

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

BARTOLOMÉ COLL

**Sur la détermination, par des données de Cauchy, des
champs de Killing admis par un espace-temps**

Annales de l'I. H. P., section A, tome 25, n° 4 (1976), p. 393-410

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1976__25_4_393_0

© Gauthier-Villars, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**Sur la détermination,
par des données de Cauchy,
des champs de Killing
admis par un espace-temps**

par

Bartolomé COLL

Laboratoire de Physique Mathématique, Collège de France

RÉSUMÉ. — L'étude de certains aspects de la Relativité Générale (stabilité, évolution, raccordement, propagation des discontinuités, etc.) conduit souvent à se poser le problème suivant : soit Σ une hypersurface non isotrope de l'espace-temps, et supposons connues sur elle des données de Cauchy pour les équations d'Einstein relatives à un certain tenseur impulsion-énergie ; sous quelles conditions la solution engendrée par ces données admet des champs de Killing ?

Nous montrons que, dans le cas général d'un tenseur impulsion-énergie non spécifié, les conditions cherchées se groupent en un système d'équations de contraintes sur Σ et en un système d'équations d'évolution dans son voisinage.

Pour un fluide parfait, nous prouvons que le système d'équations d'évolution est satisfait identiquement si le fluide est *barotrope* et qu'il se réduit à un nouveau système de contraintes sur Σ si le fluide *admet un thermodynamique* au sens usuel. Dans les deux cas, la dimension r du groupe d'isométries au voisinage de Σ est égale à la dimension de l'espace vectoriel de solutions des équations de contraintes sur Σ .

1. INTRODUCTION

Dans l'étude du problème de Cauchy en Relativité Générale, on est amené naturellement à se demander sous quelles conditions un univers

jouissant initialement de certaines symétries évolue en conservant celles-ci.

Pour les espace-temps du vide, la solution à un tel problème a permis l'application directe du critère de stabilité linéaire de Fischer-Marsden [1] aux équations d'Einstein [2][3].

De même, dans le problème de raccordement matière-vide, et puisque en pratique les solutions connues des équations d'Einstein admettent souvent des isométries, il est intéressant d'analyser l'implication sur la solution extérieure des possibles isométries admises par la solution intérieure et réciproquement.

Aussi, en Astrophysique Relativiste, l'obtention de modèles d'étoiles au sein desquelles des fronts de discontinuité se propagent (« solutions faibles ») permettrait en particulier une étude rigoureuse de deux problèmes actuels : l'effet dans les régions proches de la surface de l'étoile, de la conversion d'un front de combustion en front de choc ⁽¹⁾, et l'« interaction » du collapse gravitationnel avec un front de combustion expansif. L'étoile admettant certaines symétries, il est nécessaire, pour la réalisation de ces modèles, d'étudier la compatibilité de ces symétries à travers les fronts.

Ces différentes considérations physiques nous ont conduit à aborder le problème suivant :

PROBLÈME. — Supposons connues, sur une hypersurface Σ non isotrope de l'espace-temps, des données de Cauchy pour les équations d'Einstein relatives à un certain tenseur impulsion-énergie. Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes que doivent satisfaire ces données de Cauchy pour que l'espace-temps admette, au voisinage de Σ , r champs de Killing linéairement indépendants.

Il est clair que la détermination complète de ces conditions exige la donnée explicite du tenseur impulsion-énergie et l'analyse préalable de l'existence et de l'unicité du problème de Cauchy correspondant. Néanmoins, un résultat général permettant une réponse partielle au problème posé peut être obtenu pour n'importe quel tenseur impulsion-énergie et sans rapport avec le problème de Cauchy. Ce résultat est fourni par le théorème 1 ; il donne des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'isométries au voisinage d'une hypersurface Σ sous la forme d'un groupe d'équations *de contraintes* sur Σ et d'un groupe d'équations *d'évolution* dans son voisinage.

Le théorème 2 reprend ce résultat dans le cas où le tenseur impulsion-énergie choisi est celui d'un fluide parfait, mais encore sans faire appel au problème de Cauchy ou, ce qui revient au même, sans qu'aucun lien entre pression et densité d'énergie soit considéré.

La solution précise au problème posé est donnée par le théorème 3

(1) Pour l'étude relativiste des fronts de choc et de combustion, voir respectivement [4] et [5].

pour un fluide parfait barotrope, et par le théorème 4 pour un fluide parfait admettant une thermodynamique au sens usuel. Finalement, pour ces deux cas, le théorème 5 précise la dimension r du groupe d'isométries admis par la variété espace-temps.

Nous avons adopté un formalisme « intrinsèque » particulièrement commode pour l'interprétation géométrique et pour les calculs (cf. [6] [7]). Les définitions de base sont introduites dans la section 2.

Dans la section 3 nous démontrons le théorème 1 après avoir établi un certain nombre de résultats nécessaires (propositions 1 à 6). Certains de ces résultats intermédiaires ne sont donnés que dans des cartes associées aux coordonnées de Gauss, où les expressions se simplifient notablement.

Enfin, dans la section 4 nous obtenons les théorèmes relatifs au fluide parfait.

2. GÉNÉRALITÉS

a) Soit V_{n+1} une variété différentiable de dimension $n + 1$ munie d'une métrique régulière \hat{g} , de signature quelconque.

Considérons dans V_{n+1} une famille à un paramètre d'hypersurfaces locales $\varphi(x) = \text{Cte}$, non isotropes par rapport à \hat{g} . Sur chacune de ces hypersurfaces tout cotenseur de V_{n+1} définit univoquement, par induction, un cotenseur du même ordre; en particulier, le cotenseur g , induit par \hat{g} , munit chaque hypersurface $\varphi(x) = \text{Cte}$ d'une structure de variété riemannienne ⁽²⁾.

Associés à cette famille d'hypersurfaces le champ de vecteurs \hat{n}^* , \hat{n} étant la 1-forme unitaire normale à la famille : $\hat{g}(\hat{n}, \hat{n}) = \varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$. Il est aisé de voir que, en chaque point du domaine de définition de l'hypersurface $\varphi = \text{Cte}$, tout p -tenseur \hat{M} (tenseur d'ordre p) de V_{n+1} est biunivoquement déterminé par l'ensemble de 2^p tenseurs de la variété $\varphi = \text{Cte}$ constitué par $\binom{p}{s}$ s -tenseurs ($s = 0, 1, \dots, p$), chacun d'eux étant l'induit du s -tenseur de V_{n+1} obtenu par contraction $p-s$ fois de \hat{M} avec \hat{n}^* . Un tel ensemble sera dit la φ -caractérisation de \hat{M} .

Ainsi, la φ -caractérisation d'un vecteur \hat{s} de V_{n+1} est le couple $\{\sigma, s\}$ où σ est le scalaire produit intérieur (contraction) de \hat{n}^* et \hat{s} , $\sigma \equiv i(\hat{n}^*)\hat{s}$, et s est le covecteur de $\varphi = \text{Cte}$ induit par \hat{s} ; la φ -caractérisation d'un 2-tenseur symétrique \hat{Q} est $\{\chi, q, Q\}$ où $\chi \equiv i^2(\hat{s}^*)\hat{Q}$ et q et Q sont respectivement les tenseurs induits de $i(\hat{n})\hat{Q}$ et de \hat{Q} . En particulier, les φ -caractérisations de \hat{n} et de \hat{g} sont respectivement $\{\varepsilon, 0\}$ et $\{\varepsilon, 0, g\}$.

b) Considérons maintenant un champ régulier de vecteurs \hat{m}^* de V_{n+1} ,

⁽²⁾ Dans toute la suite, nous noterons en général avec la même lettre tenseurs et cotenseurs associés par la métrique. Éventuellement, quand il y aura lieu nous distinguerons les tenseurs par une étoile. Sauf indication contraire, toute expression tensorielle sera écrite sous sa forme *covariante*, et tout opérateur agira sur les *cotenseurs* correspondants.

