BARTOLOMÉ COLL

Fronts de combustion en magnétohydrodynamique relativiste

Annales de l'I. H. P., section A, tome 25, nº 4 (1976), p. 363-391

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1976__25_4_363_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré
Vol. XXV, n° 4, 1976, p. 363-391.

Section A :
Physique théorique.

Fronts de combustion en magnétohydrodynamique relativiste

par

Bartolomé COLL

Laboratoire de Physique Mathématique, Collège de France, Paris

RÉSUMÉ. — Une théorie relativiste des fronts de combustion se propageant dans un fluide parfait de conductivité électrique infinie est développée à partir des équations de base usuelles, des hypothèses de compressibilité relativistes et d'une hypothèse concernant l'évolution thermodynamique du fluide.

ABSTRACT. — A relativistic theory of exothermic reaction waves in a perfect fluid is constructed on the basis of the usual Magnetohydrodynamics equations and of a hypothesis concerning the thermodynamics evolution of the fluid.

1. INTRODUCTION

Ce travail est consacré à l'étude des fronts de combustion (détonations et déflagrations) en magnétohydrodynamique relativiste. D'une part et de l'autre de ces fronts, le milieu magnétohydrodynamique considéré est supposé être un fluide parfait thermodynamique au sens de Taub [*1*] et Lichnerowicz [*2*], de conductivité électrique infinie. Bien entendu les résultats s'appliquent au cas purement hydrodynamique.

La méthode de base pour l'analyse de ces fronts est celle mise au point par Lichnerowicz pour l'étude des fronts de choc [*2*]. Ses hypothèses relativistes de compressibilité nous sont essentielles ; comme on le sait, elles font jouer un rôle principal au volume dynamique τ (voir section 3). L'intérêt de cette variable en Relativité est encore renforcé dans notre théorie des fronts de combustion : pour le « bon comportement » de ces fronts, nous avons été emmenés à introduire une hypothèse d'évolution thermodynamique, essentiellement relativiste, astreignant les variations de τ et de V à être du même sens, et à chercher une définition de combustion différant formellement de la définition classique par la substitution du volume dynamique τ au volume spécifique V.

Sous l'ensemble de ces hypothèses, le système d'évolution de la magnétohydrodynamique (équations (14)) fournit des fronts de combustion du même genre que ceux que prévoit la théorie classique (Soubbaramayer [*10*]), mais admissibles du point de vue relativiste (ils sont tous orientés dans le temps).

Comme il découle de la méthode même employée, tous les résultats obtenus sont intrinsèques en ce sens qu'ils ne dépendent du choix d'aucun repère privilégié.

Le présent travail est divisé en 14 sections. Les sections 2, 3 et 4 précisent les hypothèses thermodynamiques de base et rappellent le système fondamental d'équations de la magnétohydrodynamique relativiste. Dans la section 5 nous introduisons l'hypothèse relativiste de combustion que nous cherchons à exprimer sous une forme convenable aux calculs qui suivront. Les sections 9 à 13 constituent le noyau de ce travail. Elles sont consacrées à l'étude des fronts de combustion : définition, analyse, classification, étude de leurs vitesses. Finalement, dans la section 14, on ébauche une méthode d'étude des fronts d'épaisseur finie en vue de montrer un résultat important concernant l'inexistence de certaines combustions.

2. LE FLUIDE PARFAIT

a) Nous désignons par V_4 l'espace-temps de la Relativité, variété différentiable à 4 dimensions munie d'une métrique hyperbolique normale à signature $(+\,-\,-\,-)$. Dans un domaine de coordonnées locales $\{x^\alpha\}$, les composantes du tenseur métrique seront notées par $g_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$.

Notre étude sera valable tant dans le cadre de la Relativité Restreinte que dans celui de la Relativité Générale. Dans le premier cas, V_4 s'identifiera à l'espace-temps de Minkowski ; dans le second, V_4 sera supposé de classe de différentiabilité C^2 (C^4 par morceaux).

Un fluide parfait relativiste, non visqueux et non conducteur de la chaleur, est caractérisé par la donnée, en chaque point x de V_4, d'un tenseur impulsion-énergie de la forme

$$t^{\alpha\beta} = (\rho + p)u^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta}, \tag{1}$$

où ρ est la *densité totale d'énergie*, p la *pression*, u^α les composantes du vecteur *vitesse unitaire* du fluide.

Aussi bien en Relativité Restreinte qu'en Relativité Générale $t^{\alpha\beta}$ est astreint à vérifier les équations de conservation

$$\nabla_\alpha t^{\alpha\beta} = 0, \tag{2}$$

∇_α désignant la dérivée covariante induite par la métrique.

b) En accord avec Taub [*1*] et Lichnerowicz [*3*], nous posons que la densité d'énergie totale est la somme de la densité d'énergie matérielle et de la densité d'énergie interne :

$$\rho = r(c^2 + \varepsilon), \tag{3}$$

r étant la *densité de matière*, interprétée non comme inertie mais comme bilan massique du nombre de particules par unité de volume, et ε l'*énergie interne spécifique.*

Dans le tenseur impulsion-énergie (1) il apparaît le scalaire $\rho + p$ qui, d'après (3), peut s'écrire $\rho + p = c^2rf$, où f, appelée *indice du fluide*, est définie par

$$f = 1 + i/c^2 \tag{4}$$

i étant l'*enthalpie spécifique*, $i = \varepsilon + p/r$.

Nous supposerons donnée l'équation d'état du fluide, fonction de classe C^2 au moins, ne dépendant que de la structure interne du fluide en question. Si, par exemple, elle définit ε comme une fonction de p et r, $\varepsilon = \varepsilon(p, r)$, la forme différentielle $d\varepsilon + pd(1/r)$ est intégrable et, d'après un argument classique, on sait qu'il est toujours possible d'identifier un de ses dénominateurs intégrants avec la *température absolue* θ du fluide ; alors, l'*entropie spécifique* S est définie par

$$\theta dS = d\varepsilon + pd(1/r). \tag{5}$$

c) Du fait même de la définition de r comme bilan massique du nombre de particules par unité de volume, il résulte naturel d'accepter, pour tout processus d'évolution n'impliquant pas création ou annihilation du nombre de particules, l'hypothèse de conservation de la matière :

$$\nabla_\alpha(ru^\alpha) = 0, \tag{6}$$

laquelle, jointe aux équations (2) de conservation du tenseur impulsion-énergie, constitue le *système fondamental* de l'hydrodynamique relativiste.

Il est intéressant de noter que, tandis qu'en thermodynamique classique, du fait de la non équivalence entre masse et énergie, pour une définition expérimentale de la masse (il s'agit habituellement de la masse inerte) l'énergie interne n'est déterminée qu'à une constante additive près, en thermodynamique relativiste, telle que nous venons de l'esquisser, l'énergie interne est univoquement déterminée (à travers le système $\{ (2), (6), (3) \}$) par la donnée de la densité de matière r. Ce fait, néanmoins, n'indique pas que le zéro de l'énergie interne soit fixé en Relativité : ayant dépourvu la densité de matière r du caractère inertiel, celle-ci n'est déterminée qu'à un facteur constant près et donc, d'après (3), il existe encore indétermination de l'énergie interne sous forme de constante additive. Ce fait nous permettra de « localiser » convenablement l'énergie de réaction du fluide.

3. HYPOTHÈSES RELATIVISTES DE COMPRESSIBILITÉ ET D'ÉVOLUTION THERMODYNAMIQUE

a) Dans le cadre de la Relativité, comme il a été montré par Lichnerowicz [2], il convient de substituer au volume spécifique $V \equiv 1/r$ la variable

$$\tau = f\mathrm{V}, \tag{7}$$

car c'est elle, et non V, qui apparaît dans la transcription formelle à la Relativité d'un certain nombre de relations classiques.

Comme l'équation d'état $\varepsilon = \varepsilon(p, r)$ permet toujours, à travers la relation différentielle (5), d'adopter p et S comme variables thermodynamiques indépendantes, au moyen de cette relation et des définitions (4) et (7) on peut obtenir τ comme fonction de ces deux variables : $\tau = \tau(p, \mathrm{S})$. Le rôle joué par τ est introduit axiomatiquement dans la théorie en astreignant cette fonction à vérifier les *hypothèses relativistes* de *compressibilité :*

$$\begin{aligned} &\mathrm{H}_1 : \tau'_p < 0\,, \qquad \tau'_{\mathrm{S}} > 0 \\ &\mathrm{H}_2 : \tau''_{p^2} > 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Ces hypothèses, introduites par Lichnerowicz (voir [2] [3]), lui ont permis de construire de façon satisfaisante la théorie des ondes de choc à partir du système fondamental $\{(2), (6)\}$. Il a été montré par Luquiaud [14] qu'elles sont conséquence des statistiques classiques et quantiques.

A la limite classique, où τ et V coïncident, elles se réduisent aux hypothèses habituelles de H. Weyl [4]. Dans le domaine relativiste, les hypothèses de H. Weyl découlent encore des hypothèses H_1 et H_2 de Lichnerowicz pourvu que l'équation d'état vérifie en outre la condition

$$\theta'_p > 0\,.$$

Nous verrons plus loin que c'est aussi cette condition qui rend valable, dans le domaine relativiste, l'hypothèse classique de combustion.

