

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

MICHEL DAUMENS

Développement multipolaire des fonctions de vertex à deux particules finales

Annales de l'I. H. P., section A, tome 26, n° 1 (1977), p. 55-86

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1977__26_1_55_0

© Gauthier-Villars, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Développement multipolaire des fonctions de vertex à deux particules finales

par

Michel DAUMENS

Laboratoire de Physique Théorique (*), Bordeaux

RÉSUMÉ. — Les développements effectués pour les fonctions de vertex à une particule finale sont généralisés aux cas de deux particules finales. Pour les fonctions quadrivectorielles, nous obtenons des expressions analogues à celles de Chew, Goldberger, Low et Nambu et de Adler et nous étudions les conséquences du modèle isobarique.

ABSTRACT. — The expansions of the usual vertex functions are generalized to the vertex functions with two final particles. For four vector functions, we get expressions which are similar to those of Chew, Goldberger, Low and Nambu, and of Adler and we study the consequences of the isobaric model.

1. INTRODUCTION

Dans l'article précédent [1], désigné dorénavant par I, nous nous sommes limités aux vertex à une particule finale ; dans ce travail-ci, nous considérons des vertex comportant deux particules finales. Les fonctions de vertex correspondantes n'ont été explicitement étudiées que pour des opérateurs scalaires et dans ce cas, le développement multipolaire est un développement en ondes partielles ordinaire. Cependant certains développements d'amplitudes de diffusion effectués par Chew, Goldberger, Low

(*) Équipe de Recherche associée au C. N. R. S.

Postal address: Laboratoire de Physique Théorique. Université de Bordeaux I, Chemin du Solarium 33170 Gradignan (France).

et Nambu [2], Goldberger et Watson [3], Moussa et Stora [4] et par Adler [5] se ramènent à des développements multipolaires de fonctions de vertex quadrivectorielles à deux particules finales.

L'utilisation des états irréductibles à deux particules nous conduit à construire des fonctions réduites ayant les mêmes lois de transformation que les fonctions de vertex à une particule finale. Alors les méthodes exposées dans I nous permettent d'effectuer le développement multipolaire de ces fonctions pour un ordre tensoriel quelconque et dans un référentiel arbitraire. Pour un opérateur quadrivectoriel, dans un référentiel déterminé, nous obtenons des développements du même type que ceux des auteurs précités.

La section 2 est consacrée à la définition et à la paramétrisation des fonctions de vertex réduites à deux particules finales. Les développements multipolaires de ces fonctions sont effectués dans la section 3 ; nous y définissons les facteurs de forme et nous déduisons les règles de sélection dues à la conservation de la parité et au renversement du temps ; la quantification en hélicité nous conduit à un développement des composantes de ces fonctions sur les fonctions de Legendre P_m^l . Dans la section 4, nous traitons en détail les fonctions quadrivectorielles, et nous étudions les conséquences du modèle isobarique i. e. quand les deux particules finales proviennent de la désintégration d'un isobare intermédiaire de masse et spin donnés.

Comme la connaissance de l'article initial est nécessaire pour la lecture de celui-ci, nous adoptons les mêmes conventions et notations, indiquées dans l'introduction de I. Les formules sont numérotées par section et les renvois à celles de l'article initial sont précédées par I.

2. FONCTIONS DE VERTEX RÉDUITES A DEUX PARTICULES FINALES

Cette section est consacrée à la généralisation de la notion de fonctions de vertex dans le cas où on considère deux particules dans l'état final. Nous définissons d'abord les fonctions de vertex standard à deux particules finales que nous paramétrons dans un référentiel arbitraire. Ensuite en utilisant les états canoniques à deux particules, nous construisons les fonctions réduites dont les lois de transformation, dans un changement de référentiel, sont particulièrement simples. Enfin, nous établissons les contraintes sur ces fonctions, résultant de l'invariance par parité ou par renversement du temps.

2.1. Fonctions de vertex standard à deux particules finales

Considérons une particule initiale 1 de spin s_1 et d'impulsion \underline{p}_1 et deux particules finales 2 et 3 de spins s_2, s_3 et d'impulsions \underline{p}_2 et \underline{p}_3 . Si 1 est

un fermion, 2 est aussi un fermion et 3 un boson, tandis que si 1 est un boson, 2 et 3 sont soit 2 bosons soit 2 fermions. Les $(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)(2s_3 + 1)$ fonctions de vertex d'un opérateur tensoriel ${}_r\mathbf{A}$ entre les états de la particule s_1 d'une part et ceux de la particule s_2 et s_3 d'autre part sont définies par

$${}_r\mathbf{A}(\{p_3\}, \{p_2\}, \{p_1\})^{n_3 n_2 n_1} = \langle \{p_3\} n_3 | \otimes \langle \{p_2\} n_2 | {}_r\mathbf{A} | \{p_1\} n_1 \rangle \quad (1)$$

Les fonctions correspondant à des états d'impulsion $\Lambda^{-1}p_i$ ($i = 1, 2, 3$) sont définies de la même manière par

$${}_r\mathbf{A}(\{\Lambda^{-1}p_3\}, \{\Lambda^{-1}p_2\}, \{\Lambda^{-1}p_1\})^{m_3 m_2 m_1} = \langle \{\Lambda^{-1}p_3\} m_3 \{ \Lambda^{-1}p_2 \} m_2 | {}_r\mathbf{A} | \{ \Lambda^{-1}p_1 \} m_1 \rangle \quad (2)$$

En utilisant les lois de transformation des états (IB-35) et de l'opérateur (I2-1), on déduit celle des fonctions de vertex à deux particules finales

$$\begin{aligned} & (\bigotimes \Lambda^{-1}) {}_r\mathbf{A}(\{\Lambda^{-1}p_3\}, \{\Lambda^{-1}p_2\}, \{\Lambda^{-1}p_1\})^{m_3 m_2 m_1} \\ &= {}_r\mathbf{A}(\{p_3\}^\Lambda, \{p_2\}^\Lambda, \{p_1\}^\Lambda)^{m_3 m_2 m_1} \\ &= D^{s_3}(\mathbf{R}_{w_3}^{-1})^{m_3} D^{s_2}(\mathbf{R}_{w_2}^{-1})^{m_2} {}_r\mathbf{A}(\{p_3\}, \{p_2\}, \{p_1\})^{n_3 n_2 n_1} D^{s_1}(\mathbf{R}_{w_1})^{n_1} \end{aligned} \quad (3)$$

En choisissant comme état initial et final respectivement les états standard à une et à deux particules, cf. Eq. (IB-36), (A-2), on définit les fonctions de vertex standard à deux particules finales par

$${}_r\mathbf{A}(p_3, p_2, p_1, \{e\})^{n_3 n_2 n_1} = {}_r\mathbf{A}(\{p_3\}_e, \{p_2\}_e, \{p_1\}_e)^{n_3 n_2 n_1} \quad (4 a)$$

$${}_r\mathbf{A}(p_3, p_2, p_1, \Lambda\{e\})^{n_3 n_2 n_1} = {}_r\mathbf{A}(\{p_3\}_e^\Lambda, \{p_2\}_e^\Lambda, \{p_1\}_e^\Lambda)^{n_3 n_2 n_1} \quad (4 b)$$

$$\begin{aligned} & {}_r\mathbf{A}(\Lambda^{-1}p_3, \Lambda^{-1}p_2, \Lambda^{-1}p_1, \{e\})^{n_3 n_2 n_1} \\ &= {}_r\mathbf{A}(\{\Lambda^{-1}p_3\}_{\Lambda^{-1}e}, \{\Lambda^{-1}p_2\}_{\Lambda^{-1}e}, \{\Lambda^{-1}p_1\}_{\Lambda^{-1}e})^{n_3 n_2 n_1} \end{aligned} \quad (4 c)$$

La loi de transformation de ces fonctions standard s'écrit

$$\begin{aligned} & (\bigotimes \Lambda^{-1}) {}_r\mathbf{A}(\Lambda^{-1}p_3, \Lambda^{-1}p_2, \Lambda^{-1}p_1, \{e\})^{n_3 n_2 n_1} = {}_r\mathbf{A}(p_3, p_2, p_1, \Lambda\{e\})^{n_3 n_2 n_1} \\ &= D^{s_3}(\mathbf{R}_\Lambda^{-1})^{n_3} D^{s_2}(\mathbf{R}_\Lambda^{-1})^{n_2} {}_r\mathbf{A}(p_3, p_2, p_1, \{e\})^{n_3 n_2 n_1} D^{s_1}(\mathbf{R}_\Lambda)^{n_1} \end{aligned} \quad (5)$$

où les arguments des trois matrices sont la même rotation \mathbf{R}_Λ .

Les fonctions de vertex standard à deux particules s'expriment à partir des fonctions de vertex dans des tétrades arbitraires par

$$\begin{aligned} & {}_r\mathbf{A}(p_3 p_2 p_1 \{e\})^{n_3 n_2 n_1} = D^{s_3}(\mathbf{L}(p_3)^{-1}[p_3])^{n_3} D^{s_2}(\mathbf{L}(p_2)^{-1}[p_2])^{n_2} \\ & \quad {}_r\mathbf{A}(\{p_3\}\{p_2\}\{p_1\})^{m_3 m_2 m_1} D^{s_1}([p_1]^{-1}\mathbf{L}(p_1))^{m_1} \end{aligned} \quad (6)$$

2.2. Paramétrisation des fonctions de vertex standard à deux particules finales

Dans une tétrade de référence $\{e\}$, les fonctions de vertex standard à deux particules finales, ${}_r\mathbf{A}(p_3, p_2, p_1, \{e\})^{n_3 n_2 n_1}$, ne dépendent plus que des trois quadrivecteurs $\underline{p}_3, \underline{p}_2, \underline{p}_1$. Considérons d'abord les deux quadri-

vecteurs $\underline{p}_2, \underline{p}_3$. Comme dans l'appendice pour les états à deux particules, nous pouvons paramétrer $\underline{p}_2, \underline{p}_3$ par les deux quadrivecteurs \underline{p} et \underline{v} définis en (A-5 et 11),

$$\underline{p} = \underline{p}_2 + \underline{p}_3, \quad (7)$$

$$\underline{v} = C \{ -, e | L^{-1}(p)\hat{p}_2, e \}, \quad C = \{ \hat{p}_2, \hat{p}_3 | \hat{p}_3, \hat{p}_2 \}^{-1/2} \quad (8)$$

Si nous considérons maintenant les impulsions \underline{p} et \underline{p}_1 , nous nous ramonnons à une situation analogue aux fonctions de vertex à une particule finale, la seule différence étant que l'invariant \underline{p}^2 n'est pas fixé par une masse. Pour paramétrer \underline{p} et \underline{p}_1 , nous utilisons donc la même méthode qu'au paragraphe (I2-4).

Le quadrivecteur \underline{e} de genre temps des tétrades de référence est toujours dans le 2-plan $(\underline{p}, \underline{p}_1)$,

$$\underline{e} \in (\underline{p}_1, \underline{p}) \quad (9)$$

et pour obtenir une base orthonormée de ce 2-plan, nous construisons un quadrivecteur \underline{u} unitaire de genre espace ($\underline{u}^2 = -1$) et orthogonal à \underline{e} par

$$\underline{u} = N \{ -, e | \hat{p}_1, \hat{p} \}, \quad N = \{ \hat{p}, \hat{p}_1 | \hat{p}_1, \hat{p} \}^{-1/2} \quad (10)$$

Considérons le quadrivecteur \underline{q} défini par

$$\underline{q} = \underline{p} - \underline{p}_1 = \underline{p}_2 + \underline{p}_3 - \underline{p}_1 \quad (11)$$

La constante N s'exprime en fonction des invariants \underline{p}^2 et \underline{q}^2 et de la masse M_1 de la particule initiale par

$$N = \frac{2M_1\sqrt{p^2}}{\lambda(\sqrt{q^2}, \sqrt{p^2}, M_1)} \quad (12)$$

où la fonction λ est définie en (A-8).

Dans la tétrade de référence $\{e\}$, on paramètre donc les fonctions de vertex standard par les invariants \underline{p}^2 et \underline{q}^2 , et par les quadrivecteurs $\underline{u}, \underline{v}$ ou $R_\Lambda^{-1}\underline{u}, R_\Lambda^{-1}\underline{v}$,

$${}_r\mathbf{A}(p^2, q^2, \underline{u}, \underline{v}, \{e\})^{n_3 n_2}_{n_1} = {}_r\mathbf{A}(p_3, p_2, p_1, \{e\})^{n_3 n_2}_{n_1} \quad (13 a)$$

$${}_r\mathbf{A}(p^2, q^2, R_\Lambda^{-1}\underline{u}, R_\Lambda^{-1}\underline{v}, \{e\})^{n_3 n_2}_{n_1} = {}_r\mathbf{A}(\Lambda^{-1}p_3, \Lambda^{-1}p_2, \Lambda^{-1}p_1, \{e\})^{n_3 n_2}_{n_1} \quad (13 b)$$

Dans une nouvelle tétrade $\Lambda\{e\}$, telle que $\Lambda\underline{e} \in (\underline{p}_1, \underline{p}_2)$, on paramètre les nouvelles fonctions par les mêmes invariants $\underline{p}^2, \underline{q}^2$, et par les nouveaux quadrivecteurs $L_\Lambda\underline{u}, L_\Lambda\underline{v}$. Les nouvelles fonctions standard sont notées

$${}_r\mathbf{A}(p^2, q^2, L_\Lambda\underline{u}, L_\Lambda\underline{v}, \Lambda\{e\})^{n_3 n_2}_{n_1} = {}_r\mathbf{A}(p_3 p_2 p_1, \Lambda\{e\})^{n_3 n_2}_{n_1} \quad (13 c)$$

et la loi de transformation des fonctions standard s'écrit

$$\begin{aligned} & (\overset{r}{\otimes} \Lambda^{-1}) {}_r\mathbf{A}(p^2, q^2, R_\Lambda^{-1}\underline{u}, R_\Lambda^{-1}\underline{v}, \{e\})^{n_3 n_2}_{n_1} \\ &= {}_r\mathbf{A}(p^2, q^2, L_\Lambda\underline{u}, L_\Lambda\underline{v}, \Lambda\{e\})^{n_3 n_2}_{n_1} \\ &= D^{s_3}(R_\Lambda^{-1})^{n_3}_{n_3} D^{s_2}(R_\Lambda^{-1})^{n_2}_{n_2} {}_r\mathbf{A}(p^2, q^2, \underline{u}, \underline{v}, \{e\})^{n_3 n_2}_{n_1} D^{s_1}(R_\Lambda)^{n_1}_{n_1} \quad (14) \end{aligned}$$

2.3. Remarque cinématique

Au paragraphe précédent, nous avons paramétré l'ensemble des trois quadrivecteurs $\underline{p}_1, \underline{p}_2, \underline{p}_3$ dans une tétrade de référence $\{e\}$, par deux invariants p^2, q^2 et par deux quadrivecteurs \underline{u} et \underline{v} dont les constantes de normalisation N et C ne font intervenir que les masses des particules et ces mêmes invariants p^2, q^2 , cf. Eq. (A-7) et (12). Or à partir de trois quadrivecteurs linéairement indépendants, on peut former trois invariants indépendants. Le troisième invariant est le produit scalaire $\underline{u} \cdot \underline{v}$, le seul que l'on puisse former avec ces deux vecteurs unitaires ($\underline{u}^2 = \underline{v}^2 = -1$). Ce produit scalaire s'exprime en fonction des quadrivecteurs $\underline{p}_1, \underline{p}_2, \underline{p}_3$, sous la forme,

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = - \frac{\{p, p_1 | p_2, p_3\}}{\sqrt{\{p, p_1 | p_1, p\} \{p_2 p_3 | p_3 p_2\}}} \tag{15}$$

Si on se place dans le centre de masse des particules finales, i. e. on choisit $\underline{e} = \hat{p}$, on obtient

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = - \cos \theta \tag{16}$$

où θ est l'angle des impulsions \vec{p}_1 et \vec{p}_2 dans ce système (cf. fig. 1).