partout non tangents à $\varphi = \text{Cte}$, et soient γ les courbes intégrales de \hat{m}^* canoniquement paramétrées. A chaque paire (φ, \hat{m}^*) se trouve naturellement associée la classe $\mathcal{C}(\varphi; \hat{m}^*)$ des cartes locales de V_{n+1} qui lui sont adaptées au sens habituel : si (U, Ψ) est une carte de cette classe, au voisinage de chaque hypersurface $\varphi = \text{Cte}$ et de chaque courbe γ on a

$$\Psi([\varphi = \text{Cte}] \cap U) = \mathbb{R}_n \times \{K\}, \quad \Psi(\gamma \cap U) = \{\theta\} \times \mathbb{R},$$

où K et θ sont respectivement des points fixes de \mathbb{R} et de \mathbb{R}_n .

c) Dans toute carte d'une classe $\mathcal{C}(\varphi; \hat{m}^*)$ du type précédent, les équations d'Einstein de V_{n+1} ,

$$\hat{T} = \hat{R} - \frac{1}{2}(\text{tr } \hat{R})\hat{g},$$

peuvent s'écrire (cf. [6] [7])

$$E_1 : \partial_\gamma g = 2\varepsilon\mu K + \mathcal{L}(m^*)g$$

$$E_2 : \partial_\gamma K = \mu[R + 2\varepsilon S - P] - \nabla d\mu + \mathcal{L}(m^*)K$$

$$C_1 : \delta[K - (\text{tr } K)g] = -t$$

$$C_2 : \text{tr}(K \times K) - (\text{tr } K)^2 + \varepsilon \text{tr } R = -2\tau$$

K , « courbure extrinsèque » de $\varphi = \text{Cte}$, est l'induit de la dérivée covariante $\nabla \hat{n}$ de \hat{n} . $\{\mu, m\}$ et $\{\tau, t, T\}$ sont respectivement les φ -caractérisations de \hat{m} et du tenseur impulsion-énergie \hat{T} de V_{n+1} . R est le tenseur de Ricci de g . « tr » signifie « trace de » et, pour deux 2-tenseurs P et Q , le produit \times est défini comme la contraction des deux indices d'ordre paire du produit tensoriel $P \otimes Q$. ∂_γ , ∇ , d et δ sont, respectivement, les opérateurs de dérivation partielle le long de γ , de dérivation covariante par rapport à g , de différentiation extérieure et de divergence. L'on a posé

$$S \equiv K \times K - \frac{1}{2}(\text{tr } K)K \tag{1}$$

$$P \equiv T - \frac{1}{2}(\text{Tr } T + \varepsilon\tau)g \tag{2}$$

Comme il se doit, dans le système d'équations d'Einstein E_1, E_2, C_1, C_2 , il n'apparaît aucune équation d'évolution pour le couple $\{\mu, m\}$ caractérisant \hat{m} ; ces équations doivent être imposées *a priori*. En particulier, on peut prendre $\mu = \varepsilon, m = 0$, ce qui correspond au choix, dans le domaine envisagé de V_{n+1} , d'un champ \hat{m}^* unitaire, géodésique et orthogonal à $\varphi = \text{Cte}$. La classe des cartes associée à ce choix de \hat{m}^* sera appelée *classe de Gauss*.

Dans les cartes (d'une classe) de Gauss, les équations d'évolution d'Einstein E_1 et E_2 se réduisent à

$$E_{1G} : \partial_G g = 2\varepsilon K$$

$$E_{2G} : \partial_G K = R + 2\varepsilon S - P$$

la notation ∂_G au lieu de ∂_γ nous rappelant que ces expressions ne sont valables que dans de telles cartes. Par contre, les équations C_1 et C_2 demeurent formellement les mêmes, car elles ne dépendent pas, même implicitement, du couple $\{\mu, m\}$: il suffit de remarquer qu'elles relient, par des opérations définies sur $\varphi = Cte$ des éléments tensoriels ne provenant que de φ -caractérisations.

3. ÉVOLUTION DES CHAMPS DE KILLING

a) Dans un domaine de V_{n+1} considérons le champ de tenseurs $\hat{L} \equiv \mathcal{L}(\hat{s}^*)\hat{g}$ associé au champ de vecteurs \hat{s}^* . Dans toute carte d'une classe $\mathcal{C}(\varphi; \hat{m}^*)$ du type précédent, on peut exprimer la φ -caractérisation $\{\lambda, l, L\}$ de \hat{L} en fonction des φ -caractérisations $\{\sigma, s\}$ de \hat{s} , $\{\mu, m\}$ de \hat{m} et g de \hat{g} ; l'on trouve :

$$\lambda = \frac{2\varepsilon}{\mu} \{ \partial_\gamma \sigma + \mathcal{L}(s^*)\mu - \mathcal{L}(m^*)\sigma \} \tag{3}$$

$$l = \frac{\varepsilon}{\mu} \{ \partial_\gamma s - 2\varepsilon\mu i(s^*)K - \mathcal{L}(m^*)s + \varepsilon\mu d\sigma - \varepsilon\sigma d\mu \} \tag{4}$$

$$L = 2\varepsilon\sigma K + \mathcal{L}(s^*)g \tag{5}$$

Si \hat{s}^* est un champ de Killing, alors $\lambda = l = L = 0$. D'autre part, une hypersurface $\varphi = K_0$ étant fixée, à tout couple $\{\sigma_{\varphi=K_0}, s_{\varphi=K_0}\}$ arbitrairement choisi sur elle les conditions d'évolution $\lambda = 0, l = 0$ permettent de lui associer, dans le voisinage de $\varphi = K_0$, un champ de vecteurs \hat{s}^* de V_{n+1} , non nécessairement de Killing. C'est de tels champs \hat{s}^* qu'il sera question dans la suite; nous aurons donc, conformément à (3) et (4) :

$$\begin{aligned} e_1 : \partial_\gamma \sigma + \mathcal{L}(s^*)\mu - \mathcal{L}(m^*)\sigma &= 0 \\ e_2 : \partial_\gamma s - 2\varepsilon\mu i(s^*)K - \mathcal{L}(m^*)s + \varepsilon\mu d\sigma - \varepsilon\sigma d\mu &= 0 \end{aligned}$$

Dans toute carte d'une classe de Gauss, ces équations se réduisent à :

$$\begin{aligned} e_{1G} : \partial_G \sigma &= 0 \\ e_{2G} : \partial_G s &= 2\varepsilon i(s^*)K - \varepsilon d\sigma \Leftrightarrow \partial_G s^* = -\varepsilon(d\sigma)^* \end{aligned}$$

b) PROPOSITION 1. — Dans toute carte de Gauss l'on a

$$\frac{\varepsilon}{2} \partial_G L = \sigma[R + 2\varepsilon S - P] - \nabla d\sigma + \mathcal{L}(s^*)K. \tag{6}$$

En effet, appliquons l'opérateur ∂_G à l'expression (5) de L ; tenant compte des conditions e_{1G} et e_{2G} et de la règle de commutation, pour tout vecteur v^* ,

$$[\partial_G, \mathcal{L}(v^*)] = \mathcal{L}(\partial_G v^*) \tag{7}$$

il vient

$$\partial_G L = 2\varepsilon\sigma \partial_G K + \mathcal{L}(s^*)\partial_G g + \mathcal{L}(\partial_G s^*)g$$

qui, à l'aide des équations d'évolution d'Einstein E_{1G}, E_{2G} , conduit à l'expression (6).

PROPOSITION 2. — On peut exprimer $\mathcal{L}(s^*)\tau$ en fonction de $\partial_G L$ par

$$\mathcal{L}(s^*)\tau = D[L(2); \partial_G L(0)] + 2\dot{\mathcal{L}}(t^*)\sigma + \varepsilon\sigma \operatorname{tr} K - \sigma \operatorname{tr} (K \times T) - \sigma\delta t \quad (8)$$

où $D[L(2); \partial_G L(0)]$ est un polynôme linéaire en L et ses deux premières dérivées covariantes et en $\partial_G L$.