Vis-à-vis de H_1, on peut inverser $\tau = \tau(p, \mathrm{S})$ pour exprimer l'entropie comme fonction de τ et p. On montre aisément que ces hypothèses se traduisent alors par

$$\begin{aligned} &\mathrm{S}'_\tau > 0\,, \qquad \mathrm{S}'_p > 0\,, \\ &\mathrm{S}''_{p^2} - 2\mathrm{S}''_{p\tau}\frac{\mathrm{S}'_p}{\mathrm{S}'_\tau} + \mathrm{S}''_{\tau^2}\left(\frac{\mathrm{S}'_p}{\mathrm{S}'_\tau}\right) < 0\,. \end{aligned} \tag{9}$$

b) Les considérations sur la variable τ que nous venons de signaler, conduisent à interpréter cette variable comme un « vrai » volume spécifique *(volume dynamique)* du fluide en Relativité. Néanmoins, dans la mise au point des équations de base $\{(2), (6)\}$, c'est le volume classique V qui est utilisé. La coexistence dans la théorie de ces deux variables, simultanément représentatives du volume spécifique du fluide, rend plausible l'hypothèse suivante, que nous admettrons dans la suite :

HYPOTHÈSE T. — Sur tout chemin d'évolution du fluide, les variations de V et de τ vérifient

$$\frac{dV}{d\tau} > 0. \tag{10}$$

Cette hypothèse est trivialement vérifiée à la limite classique, où τ et V coïncident, et elle est vérifiée encore le long des lignes de courant du fluide relativiste, ainsi qu'à travers les ondes de choc [*2*] dans ce fluide.

Il est à noter que (10) est essentiellement une relation « d'évolution », et non « d'état », en ce sens qu'il n'existe aucune équation d'état obéissant aux hypothèses relativistes de compressibilité pour laquelle on ait (10) indépendamment du chemin suivi.

4. SYSTÈME FONDAMENTAL DE LA MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE RELATIVISTE

a) La magnétohydrodynamique est ici l'étude d'un fluide parfait de conductivité électrique infinie, soumis à un champ électromagnétique. On sait que, dans ce cas, les équations de Maxwell se réduisent à

$$\nabla_\alpha \overset{*}{H}{}^{\alpha\beta} \equiv \nabla_\alpha(u^\alpha h^\beta - u^\beta h^\alpha) = 0, \tag{11}$$

où h^α est le champ magnétique par rapport à u^α.

En posant $|h|^2 = -h^\alpha h_\alpha$, il résulte que le tenseur d'impulsion-énergie du champ s'écrit

$$\tau_{\alpha\beta} = \mu(u_\alpha u_\beta - 1/2 g_{\alpha\beta})|h|^2 - \mu h_\alpha h_\beta, \tag{12}$$

μ étant la perméabilité magnétique du milieu.

b) Le tenseur impulsion-énergie total du système est la somme des tenseurs impulsion-énergie du fluide et du champ électromagnétique :

$$T^{\alpha\beta} = (c^2 rf + \mu|h|^2)u^\alpha u^\beta - qg^{\alpha\beta} - \mu h^\alpha h^\beta \tag{13}$$

avec, par définition,

$$q = p + 1/2\mu|h|^2.$$

Le *système fondamental* de la magnétohydrodynamique relativiste est ainsi constitué par les équations

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} &= 0, \\ \nabla_\alpha(ru^\alpha) &= 0, \\ \nabla_\alpha \overset{*}{H}{}^{\alpha\beta} &= 0, \end{aligned} \tag{14}$$

où $T^{\alpha\beta}$ et $\overset{*}{H}{}^{\alpha\beta}$ sont donnés respectivement par (13) et (11).

5. HYPOTHÈSE FONDAMENTALE DE COMBUSTION

a) Une combustion est une réaction chimique exothermique ; elle transforme donc les caractéristiques physiques du milieu considéré. Nous ne nous intéressons qu'aux milieux tels que leurs caractéristiques physiques soient, aussi bien avant qu'après la combustion envisagée, celles d'un milieu magnétohydrodynamique c'est-à-dire, celles d'un fluide parfait de conductivité électrique infinie, duquel nous venons d'établir les équations relativistes d'évolution.

La variation de la perméabilité magnétique lors d'un tel processus de combustion n'étant pas essentielle, c'est nécessairement le changement de l'équation d'état du milieu magnétohydrodynamique d'une part et de l'autre de la zone de combustion qui doit tenir compte du caractère exothermique de la réaction, c'est-à-dire du fait qu'une partie de l'énergie totale d'un élément de volume donné, est dégagée sous forme d'énergie calorifique.

Mais l'expression de cette diminution de l'énergie totale n'est pas *a priori* sans ambiguïté. Nous avons été emmenés à poser, comme *hypothèse relativiste de combustion*, la relation

$$\mathrm{C} : \rho_0(\tau, p) > \rho_1(\tau, p)\,, \tag{15}$$

où $\rho_0(\tau, p)$ et $\rho_1(\tau, p)$ sont les équations d'état du fluide envisagé, respectivement avant et après combustion.

~~b) Des~~ autres versions de (15) sont données par le résultat suivant :

THÉORÈME 1. — *Les inégalités*

$$\begin{aligned} \rho_0(\tau, p) &> \rho_1(\tau, p)\,, \\ r_0(\tau, p) &> r_1(\tau, p)\,, \\ f_0(\tau, p) &> f_1(\tau, p)\,, \\ i_0(\tau, p) &> i_1(\tau, p)\,, \\ \varepsilon_0(\tau, p) &> \varepsilon_1(\tau, p)\,, \end{aligned} \tag{16}$$

sont toutes équivalentes.

En effet, admettons la première, $(16)_1$; trivialement on a :

$$\rho_0(\tau, p) + p > \rho_1(\tau, p) + p\,,$$

mais $\rho + p = c^2 rf$, donc

$$r_0(\tau, p) f_0(\tau, p) > r_1(\tau, p) f_1(\tau, p)\,,$$

et comme $f = \tau r$, on obtient aisément $(16)_2$ et $(16)_3$ et de cette dernière il suit $(16)_4$. Les réciproques respectives sont, par là même, évidentes. Finalement, de $(16)_4$ et $(16)_2$ on déduit immédiatement $(16)_5$; montrons son inverse : $(16)_5$ s'écrit

$$i_0(\tau, p) - \frac{p}{r_0(\tau, p)} > i_1(\tau, p) - \frac{p}{r_1(\tau, p)}\,,$$

soit, compte tenu de $r = f/\tau$,

$$i_0(\tau, p) - i_1(\tau, p) > \tau p \frac{f_1(\tau, p) - f_0(\tau, p)}{f_0(\tau, p) . f_1(\tau, p)}\,,$$

mais, d'après la définition de f,

$$f_1(\tau, p) - f_0(\tau, p) = -\frac{1}{c^2}\{ i_0(\tau, p) - i_1(\tau, p) \},$$

donc

$$\{ i_0(\tau, p) - i_1(\tau, p) \}\left[1 + \frac{\tau p}{c^2 f_0(\tau, p) f_1(\tau, p)} \right] > 0;$$

le second facteur étant toujours positif, on a

$$i_0(\tau, p) - i_1(\tau, p) > 0,$$

ce qu'on voulait démontrer.

c) Sous la forme $(16)_5$, l'hypothèse C apparaît comme la transcription formelle à la Relativité de l'hypothèse de la théorie classique

$$\varepsilon_0(\mathrm{V}, p) > \varepsilon_1(\mathrm{V}, p), \tag{17}$$

ayant fait confiance de la règle de correspondance $\mathrm{V} \to \tau = f\mathrm{V}$ suggérée par la forme des hypothèses relativistes de compressibilité. Le lien entre ces deux hypothèses est fourni par le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Sous l'hypothèse de compressibilité* H_1 *et la condition*

$$\theta'_p > 0$$

les hypothèses de combustion relativiste et classique coïncident.

En effet, l'hypothèse relativiste de combustion C, tenant compte du résultat $(16)_2$ du théorème 1, est encore équivalente à l'inégalité

$$\mathrm{V}_0(\tau, p) < \mathrm{V}_1(\tau, p) \tag{18}$$

Si l'on considère $\mathrm{V}(\tau, p)$ comme fonction des variables p et S, il vient $\mathrm{V}'_\mathrm{S} = \mathrm{V}'_\tau \tau'_\mathrm{S}$. Or, la condition d'intégrabilité de (5) est $\mathrm{V}'_\mathrm{S} = \theta'_p$, et il résulte donc

$$\mathrm{V}'_\tau = \frac{1}{\tau'_\mathrm{S}}\theta'_p.$$

Ainsi, sous les hypothèses H_1 et $\theta'_p > 0$, V'_τ est positif. Dans ce cas (18) entraîne

$$\tau_0(\mathrm{V}, p) > \tau_1(\mathrm{V}, p)$$

et comme $\tau = f\mathrm{V}$ avec $c^2 f = c^2 + p\mathrm{V}$, on retrouve (17). Le raisonnement inverse étant, par là même, valable, le théorème est démontré.

d) Remarquons que si $\bar{q} = \bar{q}(\tau, p)$ est une fonction donnée des variables τ et p telle que $\bar{q}'_p \neq 0$, toutes les versions (16) de l'hypothèse C restent encore valables par substitution de la variable $\bar{q}$ au lieu de p. En particulier on aura

$$f_0(\tau, \bar{p}) > f_1(\tau, \bar{p}). \tag{19}$$

C'est sous cette forme que nous utiliserons dans la suite l'hypothèse C.

e) En théorie classique, étant donné que l'énergie totale d'un système n'est déterminée qu'à une constante additive près, l'évaluation de cette énergie totale se fait en explicitant les différents types d'énergie intervenant significativement dans le processus en étude. Ainsi, pour établir le bilan énergétique lors d'un processus de combustion, on doit expliciter dans les équations l'énergie de combustion mise en jeu, c'est-à-dire l'énergie de liaison moléculaire libérée par la combustion. Une équation régissant le comportement de cette nouvelle variable est donc nécessaire ; elle est fournie d'habitude [9] par l'hypothèse que l'*énergie spécifique de combustion g* est indépendante des variables caractérisant le fluide.

