcal{S}\sqrt{-g}\langle 2\xi^{[\alpha}U^{\beta]}\nabla_\beta \log \mathcal{S} + \dot{\xi}^\alpha + \theta\xi^\alpha - U^\alpha\nabla_\beta(\xi^\beta) - \xi^\beta\nabla_\beta(U^\alpha) \rangle$$

Compte tenu de la loi $\nabla_\beta(\mathcal{S}U^\beta) = 0$ et de la relation $\dot{X}^\alpha = U^\alpha; \beta X^\beta$, il reste

$$e\sqrt{-g}\delta s^\alpha = -e\sqrt{-g}U^\alpha\nabla_\beta(\mathcal{S}X^\beta)$$

Nous aborderons maintenant l'étude des termes d'ordre deux, savoir

$$\frac{e}{2}\varepsilon^2\nabla_\beta\left\{\sqrt{-g}\langle\xi^\alpha\nabla_\nu[\xi^\beta s^\nu - \xi^\nu s^\beta] - \xi^\beta\nabla_\nu[\xi^\alpha s^\nu - \xi^\nu s^\alpha]\rangle\right\}$$

Considérons la contribution

$$\frac{e}{2}\varepsilon^2\langle\xi^\alpha\nabla_\nu(\xi^\beta s^\nu) - \xi^\beta\nabla_\nu(\xi^\alpha s^\nu)\rangle = \frac{e}{2}\varepsilon^2 s^\nu\langle\xi^\alpha\nabla_\nu(\xi^\beta) - \xi^\beta\nabla_\nu(\xi^\alpha)\rangle$$

Nous avons $s^\nu\nabla_\nu(\xi^\beta) = s^0\nabla_0(\xi^\beta) + s^k\nabla_k(\xi^\beta) = s^0\langle\nabla_0(\xi^\beta) + v^k\nabla_k(\xi^\beta)\rangle$

$$s^\nu\nabla_\nu(\xi^\beta) = s^0\langle[\partial_0(\xi^\beta) + v^k\partial_k(\xi^\beta)] + \xi^\nu[\Gamma_\nu^\beta{}_0 + v^k\Gamma_\nu^\beta{}_k]\rangle$$

En Relativité restreinte, ceci se réduirait à $s^0[\partial^0(\xi^\beta) + v^k\partial_k(\xi^\beta)] = s^0\frac{d}{dt}(\xi^\beta)$

en désignant par $\frac{d}{dt}$ la dérivée substantielle; cela conduit à l'expression

$$\frac{e}{2}\left\langle X^\alpha s^0\left[\frac{d}{dt}(X^\beta) + X^\nu(\Gamma_\nu^\beta{}_0 + \Gamma_\nu^\beta{}_k v^k)\right] - X^\beta s^0\left[\frac{d}{dt}(X^\alpha) + X^\nu(\Gamma_\nu^\alpha{}_0 + \Gamma_\nu^\alpha{}_k v^k)\right]\right\rangle$$

$$\frac{e}{2}s^0\left\langle\left[X^\alpha\frac{d}{dt}(X^\beta) - X^\beta\frac{d}{dt}(X^\alpha)\right] + X^\nu[X^\alpha(\Gamma_\nu^\beta{}_0 + \Gamma_\nu^\beta{}_k v^k) - X^\beta(\Gamma_\nu^\alpha{}_0 + \Gamma_\nu^\alpha{}_k v^k)]\right\rangle$$

Le terme $\frac{e}{2}\left[X^\alpha\frac{d}{dt}(X^\beta) - X^\beta\frac{d}{dt}(X^\alpha)\right]$ n'est autre que le moment magnétique dans un système d'unités où la vitesse de la lumière est égale à 1.

Les termes supplémentaires sont donc une correction de Relativité générale. Le tenseur $M^{\alpha\beta}$ tel que

$$\sqrt{-g}M^{\alpha\beta} = \frac{e}{2} \varepsilon^2 \langle \xi^\alpha \nabla_\nu [\sqrt{-g} \xi^\beta s^\nu] - \xi^\beta \nabla_\nu [\sqrt{-g} \xi^\alpha s^\nu] \rangle$$

représente donc la magnétisation puisque $\sqrt{-g} s^0$ est la densité de paires.