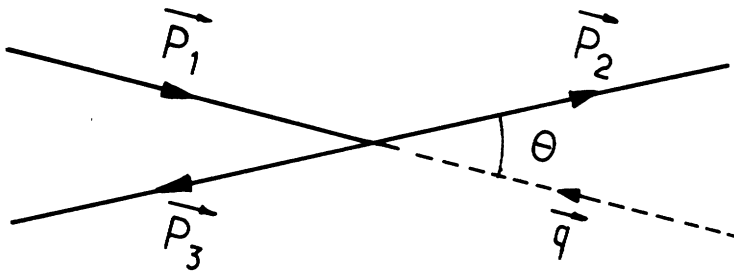


FIG. 1. — Définition de l'angle θ dans le système du centre de masse des particules finales.

2.4. Fonctions de vertex réduites à deux particules finales

Les fonctions de vertex canoniques à deux particules finales sont définies à l'aide des états canoniques à deux particules (A-21) et des états standard de la particule initiale par

$${}_r \Delta^{JIS}(p^2, q^2, \underline{u}, \{e\})_{n_1}^N = \langle JIS, \{p\}_e N | {}_r \Delta | \{p_1\}_e n_1 \rangle \tag{17 a}$$

$$\begin{aligned} {}_r \Delta^{JIS}(p^2, q^2, R_\Lambda^{-1} \underline{u}, \{e\})_{n_1}^N \\ = \langle JIS, \{\Lambda^{-1} p\}_{\Lambda^{-1} e} | {}_r \Delta | \{\Lambda^{-1} p_1\}_{\Lambda^{-1} e} n_1 \rangle \end{aligned} \tag{17 b}$$

La loi de transformation des états canoniques (A-22), permet d'obtenir la loi de transformation de ces fonctions canoniques

$$\begin{aligned} (\overset{r}{\otimes} \Lambda^{-1}) {}_r\mathbb{A}^{JS}(p^2, q^2, \mathbf{R}_\Lambda^{-1}\underline{u}, \{e\})_{n_1}^N &= {}_r\mathbb{A}^{JS}(p^2, q^2, \mathbf{L}_\Lambda \underline{u}, \Lambda \{e\})_{n_1}^N \\ &= \mathbf{D}^J(\mathbf{R}_\Lambda^{-1})_{\mathbf{M}}^N {}_r\mathbb{A}^{JS}(p^2, q^2, \underline{u}, \{e\})_{m_1}^M \mathbf{D}^{s_1}(\mathbf{R}_\Lambda)^{m_1}_{n_1} \end{aligned} \quad (18)$$

cette loi est identique à celle des fonctions de vertex standard à une particule finale de spin $s_2 = J$ (cf. Eq. I2-15 et 16).

Le produit tensoriel de représentations intervenant dans la relation précédente peut être réduit à l'aide des coefficients-CG. Alors, les fonctions de vertex réduites, à deux particules finales, définies par

$$\begin{aligned} {}_r\mathbb{A}^{JS}(p^2, q^2, \underline{u}, \{e\})_{\mathbf{M}}^L &= \frac{2L+1}{2J+1} \langle \mathbf{L}M s_1 n_1 | \mathbf{J}N \rangle {}_r\mathbb{A}^{JS}(p^2, q^2, \underline{u}, \{e\})_{m_1}^N \end{aligned} \quad (19 a)$$

$$\begin{aligned} {}_r\mathbb{A}^{JS}(p^2, q^2, \mathbf{R}_\Lambda^{-1}\underline{u}, \{e\})_{\mathbf{M}}^L &= \frac{2L+1}{2J+1} \langle \mathbf{L}M s_1 n_1 | \mathbf{J}N \rangle {}_r\mathbb{A}^{JS}(p^2, q^2, \mathbf{R}_\Lambda^{-1}\underline{u}, \{e\})_{m_1}^N \end{aligned} \quad (19 b)$$

se transforment suivant une loi identique à celle des fonctions réduites pour une particule finale (I2-36),

$$\begin{aligned} (\overset{r}{\otimes} \Lambda^{-1}) {}_r\mathbb{A}^{JS}(p^2, q^2, \mathbf{R}_\Lambda^{-1}\underline{u}, \{e\})_{\mathbf{M}}^L &= {}_r\mathbb{A}^{JS}(p^2, q^2, \mathbf{L}_\Lambda \underline{u}, \Lambda \{e\})_{\mathbf{M}}^L \\ &= {}_r\mathbb{A}^{JS}(p^2, q^2, \underline{u}, \{e\})_{\mathbf{M}'}^L \times \mathbf{D}^L(\mathbf{R}_\Lambda)^{M'}_{\mathbf{M}} \end{aligned} \quad (20)$$

Dans les cas particuliers où la transformation de Lorentz Λ est une rotation du petit groupe de \mathfrak{g} , ou une transformation pure \mathbf{L} , l'expression précédente devient

$$\begin{aligned} (\overset{r}{\otimes} \mathbf{R}) {}_r\mathbb{A}^{JS}(p^2, q^2, \mathbf{R}^{-1}\underline{u}, \{e\})_{\mathbf{M}}^L &= {}_r\mathbb{A}^{JS}(p^2, q^2, \underline{u}, \mathbf{R} \{e\})_{\mathbf{M}}^L \\ &= {}_r\mathbb{A}^{JS}(p^2, q^2, \underline{u}, \{e\})_{\mathbf{M}'}^L \mathbf{D}^L(\mathbf{R})^{M'}_{\mathbf{M}} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} (\overset{r}{\otimes} \mathbf{L}) {}_r\mathbb{A}^{JS}(p^2, q^2, \underline{u}, \{e\})_{\mathbf{M}}^L &= {}_r\mathbb{A}^{JS}(p^2, q^2, \mathbf{L}\underline{u}, \mathbf{L} \{e\})_{\mathbf{M}}^L \\ &= {}_r\mathbb{A}^{JS}(p^2, q^2, \underline{u}, \{e\})_{\mathbf{M}}^L \end{aligned} \quad (22)$$

Cette dernière expression montre que les fonctions de vertex réduites sont inchangées quand on fait agir une transformation de Lorentz pure sur la tétrade de référence.

En utilisant les relations (A-26 et 27) on déduit la relation entre les fonctions standard et réduite. Il vient

$$\begin{aligned} {}_r\mathbb{A}(p^2, q^2, \underline{u}, \underline{v}, \{e\})_{n_1}^{n_3 n_2} &= \sum_{JSL} Y_m^L(\underline{v}, \{e\}) \langle s_3 n_3 s_2 n_2 | \mathbf{S}\sigma \rangle \langle \mathbf{L}m \mathbf{S}\sigma | \mathbf{J}N \rangle \\ &\quad \langle \mathbf{J}N | \mathbf{L}M s_1 n_1 \rangle {}_r\mathbb{A}^{JS}(p^2, q^2, \underline{u}, \{e\})_{\mathbf{M}}^L \end{aligned} \quad (23)$$

et inversement on a

$$\begin{aligned}
 & r\mathbb{A}^{JS}(p^2, q^2, \underline{u}, \{e\})_M^{L*} \\
 &= \frac{2L+1}{2J+1} \int Y_m^l(\underline{v}, \{e\})^* r\mathbb{A}(p^2, q^2, \underline{u}, \underline{v}, \{e\})^{n_3 n_2 n_1} \\
 & d\Omega(\underline{v}, \{e\}) \langle LM s_1 n_1 | JN \rangle \langle JN | lm S \sigma \rangle \langle S \sigma | s_3 n_3 s_2 n_2 \rangle
 \end{aligned} \tag{24}$$

Un cas particulier intéressant est $s_3 = 0$ qui correspond physiquement à la production de mésons π par exemple. Dans ce cas, le premier coefficient-CG de la formule (23) disparaît, et on omet l'indice $S = s_2$ dans la notation des fonctions réduites. En outre, pour les plus petites valeurs de spins initiaux, $s_1 = 0$ pour les bosons et $s_1 = 1/2$ pour les fermions, nous pouvons effectuer la sommation sur L et calculer explicitement le dernier coefficient-CG de l'équation (23). On obtient

Bosons $s_1 = s_3 = 0$ (J entier)

$$\begin{aligned}
 & r\mathbb{A}(p^2, q^2, \underline{u}, \underline{v}, \{e\})^{n_2} \\
 &= \sum_{JM} Y_m^l(\underline{v}, \{e\}) \langle l m s_2 n_2 | JM \rangle r\mathbb{A}^J(p^2, q^2, \underline{u}, \{e\})_M^{J*}
 \end{aligned} \tag{25}$$

Fermions $s_1 = 1/2, s_3 = 0$ (J demi-entier impair)

$$\begin{aligned}
 & r\mathbb{A}(p^2, q^2, \underline{u}, \underline{v}, \{e\})^{n_2 \pm 1/2} = \sum_{JM} Y_m^l(\underline{v}, \{e\}) \langle l m s_2 n_2 | J, M \pm 1/2 \rangle \\
 & \left\{ \sqrt{\frac{J+1/2 \pm M}{2J}} r\mathbb{A}^J(p^2, q^2, \underline{u}, \underline{v}, \{e\})_M^{J-1/2*} \right. \\
 & \left. \mp \sqrt{\frac{J+1/2 \mp M}{2J+2}} r\mathbb{A}^J(p^2, q^2, \underline{u}, \underline{v}, \{e\})_M^{J+1/2*} \right\}
 \end{aligned} \tag{26}$$

2.5. Conséquences de l'invariance par parité et par renversement du temps sur les fonctions réduites

Considérons d'abord l'invariance par parité. En utilisant les lois de transformation de l'opérateur (I2-2) des états standard à une particule (IB-40) et des états canoniques à deux particules (A-30), nous obtenons la relation

$$r\mathbb{A}^{JS}(p^2, q^2, \underline{u}, \{e\})_{n_1}^N = (-1)^l \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 (\otimes P) r\mathbb{A}^{JS}(p^2, q^2, P\underline{u}, \{e\})_{n_1}^N \tag{28}$$

où $\varepsilon, \varepsilon_i$ ($i = 1, 2, 3$) sont les parités intrinsèques de l'opérateur et des par-

ticules. En utilisant les définitions (19) des fonctions réduites, on déduit

$${}_r\mathbb{A}^{JIS}(p^2, q^2, \underline{u}, \{e\})_{\mathbb{M}}^{L*} = (-1)^l \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \left(\overset{r}{\otimes} P \right) {}_r\mathbb{A}^{JIS}(p^2, q^2, P\underline{u}, \{e\})_{\mathbb{M}}^{L*} \quad (29)$$

Étudions ensuite l'invariance par renversement du temps. Les équations (I2-3), (IB-41) et (A-35) impliquent la condition

$${}_r\mathbb{A}^{JIS}(p^2, q^2, \underline{u}, \{e\})_{n_1}^N = \varepsilon_T (-1)^{S-s_1+N-n_1} \left(\overset{r}{\otimes} T \right) {}_r\mathbb{A}^{JIS}(p^2, q^2, P\underline{u}, \{e\})_{-n_1}^{-N*} \quad (30)$$

Les propriétés de symétrie des coefficients-CG et les définitions (19) entraînent

$${}_r\mathbb{A}^{JIS}(p^2, q^2, \underline{u}, \{e\})_{\mathbb{M}}^{L*} = \varepsilon_T (-1)^{L+M} \left(\overset{r}{\otimes} T \right) {}_r\mathbb{A}^{JIS}(p^2, q^2, P\underline{u}, \{e\})_{\mathbb{M}}^{L*} \quad (31)$$

3. DÉVELOPPEMENT MULTIPOLAIRE DES FONCTIONS DE VERTEX A DEUX PARTICULES FINALES

Les méthodes exposées aux sections 3, 4 de I sont utilisées pour développer les fonctions de vertex réduites, à deux particules finales, sur les harmoniques sphériques tensorielles et sur les multipôles tensoriels. Nous définissons ainsi les facteurs de forme et les facteurs de forme multipolaires qui ne dépendent que des invariants p^2 et q^2 et du choix du quadrivecteur \underline{e} dans le 2-plan $(\underline{p}, \underline{p}_1)$. Ensuite nous quantifions en hélicité et nous obtenons le développement multipolaire des composantes sphériques des fonctions de vertex standard sur les fonctions de Legendre associées P_m^l , et nous étudions les règles de sélection imposées aux facteurs de forme par la conservation de la parité et par l'invariance par renversement du temps.