En théorie relativiste, une telle hypothèse est superflue, nous montrerons que l'hypothèse C suffit à elle seule pour réaliser l'étude complète des fronts de combustion. Ceci est dû essentiellement au fait que dans ce cas l'énergie totale du fluide est donnée sans ambiguïté, et que c'est à partir d'elle-même et de la définition de densité de matière que toutes les autres variables thermodynamiques sont introduites.

6. HYPERSURFACES DE DISCONTINUITÉ

a) Considérons dans l'espace-temps un tube d'univers, « histoire » d'un certain volume du fluide, et soient Σ_0 et Σ_1 les sections du tube séparant la zone du fluide en combustion respectivement des zones avant et après combustion. En conjugant convenablement le domaine d'espace-temps envisagé et la vitesse à laquelle une telle réaction a lieu, on peut supposer, dans certains cas, la zone de combustion d'épaisseur infiniment petite. Les hypersurfaces Σ_0 et Σ_1 se confondent alors en une seule hypersurface Σ, qui est appelée le *front de combustion*. Dans V_4, un front de combustion est donc défini comme une hypersurface de discontinuité séparant deux milieux magnétohydrodynamiques dont leur équation d'état vérifie l'hypothèse fondamentale de combustion C.

Tout comme en théorie classique, en théorie relativiste la méthode de base pour l'analyse des fronts de combustion sera la même que celle employée pour l'étude des *fronts de choc*, définis comme hypersurfaces Σ de discontinuité séparant deux milieux magnétohydrodynamiques à caractéristiques physiques identiques. L'étude relativiste de ces fronts de choc a été faite par plusieurs auteurs [6] [7] [8], mais notamment par Lichnerowicz [2] [3] [5] qui a développé une technique commode et puissante permettant l'analyse intrinsèque de ces fronts, sans faire appel à aucun repère privilégié. Dans cette section, nous rappellerons, sans démonstration les résultats dont nous aurons besoin dans la suite.

b) Dans un domaine Ω de V_4, soit Σ une hypersurface régulière, d'équation locale $\varphi = 0$, $l_\alpha \equiv \partial_\alpha \varphi$, partageant Ω en deux domaines Ω_0 et Ω_1 correspondant respectivement à $\varphi > 0$ et $\varphi < 0$, et supposons que les variables magnétohydrodynamiques soient de classe C^1 sur chacun des domaines Ω_0 et Ω_1, mais puissent présenter des discontinuités à la traversée de Σ, de telle façon que le courant de matière ru^α, le tenseur impulsion-énergie $T^{\alpha\beta}$, le champ électromagnétique $H^{\alpha\beta}$ et leurs dérivées covariantes convergent uniformément, quand φ tend vers zéro dans Ω_0 et Ω_1, à des valeurs bien définies d'une part et de l'autre de Σ.

Dans cette situation, on déduit [5] que les cinq scalaires suivants sont continus à travers Σ :

$$\begin{aligned} a &= r(u^\alpha l_\alpha) \\ \mathrm{H} &= \frac{(h^\alpha l_\alpha)^2}{a^2} - \frac{|h|^2}{r^2}, \\ e &= q - \frac{c^2 a^2}{l^\alpha l_\alpha}\tau, \\ \mathrm{K} &= c^2 f^2 - \frac{c^2 a^2}{l^\alpha l_\alpha}\tau^2 + 2\mu\chi\tau - \frac{\mu^2}{c^2}\mathrm{H}\chi \\ b &= f(h^\alpha l_\alpha) \leftrightarrow \mathrm{L} = \chi\alpha^2, \end{aligned} \tag{20}$$

où l'on a posé

$$\chi = |h|^2 + \frac{a^2}{l^\alpha l_\alpha}\mathrm{H}, \qquad \alpha = c^2\tau - \mu\mathrm{H}.$$

c) Pour un observateur de vitesse u^α, la *direction spatiale de propagation* n^α d'un front Σ, de vecteur normal l_α, est donnée par

$$n^\alpha = (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)l_\beta .$$

La composante h_n du champ magnétique h^α dans la direction n^α s'écrit alors

$$h_n = \frac{h^\rho n_\rho}{|n|},$$

où $|n|^2 = -n^\alpha n_\alpha$; il en résulte :

$$h_n^2 = \frac{(h^\alpha l_\alpha)^2}{(u^\alpha l_\alpha)^2 - l^\alpha l_\alpha} > 0 . \tag{21}$$

Les deux lemmes suivants, dus à Lichnerowicz (voir [5]), nous seront utiles dans la suite :

LEMME 1.

i) $h_n^2 \leqslant |h|^2$,
ii) $h_n^2 = |h|^2 \leftrightarrow l \in \pi(u, h)$.

LEMME 2.

i) $(l^\alpha l_\alpha)\chi = 0$
ii) $l^\alpha l_\alpha \neq 0, \qquad \chi = 0 \leftrightarrow l \in \pi(u, h)$.
iii) $l^\alpha l_\alpha \geqslant 0 \rightarrow \mathrm{H} \leqslant 0 \rightarrow \alpha > 0$.

d) La vitesse v^{Σ}, relative à un observateur u^{α}, d'une hypersurface Σ de normale l_{α}, est donnée par

$$y^{\Sigma} \equiv \left(\frac{v^{\Sigma}}{c}\right)^2 = \frac{(u^{\alpha}l_{\alpha})^2}{(u^{\alpha}l_{\alpha})^2 - l^{\alpha}l_{\alpha}}. \tag{22}$$

Pour la classification des vitesses des fronts de combustion, nous aurons besoin de connaître la vitesse de propagation des ondes dans le milieu magnétohydrodynamique ou, ce qui revient au même, la vitesse des hypersurfaces caractéristiques du système différentiel (14).

En écartant les hypersurfaces engendrées par des lignes de courant du fluide, à vitesse nulle par rapport à u^{α}, les hypersurfaces caractéristiques du système différentiel (14) sont :

i) Les *ondes magnétosoniques*, hypersurfaces vérifiant l'équation

$$P(l) \equiv c^2rf(\gamma - 1)(u^{\alpha}l_{\alpha})^4 + (c^2rf + \mu|h|^2\gamma)(u^{\alpha}l_{\alpha})^2(l^{\alpha}l_{\alpha}) - \mu(h^{\alpha}l_{\alpha})^2(l^{\alpha}l_{\alpha}) = 0, \tag{23}$$

où $\gamma^{-1} \equiv y^{S}$ est la vitesse des ondes soniques, c'est-à-dire la vitesse de ces ondes se propageant en absence de champ magnétique.

ii) *les ondes de Alfven*, vérifiant l'équation

$$D(l) \equiv (c^2rf + \mu|h|^2)(u^{\alpha}l_{\alpha})^2 - \mu(h^{\alpha}l_{\alpha})^2 = 0.$$

Introduisant les définitions (21) et (22) dans $D(l)$, on tire l'expression de la vitesse y^{A} des ondes d'Alfven ; on obtient

$$y^{A} = \frac{\mu h_n^2}{c^2rf + \mu|h|^2} \tag{24}$$

Les vitesses y^{M} des ondes magnétosoniques s'établissent de la même façon à partir du polynôme $P(l)$. L'étude de ce polynôme permet de conclure qu'il existe en général deux vitesses réelles et différentes, y^{ML} et y^{MR}, correspondant respectivement aux *ondes magnétosoniques lentes* et aux *ondes magnétosoniques rapides*, et que, tenant compte du lemme 1, ces vitesses vérifient les inégalités [*3*]

$$0 \leqslant y^{ML} \leqslant y^{S} \leqslant y^{MR} < 1 \tag{25}$$

$$0 \leqslant y^{ML} \leqslant y^{A} \leqslant y^{MR} < 1 \tag{26}$$

7. VITESSE LIMITE DES FRONTS DE COMBUSTION

a) En un point x d'un front de combustion Σ, supposons connu l'état magnétohydrodynamique Y_0 avant combustion, c'est-à-dire supposons connus huit paramètres nous permettant de déterminer les grandeurs τ_0, p_0, u_0^{α}, h_0^{α} avant combustion ; à l'aide de ces paramètres on peut calculer les valeurs numériques des cinq scalaires (20). Si le paramètre L est nul, le front de combustion sera dit *singulier*. Sauf avis contraire, nous ne considérerons dans la suite que des fronts non singuliers.

Parmi toutes les trajectoires possibles de l'espace des états $\{ Y \}$ joignant l'état Y_0 à l'état Y_1 après combustion, nous choisirons, une fois pour toutes, celles le long desquelles les scalaires H et L demeurent constants. Pour nos considérations, un tel choix n'a qu'un but de simplification des calculs ; comme il apparaîtra dans la suite, aucune restriction essentielle ne lui est reliée.