Preuve. — Dérivons l'expression de τ fournie par l'équation de contraintes d'Einstein C_2 :

Mais, pour deux 2-tenseurs P et Q , on sait que

$$\mathcal{L}(s^*) \operatorname{tr} Q = \operatorname{tr} \mathcal{L}(s^*)Q - \operatorname{tr} [\mathcal{L}(s^*)g \times Q] \quad (9)$$

et que

$$\mathcal{L}(s^*)[P \times Q] = \mathcal{L}(s^*)P \times Q + P \times \mathcal{L}(s^*)Q - P \times \mathcal{L}(s^*)g \times Q \quad (10)$$

donc

$$\begin{aligned} -2\mathcal{L}(s^*)\tau &= 2 \operatorname{tr} [\mathcal{L}(s^*)K \times K] - 2 \operatorname{tr} [K \times \mathcal{L}(s^*)g \times K] \\ &\quad - 2(\operatorname{tr} K) \{ \operatorname{tr} \mathcal{L}(s^*)K - \operatorname{tr} [\mathcal{L}(s^*)g \times K] \} \\ &\quad + \varepsilon \{ \operatorname{tr} \mathcal{L}(s^*)R - \operatorname{tr} [\mathcal{L}(s^*)g \times R] \} \end{aligned} \quad (11)$$

L'expression de $\mathcal{L}(s^*)R$ en fonction de $\mathcal{L}(s^*)g$ est classique : elle est donnée par

$$\mathcal{L}(s^*)R = \frac{1}{2} [\Delta \mathcal{L}(s^*)g - \mathcal{L}(\delta \mathcal{L}(s^*)g)g - \nabla d \operatorname{tr} \mathcal{L}(s^*)g] \quad (12)$$

où Δ est le laplacien de Lichnerowicz pour les tenseurs [8]. L'on a ainsi :

$$\operatorname{tr} \mathcal{L}(s^*)R = \Delta \operatorname{tr} \mathcal{L}(s^*)g + \delta^2 \mathcal{L}(s^*)g \quad (13)$$

Les valeurs de $\mathcal{L}(s^*)g$ et de $\mathcal{L}(s^*)K$ peuvent être tirées respectivement de (5) et (6) :

$$\mathcal{L}(s^*)g = L - 2\varepsilon\sigma K$$

$$\mathcal{L}(s^*)K = \frac{\varepsilon}{2} \partial_G L - \sigma[R + 2\varepsilon S - P] + \nabla d\sigma \quad (14)$$

En substituant (13) et (14) en (11) on obtient, compte tenu de la définition (1) de S , (2) de P et de l'équation de contraintes C_2 ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(s^*)\tau &= D[L(2); \partial_G L(0)] + \varepsilon\sigma \operatorname{tr} K - \sigma \operatorname{tr} (K \times T) \\ &\quad + \Delta(\sigma \operatorname{tr} K) + \delta^2(\sigma K) - \operatorname{tr} [\nabla d\sigma \times K] - \operatorname{tr} K \cdot \Delta\sigma \end{aligned} \quad (15)$$

mais puisque

$$\begin{aligned} \Delta(\sigma \operatorname{tr} K) &= \operatorname{tr} K \cdot \Delta\sigma + \sigma\Delta \operatorname{tr} K - 2i(d\sigma)d \operatorname{tr} K \\ \delta^2(\sigma K) &= \sigma\delta^2 K + \operatorname{tr} [\nabla d\sigma \times K] - 2i(d\sigma)\delta K \end{aligned}$$

et que, en vertu de l'équation de contraintes C_1 ,

$$i(d\sigma)[\delta K + d \operatorname{tr} K] = - \mathcal{L}(t^*)\sigma,$$

l'expression (15) mène, après substitutions, à (8).

PROPOSITION 3. — On peut aussi exprimer $\mathcal{L}(s^*)t$ sous la forme

$$\mathcal{L}(s^*)t = D[L(1); \partial_G L(1)] + \varepsilon\sigma \operatorname{tr} K.t - \sigma\delta T - \varepsilon t d\sigma + i(d\sigma)T \quad (40)$$

où $D[L(1); \partial_G L(1)]$ désigne un polynôme linéaire en L , $\partial_G L$ et leur première dérivée covariante.

Preuve. — Dérivons l'équation de contraintes C_1 ; il résulte

$$\mathcal{L}(s^*)t = - \mathcal{L}(s^*)\delta K - d \operatorname{tr} \mathcal{L}(s^*)K + d \operatorname{tr} [K \times \mathcal{L}(s^*)g] \quad (17)$$

ayant tenu compte de (9) et du fait que $[\mathcal{L}(s^*), d] = 0$.

La valeur de $[\mathcal{L}(s^*), \nabla]$ en fonction de $\mathcal{L}(s^*)g$ est classique ; elle fournit dans notre cas

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(s^*)\delta K - \delta \mathcal{L}(s^*)K &= - \delta[K \times \mathcal{L}(s^*)g] - \frac{1}{2} i(d \operatorname{tr} \mathcal{L}(s^*)g)K \\ &\quad + \frac{1}{2} \operatorname{tr} [K \times (\nabla)\mathcal{L}(s^*)g] \end{aligned}$$

où la dérivée covariante entre parenthèses signifie qu'elle n'est pas tenue en compte pour les opérations indiquées à sa gauche. L'expression (17) devient ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(s^*)t &= - \delta \mathcal{L}(s^*)K + \delta[K \times \mathcal{L}(s^*)g] - d \operatorname{tr} \mathcal{L}(s^*)K \\ &\quad + d \operatorname{tr} [K \times \mathcal{L}(s^*)g] + \frac{1}{2} i(d \operatorname{tr} \mathcal{L}(s^*)g)K - \frac{1}{2} \operatorname{tr} [K \times (\nabla)\mathcal{L}(s^*)g] \quad (18) \end{aligned}$$

soit, par substitution de (14) et de la valeur (1) de S ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(s^*)t &= D[L(1); \partial_G L(1)] + \delta[\sigma(R - P)] - \varepsilon\delta[\sigma \operatorname{tr} K.K] - \delta(\nabla d\sigma) \\ &\quad + d \operatorname{tr} [\sigma(R - P)] - \varepsilon d \operatorname{tr} [\sigma \operatorname{tr} K.K] - d \operatorname{tr} \nabla d\sigma \\ &\quad - \varepsilon i(d(\sigma \operatorname{tr} K))K + \varepsilon \operatorname{tr} [K \times (\nabla)(\sigma K)] \end{aligned}$$

mais comme

$$d \operatorname{tr} \nabla d\sigma = - d\Delta\sigma$$

il résulte

$$\delta(\nabla d\sigma) = d\Delta\sigma - i(d\sigma)R$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(s^*)t &= D[L(1); \partial_G L(1)] + \sigma\delta(R - P) - \varepsilon\sigma \operatorname{tr} K.\delta K \\ &\quad + i(d\sigma)P + \operatorname{tr} (R - P)d\sigma + \sigma d \operatorname{tr} (R - P) \quad (19) \\ &\quad - 2\varepsilon\sigma \operatorname{tr} K.d \operatorname{tr} K - \varepsilon(\operatorname{tr} K)^2 d\sigma + \varepsilon \operatorname{tr} [K \times (\nabla)(\sigma K)] \end{aligned}$$