Remplaçant s^α par $\mathcal{S}U^\alpha$, il vient $s^\nu \nabla_\nu (\xi^\beta) = \mathcal{S} \dot{\xi}^\beta$; notre terme s'écrit donc

$$\frac{e}{2} \varepsilon^2 \langle \xi^\alpha \dot{\xi}^\beta - \xi^\beta \dot{\xi}^\alpha \rangle \mathcal{S} = e \varepsilon^2 \mathcal{S} \xi^{[\alpha} \dot{\xi}^{\beta]}$$

On est conduit à l'identifier au moment magnétique, soit

$$M^{\alpha\beta} = e \mathcal{S} X^\nu X^{[\alpha} U^{\beta]} ; \nu$$

Si nous portons dans la composante covariante $M_{\alpha\beta}$ la valeur de $U_{\alpha;\beta}$ exprimée en fonction de l'expansion, de la déformation et de la rotation, nous obtenons

$$M_{\alpha\beta} = \frac{e}{2} \mathcal{S} \left\langle X_\alpha \left[\left(\sigma_{\beta\nu} + \frac{\theta}{3} \pi_{\beta\nu} + \omega_{\beta\nu} \right) + \dot{U}_\beta U_\nu \right] X^\nu - X_\beta \left[\left(\sigma_{\alpha\nu} + \frac{\theta}{3} \pi_{\alpha\nu} + \omega_{\alpha\nu} \right) + \dot{U}_\alpha U_\nu \right] X^\nu \right\rangle$$

avec

$$\pi_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - U_\alpha U_\beta \quad ; \quad \sigma_{\alpha\beta} = \pi_\alpha^\rho \pi_\beta^\sigma U_{(\rho;\sigma)} - \frac{\theta}{3} \pi_{\alpha\beta} \quad ; \quad \omega_{\alpha\beta} = \pi_\alpha^\rho \pi_\beta^\sigma U_{[\rho;\sigma]} \quad ; \quad \theta \equiv \nabla_\nu (U^\nu)$$

\vec{X} peut être décomposé selon la formule $X^\nu = U^\nu (X^\sigma U_\sigma) + \pi^\nu_\sigma X^\sigma$. On établit aisément le résultat

$$\pi^\alpha_\beta (\dot{X}^\beta_\perp) = \left(\sigma^\alpha_{\cdot\beta} + \omega^\alpha_{\cdot\beta} + \frac{\theta}{3} \delta^\alpha_\beta \right) X^\beta_\perp \quad \text{avec} \quad X^\nu_\perp = \pi^\nu_\sigma X^\sigma$$

Posant $\pi^\alpha_\beta (\dot{X}^\beta_\perp) \equiv V^\alpha_\perp$, on a $U_{\beta;\nu} X^\nu = \langle \dot{U}_\beta (X^\sigma U_\sigma) + V_{\perp\beta} \rangle$

$$M_{\alpha\beta} = \frac{e}{2} \mathcal{S} \langle X_\alpha [\dot{U}_\beta (X^\sigma U_\sigma) + V_{\perp\beta}] - X_\beta [\dot{U}_\alpha (X^\sigma U_\sigma) + V_{\perp\alpha}] \rangle$$

soit

$$M_{\alpha\beta} = e \mathcal{S} \langle (X^\rho U_\rho)^2 U_{[\alpha} \dot{U}_{\beta]} + (X^\rho U_\rho) \{ X_{\perp[\alpha} \dot{U}_{\beta]} + U_{[\alpha} V_{\perp\beta]} \} + X_{\perp[\alpha} V_{\perp\beta]} \rangle$$

La projection de ce tenseur dans l'espace associé à \vec{U} s'écrit

$$\tilde{M}_{\alpha\beta} = \pi_\alpha^\rho \pi_\beta^\sigma M_{\rho\sigma} = e \mathcal{S} \langle (X^\rho U_\rho) X_{\perp[\alpha} \dot{U}_{\beta]} + X_{\perp[\alpha} V_{\perp\beta]} \rangle$$

Les composantes $\sqrt{-g} M^{0k}$ décrivent la polarisation électrique accompagnant la magnétisation dès que la matière magnétisée (non électriquement polarisée au repos) est mise en mouvement; le phénomène apparaît comme la contrepartie de la matière électriquement polarisée en mouvement.