Tout comme Lichnerowicz l'a fait en théorie des ondes de choc, nous aurons intérêt à considérer systématiquement la variable $\bar{q}$ définie par

$$\bar{q} = p + 1/2\mu\chi, \tag{27}$$

c'est-à-dire, d'après la valeur de χ,

$$\bar{q} = q + 1/2\mu \frac{a^2}{l^\alpha l_\alpha} \mathrm{H}. \tag{28}$$

Il est clair que la variation de cette variable $\bar{q}$, pour le faisceau de trajectoires précédemment choisi, est purement thermodynamique ; en effet, de (27) on a

$$q = p + 1/2\mu \frac{\mathrm{L}}{(c^2\tau - \mu\mathrm{H})^2} = \bar{q}(p, \tau).$$

Ainsi, il résulte sous ces conditions qu'un état thermodynamique (τ, p) du fluide est en correspondance biunivoque avec un point Z du plan $(\tau, \bar{q})$.

b) Prenons des discontinuités dans la relation déterminée par la scalaire e. On a

$$[q] = \frac{c^2a^2}{l^\alpha l_\alpha}[\tau], \tag{29}$$

et comme d'après (28) il est $[q] = [\bar{q}]$, il en résulte que l'état thermodynamique $(\tau_1, \bar{q}_1)$ après combustion doit se trouver sur la droite

$$\Lambda \equiv \bar{q} - \bar{q}_0 \frac{c^2a^2}{l^\alpha l_\alpha}(\tau - \tau_0), \tag{30}$$

le scalaire invariant a étant déterminé par l'état Y_0 avant combustion.

Nous énonçons le lemme suivant :

LEMME 3. — *La variation de l'entropie spécifique* S *le long de* Λ *est donnée par l'expression*

$$\tau'_s\alpha\left(\frac{d\mathrm{S}}{d\tau}\right)_\Lambda = \frac{\mathrm{P}(l)}{a^2l^\alpha l_\alpha}, \tag{31}$$

où P(l) *est le polynôme défini par* (23).

Démonstration. — Il est évident que

$$\tau'_s d\mathrm{S} = \tau'_p dp + d\tau. \tag{32}$$

La différentielle de p tirée de (27) est

$$dp = d\bar{q} - 1/2\mu d\chi,$$

et comme de (28) il est

$$d\bar{q} = \frac{c^2a^2}{l^\alpha l_\alpha}d\tau\,,$$

(32) s'écrit

$$\tau'_s dS = \left(1 - \tau'_p\frac{c^2a^2}{l^\alpha l_\alpha}\right)d\tau + 1/2\mu\tau'_p d\chi\,.$$

Or, par différentiation du scalaire $L = \chi\alpha^2$, tenant compte que $d\alpha = c^2 d\tau$, il vient

$$\alpha d\chi + 2\chi c^2 d\tau = 0 \tag{33}$$

d'où

$$\tau'_s dS = \left\{1 - \tau'_p c^2\left(\frac{a^2}{l^\alpha l_\alpha} + \mu\frac{\chi}{\alpha}\right)\right\}d\tau \tag{34}$$

En explicitant dans le crochet les variables d'état d'origine au moyen des définitions de a, χ et α, on aboutit à

$$\left\{1 - \tau'_p c^2\left(\frac{a^2}{l^\alpha l_\alpha} + \mu\frac{\chi}{\alpha}\right)\right\} = \frac{P(l)}{a^2\alpha l^\alpha l_\alpha}$$

Sa substitution dans (34) démontre le lemme.

c) LEMME 4. — *La pente de la droite* Λ *peut s'écrire*

$$\left(\frac{dq}{d\tau}\right)_\Lambda = \frac{\alpha r^2}{\tau}\left\{1 - f\left(\frac{dV}{d\tau}\right)_\Lambda\right\} - \frac{\alpha r\theta}{c^2\tau}\left(\frac{dS}{d\tau}\right)_\Lambda - \mu\frac{|h|^2}{\tau} \tag{35}$$

Démonstration. — On a

$$\left(\frac{d\bar{q}}{d\tau}\right)_\Lambda = \frac{c^2a^2}{l^\alpha l_\alpha}, \tag{36}$$

et d'après (27)

$$\left(\frac{d\bar{q}}{d\tau}\right)_\Lambda = \left(\frac{dp}{d\tau}\right)_\Lambda + 1/2\mu\left(\frac{d\chi}{d\tau}\right)_\Lambda,$$

ou bien, profitant du résultat (33),

$$\left(\frac{d\bar{q}}{d\tau}\right)_\Lambda = \left(\frac{dp}{d\tau}\right)_\Lambda - \mu\frac{c^2}{\alpha}\chi\,.$$

En introduisant dans cette expression la valeur de χ et tenant compte de (36), il vient

$$\left(\frac{d\bar{q}}{d\tau}\right)_\Lambda = \left(\frac{dp}{d\tau}\right)_\Lambda - \mu\frac{c^2}{\alpha}|h|^2 - \mu\frac{H}{\alpha}\left(\frac{d\bar{q}}{d\tau}\right)_\Lambda;$$

il en résulte

$$\left(\frac{dq}{d\tau}\right)_\Lambda = \frac{\alpha}{c^2\tau}\left(\frac{dp}{d\tau}\right)_\Lambda - \mu\frac{|h|^2}{\tau}. \tag{37}$$

A partir de la relation thermodynamique $\theta dS = c^2 df - \frac{1}{r} dp$, et de la définition de τ, il est immédiat d'établir que

$$dp = c^2 r^2 d\tau - c^2 r^2 f dV - r\theta dS,$$

et portant cette valeur de dp dans (37) on obtient (35). Le lemme est ainsi démontré.

d) L'étude de zéros du polynôme $P(l)$ montre que, sous l'hypothèse de compressibilité H_1, $l^\alpha l_\alpha > 0$ entraîne $P(l) > 0$. D'autre part, le lemme 2 assure que dans ce cas $\alpha > 0$. Tenant compte de ces deux résultats dans l'expression (31), il résulte que pour $l^\alpha l_\alpha > 0$ il est $(dS/d\tau)_\Lambda > 0$, et de l'expression (35) du lemme 4 il découle l'inégalité

$$\left(\frac{d\bar{q}}{d\tau}\right)_\Lambda < \frac{\alpha r^2}{\tau}\left\{ 1 - f\left(\frac{dV}{d\tau}\right)_\Lambda \right\} - \mu\frac{|h|^2}{\tau}, \tag{38}$$

et, tenant compte des définitions de α et de l'invariant H, le second membre de (38) peut encore se majorer par l'expression

$$c^2 r^2 \left\{ 1 - \frac{\alpha f}{c^2 \tau}\left(\frac{dV}{d\tau}\right)_\Lambda \right\}. \tag{39}$$

D'autre part, l'évaluation de la pente de Λ en fonction de la vitesse V^Σ du front de combustion donne,

$$\left(\frac{d\bar{q}}{d\tau}\right)_\Lambda = \frac{c^2 a^2}{l^\alpha l_\alpha} = \frac{c^2 r^2 y^\Sigma}{y^\Sigma - 1}. \tag{40}$$

(38), (39) et (40) fournissent alors l'inégalité

$$\frac{y^\Sigma}{y^\Sigma - 1} < 1 - \frac{\alpha f}{c^2 \tau}\left(\frac{dV}{d\tau}\right)_\Lambda$$

Dans cette situation, α étant positif, sous l'hypothèse T d'évolution thermodynamique (10), le second membre de (41) est plus petit que l'unité. Il résulte alors que, pour $l^\alpha l_\alpha > 0$, $y^\Sigma < 1$, ce qui est contradictoire. Nous avons donc démontré :

THÉORÈME 3. — *Sous les hypothèses relativistes de compressibilité* H_1 *et d'évolution thermodynamique* T, *les fronts de combustion se propagent à vitesse inférieure à celle de la lumière.*

Il est à remarquer qu'on n'a pas fait usage, dans la démonstration du théorème, de l'hypothèse de combustion. Il résulte donc que son énoncé est encore applicable à toute hypersurface de discontinuité, pourvu que l'hypothèse d'évolution thermodynamique y soit vérifiée.