3.1. Facteurs de forme

Dans une rotation de la tétrade de référence, les fonctions de vertex réduites ${}_r\mathbb{A}^{JIS}(p^2, q^2, \underline{u}, \{e\})_{\mathbb{M}}^L$ se transforment de la même manière que les harmoniques sphériques tensorielles, cf. Eq. (2-20), (IA-28). Elles peuvent donc être développées sur cette base avec des coefficients invariants par rotation

$${}_r\mathbb{A}^{JIS}(p^2, q^2, \underline{u}, \{e\})_{\mathbb{M}}^{L*} = \sum_{l'} \sum_{j_r, k_r} F^{JIS}(p^2, q^2, \underline{e})^{l' j_r k_r L} {}_r\mathbb{Y}^{l' j_r k_r L}(\underline{u}, \{e\})_{\mathbb{M}}^{L*} \quad (1)$$

Les coefficients $F^{JIS}(p^2, q^2, \underline{e})^{l'j_r k_r L}$ sont appelés facteurs de forme des fonctions de vertex à deux particules finales et ne dépendent plus que des invariants p^2 et q^2 , et du choix du quadrivecteur \underline{e} dans le 2-plan $(\underline{p}, \underline{p}_1)$.

En utilisant la relation d'orthonormalité (IA-27) des harmoniques sphériques tensorielles on peut inverser la définition (1) des facteurs de

forme, avec $K = \sum_{i=1}^r k_i$

$$F^{JIS}(p^2, q^2, \underline{e})^{l'j_r k_r L} = (-1)^K \int r \underline{Y}^{l'j_r k_r}(u, \{e\})_{\underline{M}}^{L(r)} r \underline{A}^{JIS}(p^2, q^2, \underline{u}, \{e\})_{\underline{M}}^{L*} d\Omega(\underline{u}, \{e\}) \quad (2)$$

Dans la suite quand il n'y aura aucune ambiguïté, nous omettrons la tétrade de référence $\{e\}$ et le quadrivecteur \underline{e} dans la notation des fonctions de vertex et des facteurs de forme.

En multipliant scalairement la définition (1) par un tenseur de base sphérique, on construit les composantes sphériques, cf. Eq. (IA-23), des fonctions de vertex réduites et on obtient le développement en facteurs de forme de ces composantes sur les harmoniques scalaires

$$[A^{JIS}(p^2, q^2, \underline{u})_{\underline{M}}^{L*}]_{\underline{n}}^{j_r k_r} = \sum_{l'm'} \langle LM | l'm'j,n \rangle F^{JIS}(p^2, q^2)^{l'j_r k_r L} Y_{\underline{m}}^{l'}(\underline{u})^* \quad (3)$$

Les relations (2-23), (1) et (3) permettent d'obtenir les développements en facteurs de forme des fonctions de vertex standard à deux particules finales

$$r \underline{A}(p^2, q^2, \underline{u}, \underline{v})^{n_3 n_2}_{n_1} = \sum_{\substack{JIS \\ l'L}} \sum_{j_r \dots k_r} \langle s_3 n_3 s_2 n_2 | S\sigma \rangle \langle lmS\sigma | JN \rangle \langle JN | LMs_1 n_1 \rangle F^{JIS}(p^2, q^2)^{l'j_r k_r L} Y_{\underline{m}}^l(\underline{v}) r \underline{Y}^{l'j_r k_r}(\underline{u})_{\underline{M}}^{L*} \quad (4)$$

et de leurs composantes sphériques

$$[A(p^2, q^2, \underline{u}, \underline{v})^{n_3 n_2}_{n_1}]^{j_r k_r} = \sum_{JISL} \sum_{l'm'} \langle s_3 n_3 s_2 n_2 | S\sigma \rangle \langle lmS\sigma | JN \rangle \langle JN | LMs_1 n_1 \rangle \langle LM | l'm'j,n \rangle F^{JIS}(p^2, q^2)^{l'j_r k_r L} Y_{\underline{m}}^l(\underline{v}) Y_{\underline{m}'}^{l'}(\underline{u})^* \quad (5)$$

3.2. Facteurs de forme multipolaires

Les multipôles tensoriels se transforment de la même manière que les harmoniques tensorielles, cf. Eq. (IA-33), et ils peuvent servir de base pour développer les fonctions de vertex réduites, à deux particules finales.

Les facteurs de forme multipolaires, coefficients de ce développement, sont définis par

$${}_r\mathbb{A}^{JIS}(p^2, q^2, \underline{u}, \{e\})_M^{L*} = \sum_{\mu} \sum_{j_r \dots k_r} G^{JIS}(p^2, q^2, \underline{e})_{\mu}^{j_r k_r} {}_r\mathbb{X}_{\mu}^{j_r k_r}(\underline{u}, \{e\})_M^{L*} \quad (6)$$

et en inversant cette définition à l'aide de l'orthonormalité (IA-31) des multipôles, on obtient

$$G^{JIS}(p^2, q^2, \underline{e})_{\mu}^{j_r k_r L} = (-1)^K \int {}_r\mathbb{X}_{\mu}^{j_r k_r}(\underline{u}, \{e\})_M^{L*} {}_r\mathbb{A}^{JIS}(p^2, q^2, \underline{u}, \{e\})_M^{L*} d\Omega(\underline{u}, \{e\}) \quad (7)$$

Il résulte de la définition des multipôles (IA-30) que les facteurs de forme multipolaires sont des combinaisons linéaires orthonormées des facteurs de forme, les coefficients de ces combinaisons étant les mêmes qu'en (I4-3). Comme les facteurs de forme, les facteurs de forme multipolaires sont invariants par rotation de la tétrade de référence et ne dépendent que des invariants p^2 et q^2 et du choix du quadrivecteur \underline{e} dans le 2-plan $(\underline{p}_1, \underline{p})$. L'intérêt des facteurs de forme multipolaires réside dans le fait que, dans le cas d'un opérateur quadrivectoriel, ils sont eux-mêmes irréductibles dans les transformations de Lorentz pures de la tétrade de référence, et que dans le cas d'un opérateur tensoriel, ils permettent de construire les facteurs de forme irréductibles, voir paragraphe IA-5.

En multipliant scalairement la relation (6) par un tenseur de base sphérique, on déduit le développement multipolaire des composantes sphériques des fonctions de vertex réduites sur les harmoniques scalaires. Ce développement peut se mettre sous la forme

$$[A^{JIS}(p^2, q^2, \underline{u})_M^{L*}]_n^{j_r k_r} = \sum_{\mu \geq 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\delta_{\mu 0}} \sum_{l' m'} (l'/\hat{L}) \langle j_r \mu l' 0 | L \mu \rangle \langle LM | l' m' j_r n \rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}} [G^{JIS}(p^2, q^2)_{\mu}^{j_r k_r L} + G^{JIS}(p^2, q^2)_{-\mu}^{j_r k_r L} + (-1)^{l'+L} (G^{JIS}(p^2, q^2)_{\mu}^{j_r k_r L} \\ - G^{JIS}(p^2, q^2)_{-\mu}^{j_r k_r L})] Y_m^{l'}(\underline{u})^* \quad (8)$$

Les relations (2-23) et (6) permettent d'obtenir les développements multipolaires des fonctions de vertex standard à deux particules finales

$${}_r\mathbb{A}(p^2, q^2, \underline{u}, \underline{v})^{n_3 n_2 n_1} = \sum_{JIS} \sum_{j_r \dots k_r} \langle s_3 n_3 s_2 n_2 | S \sigma \rangle \langle l m S \sigma | J N \rangle \langle J N | L M s_1 n_1 \rangle \\ G^{JIS}(p^2, q^2)_{\mu}^{j_r k_r L} Y_m^l(\underline{v}) {}_r\mathbb{X}_{\mu}^{j_r k_r}(\underline{u})_M^{L*} \quad (9)$$

et de leurs composantes sphériques

$$\begin{aligned}
 & [A(p^2, q^2, \underline{u}, \underline{v})^{n_3 n_2} \dots]_{n_1}^{j_r k_r} \\
 &= \sum_{JSL} \langle s_3 n_3 s_2 n_2 | S\sigma \rangle \langle lmS\sigma | JN \rangle \langle JN | LM s_1 n_1 \rangle \\
 & \sum_{l'm'} \langle LM | l'm' j_r n \rangle \sum_{\mu \geq 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\delta_{\mu 0}} (\hat{l}'/\hat{L}) \langle j_r \mu l 0 | L\mu \rangle Y_m^l(\underline{v}) \\
 & \frac{1}{\sqrt{2}} [G^{JIS}(p^2, q^2)_{\mu}^{j_r k_r L} + G^{JIS}(p^2, q^2)_{-\mu}^{j_r k_r L} \\
 & + (-1)^{l'+L} (G^{JIS}(p^2, q^2)_{\mu}^{j_r k_r L} - G^{JIS}(p^2, q^2)_{-\mu}^{j_r k_r L})] Y_m^{l'}(\underline{u})^* \quad (10)
 \end{aligned}$$

Ces développements multipolaires sont des généralisations pour des spins arbitraires et des opérateurs d'ordre quelconque des développements effectués par plusieurs auteurs C. G. L. N. [2], G. W. [3], M. S. [4], A. [5] qui adoptent un point de vue légèrement différent. En effet ils font un développement multipolaire de l'amplitude de diffusion dans des réactions à deux corps.

3.3. Quantification en hélicité dans le cas de deux particules finales

Quand on quantifie en hélicité, cf. (I2-45), on choisit $\underline{e}_3 = \underline{u}$, et la dépendance en \underline{u} disparaît. Mais dans le cas de deux particules finales, les trois impulsions $\underline{p}_1, \underline{p}_2, \underline{p}_3$ sont *a priori* linéairement indépendantes, et définissent donc un 3-plan.

La normale \underline{n} ($\underline{n}^2 = -1$), à ce 3-plan est

$$\underline{n} = N \{ -, p_1, p_2, p_3 \}, \quad N^{-1/2} = - \{ p_1, p_2, p_3 | p_1, p_2, p_3 \} \quad (11)$$

où l'on a utilisé la notation,

$$\{ a, b, c | A, B, C \} = \{ -, a, b, c \} \cdot \{ -, A, B, C \} = - \begin{vmatrix} \underline{a} \cdot \underline{A} & \underline{a} \cdot \underline{B} & \underline{a} \cdot \underline{C} \\ \underline{b} \cdot \underline{A} & \underline{b} \cdot \underline{B} & \underline{b} \cdot \underline{C} \\ \underline{c} \cdot \underline{A} & \underline{c} \cdot \underline{B} & \underline{c} \cdot \underline{C} \end{vmatrix} \quad (12)$$

On appelle tétrade d'hélicité une tétrade $\{ e \}^H$ telle que

$$\underline{e}_3^H = \underline{u} \quad \text{et} \quad \underline{e}_2^H = \underline{n}. \quad (13)$$

Dans cette tétrade, les harmoniques de \underline{u} et de \underline{v} deviennent

$$Y_m^l(\underline{u}, \{ e \}^H) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0}, \quad (14)$$

$$Y_m^l(\underline{v}, \{e\}^H) \equiv Y_m^l(x) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_m^l(x) \quad (15)$$

où les P_m^l sont les fonctions de Legendre associées et où l'on a posé

$$x = -\underline{u} \cdot \underline{v} = \cos \theta \quad (16)$$

La relation (15) résulte de l'orthogonalité des quadrivecteurs \underline{v} et \underline{n} .

Les relations (2-23) et (15) permettent d'écrire la relation de passage entre les composantes des fonctions de vertex standard et réduites, en hélicité,

$$[A(p^2, q^2, x)^{n_3 n_2}_{n_1}]_n^{j_r k_r} = \sum_{JSL} \langle s_3 n_3 s_2 n_2 | S \sigma \rangle Y_m^l(x) \langle l m S \sigma | JN \rangle \langle JN | L n s_1 n_1 \rangle [A^{JIS}(p^2, q^2, e_3)^{L*}]_n^{j_r k_r} \quad (17)$$

Remarquons que les symétries des coefficients-CG imposent une condition sur les indices magnétiques

$$m = n + n_1 - n_2 - n_3 \quad (18)$$

Dans le cas particulier $s_3 = 0$, la sommation sur $S = s_2$ disparaît et pour $s_1 = 0$ ou $1/2$, on peut effectuer la sommation sur L . En utilisant les formules (2-25, 26) on obtient

<p><i>Bosons</i> $s_1 = s_3 = 0$ (J entier)</p> $[A(p^2, q^2, x)^{n_2}_{n_1}]_n^{j_r k_r} = \sum_{l, J} Y_m^l(x) \langle l m s_2 n_2 JN \rangle [A^{Jl}(p^2, q^2, e_3)^{J*}]_n^{j_r k_r} \quad (19)$
<p><i>Fermions</i> $s_1 = 1/2, s_3 = 0$ (J demi-entier impair)</p> $[A(p^2, q^2, x)^{n_2 \pm 1/2}_{n_1}]_n^{j_r k_r} = \sum_{l, J} Y_m^l(x) \langle l m s_2 n_2 Jn \pm 1/2 \rangle \left\{ \begin{aligned} &\sqrt{\frac{J + 1/2 \pm n}{2J}} [A^{Jl}(p^2, q^2, e_3)^{J-1/2*}]_n^{j_r k_r} \\ &\mp \sqrt{\frac{J + 1/2 \mp n}{2J + 2}} [A^{Jl}(p^2, q^2, e_3)^{J+1/2*}]_n^{j_r k_r} \end{aligned} \right\} \quad (20)$

En hélicité, le développement en facteurs de forme (3) des composantes sphériques des fonctions réduites devient

$$[A^{JIS}(p^2, q^2, e_3)^{L*}]_n^{j_r k_r} = \sum_{l'} \sqrt{\frac{2l'+1}{4\pi}} \langle Ln | l' 0 j_n \rangle F^{JIS}(p^2, q^2)^{l' j_r k_r L} \quad (21)$$

De même le développement multipolaire (8) se simplifie, car on peut effectuer les sommations sur l' et μ , on obtient

$$[A^{JIS}(p^2, q^2, e_3)^{L*}]_0^{j_r k_r L} = \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} G^{JIS}(p^2, q^2)_0^{j_r k_r L} \quad (22 a)$$

$$[A^{JIS}(p^2, q^2, e_3)^{L*}]_n^{j_r k_r} = (-1)^{j_r} \sqrt{\frac{2L+1}{8\pi}} (G^{JIS}(p^2, q^2)_n^{j_r k_r L} - G^{JIS}(p^2, q^2)_{-n}^{j_r k_r L}), \quad n > 0 \quad (22 b)$$

$$[A^{JIS}(p^2, q^2, e_3)^{L*}]_{-n}^{j_r k_r} = \sqrt{\frac{2L+1}{8\pi}} (G^{JIS}(p^2, q^2)_n^{j_r k_r L} + G^{JIS}(p^2, q^2)_{-n}^{j_r k_r L}), \quad n > 0 \quad (22 c)$$

Comme nous l'avons remarqué pour les fonctions de vertex à une particule finale, le développement en facteurs de forme multipolaires (22) est plus simple que le développement en facteur de forme (21) car il n'y a plus aucune sommation à effectuer.