Par différentiation extérieure de C_2 on trouve la relation

$$- \varepsilon\sigma d\tau = \frac{1}{2} \sigma d \operatorname{tr} R - \varepsilon\sigma \operatorname{tr} K.d \operatorname{tr} K + \frac{1}{2} \varepsilon\sigma d \operatorname{tr} (K \times K)$$

d'autre part, le développement du dernier terme de (19) donne

$$\operatorname{tr} [\mathbf{K} \times (\nabla)(\sigma\mathbf{K})] = \varepsilon \operatorname{tr} (\mathbf{K} \times \mathbf{K})d\sigma + \varepsilon\sigma \operatorname{tr} [\mathbf{K} \times (\nabla)\mathbf{K}]$$

et les identités de Bianchi fournissent

$$\delta\mathbf{R} = -\frac{1}{2}d \operatorname{tr} \mathbf{R}$$

Tenant compte de ces dernières expressions dans (19), il résulte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(s^*)t = & \mathbf{D}[\mathbf{L}(1); \partial_G\mathbf{L}(1)] - \sigma\delta\mathbf{P} + i(d\sigma)\mathbf{P} - \operatorname{tr} \mathbf{P} \cdot d\sigma \\ & - \sigma d \operatorname{tr} \mathbf{P} + \varepsilon\sigma \operatorname{tr} \mathbf{K} \cdot t - 2\varepsilon t d\sigma - \varepsilon\sigma d\tau \end{aligned} \quad (20)$$

il suffit alors d'y remplacer la valeur de \mathbf{P} donnée par (2) pour obtenir l'expression (16) de la proposition.

PROPOSITION 4. — *Dans toute carte de Gauss, les équations d'Einstein imposent à τ et t les équations d'évolution*

$$\partial_G\tau = \operatorname{tr} (\mathbf{K} \times \mathbf{T}) + \delta t - \varepsilon t \operatorname{tr} \mathbf{K} \quad (21)$$

$$\partial_G t = \delta\mathbf{T} - \varepsilon \operatorname{tr} \mathbf{K} \cdot t \quad (22)$$

Ces relations peuvent être obtenues par un calcul direct à partir du système d'équations E_{1G} , E_{2G} , C_1 , C_2 , mais l'on peut profiter des résultats précédents pour y aboutir aisément. Il suffit en effet de remarquer que l'opérateur ∂_G est équivalent à l'opérateur différentiel d'ordre zéro sur l'algèbre tensorielle dont son action sur la connexion exprimée en fonction de son action sur la métrique jouit des mêmes propriétés que l'opérateur de dérivation de Lie ; de ce fait, les relations (11), (13) et (18) demeurent encore valables pour ∂_G . Et puisque, d'après (14) E_{1G} et E_{2G} , $\mathcal{L}(s^*)g$ et $\mathcal{L}(s^*)\mathbf{K}$ se réduisent à $\partial_G g$ et $\partial_G \mathbf{K}$ pour $\mathbf{L} = 0$, $\partial_G \mathbf{L} = 0$, $\sigma = -1$, il suffit, pour obtenir les expressions (21) et (22) de $\partial_G\tau$ et $\partial_G t$, de substituer ces valeurs de \mathbf{L} , $\partial_G \mathbf{L}$ et σ dans (8) et (16).

PROPOSITION 5. — *Posons $\partial \equiv \sigma\partial_G + \mathcal{L}(s^*)$. Les actions de ∂ sur \mathbf{P} et \mathbf{T} sont reliées par*

$$\partial\mathbf{P} = \mathbf{D}[\mathbf{L}(2); \partial_G\mathbf{L}(0)] + \delta\mathbf{T} - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \partial\mathbf{T} \cdot g - \varepsilon\mathcal{L}(t^*)\sigma \cdot g \quad (23)$$

En effet, d'après sa définition, ∂ est un opérateur différentiel d'ordre zéro sur les tenseurs. En l'appliquant à la définition (2) de \mathbf{P} , il vient

$$\partial\mathbf{P} = \delta\mathbf{T} - \frac{1}{2} [\operatorname{tr} \partial\mathbf{T} - \operatorname{tr} (\mathbf{T} \times \partial g)] - \frac{1}{2} \varepsilon\partial\tau \cdot g - \frac{1}{2} (\operatorname{tr} \mathbf{T} + \varepsilon t)\partial g \quad (24)$$

mais $\partial g = \mathbf{L}$ et, d'après (8) et (21),

$$\partial\tau = 2\mathcal{L}(t)\sigma + \mathbf{D}[\mathbf{L}(2); \partial_G\mathbf{L}(0)] \quad (25)$$

La substitution de (25) dans (24) conduit à (23).

PROPOSITION 6. — Dans toute carte de Gauss, on a

$$\frac{\varepsilon}{2} \partial_G^2 L = D[L(2); \partial_G L(0)] - \partial P - \varepsilon d\sigma \otimes t - \varepsilon t \otimes d\sigma. \quad (26)$$

En effet, appliquons ∂_G à (6); par suite de $e_{1G}, e_{2G}, E_{1G}, E_{2G}$, et tenant compte de la règle de commutation (7), il vient

$$\frac{\varepsilon}{2} \partial_G^2 L = \partial[R + 2\varepsilon S - P] - \varepsilon \mathcal{L}(d\sigma^*)K - \partial_G \nabla d\sigma,$$

mais

$$\partial_G \nabla d\sigma = \frac{1}{2} \partial_G \mathcal{L}(d\sigma^*)g = \varepsilon \mathcal{L}(d\sigma^*)K + \frac{1}{2} \mathcal{L}(\partial_G d\sigma^*)g$$

et

$$\partial_G d\sigma^* = \partial_G i(d\sigma)g^* = i(d\sigma)\partial_G g^* = -2\varepsilon i(d\sigma)K^*,$$

et donc il résulte

$$\frac{\varepsilon}{2} \partial_G^2 L = \partial[R + 2\varepsilon S - P] - 2\varepsilon \mathcal{L}(d\sigma^*)K + \varepsilon \mathcal{L}(i(d\sigma)K^*)g \quad (27)$$

D'autre part, d'après (12) et (14), on a

$$\mathcal{L}(s^*)R = D[L(2)] - \varepsilon \{ \Delta(\sigma K) - \mathcal{L}(\delta(\sigma K)^*)g - \nabla d(\sigma \operatorname{tr} K) \}$$

soit, en développant les termes du crochet et en utilisant l'équation de contraintes C_1 ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(s^*)R = D[L(2)] - \varepsilon \{ \Delta\sigma \cdot K + \sigma \Delta K - 2i(d\sigma^*)VK - \sigma \mathcal{L}(\delta K^*)g \\ + d\sigma \otimes t + t \otimes d\sigma + \mathcal{L}(i(d\sigma)K^*)g + \operatorname{tr} K \cdot \nabla d\sigma + \sigma \nabla d \operatorname{tr} K \} \end{aligned}$$

A partir de cette expression, un raisonnement analogue à celui fait à la suite de la proposition 2 permet, en faisant $L = 0, \partial_G L = 0, \sigma = -1$, d'obtenir directement

$$\partial_G R = \varepsilon \{ \Delta K - \mathcal{L}(\delta K^*)g + \nabla d \operatorname{tr} K \}$$

et ainsi l'on a

$$\begin{aligned} \partial R = D[L(2)] - \varepsilon \{ \Delta\sigma \cdot K - \operatorname{tr} K \cdot \nabla d\sigma - 2i(d\sigma^*)VK \\ + \mathcal{L}(i(d\sigma)K^*)g + d\sigma \otimes t + t \otimes d\sigma \} \quad (28) \end{aligned}$$

Appliquons ∂ à la définition (1) de S. Tenant compte du fait que les expressions (9) et (10) sont encore valables pour l'opérateur ∂ , il résulte :

$$\begin{aligned} \partial S = \partial K \times K + K \times \partial K - K \times \partial g \times K \\ - \frac{1}{2} \operatorname{tr} K \cdot \partial K - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \partial K \cdot K + \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\partial g \times K) \cdot K \end{aligned}$$

c'est-à-dire, puisque $\partial g = L, \partial K = \frac{\varepsilon}{2} \partial_G L + \nabla d\sigma$,

$$\begin{aligned} \partial S = D[L(0); \partial_G L(0)] + \nabla d\sigma \times K + K \times \nabla d\sigma \\ - \frac{1}{2} \operatorname{tr} K \cdot \nabla d\sigma + \frac{1}{2} \Delta\sigma \cdot K \quad (29) \end{aligned}$$