8. FONCTION D'HUGONIOT DES COMBUSTIONS

a) Le théorème 3 nous a montré que, pour toute combustion physiquement réalisable, on a nécessairement $l^\alpha l_\alpha < 0$. D'après le lemme 2, il résulte $\chi \geqslant 0$; ceci nous permet d'écrire

$$\chi = k^2\,, \tag{42}$$

et par suite $L = (k\alpha)^2$. Nous conviendrons de choisir le signe de k de telle façon que le scalaire

$$n = K\alpha \tag{43}$$

soit encore un invariant à travers le front.

b) L'invariant K du système des scalaires fondamentaux (20) conduit à la relation suivante entre discontinuités :

$$c^2[f^2] - \frac{c^2a^2}{l^\alpha l_\alpha}[\tau^2] + 2\mu[\chi\tau] - \frac{\mu^2}{c^2}H[\chi] = 0\,. \tag{44}$$

Tenant compte de l'invariance du scalaire e exprimée par (29), et de (43), la relation (44) s'écrit :

$$c^2[f^2] - (\tau + \tau_0)[\bar{q}] + \mu(\tau k + \tau_0 k_0)[k] = 0 \tag{47}$$

Cette relation est la généralisation relativiste, valable aussi bien pour les fronts de choc que pour les fronts de combustion, de la relation d'Hugoniot de la théorie classique.

c) A partir de la relation d'Hugoniot (47) on définit, pour chaque état Y_0 avant combustion, la *fonction* d'*Hugoniot* relative à un état arbitraire Y par l'expression

$$\mathscr{H}(Y\,;Y_0) = c^2(f^2 - f_0^2) - (\tau + \tau_0)(\bar{q} - \bar{q}_0) + \mu(\tau k + \tau_0 k_0)(k - k_0). \tag{48}$$

Si $Y = Y_0$, elle vérifie, compte tenu de la définition de $k^2 = \chi$,

$$\mathscr{H}(Y_0\,;Y_0) = c^2\{\,f^2(\tau_0, p_0) - f_0^2(\tau_0, p_0)\,\}\,,$$

et, sous l'hypothèse fondamentale de combustion C :

$$\mathscr{H}(Y_0\,;Y_0) < 0\,. \tag{49}$$

Si $Y = Y_1$, Y_1 désignant un état après combustion, il est évident d'après (47), que

$$\mathscr{H}(Y_1\,;Y_0) = 0\,. \tag{50}$$

d) Pour le choix des trajectoires de l'espace des états $\{\,Y\,\}$ fait au paragraphe *a*) de la section 7, il résulte en outre que la fonction d'Hugoniot ne dépend que des variables thermodynamiques. Nous pourrons donc écrire indifféremment

$$\mathscr{H}(Y\,;Y_0) = \mathscr{H}(Z, Z_0)\,,$$

Z désignant un point du plan $(\tau, \bar{q})$.

Nous allons expliciter cette dépendance en calculant sa différentielle ; de (48) on a

$$d\mathscr{H} = 2c^2 f df - (\bar{q} - \bar{q}_0)d\tau - (\tau + \tau_0)d\bar{q} + \mu(\tau k + \tau_0 k_0)dk + \mu(k - k_0)k d\tau + \mu(k - k_0)\tau dk ,$$

et comme $\theta dS = c^2 df - \frac{1}{r} dp$ et, de (43) $\alpha dk + c^2 k d\tau = 0$, il résulte

$$d\mathscr{H} = 2f\theta dS + 2\tau dp - (\bar{q} - \bar{q}_0)d\tau + (\tau + \tau_0)d\bar{q} - \mu(\tau K + \tau_0 K_0)\frac{c^2 k}{\alpha} d\tau + \mu k(k - k_0)d\tau - \mu(k - k_0)\tau \frac{c^2 k}{\alpha} d\tau ,$$

soit, tenant compte que

$$dp = d\bar{q} - \mu k dk = d\bar{q} + \mu k \frac{c^2 k}{\alpha} d\tau$$

et que $k\alpha = k_0\alpha_0$,

$$d\mathscr{H} = 2f\theta dS + (\tau - \tau_0)d\bar{q} - (\bar{q} - \bar{q}_0)d\tau \tag{51}$$

Une autre expression utile de la différentielle de la fonction d'Hugoniot peut s'obtenir en introduisant comme paramètre la pente m de la droite Λ joignant le point fixe Z_0 à un point arbitraire Z du plan $(\tau, \bar{q})$:

$$\Lambda \equiv \bar{q} - \bar{q}_0 = m(\tau - \tau_0) .$$

On obtient alors

$$d\bar{q} = m d\tau + (\tau - \tau_0)dm ,$$

et il résulte

$$d\mathscr{H} = 2f\theta dS + (\tau - \tau_0)^2 dm \tag{52}$$

9. COURBE D'HUGONIOT DES COMBUSTIONS

a) On appelle *courbe* d'*Hugoniot* $\mathscr{C}$ des combustions, relative à l'état avant combustion Y_0, l'ensemble des points Z du plan $(\tau, \bar{q})$ tels que

$$\mathscr{H}(Z ; Z_0) = 0 .$$

LEMME 5. — *La courbe d'Hugoniot* $\mathscr{C}$ *coupe la droite* $\Lambda' \equiv [\tau] = 0$ (*resp.* $\Lambda'' \equiv [\bar{q}] = 0$) *en un point* $(\tau_0, \bar{q}')$ (*resp.* (τ'', q_0)) *tel que* $\bar{q}' > \bar{q}_0$ (*resp.* $\tau'' > \tau_0$).

Démonstration. — Considérons une droite Λ issue de Z_0 de pente m. Si $m > 0 \leftrightarrow l^\alpha l_\alpha > 0$, d'après (31) il suit

$$\left(\frac{dS}{d\tau}\right)_\Lambda > 0 ,$$

et l'expression (52) de la différentielle de $\mathscr{H}$ conduit à

$$\left(\frac{d\mathscr{H}}{d\tau}\right)_\Lambda = 2f\theta\left(\frac{dS}{d\tau}\right) > 0 . \tag{53}$$

Mais, comme nous l'avons vu [(49)], $\mathscr{H}(Z_0 ; Z_0) < 0$, et donc $\mathscr{H}$ doit s'annuler sur la droite Λ en un point Z de la zone $[\bar{q}] > 0$, $[\tau] > 0$. De plus, ce point sur Λ est unique, car selon (53) $\mathscr{H}$ ne peut pas être stationnaire sur Λ si $m > 0$.

Calculons la tangente $\left(\dfrac{d\bar{q}}{d\tau}\right)_{\mathscr{C}}$ à la courbe d'Hugoniot. De (51) il résulte :

$$2f\theta\left(\frac{dq}{d\tau}\right)_{\mathscr{C}} + (\tau - \tau_0)\left(\frac{d\bar{q}}{d\tau}\right)_{\mathscr{C}} - (\bar{q} - \bar{q}_0) = 0\,, \tag{54}$$

mais

$$\left(\frac{dS}{d\tau}\right)_{\mathscr{C}} = (S'_\tau)_{\bar{q}} + (S'_{\bar{q}})_\tau \left.\frac{dq}{d\tau}\right)_{\mathscr{C}},$$

où

$$(S'_\tau)_{\bar{q}} = (S'_\tau)_q + (S'_p)_\tau (P'_\tau)_{\bar{q}}\,,$$
$$(S'_{\bar{q}})_\tau = (S'_p)_\tau (P'_{\bar{q}})_\tau\,,$$

avec, de $\bar{q} = p + 1/2\mu L/\alpha^2$,

$$(P'_\tau)_{\bar{q}} = \frac{c^2\mu L}{\alpha^3}\,, \qquad (P'_{\bar{q}})_\tau = 1\,,$$

et (54) s'écrit

$$2f\theta\left[(S'_\tau)_p + (S'_p)_\tau \frac{c^2\mu L}{\alpha^3}\right] + 2f\theta(S'_p)_\tau\left(\frac{d\bar{q}}{d\tau}\right)_{\mathscr{C}} + (\tau - \tau_0)\left(\frac{d\bar{q}}{d\tau}\right)_{\mathscr{C}} - (\bar{q} - \bar{q}_0) = 0\,,$$

d'où il suit

$$\left(\frac{dq}{d\tau}\right)_{\mathscr{C}} = -\frac{2f\theta\left[(S'_\tau)_p + (S'_p)_\tau \dfrac{c^2\mu L}{\alpha^3}\right] + (\bar{q} - \bar{q}_0)}{2f\theta(S'_p)_\tau + (\tau - \tau_0)}\,;$$

pour $\tau \geqslant \tau_0$, cette expression est toujours finie pour des fronts non singuliers, d'où l'on déduit l'énoncé du lemme.

b) LEMME 6. — *Sous les hypothèses de compressibilité* H_1 *et* H_2, *une droite* Λ *issue du point* Z_0 *coupe la courbe d'Hugoniot* $\mathscr{C}$ *tout au plus en deux points.*

Démonstration. — Considérons par simplicité $\bar{q} = \bar{q}(\tau, S)$. On a :

$$m = \left(\frac{d\bar{q}}{d\tau}\right)_\Lambda = (\bar{q}'_\tau)_s + (q'_s)_\tau\left(\frac{dS}{d\tau}\right)_\Lambda\,,$$

$$0 = \left(\frac{d^2\bar{q}}{d\tau^2}\right)_\Lambda = (\bar{q}''_{\tau^2})_{s^2} + 2(\bar{q}''_{\tau s})_{s\tau}\left(\frac{dS}{d\tau}\right)_\Lambda + (\bar{q}''_{s^2})_{\tau^2}\left(\frac{dS}{d\tau}\right)^2_\Lambda + (\bar{q}'_s)_\tau\left(\frac{d^2S}{d\tau^2}\right)_\Lambda\,.$$

Si S est stationnaire en un point de Λ, la dernière relation se réduit en ce point à

$$0 = (\bar{q}''_{\tau^2})_{s^2} + (\bar{q}'_s)_\tau\left(\frac{d^2S}{d\tau^2}\right)_\Lambda\,,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{d^2S}{d\tau^2}\right)_\Lambda = -\frac{(\bar{q}''_{\tau^2})_{S^2}}{(\bar{q}'_s)_\tau},$$