Il reste à étudier dans la contribution du 2^e ordre les termes suivants

$$\frac{e}{2} \varepsilon^2 \sqrt{-g} \nabla_\beta \langle \xi^\beta \nabla_\nu (\xi^\nu s^\alpha) - \xi^\alpha \nabla_\nu (\xi^\nu s^\beta) \rangle$$

$$\cdot \xi^\beta \nabla_\nu (\xi^\nu s^\alpha) - \xi^\alpha \nabla_\nu (\xi^\nu s^\beta) = [\xi^\beta s^\alpha - \xi^\alpha s^\beta] \nabla_\nu (\xi^\nu) + \xi^\nu [\xi^\beta s^\alpha_{;\nu} - \xi^\alpha s^\beta_{;\nu}]$$

Le premier terme du second membre est manifestement une correction de polarisation provenant de la correction de volume $\nabla_\beta (X^\beta)$.

$$\frac{e}{2} \varepsilon^2 \langle \xi^\beta \nabla_\nu (\xi^\nu s^\alpha) - \xi^\alpha \nabla_\nu (\xi^\nu s^\beta) \rangle = \frac{e}{2} \langle [X^\beta s^\alpha - X^\alpha s^\beta] \nabla_\nu (X^\nu) + X^\nu [X^\beta s^\alpha_{;\nu} - X^\alpha s^\beta_{;\nu}] \rangle$$

Exprimant à nouveau s^α sous forme $\mathcal{S}U^\alpha$, il vient

$$\frac{e}{2} \langle [X^\beta U^\alpha - X^\alpha U^\beta] \nabla_\nu (\mathcal{S}X^\nu) + \mathcal{S} [X^\beta \dot{X}^\alpha - X^\alpha \dot{X}^\beta] \rangle$$

Nous poserons $Q^{\alpha\beta} = e \langle U^{[\alpha} X^{\beta]} \nabla_\nu (\mathcal{S}X^\nu) - \mathcal{S} X^{[\alpha} \dot{X}^{\beta]} \rangle$.

Le terme global d'ordre deux est donc $M^{\alpha\beta} + Q^{\alpha\beta} = e \nabla_\nu (\mathcal{S}X^\nu) U^{[\alpha} X^{\beta]}$.

La polarisation magnétique a disparu.

En groupant les termes des deux premiers ordres, on a

$$(P + M + Q)^{\alpha\beta} = 2e X^{[\alpha} U^{\beta]} \left\langle \mathcal{S} - \frac{1}{2} \nabla_\nu (\mathcal{S}X^\nu) \right\rangle$$

ou d'une manière équivalente

$$(P + M + Q)^{\alpha\beta} = 2e \mathcal{S} \left\langle 1 - \frac{1}{2} [X^\nu \nabla_\nu (\log \mathcal{S}) + \nabla_\nu (X^\nu)] \right\rangle X^{[\alpha} U^{\beta]}$$

Donc

$$e \sqrt{-g} \delta s^\alpha = \nabla_\beta \left\langle 2 \sqrt{-g} e \left[\mathcal{S} - \frac{1}{2} \nabla_\nu (\mathcal{S}X^\nu) \right] X^{[\alpha} U^{\beta]} \right\rangle$$

$$= 2 \sqrt{-g} \nabla_\beta \langle \Psi X^{[\alpha} U^{\beta]} \rangle$$

avec

$$\Psi \equiv e \left\langle \mathcal{S} - \frac{1}{2} \nabla_\nu (\mathcal{S}X^\nu) \right\rangle$$

$$e \sqrt{-g} \delta s^\alpha = \sqrt{-g} \langle X^\alpha \nabla_\beta (\Psi U^\beta) - U^\alpha \nabla_\beta (\Psi X^\beta) + \Psi [\dot{X}^\alpha - U^\alpha_{;\beta} X^\beta] \rangle$$

Le terme $\dot{X}^\alpha - U^\alpha_{;\beta} X^\beta$ est nul; d'autre part

$$A^\alpha \equiv 2 \nabla_\beta \langle \xi^{[\alpha} s^{\beta]} \rangle = - U^\alpha \nabla_\beta (\mathcal{S} \xi^\beta)$$

$$\nabla_\alpha (A^\alpha) \equiv 0 \Leftrightarrow \theta \nabla_\beta (\mathcal{S} \xi^\beta) + \langle \nabla_\beta (\mathcal{S} \xi^\beta) \rangle^* = 0$$

$$\Psi U^\beta = e \left\langle \mathcal{S} U^\beta - \frac{1}{2} U^\beta \nabla_\nu (\mathcal{S}X^\nu) \right\rangle = e \left\langle \mathcal{S} U^\beta + \frac{1}{2} A^\beta \right\rangle \rightarrow \nabla_\beta (\Psi U^\beta) = 0$$