Finalement, la substitution de (28) et (29) dans (27), moyennant l'identité

$$\mathcal{L}(d\sigma^*)\mathbf{K} = i(d\sigma^*)\nabla\mathbf{K} + \nabla d\sigma \times \mathbf{K} + \mathbf{K} \times \nabla d\sigma$$

fournit l'expression (24) de $\partial_G^2 L$ affirmée par la proposition.

c) Dans un ouvert de V_{n+1} , donnons nous une hypersurface Σ régulière et non isotrope. Une classe de cartes $\mathcal{C}(\varphi; \hat{m}^*)$ est dite Σ -adaptée s'il existe une constante q telle que, dans les cartes de cette classe, l'équation locale de Σ soit $\varphi(x) = q$. Les classes Σ -adaptées seront notées $\mathcal{C}_\Sigma(\varphi; \hat{m}^*)$.

Dans une carte d'une classe Σ -adaptée $\mathcal{C}_\Sigma(\varphi; \hat{m}^*)$, supposons connue la φ -caractérisation $\{\tau, t, \Gamma\}$ du tenseur impulsion-énergie $\hat{\mathbf{T}}$ de V_{n+1} , et soient $\{\mu, m\}$ et $\{\sigma, s\}$ les φ -caractérisations respectivement de \hat{m} et d'un certain champ de vecteurs \hat{s}^* de V_{n+1} . Nous allons montrer :

THÉORÈME 1. — *Sous des conditions convenables de différentiabilité, que nous précisons dans la suite, pour que le champ de vecteurs \hat{s}^* soit un champ de Killing au voisinage de Σ , il faut et il suffit que, dans une carte (d'une classe) Σ -adaptée, le couple $\{\sigma, s\}$ satisfasse :*

i) sur Σ , aux équations de contraintes

$$I_1 : 2\varepsilon\sigma\mathbf{K} + \mathcal{L}(s^*)g = 0$$

$$I_2 : \sigma[\mathbf{R} + 2\varepsilon\mathbf{S} - \mathbf{P}] - \nabla d\sigma + \mathcal{L}(s^*)\mathbf{K} = 0$$

ii) au voisinage de Σ , aux équations d'évolution

$$e_1 : \partial_\gamma \sigma + \mathcal{L}(s^*)\mu - \mathcal{L}(m^*)\sigma = 0$$

$$e_2 : \partial_\gamma s - 2\varepsilon\mu i(s^*)\mathbf{K} - \mathcal{L}(m^*)s + \varepsilon\mu d\sigma - \varepsilon\sigma d\mu = 0$$

$$e_3 : \sigma\partial_\gamma \Gamma + \mu\mathcal{L}(s^*)\Gamma - \sigma\mathcal{L}(m^*)\Gamma + \varepsilon\mu(t \otimes d\sigma + d\sigma \otimes t) - \varepsilon\sigma(t \otimes d\mu + d\mu \otimes t) = 0$$

Démonstration. — Les relations I_1, I_2, e_1, e_2, e_3 sont suffisantes pour que \hat{s}^* soit un champ de Killing. En effet, en nous plaçant dans une carte de Gauss, l'équation d'évolution e_3 devient

$$e_{3G} : \sigma\partial_G \Gamma + \mathcal{L}(s^*)\Gamma + \varepsilon\{d\sigma \otimes t + t \otimes d\sigma\} = 0$$

laquelle, jointe aux relations e_{1G}, e_{2G} et par suite de la proposition 5, entraîne

$$\partial\mathbf{P} = \mathbf{D}[\mathbf{L}(2); \partial_G \mathbf{L}(0)] - \varepsilon\{d\sigma \otimes t + t \otimes d\sigma\}$$

et la proposition 6 conduit alors à la relation

$$\partial_G^2 L = \mathbf{D}[\mathbf{L}(2); \partial_G \mathbf{L}(0)] \quad (30)$$

Les ci-dessus appelées « conditions convenables de différentiabilité » sont celles qui permettent d'assurer l'unicité de la solution nulle pour l'équation différentielle (30), du second ordre, linéaire et homogène en L et ses dérivées. Il est évident que l'analyticité en est une condition convenable, mais des conditions plus larges peuvent, sans doute, être choisies.

Sous ces hypothèses, et puisque le système I_1, I_2 n'exprime que $L|_{\Sigma} = 0$, $\partial_G L|_{\Sigma} = 0$, il résulte $L = 0$ au voisinage de Σ , et donc \hat{s}^* est un champ de Killing.

La nécessité des relations I_1, I_2, e_1, e_2 découle immédiatement de (3), (4) et (5). Pour e_3 , il suffit de remarquer qu'elle n'exprime en fait que la nullité du tenseur induit par $\mathcal{L}(\hat{s}^*)\hat{T}$ sur chacune des hypersurfaces de la famille définie par la carte locale choisie, nullité qui est trivialement nécessaire si \hat{s}^* est de Killing. Le théorème est donc démontré.

d) Dans chaque cas particulier où le tenseur impulsion-énergie est précisé et où l'existence et l'unicité du problème de Cauchy correspondant est prouvé, les conditions d'évolution e_1, e_2, e_3 du théorème 1 devraient pouvoir se ramener à des nouvelles conditions de contraintes sur Σ , puisque les données sur Σ contiennent alors toute l'information sur la solution en son voisinage. Dans la section suivante, nous montrerons qu'il en est ainsi pour le fluide parfait. Pour le cas du vide, $\hat{T} = 0$, le résultat, que nous avons obtenu par un calcul direct ailleurs (cf. [9]), est immédiat à partir du théorème précédent :

COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses de différentiabilité mentionnées, toute solution $\{\sigma, s\}|_{\Sigma}$ du système*

$$\left. \begin{aligned} 2\epsilon\sigma K + \mathcal{L}(s^*)g &= 0 \\ \sigma[R + 2\epsilon S] - \nabla d\sigma + \mathcal{L}(s^*)K &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

sur Σ engendre, dans le voisinage de Σ , un champ de Killing \hat{s}^* , $\mathcal{L}(\hat{s}^*)\hat{g} = 0$.

En effet, \hat{T} étant nul partout, l'équation d'évolution e_3 du théorème 1 est identiquement satisfaite, et les équations e_1 et e_2 deviennent des conditions « constructives » applicables à toute solution sur Σ de (31) pour l'obtention explicite du champ de Killing.

4. LE FLUIDE PARFAIT

a) Considérons maintenant la variété V_{n+1} munie d'une métrique à signature hyperbolique normale $(+, -, \dots, -)$. Nous dirons qu'une telle variété définit un *fluide parfait* si le tenseur « impulsion-énergie » \hat{T} de g est de la forme

$$\hat{T} = (\rho + p)\hat{u} \otimes \hat{u} - pg \quad (32)$$

où $\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$ sont des scalaires et \hat{u} est un vecteur unitaire temporel : $\hat{g}(\hat{u}, \hat{u}) = 1$.

Dans toute carte d'une classe $\mathcal{C}(\varphi, \hat{m}^*)$, la φ -caractérisation $\{\tau, t, T\}$ de \hat{T} est donnée, en fonction de la φ -caractérisation $\{v, u\}$ de \hat{u} , par

$$\left. \begin{aligned} \tau &= (\rho + p)v^2 - \epsilon p \\ t &= (\rho + p)vu \\ T &= (\rho + p)u \otimes u - pg \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Le fait que \hat{u} est unitaire se traduit par

$$\varepsilon v^2 + i(u^*)u = 1. \quad (34)$$

Les hypersurfaces pour lesquelles $v = 0$ sont tangentes aux *lignes de courant* du fluide, courbes intégrales du champ \hat{u} . L'on sait que ces hypersurfaces sont caractéristiques et correspondent physiquement, pour $n = 3$, aux *ondes dites de matière*. Dans toute la suite nous ne considérons que les classes de cartes pour lesquelles $v \neq 0$.