Mais comme

$$(\bar{q}'_s)_\tau = -\frac{(\tau'_s)_p}{(\tau'_p)_s}, \qquad (\bar{q}''_{\tau^2})_{s^2} = -\frac{M}{(\tau'_p)^3_s},$$

avec

$$M = (\tau''_{p^2})_{s^2} - 3c^4\mu\frac{L}{\alpha^4}(\tau'_p)^3_s,$$

il résulte

$$\left(\frac{d^2S}{d\tau^2}\right)_\Lambda = -\frac{M}{(\tau'_p)^2_s(\tau'_s)_p},$$

où le second membre est négatif, compte tenu des hypothèses relativistes de compressibilité H_1 et H_2. Il s'agit donc d'un maximum unique de S et, par suite, de $\mathscr{H}$. La courbe d'Hugoniot $\mathscr{C}$ peut ainsi couper Λ tout au plus en deux points.

c) Les branches de la courbe d'Hugoniot $\mathscr{C}$ correspondantes aux régions $\{[\tau] < 0 ; [\bar{q}] > 0\}$, $\{[\tau] > 0 ; [\bar{q}] > 0\}$ et $\{[\tau] > 0 ; [\bar{q}] < 0\}$ seront notées respectivement par $\mathscr{C}_D$, $\mathscr{C}_I$, $\mathscr{C}_d$. D'après le lemme 5, on a

$$\mathscr{C} = \mathscr{C}_D \cup \mathscr{C}_I \cup \mathscr{C}_d.$$

Le résultat du lemme 6 nous permet d'énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 4. — *Sous l'hypothèse que la branche $\mathscr{C}_D$ (resp. $\mathscr{C}_d$) est définie pour des valeurs arbitrairement grandes de $\bar{q}$ (resp. τ), il existe une droite, et une seule, Λ_{DI} (resp. Λ_{dJ}) tangente à $\mathscr{C}_D$ (resp. $\mathscr{C}_d$). Si $m_{DJ} < 0$ (resp. $m_{dJ} < 0$) est sa pente, toutes les droites Λ_D (resp. Λ_d) de pente $m < m_{DJ} < 0$ (resp. $m_{dJ} < m < 0$) coupent $\mathscr{C}_D$ (resp. $\mathscr{C}_d$) en deux points. Les points de tangence $\Lambda_{DJ} \cap \mathscr{C}_D$ et $\Lambda_{dJ} \cap \mathscr{C}_d$ sont appelés* points de Jouguet.

10. DÉTONATIONS ET DÉFLAGRATIONS

a) Au paragraphe *b*) de la section 7 nous avons vu que, un état thermodynamique $(\tau_0, \bar{q}_0)$ avant combustion étant donné, les états $(\tau_1, \bar{q}_1)$ après combustion doivent se trouver sur la droite Λ du plan $(\tau, \bar{q})$, donnée par (30), de pente

$$m = \frac{c^2a^2}{l^\alpha l_\alpha}$$

Aussi, d'après (47), ces états $(\tau_1, \bar{q}_1)$ doivent se trouver sur la courbe d'Hugoniot $\mathscr{C}$. Ils sont donc donnés par l'intersection $\mathscr{C} \cap \Lambda$.

D'autre part, les points $\mathscr{C}_I \cap \Lambda$, d'après le théorème 3, sont éliminés en vertu de l'hypothèse T d'évolution thermodynamique. Il s'ensuit que les états thermodynamiques après combustion des possibles fronts de combustion sont nécessairement donnés par les points $\mathscr{C}_D \cap \Lambda$ et $\mathscr{C}_d \cap \Lambda$.

DÉFINITION. — *On appelle* détonations (*resp.* déflagrations) *les fronts de combustion pour lesquels l'état thermodynamique après combustion est donné par l'un des points* $\mathscr{C}_D \cap \Lambda$ (*resp.* $\mathscr{C}_d \cap \Lambda$).

b) Le point $\Lambda_{DJ} \cap \mathscr{C}_D$ (resp. $\Lambda_{dJ} \cap \mathscr{C}_d$), dont son existence est établie au théorème 4, divise la branche $\mathscr{C}_D$ (resp. $\mathscr{C}_d$) en deux branches que nous noterons $\mathscr{C}_{DF}$ et $\mathscr{C}_{Df}$ (resp. $\mathscr{C}_{dF}$ et $\mathscr{C}_{df}$), $\mathscr{C}_{Df}$ (resp. $\mathscr{C}_{df}$) étant celle qui est contiguë à la branche $\mathscr{C}_I$. Ceci nous permet de classer détonations et déflagrations selon les types suivants :

DÉFINITION. — *Par rapport à l'état thermodynamique après combustion* Z_1 *défini sur le plan* $(\tau, \bar{q})$, *nous dirons qu'un front de combustion est une*

détonation forte	si	$Z_1 \in \mathscr{C}_{DF}$
détonation Jouguet	si	$Z_1 = \Lambda_{DJ} \cap \mathscr{C}_D$
détonation faible	si	$Z_1 \in \mathscr{C}_{Df}$
déflagration faible	si	$Z_1 \in \mathscr{C}_{df}$
déflagration Jouguet	si	$Z_1 = \Lambda_{dJ} \cap \mathscr{C}_d$
déflagration forte	si	$Z_1 \in \mathscr{C}_{dF}$

En outre, chacune de ces combustions est dite lente *ou* rapide *selon que, respectivement, on ait* $\alpha < 0$ *ou* $\alpha > 0$.

Rappelons que, d'après la définition même de fronts de combustion non singuliers, le signe de α ne varie pas le long des droites Λ. La donnée de l'état magnétohydrodynamique Y_0 avant combustion détermine donc le caractère lent ou rapide du front.

11. COMBUSTIONS JOUGUET

a) Les points de tangence $\Lambda_{DJ} \cap \mathscr{C}_D$ et $\Lambda_{dJ} \cap \mathscr{C}_d$, que nous avons appelé points de Jouguet, définissent les détonations et déflagrations Jouguet. Ces points sont définis par l'équation

$$\left(\frac{d\bar{q}}{d\tau}\right)_{\mathscr{C}} = \left(\frac{d\bar{q}}{d\tau}\right)_{\Lambda}. \tag{55}$$

A partir de l'expression (51) de la différentielle de $\mathscr{H}$, on obtient

$$2f\theta\left(\frac{dS}{d\tau}\right)_{\mathscr{C}} + (\tau - \tau_0)\left(\frac{d\bar{q}}{d\tau}\right)_{\mathscr{C}} - (\bar{q} - \bar{q}_0) = 0\,, \tag{56}$$

et comme

$$(\bar{q} - \bar{q}_0) = \left(\frac{d\bar{q}}{d\tau}\right)_{\Lambda}(\tau - \tau_0),$$

des équations (55) et (56) on déduit

$$\left(\frac{dS}{d\tau}\right)_{\mathscr{C}} = \left(\frac{dS}{d\tau}\right)_{A} = 0\,,$$

qui exprime le fait que, aux points de Jouguet, les isentropiques qui passent et la courbe d'Hugoniot sont tangentes. Or, selon le lemme 3,

$$\tau'_s\alpha\left(\frac{dS}{d\tau}\right)_{A} = \frac{P(l)}{a^2 l^\alpha l_\alpha}\,,$$

et l'on obtient

$$P(l) = 0\,.$$

Nous pouvons donc énoncer :

THÉORÈME 5. — *Après combustion, les fronts Jouguet se propagent à la vitesse des ondes magnétosoniques.*

b) Dérivons à nouveau (56); on a

$$0 = 2f\theta\left(\frac{d^2S}{d\tau^2}\right)_{\mathscr{C}} + 2\left(\frac{dS}{d\tau}\right)_{\mathscr{C}}\left(\frac{d\{f\theta\}}{d\tau}\right)_{\mathscr{C}} + (\tau - \tau_0)\left(\frac{d^2\bar{q}}{d\tau^2}\right)_{\mathscr{C}} = 0$$

qui, aux points de Jouguet, se réduit à

$$2f\theta\left(\frac{d^2S}{d\tau^2}\right)_{\mathscr{C}} = -(\tau - \tau_0)\left(\frac{d^2\bar{q}}{d\tau^2}\right)_{\mathscr{C}}\,.$$

A partir de $\bar{q} = \bar{q}_1(\tau, S)$, calculons directement $(d^2\bar{q}/d\tau^2)_{\mathscr{C}}$; on a

$$\left(\frac{d\bar{q}}{d\tau}\right)_{\mathscr{C}} = (\bar{q}'_\tau)_s + (\bar{q}'_s)_\tau\left(\frac{dS}{d\tau}\right)_{\mathscr{C}}\,,$$

et donc

$$\left(\frac{d^2\bar{q}}{d\tau^2}\right)_{\mathscr{C}} = (\bar{q}'_{\tau^2})_{s^2} + 2(\bar{q}''_{\tau s})_{s\tau}\left(\frac{dS}{d\tau}\right)_{\mathscr{C}} + (\bar{q}''_{s^2})_{\tau^2}\left(\frac{dS}{d\tau}\right)^2_{\mathscr{C}} + (\bar{q}'_s)_\tau\left(\frac{d^2S}{d\tau^2}\right)_{\mathscr{C}}\,,$$

qui, aux points de Jouguet, se réduit à

$$\left(\frac{d^2\bar{q}}{d\tau^2}\right)_{\mathscr{C}} = (\bar{q}''_{\tau^2})_{s^2} + (\bar{q}'_s)_\tau\left(\frac{d^2S}{d\tau^2}\right)_{\mathscr{C}}\,, \tag{59}$$

où

$$(\bar{q}'_s)_\tau = -\frac{(\tau'_s)_p}{(\tau'_p)_s}\,, \qquad (\bar{q}''_{\tau^2})_{s^2} = -\frac{M}{\tau'^3_p}\,,$$

la valeur de M étant donnée dans la section 9. (59) nous indique donc que les dérivées secondes de $\bar{q}$ et S le long de $\mathscr{C}$ ne peuvent pas s'annuler simultanément et, d'après (58), il résulte qu'elles sont différentes de zéro. Plus exactement, le théorème 4 oblige à être

$$\left(\frac{d^2q}{d\tau^2}\right)_{\mathscr{C}} > 0\,.$$

Munis de cette inégalité, (57) et (58) expriment le résultat suivant :