3.4. Règles de sélection dues à la parité

Si l'opérateur \underline{A} a une parité ε donnée, à l'aide des lois de transformation par parité des états standard à une particule (IB-40) et des états canoniques à deux particules (A-30) on obtient par la même méthode qu'au § I 3.3, une règle de sélection sur les facteurs de forme

$$F^{JIS}(p^2, q^2)^{l' j_r k_r L} = (-1)^{l'+K+l} \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 F^{JIS}(p^2, q^2)^{l' j_r k_r L} \quad (23)$$

On en déduit les règles de sélection sur les facteurs de forme multipolaires. Ce sont

$$G^{JIS}(p^2, q^2)_0^{j_r k_r L} = (-1)^{j_r + K + l + L} \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 G^{JIS}(p^2, q^2)_0^{j_r k_r L} \quad (24 a)$$

$$G^{JIS}(p^2, q^2)_{\pm \mu}^{j_r k_r L} = \pm (-1)^{K + l + L} \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 G^{JIS}(p^2, q^2)_{\pm \mu}^{j_r k_r L}, \quad \mu > 0 \quad (24 b)$$

cette dernière relation entraîne que pour l, L, j_r, k_r fixés soit les facteurs de forme multipolaires à μ positif, soit ceux à μ négatifs sont nuls.

En portant la condition (23) dans l'équation (17) on obtient une règle de sélection sur les composantes sphériques des fonctions de vertex réduites, en hélicité,

$$[A^{JIS}(p^2, q^2, e_3)^{L*}]_n^{j_r k_r} = (-1)^{j_r + K + l + L} \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 [A^{JIS}(p^2, q^2, e_3)^{L*}]_{-n}^{j_r k_r} \quad (25)$$

et on en déduit une règle de sélection sur les composantes des fonctions de vertex standard, toujours en hélicité,

$$\left[A(p^2, q^2, \underline{u}, \underline{v}, \{e\}^H)^{n_3 n_2}_{n_1} \right]^{j_r k_r} = \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 (-1)^{K+j_r+s+s_2-s_1} \left[A(p^2, q^2, \underline{u}, \underline{v}, \{e\}^H)^{-n_3 -n_2}_{-n_1} \right]^{j_r k_r}_{-n} \quad (26)$$

3.5. Règles de sélection dues au renversement du temps

Si l'opérateur \mathcal{A} se transforme dans le renversement du temps suivant la relation (I2-3) qui définit le signe ε_T caractérisant le comportement de l'opérateur, à l'aide des lois de transformation des états standard à une particule (IB-41), et des états canoniques à deux particules (A-35), on obtient par la même méthode qu'au § I 3.4, la règle de sélection

$$F^{JIS}(p^2, q^2)^{j_r k_r L} = (-1)^r \varepsilon_T F^{JIS}(p^2, q^2)^{j_r k_r L*} \quad (27 a)$$

$$G^{JIS}(p^2, q^2)^{j_r k_r L} = (-1)^r \varepsilon_T G^{JIS}(p^2, q^2)^{j_r k_r L*} \quad (27 b)$$

L'invariance par renversement du temps implique que les facteurs de forme sont réels ou imaginaires, et il en est de même des composantes sphériques des fonctions de vertex standard et réduites, en hélicité, qui sont des combinaisons linéaires réelles des facteurs de forme.

4. FACTEURS DE FORME MULTIPOLAIRES IRRÉDUCTIBLES ET MODÈLE ISOBARIQUE DANS LE CAS D'UN OPÉRATEUR QUADRIVECTORIEL

Les multipôles quadrivectoriels étant irréductibles, cf. (IA-35), il en résulte que les facteurs de forme multipolaires d'un opérateur quadrivectoriel sont irréductibles. Dans cette section nous construisons explicitement les facteurs de forme irréductibles des fonctions de vertex quadrivectorielles à deux particules finales. Puis nous supposons que ces particules sont produites par l'intermédiaire d'un isobare. Au vertex de formation de cet isobare nous sommes ramenés à une fonction à une seule particule finale dont nous écrivons les facteurs de forme multipolaires selon la méthode exposée au § I 4.6. Après avoir étudié la désintégration de l'isobare, nous analysons sa contribution au développement multipolaire pour deux particules finales. Enfin nous étudions en détail la production d'une résonance de spin 3/2.

4.1. Facteurs de forme multipolaires irréductibles

Dans le cas d'un opérateur quadrivectoriel, en utilisant les notations définies en (IA-36) et (I4-18), on peut écrire le développement multipolaire (3-6) des fonctions de vertex réduites sous la forme

$$\begin{aligned} \underline{A}^{JIS}(p^2, q^2, \underline{u}, \{e\})_M^{L*} &= \mathcal{E}_t^{JIS}(p^2, q^2, e)^L \mathcal{E}_t(\underline{u}, \{e\})_M^{L*} + \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{JIS}(p^2, q^2, e)^L \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\underline{u}, \{e\})_M^{L*} \\ &+ \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{JIS}(p^2, q^2)^L \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(\underline{u}, \{e\})_M^{L*} + \mathfrak{M}_{\mathcal{S}}^{JIS}(p^2, q^2)^L \mathfrak{M}_{\mathcal{S}}(\underline{u}, \{e\})_M^{L*} \end{aligned} \quad (1)$$

A l'aide de la relation d'orthogonalité des multipôles (IA-31), on peut inverser cette définition, on obtient

$$\mathcal{E}_t^{JIS}(p^2, q^2, e)^L = \int \mathcal{E}_t(\underline{u}, \{e\})_M^{L*} \cdot \underline{A}^{JIS}(p^2, q^2, \underline{u}, \{e\})_M^{L*} d\Omega(\underline{u}, \{e\}), \quad (2 a)$$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{JIS}(p^2, q^2, e)^L = - \int \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\underline{u}, \{e\})_M^{L*} \cdot \underline{A}^{JIS}(p^2, q^2, \underline{u}, \{e\})_M^{L*} d\Omega(\underline{u}, \{e\}), \quad (2 b)$$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{JIS}(p^2, q^2)^L = - \int \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(\underline{u}, \{e\})_M^{L*} \cdot \underline{A}^{JIS}(p^2, q^2, \underline{u}, \{e\})_M^{L*} d\Omega(\underline{u}, \{e\}), \quad (2 c)$$

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}^{JIS}(p^2, q^2)^L = - \int \mathfrak{M}_{\mathcal{S}}(\underline{u}, \{e\})_M^{L*} \cdot \underline{A}^{JIS}(p^2, q^2, \underline{u}, \{e\})_M^{L*} d\Omega(\underline{u}, \{e\}). \quad (2 d)$$

Nous avons montré, cf. Eq. (I4-17), que les facteurs de forme irréductibles « transverses » électrique $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{JIS}(p^2, q^2)^L$ et magnétique $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}^{JIS}(p^2, q^2)^L$ ne dépendent pas du choix du quadrivecteur \underline{e} dans le 2-plan $(\underline{p}_1, \underline{p})$ tandis que les deux autres en dépendent selon

$$\mathcal{E}_t^{JIS}(p^2, q^2, Le)^L = \text{ch } \kappa \mathcal{E}_t^{JIS}(p^2, q^2, e)^L - \text{sh } \kappa \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{JIS}(p^2, q^2, e)^L, \quad (3 a)$$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{JIS}(p^2, q^2, Le)^L = - \text{sh } \kappa \mathcal{E}_t^{JIS}(p^2, q^2, e)^L + \text{ch } \kappa \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{JIS}(p^2, q^2, e)^L. \quad (3 b)$$

Avec ces notations, le développement multipolaire des composantes sphériques des fonctions de vertex réduites s'écrit, en hélicité,

$$\begin{aligned} [A^{JIS}(p^2, q^2, e_3)^L]_0^i &= \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} [\delta_{j_0} \mathcal{E}_t^{JIS}(p^2, q^2, e)^L + \delta_{j_1} \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{JIS}(p^2, q^2, e)^L] \quad (4 a) \\ [A^{JIS}(p^2, q^2, e_3)^L]_{\pm 1}^1 &= \sqrt{\frac{2L+1}{8\pi}} [\mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{JIS}(p^2, q^2)^L \mp \mathfrak{M}_{\mathcal{S}}^{JIS}(p^2, q^2)^L] \quad (4 b) \end{aligned}$$

La conservation de la parité et l'invariance par renversement du temps

imposent aux facteurs de forme irréductibles les règles de sélection suivantes

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^{\text{JIS}}(p^2, q^2)^L = -(-1)^{L+l} \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^{\text{JIS}}(p^2, q^2)^L \quad (5 a)$$

$$\mathcal{E}^{\text{JIS}}(p^2, q^2)^L = (-1)^{L+l} \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \mathcal{E}^{\text{JIS}}(p^2, q^2)^L \quad (5 b)$$

$$\mathcal{Z}^{\text{JIS}}(p^2, q^2)^L = -\varepsilon_T \mathcal{Z}^{\text{JIS}}(p^2, q^2)^L \quad (6)$$

où la relation (5 b) est valable pour les trois facteurs de forme électriques et la relation (6) pour les quatre facteurs de forme irréductibles. Dorénavant, pour simplifier l'écriture nous posons

$$\eta = \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \quad (7)$$

Considérons quelques cas particuliers. Nous avons vu que si $s_3 = 0$ la sommation sur $S = s_2$ disparaît. En outre si $s_1 = 0$, on a forcément $L = J$ et l'indice J n'est pas répété dans la notation des facteurs de forme. En explicitant la conservation de la parité, on peut écrire le développement multipolaire des composantes sphériques des fonctions de vertex standard, en hélicité, à l'aide des équations (3-19) et (4) sous la forme

Bosons $s_1 = s_3 = 0$ (J entier)

$$\begin{aligned} \sqrt{4\pi} [A(p^2, q^2, x)^{n_2}]_0^j &= \sum_{J,l} \sqrt{2J+1} Y_{-n_2}^l(x) \langle l - n_2, s_2 n_2 | J 0 \rangle \\ &\frac{1 + \eta(-1)^{J+l}}{2} [\delta_{j0} \mathcal{E}_i^l(p^2, q^2, e)^J + \delta_{j1} \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^l(p^2, q^2, e)^J] \end{aligned} \quad (8 a)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{4\pi} [A(p^2, q^2, x)^{n_2}]_{\pm}^1 &= \sum_{J,l} \sqrt{2J+1} Y_{\pm 1 - n_2}^l(x) \langle l, \pm 1 - n_2, s_2 n_2 | J, \pm 1 \rangle \\ &\left[\frac{1 + \eta(-1)^{J+l}}{2} \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^l(p^2, q^2)^J \mp \frac{1 - \eta(-1)^{J+l}}{2} \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^l(p^2, q^2)^J \right] \end{aligned} \quad (8 b)$$

Toujours dans le cas où $s_3 = 0$, si $s_1 = 1/2$, L prend les valeurs $J \pm 1/2$. Pour simplifier la notation, nous omettrons de répéter l'indice J dans l'écriture des facteurs de forme. En portant ces valeurs de L dans les règles de sélection (5) dues à la conservation de la parité, on obtient

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^l(p^2, q^2)^{J+1/2} = (-1)^{J-1/2+l} \eta \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^l(p^2, q^2)^{J+1/2} \quad (9 a)$$

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^l(p^2, q^2)^{J-1/2} = -(-1)^{J-1/2+l} \eta \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^l(p^2, q^2)^{J-1/2} \quad (9 b)$$

$$\mathcal{E}^l(p^2, q^2)^{J+1/2} = -(-1)^{J-1/2+l} \eta \mathcal{E}^l(p^2, q^2)^{J+1/2} \quad (9 c)$$

$$\mathcal{E}^l(p^2, q^2)^{J-1/2} = (-1)^{J-1/2+l} \eta \mathcal{E}^l(p^2, q^2)^{J-1/2} \quad (9 d)$$

Ces relations montrent que pour J et l fixés, selon la valeur de η et de L = J ± 1/2, un des facteurs de forme de chaque type électrique et magnétique est nul. En explicitant la conservation de la parité, on déduit des équations (3-20) et (4) le développement multipolaire des composantes sphériques des fonctions de vertex standard en hélicité