Introduisons, au lieu de la *pression* p , la variable

$$\pi \equiv \tau + \varepsilon p > 0 \quad (35)$$

Des deux premières relations (33) on en déduit

$$v^2 = \frac{\pi^2}{\varepsilon\pi^2 + i(t^*)t}, \quad \rho + p = \frac{1}{\pi} \{ \varepsilon\pi^2 + i(t^*)t \} \quad (36)$$

Une fois pour toutes, nous supposons choisie la paramétrisation des hypersurfaces $\varphi = \text{Cte}$ de nos cartes locales de façon que $v > 0$. Alors, de la seconde relation (33) il s'ensuit

$$u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\pi^2 + i(t^*)t}} t \quad (37)$$

et la troisième relation devient

$$T = \frac{1}{\pi} t \otimes t - \varepsilon(\pi - \tau)g \quad (38)$$

Nous allons montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Dans le cas où la variété V_{n+1} définit un fluide parfait, l'énoncé du théorème 1 demeure valable en substituant l'équation tensorielle d'évolution e_3 par l'équation scalaire*

$$e'_3 : \frac{\sigma}{\mu} \partial_\nu p + \mathcal{L}(s^*)p - \frac{\sigma}{\mu} \mathcal{L}(m^*)p = 0.$$

En effet, évaluons en carte de Gauss le tenseur ∂T où T a la forme (38); il vient

$$\partial T = \frac{1}{\pi} [\partial t \otimes t + t \otimes \partial t] - \varepsilon(\pi - \tau)\partial g + \varepsilon g \partial \tau - \left[\frac{1}{\pi^2} t \otimes t + \varepsilon g \right] \partial \pi$$

mais comme $\partial g = L$ et que, d'après les propositions 2, 3 et 4, on a

$$\partial \tau = D[L(2); \partial_G L(0)] + 2\mathcal{L}(t)\sigma \quad (39)$$

$$\partial t = D[L(1); \partial_G L(1)] + i(d\sigma)T - \varepsilon t d\sigma \quad (40)$$

il en résulte

$$\partial T = D[L(2); \partial_G L(1)] - \varepsilon \{ t \otimes d\sigma + d\sigma \otimes t \} - \left[\frac{1}{\pi^2} t \otimes t + \varepsilon g \right] (\partial\pi - 2\mathcal{L}(t)\sigma)$$

Cette expression permet, à travers la relation (23) de la proposition 5, d'évaluer ∂P . En substituant la valeur de ∂P ainsi obtenue dans l'expression (26) de $\partial_G^2 L$, on est amené à une équation de la forme

$$\partial_G^2 L = D[L(2); \partial_G L(1)] \tag{41}$$

pourvue que

$$\partial\pi - 2\mathcal{L}(t)\sigma = D[L(2); \partial_G L(1)] \tag{42}$$

(la notation $D[L(); \partial_G L()]$ n'indique que le caractère linéaire et homogène en L , $\partial_G L$ et leurs dérivées de l'expression explicite correspondante. Les seconds membres de (41) et (42) ne sont donc pas nécessairement *identiques* : d'ailleurs dans (41) il s'agit d'un polynôme tensoriel, dans (42) d'un polynôme scalaire).

En carte de Gauss e'_3 se réduit à

$$e'_{3G} : \partial p = 0$$

En substituant p par sa valeur tirée de (35), il résulte, compte tenu de (39)

$$\partial\pi - 2\mathcal{L}(t)\sigma = D[L(2); \partial_G L(0)],$$

qui est de la forme (42). Il s'ensuit donc (41), qui entraîne, par un raisonnement analogue à celui fait pour l'équation (30), $L = 0$ au voisinage de Σ . e'_3 est donc suffisante. Pour prouver la nécessité de e'_3 , il suffit de remarquer qu'elle n'est que l'expression, en fonction des φ -caractérisations de \hat{s} et de \hat{m} par rapport à une carte arbitraire $\mathcal{C}_\Sigma(\varphi, \hat{m}^*)$, de $\mathcal{L}(\hat{s})p = 0$, condition que l'on sait nécessaire pour l'existence de champs de Killing. Le théorème est donc démontré.

b) Un fluide parfait est dit *barotrope* s'il existe une relation du type

$$p = f(\rho) \tag{43}$$

On sait (cf. [10]) qu'un tel fluide admet comme hypersurfaces caractéristiques, outre les hypersurfaces isotropes et les tangentes aux lignes de courant, celles vérifiant

$$\left[\hat{g} - \left(1 - \frac{1}{f'} \right) \hat{u} \otimes \hat{u} \right] (d\varphi, d\varphi) = 0 \tag{44}$$

et qui correspondent physiquement aux *ondes soniques*.

Nous avons le résultat suivant :

PROPOSITION 7.— *Dans toute carte d'une classe $\mathcal{C}(\varphi, \hat{m}^*)$, l'équation (43)*

définit π comme fonction explicite de τ et de $i(t^*)t$ pourvue que les hypersurfaces $\varphi = \text{Cte}$ ne soient pas caractéristiques.

En effet, de (35) et (36), il résulte

$$p = \varepsilon(\pi - \tau), \quad \rho = \varepsilon\tau + \frac{1}{\pi}i(t^*)t \quad (45)$$

L'équation (43) impose alors une relation du type

$$\Psi(\pi, \tau, i(t^*)t) = 0$$

avec

$$\Psi \equiv \pi - \tau - \varepsilon f \left(\varepsilon\tau + \frac{1}{\pi}i(t^*)t \right),$$

et l'on a donc

$$\Psi'_\pi = 1 + \varepsilon f' \cdot \frac{1}{\pi^2}i(t^*)t,$$

qui ne s'annule que si

$$f' \cdot i(t^*)t = -\varepsilon\pi^2 \quad (46)$$

En tirant de (33) et (35) les valeurs de $i(t^*)t$ et de π , (46) s'écrit

$$f'(1 - \varepsilon v^2) = -\varepsilon v^2,$$

ou, sous une forme plus convenable

$$\varepsilon - \left(1 - \frac{1}{f'}\right)v^2 = 0 \quad (47)$$

La substitution de ε par $\hat{g}(\hat{n}, \hat{n})$ et de v par $i(\hat{n}^*)\hat{u}$ dans (47) conduit à (44) et la proposition est démontrée.

Il est bien connu (cf. [10]) que le fluide parfait barotrope admet un théorème d'existence et d'unicité pour le problème de Cauchy, les données de Cauchy étant constituées par l'ensemble $\{g|_\Sigma, K|_\Sigma, \pi|_\Sigma\}$. Nous allons voir que l'existence de champs de Killing au voisinage de Σ peut être décidée à partir de ces données :

THÉORÈME 3. — *Sous des hypothèses de différentiabilité convenables, toute solution $\{\sigma, s\}|_\Sigma$ du système*

$$\left. \begin{aligned} 2\varepsilon\sigma K + \mathcal{L}(s^*)g &= 0 \\ \sigma[R + 2\varepsilon S - P] - \nabla d\sigma + \mathcal{L}(s^*)K &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

sur Σ engendre, dans son voisinage, un champ de Killing \hat{s}^* , $\mathcal{L}(\hat{s}^*)\hat{g} = 0$.