THÉORÈME 6. — *Pour les fronts Jouguet, l'entropie après combustion est stationnaire. Elle est un minimum (resp. maximum) pour la détonation (resp. déflagration) Jouguet par rapport aux autres détonations (resp. déflagrations) pouvant avoir lieu à partir du même état thermodynamique avant combustion.*

c) La vitesse y^Σ d'un front Σ est donnée par

$$y^\Sigma = \frac{(u^\alpha l_\alpha)^2}{(u^\alpha l_\alpha)^2 - l^\alpha l_\alpha}.$$

soit, tenant compte de la définition du scalaire a et de la pente m de la droite Λ :

$$y^\Sigma = \frac{m}{m - c^2 r^2}.$$

Il résulte que la vitesse y_0^Σ d'un front avant combustion est

$$y_0^\Sigma = \frac{[\bar{q}]}{[\bar{q}] - c^2 r_0^2[\tau]}. \tag{60}$$

Cet état avant combustion étant fixé, dérivons (60) le long de $\mathscr{C}$

$$\left(\frac{dy_0^\Sigma}{d\tau}\right)_{\mathscr{C}} = \frac{\left(\dfrac{d\bar{q}}{d\tau}\right)_{\mathscr{C}} \{ [\bar{q}] - c^2 r_0^2[\tau] \} - [\bar{q}] \left\{ \left(\dfrac{d\bar{q}}{d\tau}\right)_{\mathscr{C}} - c^2 r_0^2 \right\}}{\{ [\bar{q}] - c^2 r_0^2[\tau] \}^2}$$
$$= \frac{c^2 r_0^2}{\{ [\bar{q}] - c^2 r_0^2[\tau] \}^2} \left\{ [\bar{q}] - [\tau] \left(\frac{d\bar{q}}{d\tau}\right)_{\mathscr{C}} \right\}.$$

Aux points de Jouguet il résulte :

$$\left(\frac{dy_0^{\mathrm{J}}}{d\tau}\right)_{\mathscr{C}} = 0\,;$$

Le calcul de la dérivée seconde en ces points donne

$$\left(\frac{d^2 y_0^{\mathrm{J}}}{d\tau^2}\right)_{\mathscr{C}} = - \frac{c^2 r_0^2}{\{ [\bar{q}] - c^2 r_0^2[\tau] \}^2} [\tau] \left(\frac{d^2 \bar{q}}{d\tau^2}\right)_{\mathscr{C}},$$

qui est positive pour une détonation Jouguet et négative pour une déflagration Jouguet. Il vient donc :

THÉORÈME 7. — *Pour les fronts Jouguet, la vitesse avant combustion est stationnaire. Elle est un minimum (resp. maximum) pour la détonation (resp. déflagration) Jouguet par rapport aux autres détonations (resp. déflagrations) pouvant avoir lieu à partir du même état thermodynamique avant combustion.*

12. VITESSE DES DÉTONATIONS ET DES DÉFLAGRATIONS

a) En un point x d'un front Σ, soient Z_0 et Z_1 les états thermodynamiques respectivement avant et après combustion. Considérons la droite Λ du plan $(\tau, \bar{q})$ joignant Z_0 et Z_1 ; si le front n'est pas un front Jouguet, en accord avec le théorème 4, Λ coupe nécessairement la courbe d'Hugoniot en deux points, un desquels est Z_1. Entre ces deux points, comme il a été vu dans la démonstration du lemme 6, l'entropie présente un maximum unique sur Λ. On conclut que :

$$\begin{array}{llll}
\left(\dfrac{dS}{d\tau}\right)_\Lambda < 0 & \text{en} & \tau = \tau_0 & \text{pour détonations} \\
\left(\dfrac{dS}{d\tau}\right)_\Lambda > 0 & \text{en} & \tau = \tau_0 & \text{pour déflagrations} \\
\left(\dfrac{dS}{d\tau}\right)_\Lambda < 0 & \text{en} & \tau = \tau_1 & \begin{array}{l}\text{pour détonations faibles}\\ \text{pour déflagrations fortes}\end{array} \\
\left(\dfrac{dS}{d\tau}\right)_\Lambda > 0 & \text{en} & \tau = \tau_1 & \begin{array}{l}\text{pour détonations fortes}\\ \text{pour déflagrations faibles}\end{array}
\end{array} \qquad (61)$$

Mais

$$\tau_s'\alpha\left(\frac{dS}{d\tau}\right)_\Lambda = \frac{P(l)}{a^2 l^\alpha l_\alpha};$$

donc, sous les hypothèses de compressibilité H_1 et d'évolution thermodynamique T entraînant $\tau_s' > 0$ et $l^\alpha l_\alpha < 0$, le tableau (61) conduit à :

$$\begin{array}{ll}
\alpha_0 P(l)_0 > 0 & \text{pour les détonations} \\
\alpha_0 P(l)_0 < 0 & \text{pour les déflagrations} \\
\alpha_1 P(l)_1 > 0 & \begin{array}{l}\text{pour les détonations faibles}\\ \text{pour les déflagrations fortes}\end{array} \\
\alpha_1 P(l)_1 < 0 & \begin{array}{l}\text{pour les détonations fortes}\\ \text{pour les déflagrations faibles}\end{array}
\end{array} \qquad (62)$$

b) Il est possible de mettre en rapport la variable α avec les vitesses du front Σ et des ondes d'Alfven : substituons, dans la définition de α, l'expression de H donnée par (20). On a :

$$\alpha = c^2\tau - \mu H = c^2\tau - \mu\left\{\frac{(h^\alpha l_\alpha)^2}{a^2} - \frac{|h|^2}{r^2}\right\}$$
$$= \frac{1}{r^2}\left\{c^2 rf + \mu|h|^2 - \mu\frac{(h^\alpha l_\alpha)^2}{(u^\alpha l_\alpha)^2}\right\}.$$

Des définitions de h_n^2 et de y ,

$$h_n^2 = \frac{(h^\alpha l_\alpha)^2}{(u^\alpha l_\alpha)^2 - l^\alpha l_\alpha}$$

$$y^\Sigma = \frac{(u^\alpha l_\alpha)^2}{(u^\alpha l_\alpha)^2 - l^\alpha l_\alpha},$$

il résulte

$$\frac{h_n^2}{y^\Sigma} = \frac{(h^\alpha l_\alpha)^2}{(u^\alpha l_\alpha)^2}$$

et, tenant compte de l'expression de la vitesse des ondes d'Alfven donnée dans la section 6, on a

$$c^2 rf + \mu |h|^2 = \frac{\mu h_n^2}{y^A}.$$

Par substitution de ces deux relations dans le développement précédent de α, il vient

$$\alpha = \frac{\mu h_n^2}{r^2}\left(\frac{1}{y^A} - \frac{1}{y^\Sigma}\right). \tag{63}$$

c) Munis des résultats (62) et (63), il est aisé de conclure le théorème suivant :

THÉORÈME 8. — *Sous les hypothèses de compressibilité* H_1, *d'évolution thermodynamique* T *et de combustion* C, *la vitesse avant combustion* V_0^Σ *par rapport au fluide d'un front de combustion vérifie :*

$v_0^{MR} < v_0^\Sigma$	*pour une détonation rapide,*
$v_0^{ML} < v_0^\Sigma < v_0^A$	*pour une détonation lente,*
$v_0^A < v_0^\Sigma < v_0^{MR}$	*pour une déflagration rapide*
$v_0^\Sigma < v_0^{ML}$	*pour une déflagration lente,*

et la vitesse v_1^Σ *après combustion :*

$v_1^A < v_1^\Sigma \leqslant v_1^{MR}$	*pour une détonation forte rapide,*
$v_1^\Sigma \leqslant v_1^{ML}$	*pour une détonation forte lente,*
$v_1^{MR} \leqslant v_1^\Sigma$	*pour une détonation faible rapide,*
$v_1^{ML} \leqslant v_1^\Sigma < v_1^A$	*pour une détonation faible lente,*
$v_1^{MR} \leqslant v_1^\Sigma$	*pour une déflagration forte rapide,*
$v_1^{ML} \leqslant v_1^\Sigma < v_1^A$	*pour une déflagration forte lente,*
$v_1^A < v_1^\Sigma \leqslant v_1^{MR}$	*pour une déflagration faible rapide,*
$v_1^\Sigma \leqslant v_1^{ML}$	*pour une déflagration faible lente,*

le signe = *correspondant aux détonations et déflagrations Jouguet.*

13. COMPOSITION DES DÉTONATIONS

a) Un front de choc est une hypersurface Σ à travers laquelle certaines variables magnétohydrodynamiques présentent des discontinuités (Lichnerowicz [3]), la seule différence avec un front de combustion se trouvant dans le fait que l'équation d'état du fluide d'une part et de l'autre du front de choc reste inchangée.