<p><i>Fermions</i> $s_1 = 1/2, s_3 = 0$ (J demi-entier impair)</p> $\begin{aligned} & \sqrt{4\pi} [A(p^2, q^2, x)^{n_2}_{\pm 1/2}]_0^l \\ &= \sum_{JJ} \sqrt{J + 1/2} Y_{\pm 1/2 - n_2}^l(x) \langle l, \pm 1/2 - n_2, s_2 n_2 J, \pm 1/2 \rangle \\ & \left\{ \mp \frac{1 + \eta(-1)^{l+J+1/2}}{2} [\delta_{j_0} \mathcal{E}_i^l(p^2, q^2, e)^{J+1/2} + \delta_{j_1} \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^l(p^2, q^2, e)^{J+1/2}] \right. \\ & \left. + \frac{1 - \eta(-1)^{l+J+1/2}}{2} [\delta_{j_0} \mathcal{E}_i^l(p^2, q^2, e)^{J-1/2} + \delta_{j_1} \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^l(p^2, q^2, e)^{J-1/2}] \right\} \end{aligned}$
$\begin{aligned} & \sqrt{8\pi} [A(p^2, q^2, x)^{n_2}_{\pm 1/2}]_{\pm 1}^1 \\ &= \sum_{JJ} Y_{\pm 3/2 - n_2}^l(x) \langle l, \pm 3/2 - n_2, s_2 n_2 J, \pm 3/2 \rangle \\ & \left\{ \mp \frac{1 + \eta(-1)^{l+J+1/2}}{2} \right. \\ & \quad \left[\sqrt{J - 1/2} \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^l(p^2, q^2)^{J+1/2} + \sqrt{J + 3/2} \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^l(p^2, q^2)^{J-1/2} \right] \quad (10) \\ & \quad + \frac{1 - \eta(-1)^{l+J+1/2}}{2} \\ & \quad \left. \left[\sqrt{J + 3/2} \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^l(p^2, q^2)^{J-1/2} + \sqrt{J - 1/2} \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^l(p^2, q^2)^{J+1/2} \right] \right\} \end{aligned}$
$\begin{aligned} & \sqrt{8\pi} [A(p^2, q^2, x)^{n_2}_{\pm 1/2}]_{\mp 1}^1 \\ &= \sum_{JJ} Y_{\mp 1/2 - n_2}^l(x) \langle l, \mp 1/2 - n_2, s_2 n_2 J, \mp 1/2 \rangle \\ & \left\{ \mp \frac{1 + \eta(-1)^{l+J+1/2}}{2} \right. \\ & \quad \left[\sqrt{J + 3/2} \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^l(p^2, q^2)^{J+1/2} - \sqrt{J - 1/2} \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^l(p^2, q^2)^{J-1/2} \right] \\ & \quad + \frac{1 - \eta(-1)^{l+J+1/2}}{2} \\ & \quad \left. \left[\sqrt{J - 1/2} \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^l(p^2, q^2)^{J-1/2} - \sqrt{J + 3/2} \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^l(p^2, q^2)^{J+1/2} \right] \right\} \end{aligned}$

Dans le cas où $s_2 = 1/2$, J prend les valeurs $l \pm 1/2$, et on peut effectuer la sommation sur J dans les expressions ci-dessus. Pour préciser la valeur de J dans l'écriture des facteurs de forme multipolaire nous ferons suivre l'indice l du signe $+$ ou $-$ selon que $J = l \pm 1/2$, i. e. on note l_{\pm} . En outre, pour simplifier les formules suivantes nous enlevons un coefficient $\sqrt{L(L+1)}$ aux facteurs de forme transverses

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{l_{\pm}}(p^2, q^2)^L = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{l_{\pm} 1/2l}(p^2, q^2)^L / \sqrt{L(L+1)} \quad (11 a)$$

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^{l_{\pm}}(p^2, q^2)^L = \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^{l_{\pm} 1/2l}(p^2, q^2)^L / \sqrt{L(L+1)} \quad (11 b)$$

$$\mathcal{E}_t^{l_{\pm}}(p^2, q^2)^L = \mathcal{E}_t^{l_{\pm} 1/2l}(p^2, q^2)^L, \quad \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{l_{\pm}}(p^2, q^2)^L = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{l_{\pm} 1/2l}(p^2, q^2)^L \quad (11 c)$$

Dans chaque cas de parité, $\eta = \pm 1$, le développement multipolaire obtenu à partir de (10) est donné dans les tables (12 a) et (12 b).

$s_1 = s_2 = 1/2, s_3 = 0, \eta = \varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1$ $4\pi[A(p^2, q^2, x)^{\pm 1/2}_{\pm 1/2}]_0^j$ $= \sum_t P_0^l(x) \{ \delta_{j0} [(l+1) \mathcal{E}_t^{l+}(p^2, q^2)^l + l \mathcal{E}_t^{l-}(p^2, q^2)^l] + \delta_{j1} [(l+1) \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{l+}(p^2, q^2)^l + l \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{l-}(p^2, q^2)^l] \}$	
$4\pi[A(p^2, q^2, x)^{\mp 1/2}_{\pm 1/2}]_0^j$ $= \mp \sum_t P_1^l(x) \{ \delta_{j0} [\mathcal{E}_t^{l+}(p^2, q^2)^l - \mathcal{E}_t^{l-}(p^2, q^2)^l] + \delta_{j1} [\mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{l+}(p^2, q^2)^l - \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{l-}(p^2, q^2)^l] \}$	
$4\pi[A(p^2, q^2, x)^{\pm 1/2}_{\pm 1/2}]_{\pm}^1$ $= \frac{\mp 1}{\sqrt{2}} \sum_t P_1^l(x) \{ (l+2) [\mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{l+}(p^2, q^2)^l + \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^{l+}(p^2, q^2)^{l+1}] + (l-1) [\mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{l-}(p^2, q^2)^l + \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^{l-}(p^2, q^2)^{l-1}] \}$	
$4\pi[A(p^2, q^2, x)^{\mp 1/2}_{\pm 1/2}]_{\pm}^1$ $= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_t P_2^l(x) \{ \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{l+}(p^2, q^2)^l + \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^{l+}(p^2, q^2)^{l+1} - \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{l-}(p^2, q^2)^l - \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^{l-}(p^2, q^2)^{l-1} \} \quad (12 a)$	
$4\pi[A(p^2, q^2, x)^{\pm 1/2}_{\pm 1/2}]_{\mp}^1$ $= \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \sum_t P_1^l(x) \{ l \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{l+}(p^2, q^2)^l - (l+2) \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^{l+}(p^2, q^2)^{l+1} + (l+1) \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{l-}(p^2, q^2)^l - (l-1) \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^{l-}(p^2, q^2)^{l-1} \}$	
$4\pi[A(p^2, q^2, x)^{\mp 1/2}_{\pm 1/2}]_{\mp}^1$ $= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_t P_0^l(x) \{ l(l+1) \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{l+}(p^2, q^2)^l - (l+1)(l+2) \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^{l+}(p^2, q^2)^{l+1} + l(l+1) \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{l-}(p^2, q^2)^l - l(l-1) \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^{l-}(p^2, q^2)^{l-1} \}$	

Dans ce cas de parité, les multipôles $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{l\pm}(p^2, q^2)^L$ et $\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^{l\pm}(p^2, q^2)^L$ sont les mêmes, à un facteur global près dépendant de la normalisation des amplitudes, que ceux définis par C. G. L. N. [2] et G. W. [3] pour la photo-production de méson π sur nucléon.

De même, nos multipôles correspondent, à un facteur global près, à ceux définis par Adler [5] pour la production par interaction faible de méson π sur nucléon. Dans le cadre de la théorie $V - A$, on doit considérer des multipôles vectoriels $\eta = + 1$ et axiaux $\eta = - 1$, la conservation du courant vectoriel éliminant un multipôle vectoriel.

$s_1 = s_2 = 1/2, s_3 = 0, \eta = \varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = - 1$ $4\pi[A(p^2, q^2, x)^{\pm 1/2}_{\pm 1/2}]_0^j$ $= \mp \sum_l P_0^l(x) \{ \delta_{j0} [(l + 1) \mathcal{E}_l^{l+}(p^2, q^2)^{l+1} + l \mathcal{E}_l^{l-}(p^2, q^2)^{l-1}]$ $+ \delta_{j1} [(l + 1) \mathcal{E}_l^{l+}(p^2, q^2)^{l+1} + l \mathcal{E}_l^{l-}(p^2, q^2)^{l-1}] \}$
$4\pi[A(p^2, q^2, x)^{\mp 1/2}_{\pm 1/2}]_0^j$ $= \sum_l P_1^l(x) \{ \delta_{j0} [\mathcal{E}_l^{l+}(p^2, q^2)^{l+1} - \mathcal{E}_l^{l-}(p^2, q^2)^{l-1}]$ $+ \delta_{j1} [\mathcal{E}_l^{l+}(p^2, q^2)^{l+1} - \mathcal{E}_l^{l-}(p^2, q^2)^{l-1}] \}$
$4\pi[A(p^2, q^2, x)^{\pm 1/2}_{\pm 1/2}]_{\pm}^1$ $= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_l P_1^l(x) \{ (l + 2) [\mathcal{E}_l^{l+}(p^2, q^2)^{l+1} + \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^{l+}(p^2, q^2)^l]$ $+ (l - 1) [\mathcal{E}_l^{l-}(p^2, q^2)^{l-1} + \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^{l-}(p^2, q^2)^l] \}$
$4\pi[A(p^2, q^2, x)^{\mp 1/2}_{\pm 1/2}]_{\pm}^1$ $= \frac{\mp 1}{\sqrt{2}} \sum_l P_2^l(x) \{ \mathcal{E}_l^{l+}(p^2, q^2)^{l+1} + \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^{l+}(p^2, q^2)^l$ $- \mathcal{E}_l^{l-}(p^2, q^2)^{l-1} - \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^{l-}(p^2, q^2)^l \} \quad (12 b)$
$4\pi[A(p^2, q^2, x)^{\pm 1/2}_{\pm 1/2}]_{\mp}^1$ $= \frac{-1}{\sqrt{2}} \sum_l P_1^l(x) \{ (l + 2) \mathcal{E}_l^{l+}(p^2, q^2)^{l+1} - l \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^{l+}(p^2, q^2)^l$ $+ (l - 1) \mathcal{E}_l^{l-}(p^2, q^2)^{l-1} - (l + 1) \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^{l-}(p^2, q^2)^l \}$
$4\pi[A(p^2, q^2, x)^{\mp 1/2}_{\pm 1/2}]_{\pm}^1$ $= \frac{\mp 1}{\sqrt{2}} \sum_l P_0^l(x) \{ (l + 1)(l + 2) \mathcal{E}_l^{l+}(p^2, q^2)^{l+1}$ $- l(l + 1) \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^{l+}(p^2, q^2)^l + l(l - 1) \mathcal{E}_l^{l-}(p^2, q^2)^{l-1}$ $- l(l + 1) \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^{l-}(p^2, q^2)^l \}$

4.2. Hypothèse du modèle isobarique

Dans l'hypothèse du modèle isobarique, les deux particules finales ne sont pas produites directement (fig. 2) mais elles proviennent de la désinté-

gration d'un isobare de masse M_0 , spin J_0 et parité ε_0 donnés. Dans ce paragraphe, nous considérons le vertex de formation de l'isobare et dans le paragraphe suivant nous étudions sa désintégration.

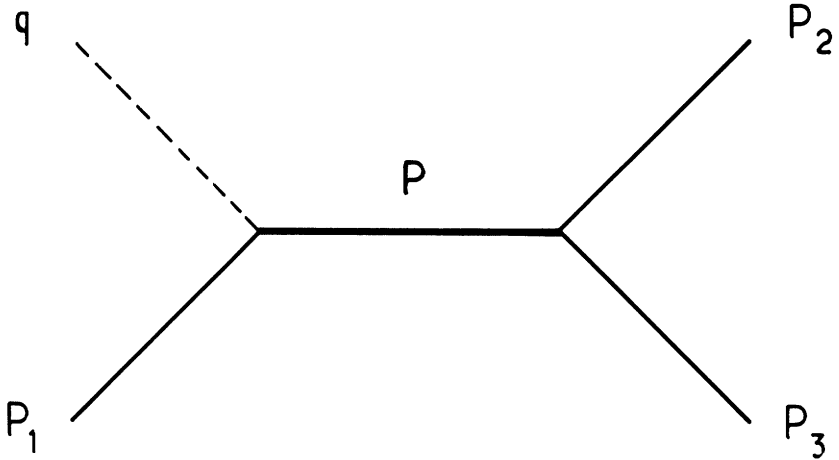


FIG. 2. — Modèle isobarique : les deux particules finales proviennent de la désintégration d'un isobare intermédiaire.

A la formation de l'isobare, les fonctions de vertex standard et réduites de l'opérateur A sont définies par

$$\underline{A}(q^2, \underline{u}, \{e\})_{n_1}^N = \langle \{p\}_e N | \underline{A} | \{p_1\}_e n_1 \rangle, \quad (13)$$

$$\underline{A}(q^2, \underline{u}, \{e\})_{n_1}^N = \sum_L \langle J_0 N | L M s_1 n_1 \rangle \underline{A}(q^2, \underline{u}, \{e\})_{M}^{L*} \quad (14)$$

Le développement multipolaire de ces fonctions réduites est

$$\underline{A}(q^2, \underline{u}, \{e\})_{M}^{L*} = \sum_{j,\mu} G_{\mu}^j(q^2, e)^L X_{\mu}^j(\underline{u}, \{e\})_{M}^{L*}, \quad (15)$$

avec

$$G_0^0(q^2, e)^L = \mathcal{E}_l(q^2, e)^L, \quad G_0^1(q^2, e)^L = \mathcal{E}_{\mathcal{J}}(q^2, e)^L \quad (16 a)$$

$$G_{-}^1(q^2, e)^L = \mathcal{E}_{\mathcal{J}}(q^2)^L, \quad G_{+}^1(q^2, e)^L = \mathfrak{M}_{\mathcal{J}}(q^2)^L. \quad (16 b)$$

L'invariance par renversement du temps impose à ces facteurs de forme d'être réels ou imaginaires purs, tandis que la conservation de la parité leur impose les règles de sélection suivantes

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{J}}(q^2)^L = (-1)^{L+1} \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_0 \mathfrak{M}_{\mathcal{J}}(q^2)^L, \quad (17 a)$$

$$\mathcal{E}(q^2)^L = (-1)^L \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_0 \mathcal{E}(q^2)^L, \quad (17 b)$$

où la seconde règle est valable pour les trois facteurs de forme électriques et où ε est la parité de l'opérateur \underline{A} .