En effet, d'après la proposition 7, on peut écrire $\pi = \pi(\tau, i(t^*)t)$; si $\dot{\pi}$ et π' dénotent respectivement les dérivées partielles de π par rapport à τ et à $i(t^*)t$ l'on a

$$\dot{\pi} = \frac{1 + f'}{\Psi'_\pi}, \quad \pi' = \frac{\varepsilon f'}{\pi \Psi'_\pi}.$$

Il s'ensuit que, dans une carte de Gauss, l'on a :

$$\partial\pi = \dot{\pi}\partial\tau + \pi'\partial i(t^*)t,$$

soit, tenant compte de (39) et (40),

$$\partial\pi - 2\mathcal{L}(t^*)\sigma = D[L(1); \partial_G L(1)],$$

qui est de la forme (42). La condition e'_3 est donc identiquement vérifiée, et les conditions e_1 et e_2 deviennent des conditions « constructives » applicables à toute solution sur Σ de (48).

c) Nous dirons que le *fluide parfait* défini par (32) admet un *schéma thermodynamique* ou, tout court, *une thermodynamique*, si l'équation de V_{n+1} $\delta\hat{u} = i(\hat{u}^*)dF$ admet une solution $F(x)$, $x \in V_{n+1}$ de la forme $F(x) = F(\rho(x), p(x))$. S'il en est ainsi, la *densité de matière* r est alors définie par $r(\rho, p) \equiv e^{-F}$, et l'*énergie interne spécifique* ε par $\varepsilon(\rho, p) = \rho e^F - 1$. Il existe alors deux fonctions Θ et S , appelées respectivement *température absolue* et *entropie spécifique*, telles que

$$\Theta dS = d\varepsilon + p d\frac{1}{r}.$$

L'évaluation de dS en fonction de $d\rho$ et dp peut s'écrire sous la forme :

$$\omega dS = d\rho - \gamma dp \tag{49}$$

où, comme il a été montré par Lichnerowicz [4], γ est reliée à la vitesse v des ondes soniques par la relation $v^2 = 1/\gamma$. Comme il est d'habitude, nous supposons alors $v^2 \leq 1 \Leftrightarrow \gamma \geq 1$.

PROPOSITION 8. — *Soit A la quantité définie par*

$$\begin{aligned} \{ \varepsilon\gamma\pi^2 + i(t^*)t \} A = & \{ \varepsilon(1 + \gamma)\pi^2 + 2i(t^*)t \} [\delta t - \varepsilon\pi \operatorname{tr} K] \\ & + \varepsilon\pi(\gamma - 1)[i^2(t^*)K + \mathcal{L}(t^*)\tau] + \left\{ \varepsilon(2 - \gamma)\pi + \frac{1}{\pi}i(t^*)t \right\} \mathcal{L}(t^*)\pi \end{aligned} \tag{50}$$

Alors, dans toute carte de Gauss l'on a

$$\partial_G \pi = A. \tag{51}$$

En effet, il est bien connu que, pour un fluide parfait admettant une thermodynamique,

$$i(\hat{u}^*)dS = 0$$

ce qui, dans une carte de Gauss, s'écrit

$$v\partial_G S + i(u^*)dS = 0$$

ou bien, tenant compte de (35) et (36);

$$\pi\partial_G S + \mathcal{L}(t^*)S = 0 \tag{52}$$

Introduisons l'opérateur $\underline{\partial} \equiv \pi\partial_G + \mathcal{L}(t^*)$; la relation (49) permet encore d'écrire (52) sous la forme

$$\underline{\partial}\rho - \gamma\underline{\partial}p = 0$$

soit, en substituant ρ et p par les valeurs (45),

$$\{ \varepsilon\gamma\pi^2 + i(t^*)t \} \underline{\partial}\pi = \varepsilon(1 + \gamma)\pi^2 \underline{\partial}\tau + \pi \underline{\partial}i(t^*)t \tag{53}$$

L'évaluation de $\underline{\partial}\tau$ et $\underline{\partial}i(t^*)t$ est immédiate à partir du résultat de la proposition 4; l'on trouve

$$\begin{aligned}\underline{\partial}\tau &= \pi \{ \delta t - \varepsilon \operatorname{tr} \mathbf{K} + \operatorname{tr} (\mathbf{K} \times \mathbf{T}) \} + \mathcal{L}(t^*)\tau \\ \underline{\partial}i(t^*)t &= 2\pi \{ -\varepsilon \operatorname{tr} \mathbf{K} \cdot i(t^*)t + i(t^*)\delta\mathbf{T} - \varepsilon i^2(t^*)\mathbf{K} \} + \mathcal{L}(t^*)i(t^*)t\end{aligned}$$

la substitution de ces dernières expressions dans (53), compte tenu de la définition de l'opérateur $\underline{\partial}$, conduit à (51).

PROPOSITION 9. — *En posant*

$$\mathbf{N} \equiv \partial\pi - 2\mathcal{L}(t^*)\sigma \quad (54)$$

l'on a, dans toute carte de Gauss,

$$\begin{aligned}\partial_G \mathbf{A} &= \mathbf{D}[\mathbf{N}(1)] + \mathbf{D}[\mathbf{L}(3); \partial_G \mathbf{L}(1)] + \frac{2}{\pi} \left\{ \delta t - \varepsilon\pi \operatorname{tr} \mathbf{K} + \frac{1}{\pi} \mathcal{L}(t^*)\pi \right\} \mathcal{L}(t^*)\sigma \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \mathcal{L}^2(t^*)\sigma + \frac{2}{\pi} i^2(t^*)\nabla d\sigma + 3\varepsilon \mathcal{L}(d\sigma^*)\pi \\ &\quad - 2\varepsilon \mathcal{L}(d\sigma^*)\tau - 4\varepsilon i(t^*)i(d\sigma^*)\mathbf{K}. \quad (55)\end{aligned}$$

Preuve. — A partir de l'expression $\partial\gamma = \gamma'_\rho \partial\rho + \gamma'_p \partial p$, en calculant les valeurs de $\partial\rho$ et de ∂p à partir de (45) et en substituant $\partial\tau$ par sa valeur (39), $\underline{\partial}i(t^*)t$ par sa valeur déduite de (40) et $\partial\pi$ par $\mathbf{N} + 2\mathcal{L}(t^*)\sigma$, l'on trouve

$$\partial\gamma = \mathbf{D}[\mathbf{N}(0)] + \mathbf{D}[\mathbf{L}(2); \partial_G \mathbf{L}(1)] \quad (56)$$

D'autre part, tenant compte de la définition de l'opérateur ∂ et moyennant les relations (14), (21) et (22), un calcul direct mais un peu long fournit

$$\begin{aligned}\partial\delta t &= \mathbf{D}[\mathbf{L}(2); \partial_G \mathbf{L}(2)] + \frac{2}{\pi} \left\{ \delta t + \frac{1}{\pi} \mathcal{L}(t^*)\pi \right\} \mathcal{L}(t^*)\sigma \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \mathcal{L}^2(t^*)\sigma + \frac{1}{\pi} i^2(t^*)\nabla d\sigma + 2\varepsilon \mathcal{L}(d\sigma^*)\pi \\ &\quad - \varepsilon \mathcal{L}(d\sigma^*)\tau - 2\varepsilon i(t^*)i(d\sigma^*)\mathbf{K} - \varepsilon\pi\Delta\sigma \quad (57)\end{aligned}$$

$$\partial \operatorname{tr} \mathbf{K} = \mathbf{D}[\mathbf{L}(0); \partial_G \mathbf{L}(0)] - \Delta\sigma \quad (58)$$

$$\begin{aligned}\partial i^2(t^*)\mathbf{K} &= \mathbf{D}[\mathbf{L}(1); \partial_G \mathbf{L}(1)] + i^2(t^*)\nabla d\sigma \\ &\quad + \frac{2}{\pi} i^2(t^*)\mathbf{K} \cdot \mathcal{L}(t^*)\sigma - 2\varepsilon\pi i(t^*)i(d\sigma^*)\mathbf{K} \quad (59)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial \mathcal{L}(t^*)\tau &= \mathbf{D}[\mathbf{L}(3); \partial_G \mathbf{L}(1)] - \left\{ \delta t - \varepsilon\pi \operatorname{tr} \mathbf{K} - \frac{1}{\pi} \mathcal{L}(t^*)\tau \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\pi} i^2(t^*)\mathbf{K} \right\} \mathcal{L}(t^*)\sigma + 2\mathcal{L}^2(t^*)\sigma - \varepsilon\pi \mathcal{L}(d\sigma^*)\tau \quad (60)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial \mathcal{L}(t^*)\pi &= \mathbf{D}[\mathbf{L}(1); \partial_G \mathbf{L}(1)] + \mathcal{L}(t^*)\mathbf{N} \\ &\quad - \left\{ \mathbf{A} - \frac{1}{\pi} \mathcal{L}(t^*)\pi \right\} \mathcal{L}(t^*)\sigma + 2\mathcal{L}^2(t^*)\sigma - \varepsilon\pi \mathcal{L}(d\sigma^*)\pi \quad (61)\end{aligned}$$