Il reste $e \sqrt{-g} \delta s^\alpha = - \sqrt{-g} U^\alpha \nabla_\beta (\Psi X^\beta)$

$$\nabla_\beta (\Psi X^\beta) = \Psi (X^\nu U_\nu)^\cdot + \nabla_\beta (\Psi X^\beta)^\cdot$$

La disparition de la polarisation magnétique est due au choix particulier

du vecteur de connexion astreint à vérifier $\mathcal{L}(X^\alpha) = 0$. Nous reprendrons donc l'analyse avec un vecteur $X^\alpha = \varepsilon \xi^\alpha$ absolument arbitraire.

L'expression primitive de δs^α demeure valide

$$e\sqrt{-g}\delta s^\alpha = 2e\varepsilon\nabla_\beta \langle \sqrt{-g}\xi^{[\alpha}\xi^{\beta]} \rangle + e\varepsilon^2\nabla_\beta \langle \sqrt{-g}(\xi^\alpha\nabla_\nu\xi^{[\beta} s^{\nu]} - \xi^\beta\nabla_\nu\xi^{[\alpha} s^{\nu]}) \rangle$$

Au premier ordre

$$e\sqrt{-g}\delta s^\alpha = \nabla_\beta(\sqrt{-g}P^{\alpha\beta}) ; P^{\alpha\beta} = 2e\varepsilon\xi^{[\alpha}\xi^{\beta]} = 2e\mathcal{L}X^{[\alpha}U^{\beta]}$$

L'interprétation physique de $\sqrt{-g}P^{\alpha\beta}$ demeure la même.

Mais en explicitant $s^\alpha = \mathcal{L}U^\alpha$, si nous avons toujours $\nabla_\beta(\mathcal{L}U^\beta) = 0$, nous n'avons plus la relation $\dot{\xi}^\alpha = U^\alpha{}_{;\beta}\xi^\beta$.

D'où l'expression

$$e\sqrt{-g}\delta s^\alpha = e\varepsilon\sqrt{-g}\mathcal{L} \langle 2\xi^{[\alpha}U^{\beta]} \nabla_\beta \log \mathcal{L} + \dot{\xi}^\alpha + \theta\xi^\alpha - U^\alpha\nabla_\beta(\xi^\beta) - \xi^\beta\nabla_\beta(U^\alpha) \rangle$$

$$e\sqrt{-g}\delta s^\alpha = e\sqrt{-g} \langle -U^\alpha\nabla_\beta(\mathcal{L}X^\beta) + \mathcal{L}[\dot{X}^\alpha - U^\alpha{}_{;\beta}X^\beta] \rangle$$

Dans les termes d'ordre deux, nous isolons la contribution

$$\frac{e}{2}\varepsilon^2 \langle s^\nu[\xi^\alpha\xi^\beta{}_{;\nu} - \xi^\beta\xi^\alpha{}_{;\nu}] \rangle \equiv M^{\alpha\beta} = e\mathcal{L}X^{[\alpha}\dot{X}^{\beta]}$$

A ces termes s'ajoutent les suivants :

$$\frac{e}{2}\varepsilon^2 \langle \xi^\beta\nabla_\nu(\xi^\nu s^\alpha) - \xi^\alpha\nabla_\nu(\xi^\nu s^\beta) \rangle$$

ou

$$\frac{e}{2}\varepsilon^2 \langle \nabla_\nu(\xi^\nu) \cdot [\xi^\beta s^\alpha - \xi^\alpha s^\beta] + [\xi^\beta s^\alpha{}_{;\nu} - \xi^\alpha s^\beta{}_{;\nu}] \xi^\nu \rangle$$

qui se transcrivent avec $X^\alpha = \varepsilon\xi^\alpha$; $s^\alpha = \mathcal{L}U^\alpha$

$$e \langle X^{[\beta}U^{\alpha]} \nabla_\nu(\mathcal{L}X^\nu) + \mathcal{L}X^\nu X^{[\beta}U^{\alpha]}{}_{;\nu} \rangle \equiv Q^{\alpha\beta}.$$