4.3. Désintégration de l'isobare

Nous supposons maintenant que l'isobare, d'impulsion \underline{p} se désintègre en deux particules 2 et 3, de masses, spins et parités, $M_2, \bar{M}_3, s_2, s_3, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ et d'impulsions \underline{p}_2 et \underline{p}_3 . La conservation de l'énergie-impulsion dans la désintégration s'écrit

$$\underline{p} = \underline{p}_2 + \underline{p}_3 \tag{18}$$

Soit T l'opérateur de désintégration. L'invariance relativiste lui impose d'être un opérateur scalaire sous l'action d'une transformation de Lorentz du groupe restreint, représentée par $U(\Lambda)$;

$$U(\Lambda)TU(\Lambda)^{-1} = T. \tag{19}$$

En outre, la parité sera conservée dans la désintégration, si dans l'opération de parité, l'opérateur T est invariant,

$$U(P)TU(P)^{-1} = T. \tag{20}$$

Les facteurs de forme de l'opérateur T sont appelés les amplitudes de désintégration. Pour les définir nous utilisons la méthode exposée au cours des sections 2 et 3. Mais dans ce cas particulier, la paramétrisation est beaucoup plus simple, car, à cause de la conservation de l'énergie-impulsion, tous les invariants sont fixés par les masses des particules.

Les fonctions de vertex standard à deux particules finales, de l'opérateur de désintégration T, sont paramétrées, dans la tétrade $\{e\}$, par le quadri-vecteur \underline{v} , cf. Eq. (2-8), et elles sont définies par

$$T(\underline{v}, \{e\})^{n_3 n_2}_N = \langle \{p_3\}_e n_3 | \otimes \langle \{p_2\}_e n_2 | T | \{p\}_e, N \rangle \tag{21}$$

La conservation du moment angulaire à la désintégration implique que le moment angulaire total du système des deux particules finales est égal au spin J_0 de l'isobare. On définit alors les quantités invariantes, appelées amplitudes de désintégration, T^{IS} , par

$$T(\underline{v}, \{e\})^{n_3 n_2}_N = \sum_{l,S} \langle s_3 n_3 s_2 n_2 | S \sigma \rangle \langle l m S \sigma | J_0 N \rangle T^{IS} Y_m^l(\underline{v}, \{e\}), \tag{22}$$

ou inversement

$$T^{IS} = \frac{2l+1}{2J_0+1} \langle J_0 N | l m S \sigma \rangle \langle S \sigma | s_3 n_3 s_2 n_2 \rangle \int Y_m^l(\underline{v}, \{e\})^* T(\underline{v}, \{e\})^{n_3 n_2}_N d\Omega(\underline{v}, \{e\}), \tag{23}$$

La conservation de la parité entraîne l'existence de la règle de sélection suivante sur les amplitudes :

$$T^{IS} = (-1)^l \varepsilon_0 \varepsilon_2 \varepsilon_3 T^{IS} \quad (24)$$

4.4. Contribution d'un isobare au développement multipolaire des fonctions de vertex à deux particules finales

En considérant globalement les deux processus de formation et de désintégration de l'isobare, on peut définir des pseudo-fonctions de vertex standard par

$$\tilde{\mathbb{A}}(q^2, \underline{u}, \underline{v}, \{e\})^{n_3 n_2}_{n_1} = T(\underline{v}, \{e\})^{n_3 n_2} \mathbb{A}(q^2, \underline{u}, \{e\})^N_{n_1} \quad (25)$$

ainsi que des fonctions réduites, cf. (2-24), où le moment angulaire total des deux particules J est égal à J_0

$$\tilde{\mathbb{A}}(q^2, \underline{u}, \underline{v}, \{e\})^{n_3 n_2}_{n_1} = \sum_{ISLM} Y_m^l(\underline{v}, \{e\}) \langle s_3 n_3 s_2 n_2 | S\sigma \rangle \langle lm S\sigma | J_0 N \rangle \langle J_0 N | LM s_1 n_1 \rangle \tilde{\mathbb{A}}^{IS}(q^2, \underline{u}, \{e\})^L_M \quad (26)$$

En utilisant les relations (13), (14) et (21), on obtient le développement multipolaire de ces fonctions réduites

$$\tilde{\mathbb{A}}^{IS}(q^2, \underline{u}, \{e\})^L_M = \sum_{j,\mu} T^{IS} G_\mu^j(q^2, e)^L \mathbb{X}_\mu^j(\underline{u}, \{e\})^L_M \quad (27)$$

Comparons les relations (26) et (27) aux expressions équivalentes obtenues pour les fonctions de vertex à deux particules finales, cf. Eq. (2-23) et (4-1)

$$\mathbb{A}(p^2, q^2, \underline{u}, \underline{v}, \{e\})^{n_3 n_2}_{n_1} = \sum_{JISLM} Y_m^l(\underline{v}, \{e\}) \langle s_3 n_3 s_2 n_2 | S\sigma \rangle \langle lm S\sigma | JN \rangle \langle JN | LM s_1 n_1 \rangle \mathbb{A}^{JIS}(p^2, q^2, \underline{u}, \{e\})^L_M \quad (28)$$

$$\mathbb{A}^{JIS}(p^2, q^2, \underline{u}, \{e\})^L_M = \sum_{j,\mu} G_\mu^{jIS}(p^2, q^2, e)^L \mathbb{X}_\mu^j(\underline{u}, \{e\})^L_M \quad (29)$$

où l'on a posé

$$G_0^{0JIS}(p^2, q^2, e)^L = \mathcal{E}_t^{JIS}(p^2, q^2, e)^L, \quad G_0^{1JIS}(p^2, q^2, e)^L = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{JIS}(p^2, q^2, e)^L \quad (30 a)$$

$$G_-^{1JIS}(p^2, q^2, e)^L = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{JIS}(p^2, q^2, e)^L, \quad G_+^{1JIS}(p^2, q^2, e)^L = \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^{JIS}(p^2, q^2, e)^L \quad (30 b)$$

Nous avons vu que la conservation de la parité impose à ces facteurs de forme multipolaires les règles de sélection

$$\mathfrak{M}^{jIS}(p^2, q^2)^L = (-1)^{L+l+1} \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \mathfrak{M}^{jIS}(p^2, q^2)^L \quad (31 a)$$

$$\mathcal{E}^{jIS}(p^2, q^2)^L = (-1)^{L+l} \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \mathcal{E}^{jIS}(p^2, q^2)^L \quad (31 b)$$

où la dernière expression est valable pour les trois multipôles de type électrique.

Dans l'hypothèse où les deux particules finales sont obligatoirement obtenues par l'intermédiaire d'un seul isobare, les développements (26, 27) et (28, 29) doivent être identiques. En identifiant on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^{jIS}(p^2, q^2, \underline{u}, \{e\})_M^L &= \delta(M_0^2 - p^2) \delta_{J_0 J} \tilde{\mathbb{A}}^{jIS}(q^2, \underline{u}, \{e\})_M^L \quad (32 a) \\ G_\mu^{jIS}(p^2, q^2, e)^L &= \delta(M_0^2 - p^2) \delta_{J_0 J} T^{IS} G_\mu^j(q^2, e)^L \quad (32 b) \end{aligned}$$

Il faut noter que, dans ce cas, les règles de sélection dues à la parité sont plus restrictives que celles énoncées en (31). En effet, les équations (17), (24) et (32) conduisent à

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^{J_0 IS}(M_0^2, q^2)^L &= (-1)^{L+l+1} \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \mathfrak{M}^{J_0 IS}(M_0^2, q^2)^L \quad (33 a) \\ \mathcal{E}^{J_0 IS}(M_0^2, q^2)^L &= (-1)^{L+l} \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \mathcal{E}^{J_0 IS}(M_0^2, q^2)^L \quad (33 b) \\ Z^{J_0 IS}(M_0^2, q^2)^L &= (-1)^l \varepsilon_0 \varepsilon_2 \varepsilon_3 Z^{J_0 IS}(M_0^2, q^2)^L \quad (33 c) \end{aligned}$$

Si les deux particules finales peuvent être obtenues par l'intermédiaire de plusieurs isobares, le développement multipolaire général (28, 29) est la superposition des développements (26, 27) pour chacun des isobares. Dans ce cas le produit $T^{IS} G_\mu^j(q^2, e)^L$ contribue aux facteurs de forme multipolaires $G_\mu^{j_0 IS}(M_0^2, q^2, e)^L$ satisfaisant les règles de sélection (33) dues à la parité. On écrit symboliquement cette contribution sous la forme

$$T^{IS} G_\mu^j(q^2, e)^L \rightarrow G_\mu^{j_0 IS}(M_0^2, q^2, e)^L \quad (34)$$

4.5. Application à la formation d'une résonance de spin 3/2

Considérons la formation d'une résonance de spin 3/2 à partir d'une particule initiale de spin 1/2. En hélicité, au vertex de formation de l'isobare, le développement multipolaire des composantes sphériques des fonctions de vertex standard s'écrit, cf. Eq. (I 4-28),

$\varepsilon\varepsilon_0\varepsilon_1 = 1$ $\sqrt{8\pi} [A(q^2, e_3)^{\pm 1/2}_{\pm 1/2}]_0^j = \mp 2 [\delta_{j0}\mathcal{E}_i(q^2, e)^2 + \delta_{j1}\mathcal{E}_{\mathcal{J}}(q^2, e)^2]$ $\sqrt{8\pi} [A(q^2, e_3)^{\pm 3/2}_{\pm 1/2}]_{\pm}^1 = \mp \sqrt{6} [\mathcal{E}_{\mathcal{J}}(q^2)^2 + \mathfrak{M}_{\mathcal{J}}(q^2)^1]$ $\sqrt{8\pi} [A(q^2, e_3)^{\mp 1/2}_{\pm 1/2}]_{\mp}^1 = \mp \sqrt{2} [3\mathcal{E}_{\mathcal{J}}(q^2)^2 - \mathfrak{M}_{\mathcal{J}}(q^2)^1]$	(35)
$\varepsilon\varepsilon_0\varepsilon_1 = -1$ $\sqrt{8\pi} [A(q^2, e_3)^{\pm 1/2}_{\pm 1/2}]_0^j = 2 [\delta_{j0}\mathcal{E}_i(q^2, e)^1 + \delta_{j1}\mathcal{E}_{\mathcal{J}}(q^2, e)^1]$ $\sqrt{8\pi} [A(q^2, e_3)^{\pm 3/2}_{\pm 1/2}]_{\pm}^1 = + \sqrt{6} [\mathcal{E}_{\mathcal{J}}(q^2)^1 + \mathfrak{M}_{\mathcal{J}}(q^2)^2]$ $\sqrt{8\pi} [A(q^2, e_3)^{\mp 1/2}_{\pm 1/2}]_{\mp}^1 = + \sqrt{2} [\mathcal{E}_{\mathcal{J}}(q^2)^1 - 3\mathfrak{M}_{\mathcal{J}}(q^2)^2]$	

où l'on a effectué la transformation (4-11) aux facteurs de forme transverses : $Z_{\mathcal{J}}^L \rightarrow \sqrt{L(L+1)} Z_{\mathcal{J}}^L$.

Supposons que la résonance se désintègre en deux particules, l'une de spin 0, l'autre de spin 1/2. Dans ce cas, la sommation sur $S = 1/2$ disparaît dans l'équation (22), et l'indice l prend les valeurs 1 et 2 ce qui donne *a priori*, deux amplitudes de désintégration T^1 et T^2 . Cependant, la règle de sélection (24) due à la parité annule une des deux amplitudes.

$T^1 = 0 \quad \text{si } \varepsilon_0\varepsilon_2\varepsilon_3 = +1,$ $T^2 = 0 \quad \text{si } \varepsilon_0\varepsilon_2\varepsilon_3 = -1.$	(36)
---	------

Si on quantifie en hélicité, les fonctions de vertex de l'opérateur de désintégration s'expriment en fonction des amplitudes et des fonctions de Legendre dans chaque cas de parité sous la forme

	$\varepsilon_0\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1$	$\varepsilon_0\varepsilon_2\varepsilon_3 = -1$
$\sqrt{4\pi} T(x)^{\pm 1/2}_{\pm 1/2}$	$\mp \sqrt{2} T^2 P_0^2(x)$	$\sqrt{2} T^1 P_0^1(x)$
$\sqrt{4\pi} T(x)^{\pm 1/2}_{\mp 1/2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} T^2 P_1^2(x)$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}} T^1 P_1^1(x)$
$\sqrt{4\pi} T(x)^{\pm 1/2}_{\pm 3/2}$	$\frac{1}{\sqrt{6}} T^2 P_1^2(x)$	$\mp \sqrt{\frac{3}{2}} T^1 P_1^1(x)$
$\sqrt{4\pi} T(x)^{\pm 1/2}_{\mp 3/2}$	$\mp \sqrt{\frac{1}{6}} T^2 P_2^2(x)$	0