En appliquant alors l'opérateur ∂ à l'expression (50) de définition de A et en y substituant les relations (56) à (61), on obtient bien (55).

THÉORÈME 4. — *Sous des hypothèses de différentiabilité convenables, toute solution $\{\sigma, s\}|_{\Sigma}$ du système*

$$\left. \begin{aligned} 2\varepsilon\sigma K + \mathcal{L}(s^*)g &= 0 \\ \sigma[R + 2\varepsilon S - P] - \nabla d\sigma + \mathcal{L}(s^*)K &= 0 \\ \sigma A + \mathcal{L}(s^*)\pi - 2\mathcal{L}(t^*)\sigma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

sur Σ engendre, dans son voisinage, un champ de Killing \hat{s}^* , $\mathcal{L}(\hat{s}^*)\hat{g} = 0$.

En effet, calculons à partir de (54) $\partial_G N$; l'on a

$$\partial_G N = \sigma \partial_G A + \mathcal{L}(s^*)A + \mathcal{L}(\partial_G s^*)\pi - 2\mathcal{L}(\partial_G t^*)\sigma$$

soit, d'après e_{1G} , e_{2G} et (22),

$$\partial_G N = \partial A - \varepsilon \mathcal{L}(d\sigma^*)\pi + 2\varepsilon \operatorname{tr} K \cdot \mathcal{L}(t^*)\sigma - 2i(d\sigma^*)\delta T + 4\varepsilon i(t^*)i(d\sigma^*)K \quad (63)$$

L'évaluation de δT à partir de (38) donne

$$\delta T = \frac{1}{\pi} \left[\delta t + \frac{1}{\pi} \mathcal{L}(t^*)\pi \right] t - \frac{1}{\pi} \mathcal{L}(t^*)t + \frac{1}{2\pi} di(t^*)t + \varepsilon d(\pi - \tau) \quad (64)$$

En plongeant (64) et (55) dans (63), l'on trouve

$$\partial_G N = D[N(1)] + D[L(3); \partial_G L(1)] \quad (65)$$

D'autre part, à partir de l'expression de δT donnée dans la démonstration du théorème 2 l'on obtient

$$\delta T + \varepsilon \{ t \otimes d\sigma + d\sigma \otimes t \} = D[L(2); \partial_G L(1)] + D[N(0)]$$

qui, rapportée dans le résultat (23) de la proposition 5, conduit à

$$\delta P + \varepsilon \{ t \otimes d\sigma + d\sigma \otimes t \} = D[L(2); \partial_G L(1)] + D[N(0)]$$

et ce résultat plongé dans (26) fournit encore

$$\partial_G^2 L = D[L(2); \partial_G L(1)] + D[N(0)] \quad (66)$$

Puisque les équations (62) n'expriment que la nullité sur Σ de L, $\partial_G L$ et N, sous des conditions convenables de différentiabilité le système $\{(65), (66)\}$ entraîne $N = 0$, $L = 0$ au voisinage de Σ et donc toute solution $\{\sigma, s\}$ de (62) engendre, au moyen des équations d'évolution e_1 et e_2 , un champ de Killing, c. q. f. d.

d) Soit \mathcal{A} l'algèbre de Lie des champs de Killing au voisinage de Σ , et \mathcal{A}_{Σ} l'algèbre de Lie (obtenue par restriction sur Σ du crochet de \mathcal{A}) de la restriction de ces champs sur Σ . Notons par p , q et r respectivement les dimensions de \mathcal{A} , de \mathcal{A}_{Σ} et de l'espace vectoriel de solutions en s^* de l'un des systèmes (48) ou (62) sur Σ . Nous avons le résultat :

PROPOSITION 10. — Si $K \neq 0$, l'on a $p = q = r$.

Preuve. — Il est évident que $p \geq q$. D'après les résultats précédents (corollaire 1 ou théorèmes 3 ou 4 selon les cas), dans un certain voisinage de Σ , tout champ de Killing est déterminé univoquement à partir de sa restriction sur Σ au moyen des équations d'évolution e_1 et e_2 . Par ces mêmes équations, au champ (de Killing) nul sur Σ correspond le champ (de Killing) nul dans son voisinage. Il s'ensuit que si sur Σ un champ est combinaison linéaire de q autres champs, il en est de même en dehors de Σ et donc $p = q$.

D'autre part, d'après la structure des systèmes (48) ou (62), les mêmes combinaisons linéaires sont vérifiées pour tout s^* que pour leur scalaire associé σ , pourvue que l'on ait $K \neq 0$. Comme la φ -caractérisation est une application linéaire il s'ensuit $r = q$, et la proposition est démontrée.

A l'aide de ce résultat, les théorèmes 3 et 4 permettent d'énoncer :

THÉORÈME 5. — Sous les hypothèses de différentiabilité précédemment indiquées, pour que des données de Cauchy $\{g|_{\Sigma}, K|_{\Sigma} \neq 0, \pi|_{\Sigma}\}$ sur une hypersurface Σ déterminent, dans son voisinage, une solution des équations d'Einstein pour le fluide parfait barotrope (resp. avec schéma thermodynamique) admettant un groupe d'isométries de dimension r , il faut et il suffit que l'espace de solutions en s^* du système $\{(48)\}$ (resp. $\{(62)\}$) sur Σ soit de dimension r .

Ce résultat subsiste, avec des corrections évidentes, pour le cas du vide (cf. [2] [9]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. E. FISCHER, J. E. MARSDEN, *Bull. Am. Math. Soc.*, t. 79, n° 5, 1973, p. 997-1003.
- [2] V. MONCRIEF, *Jour. Math. Phys.*, t. 16, n° 3, 1975, p. 493-498.
- [3] B. COLL, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 282 A, 1976, p. 247-250.
- [4] A. LICHNEROWICZ, *Relativistic Hydrodynamics and Magneto-hydrodynamics*, W. A. Benjamin, New York, 1967.
- [5] B. COLL, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. XXV, n° 4, 1976, p. 363-391.
- [6] R. ARNOWITT, S. DESER, C. W. MISNER dans *Gravitation, an Introduction to Current Research*, ed. L. Witten, Wiley Sons, New York, 1962.
- [7] A. E. FISCHER, J. E. MARSDEN, *J. Math. Phys.*, t. 13, n° 4, 1972, p. 546-568.
- [8] A. LICHNEROWICZ, *Propagateurs et Commutateurs en Relativité Générale*, I. H. E. S., Pub. Math., n° 10, 1961.
- [9] B. COLL, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 280 A, 1975, p. 393-396.
- [10] A. LICHNEROWICZ, *Théories Relativistes de la Gravitation et de l'Électromagnétisme*, Masson, Paris, 1955.

(Manuscrit reçu le 11 décembre 1975).