Il vient alors

$$M^{\alpha\beta} + Q^{\alpha\beta} = e \langle U^{[\alpha}X^{\beta]} \nabla_\nu(\mathcal{L}X^\nu) + \frac{\mathcal{L}}{2} [X^\alpha(\dot{X}^\beta - U^\beta{}_{;\nu}X^\nu) - X^\beta(\dot{X}^\alpha - U^\alpha{}_{;\nu}X^\nu)] \rangle$$

Soit en posant $\dot{X}^\alpha - U^\alpha{}_{;\nu}X^\nu \equiv Y^\alpha = \mathcal{L}(X^\alpha)$

$$M^{\alpha\beta} + Q^{\alpha\beta} = e \langle U^{[\alpha}X^{\beta]} \nabla_\nu(\mathcal{L}X^\nu) + \mathcal{L}X^{[\alpha}Y^{\beta]} \rangle$$

Le terme $M^{\alpha\beta}$ peut être identifié au tenseur moment magnétique en Relativité générale.

$$(P + M + Q)^{\alpha\beta} = 2e \left\langle \mathcal{L} - \frac{1}{2} \nabla_\nu(\mathcal{L}X^\nu) \right\rangle X^{[\alpha}U^{\beta]} + e\mathcal{L}X^{[\alpha}Y^{\beta]}$$

$$e\sqrt{-g}\delta s^\alpha = \nabla_\beta \langle \sqrt{-g}(P^{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta} + Q^{\alpha\beta}) \rangle$$

Comme antérieurement nous introduisons la quantité

$$\Psi = e \left\langle \mathcal{L} - \frac{1}{2} \nabla_\nu(\mathcal{L}X^\nu) \right\rangle$$

$$\begin{aligned} \nabla_\beta \left\langle 2e\sqrt{-g} \left(\mathcal{S} - \frac{1}{2} \nabla_\nu (\mathcal{S} X^\nu) \right) X^{[\alpha} U^{\beta]} \right\rangle \\ = \sqrt{-g} \langle X^\alpha \nabla_\beta (\Psi U^\beta) - U^\alpha \nabla_\beta (\Psi X^\beta) + \Psi Y^\alpha \rangle \end{aligned}$$

Nous avons $\varepsilon A^\alpha \equiv 2 \nabla_\beta \langle X^{[\alpha} \mathcal{S}^{\beta]} \rangle = - U^\alpha \nabla_\beta (\mathcal{S} X^\beta) \times \mathcal{S} Y^\alpha$.

Comme $\nabla_\alpha (A^\alpha) \equiv 0$, $\nabla_\alpha \langle U^\alpha \nabla_\beta (\mathcal{S} X^\beta) \rangle = \nabla_\alpha (\mathcal{S} Y^\alpha)$

$$\Psi U^\beta = e \left\langle \mathcal{S} U^\beta - \frac{U^\beta}{2} \nabla_\nu (\mathcal{S} X^\nu) \right\rangle ;$$

on en tire

$$\nabla_\beta (\Psi U^\beta) = - \frac{e}{2} \nabla_\beta (\mathcal{S} Y^\beta)$$

Ensuite

$$\begin{aligned} \nabla_\beta \langle \sqrt{-g} e \mathcal{S} X^{[\alpha} Y^{\beta]} \rangle \\ = \frac{e}{2} \sqrt{-g} \langle X^\alpha \nabla_\beta (\mathcal{S} Y^\beta) - Y^\alpha \nabla_\beta (\mathcal{S} X^\beta) + \mathcal{S} [X^\alpha_{;\beta} Y^\beta - Y^\alpha_{;\beta} X^\beta] \rangle \end{aligned}$$

L'expression finale de δs^α est, dans ces conditions

$$\begin{aligned} e \sqrt{-g} \delta s^\alpha \\ = \sqrt{-g} \langle e [\mathcal{S} - \nabla_\beta (\mathcal{S} X^\beta)] Y^\alpha - U^\alpha \nabla_\beta (\Psi X^\beta) + \frac{e}{2} \mathcal{S} [X^\alpha_{;\beta} Y^\beta - Y^\alpha_{;\beta} X^\beta] \rangle \end{aligned}$$

(Manuscrit reçu le 9 avril 1976)