Les relations (26, 27) et (35, 37) permettent d'obtenir le développement multipolaire des composantes sphériques des pseudo-fonctions de vertex. En hélicité, ce développement s'écrit selon les cas de parité

$$\begin{aligned}
 & J_0 = 3/2, s_1 = s_2 = 1/2, s_3 = 0, \varepsilon\varepsilon_0\varepsilon_1 = \varepsilon_0\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1 \\
 & 4\pi [\tilde{A}(q^2, x)^{\pm 1/2}_{\pm 1/2}]_0^j = 2T^2P_0^2(x) [\delta_{j0}\mathcal{E}_i(q^2, e)^2 + \delta_{j1}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(q^2, e)^1] \\
 & 4\pi [\tilde{A}(q^2, x)^{\pm 1/2}_{\pm 1/2}]_{\pm}^1 = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} T^2P_1^2(x) [\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(q^2)^2 + \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}(q^2)^1] \\
 & 4\pi [\tilde{A}(q^2, x)^{\mp 1/2}_{\pm 1/2}]_{\pm}^1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} T^2P_2^2(x) [\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(q^2)^2 + \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}(q^2)^1] \quad (38 a) \\
 & 4\pi [\tilde{A}(q^2, x)^{\pm 1/2}_{\pm 1/2}]_{\mp}^1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} T^2P_1^2(x) [3\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(q^2)^2 - \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}(q^2)^1] \\
 & 4\pi [\tilde{A}(q^2, x)^{\mp 1/2}_{\pm 1/2}]_{\mp}^1 = -\sqrt{2} T^2P_0^2(x) [3\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(q^2)^2 - \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}(q^2)^1]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & J_0 = 3/2, s_1 = s_2 = 1/2, s_3 = 0, \varepsilon\varepsilon_0\varepsilon_1 = -\varepsilon_0\varepsilon_2\varepsilon_3 = -1 \\
 & 4\pi [\tilde{A}(q^2, x)^{\pm 1/2}_{\pm 1/2}]_0^j = \mp 2T^2P_0^2(x) [\delta_{j0}\mathcal{E}_i(q^2, e)^1 + \delta_{j1}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(q^2, e)^1] \\
 & 4\pi [\tilde{A}(q^2, x)^{\pm 1/2}_{\pm 1/2}]_{\pm}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} T^2P_1^2(x) [\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(q^2)^1 + \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}(q^2)^2] \\
 & 4\pi [\tilde{A}(q^2, x)^{\mp 1/2}_{\pm 1/2}]_{\pm}^1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} T^2P_2^2(x) [\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(q^2)^1 + \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}(q^2)^2] \quad (38 b) \\
 & 4\pi [\tilde{A}(q^2, x)^{\pm 1/2}_{\pm 1/2}]_{\mp}^1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} T^2P_1^2(x) [\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(q^2)^1 - 3\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}(q^2)^2] \\
 & 4\pi [\tilde{A}(q^2, x)^{\mp 1/2}_{\pm 1/2}]_{\mp}^1 = \pm \sqrt{2} T^2P_0^2(x) [\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(q^2)^1 - \sqrt{3}\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}(q^2)^2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & J_0 = 3/2, s_1 = s_2 = 1/2, s_3 = 0, \varepsilon\varepsilon_0\varepsilon_1 = -\varepsilon_0\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1 \\
 & 4\pi [\tilde{A}(q^2, x)^{\pm 1/2}_{\pm 1/2}]_0^j = \mp 2T^1P_0^1(x) [\delta_{j0}\mathcal{E}_i(q^2, e)^2 + \delta_{j1}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(q^2, e)^1] \\
 & 4\pi [\tilde{A}(q^2, x)^{\pm 1/2}_{\pm 1/2}]_{\pm}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} T^1P_1^1(x) [3\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(q^2)^2 + 3\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}(q^2)^1] \quad (38 c) \\
 & 4\pi [\tilde{A}(q^2, x)^{\pm 1/2}_{\pm 1/2}]_{\mp}^1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} T^1P_1^1(x) [3\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(q^2)^2 - \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}(q^2)^1] \\
 & 4\pi [\tilde{A}(q^2, x)^{\mp 1/2}_{\pm 1/2}]_{\mp}^1 = \mp \sqrt{2} T^1P_0^1(x) [3\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(q^2)^2 - \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}(q^2)^1]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& J_0 = 3/2, \quad s_1 = s_2 = 1/2, \quad s_3 = 0, \quad \varepsilon\varepsilon_0\varepsilon_1 = \varepsilon_0\varepsilon_2\varepsilon_3 = -1 \\
& 4\pi [\tilde{A}(q^2, x)^{\pm 1/2}_{\pm 1/2}]_0^i = 2T^1P_0^1(x) [\delta_{j_0}\mathcal{E}_i(q^2, e)^1 + \delta_{j_1}\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(q^2, e)^1] \\
& 4\pi [\tilde{A}(q^2, x)^{\pm 1/2}_{\pm 1/2}]_{\pm}^1 = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} T^1P_1^1(x) [3\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(q^2)^1 + 3\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}(q^2)^2] \\
& 4\pi [\tilde{A}(q^2, x)^{\pm 1/2}_{\mp 1/2}]_{\mp}^1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} T^1P_1^1(x) [\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(q^2)^1 - 3\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}(q^2)^2] \\
& 4\pi [\tilde{A}(q^2, x)^{\mp 1/2}_{\pm 1/2}]_{\mp}^1 = \sqrt{2} T^1P_0^1(x) [\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(q^2)^1 - 3\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}(q^2)^2]
\end{aligned} \tag{38 d}$$

La comparaison des développements (12) et (38) dans chaque cas de parité, permet de déterminer la contribution de la résonance au développement multipolaire effectué avec le système des deux particules finales, on obtient

$$\begin{aligned}
& \varepsilon\varepsilon_0\varepsilon_1 = \varepsilon_0\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1 \\
& \quad T^2\mathcal{E}(q^2, e)^2 \rightarrow \mathcal{E}^{2-}(M_0^2, q^2, e)^2 \\
& \quad T^2\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}(q^2)^1 \rightarrow \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^{2-}(M_0^2, q^2)^1 \\
& \varepsilon\varepsilon_0\varepsilon_1 = -\varepsilon_0\varepsilon_2\varepsilon_3 = -1 \\
& \quad T^2\mathcal{E}(q^2, e)^1 \rightarrow \mathcal{E}^{2-}(M_0^2, q^2, e)^1 \\
& \quad T^2\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}(q^2)^2 \rightarrow \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^{2-}(M_0^2, q^2)^2 \\
& \varepsilon\varepsilon_0\varepsilon_1 = -\varepsilon_0\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1 \\
& \quad T^1\mathcal{E}(q^2, e)^2 \rightarrow \mathcal{E}^{1+}(M_0^2, q^2, e)^2 \\
& \quad T^1\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}(q^2)^1 \rightarrow \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^{1+}(M_0^2, q^2)^1 \\
& \varepsilon\varepsilon_0\varepsilon_1 = \varepsilon_0\varepsilon_2\varepsilon_3 = -1 \\
& \quad T^1\mathcal{E}(q^2, e)^1 \rightarrow \mathcal{E}^{1+}(M_0^2, q^2, e)^1 \\
& \quad T^1\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}(q^2)^2 \rightarrow \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}^{1+}(M_0^2, q^2)^2
\end{aligned} \tag{39}$$

où les relations écrites avec \mathcal{E} sont valables pour les trois facteurs de forme multipolaires de type électrique.

5. CONCLUSION

Dans cet article et dans le précédent I, nous avons étudié de manière très détaillée le développement multipolaire des fonctions de vertex à une ou deux particules finales. Plusieurs travaux ont été publiés sur ce sujet, mais en général chaque auteur réalise un développement par sa propre méthode et dans un but précis. Nous nous sommes efforcés de développer un forma-

lisme qui englobe ces diverses méthodes de manière à relier les travaux existants et à les généraliser. Nous avons pu atteindre ce but, en gardant notre référentiel arbitraire et en utilisant comme bases les harmoniques sphériques tensorielles et les multipôles tensoriels.

Les fonctions de vertex apparaissent dans les problèmes de diffusion où l'interaction est du type « courant \times courant ». Dans ce cas l'amplitude de diffusion se factorise en un produit de deux fonctions de vertex. L'une est en général connue, tandis que l'autre contient toute l'inconnue dynamique dans les facteurs de forme. Cette situation se présente dans les réactions de diffusion semi-leptonique où les courants leptoniques sont connus tandis que les courants hadroniques ne le sont pas. A titre d'application, nous avons utilisé notre formalisme pour l'étude cinématique de la production de résonances baryoniques de spin $\geq 3/2$, sur des cibles de nucléons par interaction électromagnétique ou faible [6].

APPENDICE

A. RAPPELS SUR LES ÉTATS A DEUX PARTICULES

Les états standard à deux particules sont le produit tensoriel des états standard à une particule et ne sont pas irréductibles. En utilisant le couplage $|S$, cf. [4], nous construisons les états canoniques à deux particules qui sont irréductibles et dont la loi de transformation dans un changement de référentiel ne dépend plus des impulsions des états. Ensuite, nous étudions l'action des opérations de parité et de renversement du temps sur ces états canoniques.

A.1. États standard à deux particules

Les états d'un système de deux particules de spin s_2 et s_3 et d'impulsion p_2 et p_3 peuvent être décrits par les produits tensoriels des états à une particule. On déduit de (I B-26) la loi de transformation de ces produits tensoriels d'états

$$\begin{aligned} U(\Lambda)(|\{\Lambda^{-1}p_3\}n_3\rangle \otimes |\{\Lambda^{-1}p_2\}n_2\rangle) &= |\Lambda\{\Lambda^{-1}p_3\}n_3\rangle \otimes |\Lambda\{\Lambda^{-1}p_2\}n_2\rangle \\ &= |\{p_3\}n'_3\rangle \otimes |\{p_2\}n'_2\rangle \mathbf{D}^{s_3}[\mathbf{R}_e(\{p_3\}, \{\Lambda^{-1}p_3\}, \Lambda^{-1})]^{n'_3} \\ &\quad \mathbf{D}^{s_2}[\mathbf{R}_e(\{p_2\}, \{\Lambda^{-1}p_2\}, \Lambda^{-1})]^{n'_2} \quad (1) \end{aligned}$$

Quand les tétrades sont arbitraires, on ne peut réduire le produit tensoriel de représentations de rotations différentes. Pour avoir des rotations identiques on choisit comme tétrades, les tétrades spéciales qui caractérisent les états standard à une particule, cf. Eq. (I B-3, 23, 24). On construit ainsi les états standard à deux particules

$$|p_3 p_2, \{e\} n_3 n_2\rangle = |\{p_3\}_e n_3\rangle \otimes |\{p_2\}_e n_2\rangle, \quad (2 a)$$

$$|p_3 p_2, \Lambda\{e\} n_3 n_2\rangle = |\{p_3\}_\Lambda n_3\rangle \otimes |\{p_2\}_\Lambda n_2\rangle, \quad (2 b)$$

$$|\Lambda^{-1}p_3, \Lambda^{-1}p_2, \{e\} n_3 n_2\rangle = |\{\Lambda^{-1}p_3\}_{\Lambda^{-1}e} n_3\rangle \otimes |\{\Lambda^{-1}p_2\}_{\Lambda^{-1}e} n_2\rangle. \quad (2 c)$$

Pour ces états standard la loi de transformation (1) devient

$$\begin{aligned} U(\Lambda)|\Lambda^{-1}p_3 \Lambda^{-1}p_2, \{e\} n_3 n_2\rangle &= |p_3 p_2, \Lambda\{e\} n_3 n_2\rangle \\ &= |p_3 p_2, \{e\} n'_3 n'_2\rangle \mathbf{D}^{s_3}(\mathbf{R}_\Lambda)^{n'_3} \mathbf{D}^{s_2}(\mathbf{R}_\Lambda)^{n'_2} \quad (3) \end{aligned}$$

Dans ce cas les deux rotations de Wigner sont égales et on pourra réduire le produit tensoriel de représentations à l'aide des coefficients-CG.

Les états standard sont reliés aux états dans des tétrades arbitraires par la relation

$$\begin{aligned} |p_3 p_2, \{e\} n_3 n_2\rangle &= |\{p_3\} n'_3\rangle \otimes |\{p_2\} n'_2\rangle \mathbf{D}^{s_3}([p_3]^{-1} \mathbf{L}(p_3))^{n'_3} \mathbf{D}^{s_2}([p_2]^{-1} \mathbf{L}(p_2))^{n'_2} \quad (4) \end{aligned}$$

où les rotations de Wigner indiquent l'orientation relative des tétrades arbitraires par rapport aux tétrades $\{p_i\}_e$.

A.2. Paramétrisation des états standard à deux particules

Les impulsions p_2 et p_3 des particules peuvent être remplacées par deux quadrivecteurs orthogonaux, l'un de genre temps, l'autre de genre espace formant une base du 2-plan p_2, p_3 . Le quadrivecteur de genre temps est l'impulsion totale des deux particules

$$p = p_2 + p_3, \quad (5)$$

tandis que le quadrivecteur de genre espace est unitaire ($\underline{k}^2 = -1$),

$$\underline{k} = C \{ -, \hat{p} | \hat{p}_2, \hat{p}_3 \}, \quad C = \{ \hat{p}_2, \hat{p}_3 | \hat{p}_3, \hat{p}_2 \}^{-1/2}, \quad (6)$$

où l'on utilise les notations définies en (I B-7). La constante C s'exprime en fonctions des masses M_2 et M_3 et de l'invariant p^2 sous la forme

$$C = \frac{2M_2M_3}{\sqrt{\lambda(\sqrt{p^2}, M_2, M_3)}}, \quad (7)$$

où la fonction λ est définie par

$$\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca. \quad (8)$$

A partir de la référence $\{ e \}$, nous définissons les tétrades suivantes,

$$\{ p \}_e = L(p) \{ e \}, \quad (9 a)$$

$$\{ p \}_e^\Lambda = L(p)L_\Lambda^{-1} \Lambda \{ e \} = L(p)R_\Lambda \{ e \}, \quad (9 b)$$

$$\{ \Lambda^{-1}p \}_{\Lambda^{-1}e} = L(\Lambda^{-1}p \leftarrow \Lambda^{-1}e)L_{\Lambda^{-1}} \{ e \}, \quad (9 c)$$

et, dans ces tétrades, on peut écrire les états standard,

$$| \underline{k}, \{ p \}_e n_3 n_2 \rangle \equiv | p_3 p_2, \{ e \} n_3 n_2 \rangle, \quad (10 a)$$

$$| \underline{k}, \{ p \}_e^\Lambda n_3 n_2 \rangle \equiv | p_3 p_2, \Lambda \{ e \} n_3 n_2 \rangle, \quad (10 b)$$

$$| \Lambda^{-1} \underline{k}, \{ \Lambda^{-1}p \}_{\Lambda^{-1}e} n_3 n_2 \rangle \equiv | \Lambda^{-1} p_3, \Lambda^{-1} p_2, \{ e \} n_3 n_2 \rangle. \quad (10 c)$$

Nous remarquons que, à n_2 et n_3 fixés, pour caractériser ces états il nous suffit de connaître les quadrivecteurs \underline{k} , \underline{p} ou $\Lambda^{-1} \underline{k}$, $\Lambda^{-1} \underline{p}$ et la tétrade $\{ e \}$ ou $\Lambda \{ e \}$. Les quadrivecteurs \underline{k} et $\Lambda^{-1} \underline{k}$ sont orthogonaux aux quadrivecteurs \underline{p} et $\Lambda^{-1} \underline{p}$. En utilisant les transformations de Lorentz inverses de celles qui interviennent dans les définitions (9) des tétrades, on peut construire à partir de \underline{k} et $\Lambda^{-1} \underline{k}$, trois quadrivecteurs \underline{v} , \underline{v}' (orthogonaux à \underline{e}), \underline{v}'' (orthogonal à $\Lambda \underline{e}$)

$$\underline{v} = L^{-1}(p) \underline{k}, \quad (11 a)$$

$$\underline{v}' = [L(p)L_\Lambda^{-1}]^{-1} \underline{k}, \quad (11 b)$$

$$\underline{v}'' = [L(\Lambda^{-1}p \leftarrow \Lambda^{-1}e)L_{\Lambda^{-1}}]^{-1} \Lambda^{-1} \underline{k} \quad (11 c)$$

Ces trois quadrivecteurs sont reliés de façon très simple. En effet en utilisant l'identité (I A-13), on obtient

$$\underline{v}' = L_\Lambda \underline{v}, \quad (12 a)$$

$$\underline{v}'' = \Lambda^{-1} \underline{v}' = R_\Lambda^{-1} \underline{v}. \quad (12 b)$$

En utilisant la définition (6) du quadrivecteur \underline{k} , on peut mettre les quadrivecteurs \underline{v} , \underline{v}' et \underline{v}'' sous la forme

$$\underline{v} = C \{ -, e | L^{-1}(p) \hat{p}_2, e \}, \quad (13 a)$$

$$\underline{v}' = C \{ -, \Lambda e | L_\Lambda L^{-1}(p) \hat{p}_2, \Lambda e \} \quad (13 b)$$

$$\underline{v}'' = C \{ -, e | R_\Lambda^{-1} L^{-1}(p) \hat{p}_2, e \}. \quad (13 c)$$

Dans la suite, les états standard sont paramétrés par les quadrivecteurs \underline{v} , $L_\Lambda \underline{v}$ et $R_\Lambda^{-1} \underline{v}$ au lieu de \underline{k} et $\Lambda^{-1} \underline{k}$,

$$| \underline{v}, \underline{p}, \{ e \} n_3 n_2 \rangle \equiv | p_3 p_2, \{ e \} n_3 n_2 \rangle, \quad (14 a)$$

$$| L_\Lambda \underline{v}, \underline{p}, \Lambda \{ e \} n_3 n_2 \rangle = | p_3 p_2, \Lambda \{ e \} n_3 n_2 \rangle, \quad (14 b)$$

$$| R_\Lambda^{-1} \underline{v}, \Lambda^{-1} \underline{p}, \{ e \} n_3 n_2 \rangle = | \Lambda^{-1} p_3, \Lambda^{-1} p_2, \{ e \} n_3 n_2 \rangle. \quad (14 c)$$

Avec ces notations la loi (3) de transformation des états standard à deux particules s'écrit

$$U(\Lambda) | R_\Lambda^{-1} \underline{v}, \Lambda^{-1} \underline{p}, \{ e \} n_3 n_2 \rangle = | L_\Lambda \underline{v}, \underline{p}, \Lambda \{ e \} n_3 n_2 \rangle \\ = | \underline{v}, \underline{p}, \{ e \} n'_3 n'_2 \rangle D^{s_3}(R_\Lambda)_{n_3}^{n'_3} D^{s_2}(R_\Lambda)_{n_2}^{n'_2}. \quad (15)$$

A. 3. États canoniques à deux particules

Les états définis par

$$|\underline{v}, \underline{p}, \{e\} S\sigma\rangle = |\underline{v}, \underline{p}, \{e\} n_3 n_2\rangle \langle s_3 n_3 s_2 n_2 | S\sigma\rangle, \quad (16 a)$$

$$|L_\Lambda \underline{v}, \underline{p}, \Lambda \{e\} S\sigma\rangle = |L_\Lambda \underline{v}, \underline{p}, \Lambda \{e\} n_3 n_2\rangle \langle s_3 n_3 s_2 n_2 | S\sigma\rangle, \quad (16 b)$$

$$|R_\Lambda^{-1} \underline{v}, \Lambda^{-1} \underline{p}, \{e\} S\sigma\rangle = |R_\Lambda^{-1} \underline{v}, \Lambda^{-1} \underline{p}, \{e\} n_3 n_2\rangle \langle s_3 n_3 s_2 n_2 | S\sigma\rangle, \quad (16 c)$$

se transformant suivant la loi

$$\begin{aligned} U(\Lambda) |R_\Lambda^{-1} \underline{v}, \Lambda^{-1} \underline{p}, \{e\} S\sigma\rangle &= |L_\Lambda \underline{v}, \underline{p}, \Lambda \{e\} n_3 n_2\rangle, \\ &= |\underline{v}, \underline{p}, \{e\} S\sigma'\rangle D^S(R_\Lambda)^{\sigma'\sigma}. \end{aligned} \quad (17)$$

Pour extraire la dépendance en \underline{v} de ces états, on peut les projeter sur les harmoniques sphériques scalaires

$$|\underline{v}, \underline{p}, \{e\} S\sigma\rangle = \sum_{l,m} |p \{e\} lm S\sigma\rangle Y_m^l(\underline{v}, \{e\})^*, \quad (18 a)$$

$$|L_\Lambda \underline{v}, \underline{p}, \Lambda \{e\} S\sigma\rangle = \sum_{l,m} |p, \Lambda \{e\} lm S\sigma\rangle Y_m^l(L_\Lambda \underline{v}, \Lambda \{e\})^*, \quad (18 b)$$

$$|R_\Lambda^{-1} \underline{v}, \Lambda^{-1} \underline{p}, \{e\} S\sigma\rangle = \sum_{l,m} |\Lambda^{-1} p, \{e\} lm S\sigma\rangle Y_m^l(Y_\Lambda^{-1} \underline{v}, \{e\})^*, \quad (18 c)$$

Les harmoniques intervenant dans ces expressions sont reliées par

$$Y_m^l(R_\Lambda^{-1} \underline{v}, \{e\}) = Y_m^l(L_\Lambda \underline{v}, \Lambda \{e\}) = Y_m^l(\underline{v}, \{e\}) D^l(R_\Lambda)^{m'm}, \quad (19)$$

il en résulte, pour les états définis en (18), la loi de transformation

$$\begin{aligned} U(\Lambda) |\Lambda^{-1} p, \{e\} lm S\sigma\rangle &= |p, \Lambda \{e\} lm S\sigma\rangle, \\ &= |\underline{p}, \{e\} lm' S\sigma'\rangle D^l(R_\Lambda)^{m'm} D^S(R_\Lambda)^{\sigma'\sigma}, \end{aligned} \quad (20)$$

i. e. ils ne sont pas irréductibles. On construit alors les états canoniques à deux particules en réduisant les produits tensoriels de représentations. Les états canoniques sont définis par

$$|JIS \{p\}_e N\rangle = |\underline{p}, \{e\} lm S\sigma\rangle \langle lm S\sigma | JN\rangle, \quad (21 a)$$

$$|JIS \{p\}_e^\Lambda N\rangle = |\underline{p}, \Lambda \{e\} lm S\sigma\rangle \langle lm S\sigma | JN\rangle, \quad (21 b)$$

$$|JIS \{\Lambda^{-1} p\}_{\Lambda^{-1} e} N\rangle = |\Lambda^{-1} \underline{p}, \{e\} lm S\sigma\rangle \langle lm S\sigma | JN\rangle \quad (21 c)$$

et ils se transforment suivant la loi

$$U(\Lambda) |JIS \{\Lambda^{-1} p\}_{\Lambda^{-1} e} N\rangle = |JIS \{p\}_e^\Lambda N\rangle = |JIS \{p\}_e N'\rangle D^l(R_\Lambda)^{N'N} \quad (22)$$

L'orthogonalité des coefficients-CG et des harmoniques sphériques permettent d'inverser les relations (16) et (18), on obtient

$$|\underline{v}, \underline{p}, \{e\} n_3 n_2\rangle = |\underline{v}, \underline{p}, \{e\} S\sigma\rangle \langle S\sigma | s_3 n_3 s_2 n_2\rangle \quad (23)$$

$$|p, \{e\} lm S\sigma\rangle = \int Y_m^l(\underline{v}, \{e\}) |\underline{v}, \underline{p}, \{e\} S\sigma\rangle d\Omega(\underline{v}, \{e\}) \quad (24)$$

Finalement, le passage des états standard aux états canoniques s'écrit

$$\begin{aligned} &|\{p_3\}_e n_3\rangle \otimes |\{p_2\}_e n_2\rangle \\ &= \sum_{JIS} Y_m^l(\underline{v}, \{e\})^* |JIS \{p\}_e N\rangle \langle JN | lm S\sigma\rangle \langle S\sigma | s_3 n_3 s_2 n_2\rangle \end{aligned} \quad (25)$$

ou inversement

$$|JIS \{ p \}_e N \rangle = \int Y_m^l(\underline{v}, \{ e \}) | \{ p_3 \}_e n_3 \rangle \otimes | \{ p_2 \}_e n_2 \rangle d\Omega(\underline{v}, \{ e \}) \langle s_3 n_3 s_2 n_2 | S\sigma \rangle \langle lmS\sigma | JN \rangle \quad (26)$$

A.4. Action de la parité et du renversement du temps sur les états canoniques

La loi de transformation par parité des états standard à une particule (I B-40), nous permet d'écrire

$$U(P) (| \{ p_3 \}_e n_3 \rangle \otimes | \{ p_2 \}_e n_2 \rangle) = \epsilon_2 \epsilon_3 | \{ Pp_3 \}_e n_3 \rangle \otimes | \{ Pp_2 \}_e n_2 \rangle \quad (27)$$

L'état du membre de droite peut être paramétré par les quadrivecteurs $P\underline{p}$ et $P\underline{k}$ ou par $P\underline{p}$ et le quadrivecteur \underline{v}^P défini par

$$\underline{v}^P = L^{-1}(Pp)P\underline{k} = P\underline{v}, \quad (28)$$

où l'on a utilisé les équations (13 a) et (I B-7 a).

En développant les deux membres de (27) suivant (25) on obtient

$$U(P) Y_m^l(\underline{v}, \{ e \})^* |JIS \{ p \}_e N \rangle = \epsilon_2 \epsilon_3 Y_m^l(P\underline{v}, \{ e \})^* |JIS \{ Pp \}_e N \rangle, \quad (29)$$

et la loi de transformation par parité des harmoniques scalaires permet de déduire

$$U(P) |JIS \{ p \}_e N \rangle = \epsilon_2 \epsilon_3 (-1)^l |JIS \{ Pp \}_e N \rangle \quad (30)$$

On obtient la loi de transformation par renversement du temps du produit tensoriel d'états standard à une particule à l'aide de l'équation (I B-41)

$$U(T) (| \{ p_3 \}_e n_3 \rangle \otimes | \{ p_2 \}_e n_2 \rangle) = (-1)^{s_3 + n_3 + s_2 + n_2} | \{ Pp_3 \}_e - n_3 \rangle \otimes | \{ Pp_2 \}_e - n_2 \rangle \quad (31)$$

Développons le membre de droite de l'expression précédente sur les états canoniques suivant l'équation (25), il vient

$$| \{ Pp_3 \}_e - n_3 \rangle \otimes | \{ Pp_2 \}_e - n_2 \rangle = \sum_{JIS} \langle JN | lmS\sigma \rangle \langle S\sigma | s_3 - n_3 s_2 - n_2 \rangle Y_m^l(P\underline{v}, \{ e \})^* |JIS \{ Pp \}_e N \rangle. \quad (32)$$

En utilisant les symétries des coefficients-CG et des harmoniques sphériques, on obtient

$$| \{ Pp_3 \}_e - n_3 \rangle \otimes | \{ Pp_2 \}_e - n_2 \rangle = \sum_{JIS} \langle JN | lmS\sigma \rangle \langle S\sigma | s_3 n_3 s_2 n_2 \rangle (-1)^{J+N} Y_m^l(\underline{v}, \{ e \}) |JIS \{ Pp \}_e - N \rangle \quad (33)$$

L'identification avec le développement du membre de gauche de l'équation (31) donne

$$U(T) Y_m^l(\underline{v}, \{ e \}) |JIS \{ p \}_e N \rangle = (-1)^{J+N} Y_m^l(\underline{v}, \{ e \}) |JIS \{ Pp \}_e - N \rangle \quad (34)$$

ce qui, compte tenu de l'antilinearité de l'opérateur U(T), conduit à la condition

$$U(T) |JIS \{ p \}_e N \rangle = (-1)^{J+N} |JIS \{ Pp \}_e - N \rangle \quad (35)$$

RÉFÉRENCES

- [1] M. DAUMENS, (Article précédent). *Ann. de l'Inst. Henri Poincaré*, t. **26**, 1977, p. 19.
- [2] G. F. CHEW, M. L. GOLDBERGER, F. E. LOW et Y. NAMBU, *Phys. Rev.*, t. **106**, 1957, p. 1345.
- [3] M. L. GOLDBERGER et K. M. WATSON, *Collision theory*. Wiley, New York, 1964.
- [4] P. MOUSSA et R. STORA, dans *Angular analysis of elementary particle reactions*. Herceg-
Novi, 1966. Gordon and Breach, New York, 1968.
- [5] S. L. ADLER, *Ann. of Phys.*, t. **50**, 1968, p. 189.
- [6] M. DAUMENS, *Thèse de Doctorat*. Université de Bordeaux I, n° 441, 1974.

(Manuscrit reçu le 31 octobre 1975)