Pour l'étude des fronts de choc, les relations (20) sont évidemment valables ; on définit alors la fonction d'Hugoniot relative à un état thermodynamique Z_0 avant choc par :

$$\bar{\mathcal{H}}(Z\,;Z_0) = c^2\,\{\,f_0^2(\tau,\bar{q}) - f_0^2(\tau_0,\bar{q}_0)\,\} - (\tau+\tau_0)(\bar{q}-\bar{q}_0) \\ \mu(\tau k + \tau_0 k_0)(k-k_0)$$

les états thermodynamiques après choc devant se trouver sur la courbe d'Hugoniot

$$\bar{\mathscr{C}} \equiv \bar{\mathcal{H}}(Z\,;Z_0) = 0$$

A différence de la fonction d'Hugoniot $\mathcal{H}$ des combustions, $\bar{\mathcal{H}}$ vérifie

$$\bar{\mathcal{H}}(Z_0, Z_0) = 0$$

c'est-à-dire, Z_0 appartient aussi à $\bar{\mathscr{C}}$.

De (64) et (46) on obtient

$$\bar{\mathcal{H}}(Z, Z_0) = c^2\,\{\,f_0^2(\tau,\bar{q}) - f_1^2(\tau,\bar{q})\,\} + \mathcal{H}(Z, Z_0)\,; \tag{66}$$

il résulte que, sous l'hypothèse fondamentale de combustion, les courbes d'Hugoniot correspondantes aux chocs et aux combustions ne se coupent en aucun point.

b) Soit $Z_0 \equiv (\tau_0, q_0)$ l'état thermodynamique avant un front de détonation Σ, de normale l_α ; les états possibles après détonation Z_1 se trouvent, comme on le sait, par intersection de la courbe d'Hugoniot des combustions relative à Z_0,

$$\mathscr{C} \equiv c^2\,\{\,f_1^2(\tau,\bar{q}) - f_0^2(\tau_0,\bar{q}_0)\,\} - (\tau+\tau_0)(\bar{q}-\bar{q}_0) \\ + \mu(\tau k + \tau_0 k_0)(k-k_0) = 0\,,$$

et de la droite Λ définie par

$$\Lambda \equiv \bar{q} - \bar{q}_0 = m(\tau - \tau_0)\,.$$

avec

$$m = \frac{c^2 a^2}{l^\alpha l_\alpha}$$

Ils vérifient donc le système

$$\left.\begin{aligned} c^2\,\{\,f_1^2(\tau,\bar{q}) - f_0^2(\tau_0,\bar{q}_0)\,\} - m(\tau^2-\tau_0^2) + \mu(\tau k + \tau_0 k_0)(k-k_0) = 0\,, \\ \bar{q} - \bar{q}_0 = m(\tau-\tau_0)\,, \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

qui, comme il a été démontré au lemme 6 admet soit deux solutions, correspondant respectivement aux détonations fortes et faibles, soit une seule, correspondant à une détonation Jouguet.

Cette droite Λ coupe la courbe d'Hugoniot des chocs donnée par (65) en un point Z^*. Considérons Z^*, état thermodynamique après un front de choc, comme état thermodynamique avant un front de combustion Σ de même normale l_α. La courbe d'Hugoniot des combustions relative à Z^* est

$$\mathscr{C}^* \equiv c^2 \{ f_1^2(\tau, \bar{q}) - f_0^2(\tau^*, \bar{q}^*) \} - (\tau + \tau^*)(\bar{q} - \bar{q}^*) \\ + \mu(\tau k + \tau^* k^*)(k - k^*) = 0,$$

et les états thermodynamiques Z_1^* après combustion sont alors donnés par l'intersection de $\mathscr{C}^*$ et de Λ ; ils vérifient donc

$$\left.\begin{aligned} c^2 \{ f_1^2(\tau, \bar{q}) - f_0^2(\tau^*, \bar{q}^*) \} - m(\tau^2 - \tau^{*2}) + \mu(\tau k + \tau^* k^*)(k - k^*) = 0, \\ \bar{q} - \bar{q}_0 = m(\tau - \tau_0). \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Mais comme Z^* appartient à $\mathscr{C}$, de (64) et (65) il s'ensuit

$$c^2 \{ f_0^2(\tau^*, \bar{q}^*) - f_0^2(\tau_0, \bar{q}_0) \} - (\tau^* + \tau_0)(\bar{q}^* - \bar{q}_0) \\ + \mu(\tau^* k^* + \tau_0 k_0)(k^* - k_0) = 0$$

et (68) peut alors s'écrire :

$$\left.\begin{aligned} c^2 \{ f_1^2(\tau, \bar{q}) - f_0^2(\tau_0, \bar{q}_0) - m(\tau^2 - \tau_0^2) + \mu\Omega = 0 \\ \bar{q} - \bar{q}_0 = m(\tau - \tau_0) \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

avec

$$\Omega \equiv (\tau^* k^* + \tau_0 k_0)(k^* - k_0) + (\tau k + \tau^* k^*)(k - k^*)$$

Pour éliminer dans l'expression de Ω les variables étoilées, substituons dans son développement les variables τ des termes ne contenant pas k_0^2 et k^2, par $(\alpha + \mu \mathrm{H})/c^2$; il résulte

$$\Omega = \frac{1}{c^2} \{ \alpha_0 k_0 k^* - \alpha^* k^* k_0 + \alpha^* k^* k - \alpha k k^* + c^2 \tau k^2 - c^2 \tau_0 k_0^2 \},$$

et tenant compte de l'invariance du scalaire $n = k\alpha$, il résulte

$$\Omega = \frac{1}{c^2} \{ - \alpha k k_0 + \alpha_0 k_0 k + c^2 \tau k^2 - c^2 \tau_0 k_0^2 \} = (\tau k + \tau_0 k_0)(k - k_0).$$

En portant cette expression dans (69) on obtient une relation identique à (67) : les points Z_1 et Z_1^* coïncident.

De (66) il résulte en outre que l'ordre sur Λ des différents états mentionnés est $Z^* \to Z_1^* \equiv Z_1 \to Z_0$. Ainsi, un état après combustion Z_1 qui est détonation par rapport à Z_0, est déflagration par rapport à Z^*. Tenant compte des inégalités (61), on peut raffiner ce résultat :

THÉORÈME 9. — *Une détonation forte (resp. faible) est équivalente à la superposition d'un choc et d'une déflagration faible (resp. forte).*

14. ZONES DE COMBUSTION D'ÉPAISSEUR FINIE

a) Une des données fondamentales de la systématique expérimentale concernant les combustions est l'impossibilité de produire aussi bien des déflagrations fortes que des détonations faibles. Néanmoins, la théorie, telle que développée jusqu'à maintenant, ne permet pas d'obtenir ce résultat. Ceci est dû au fait que cette théorie n'est basée que dans l'exploitation des équations de conservation (14), tandis que l'inexistence des déflagrations fortes et des détonations faibles est une conséquence de la structure interne des combustions. Or, pour pouvoir expliciter dans les équations de base cette structure il faut considérer la zone de combustion d'épaisseur non nulle, ce qui revient à restituer au phénomène de combustion son caractère continu.

Dans le domaine Ω de V_4, nous allons considérer la zone de combustion, non plus déterminée par une seule hypersurface Σ, mais limitée par deux hypersurfaces Σ_0 et Σ_1, sans points communs, séparant cette zone respectivement des zones avant combustion et après combustion.

b) Le tenseur impulsion-énergie $T^{\alpha\beta}$, le courant de matière ru^α et la 2-forme champ électrique-induction magnétique $H^{\alpha\beta}$, ainsi que ses dérivées covariantes, seront supposés maintenant continus dans tout Ω, définissant dans les zones avant et après combustion des milieux magnétohydrodynamiques caractérisés par les équations d'état précédemment utilisées, et vérifiant *dans tout* Ω les équations de conservation

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} &= 0\,, \\ \nabla_\alpha(ru^\alpha) &= 0\,, \\ \nabla_\alpha \overset{*}{H}{}^{\alpha\beta} &= 0\,, \end{aligned}$$

La dernière de ces relations, $\nabla_\alpha \overset{*}{H}{}^{\alpha\beta} = 0$, quiconque soit la 2-forme champ électrique-induction magnétique $H_{\alpha\beta}$, tient lieu en vertu des équations de Maxwell, valables dans tout milieu ; nous supposerons, quoique ceci ne soit pas essentiel pour la théorie, que le fluide en combustion est Maxwellien, en ce sens que champs et inductions sont reliés linéairement.

La seconde relation, $\nabla_\alpha(ru^\alpha) = 0$, exige une précision concernant la variable r. En effet, r étant un bilan massique du nombre de particules par unité de volume, la conservation du courant ru^α dans la zone de combustion n'est acceptable que si ce nombre de particules reste inchangé le long du processus de combustion. Autrement dit, désignant par g l'énergie spécifique de combustion, pour que l'équation $\nabla_\alpha(ru^\alpha) = 0$ soit admissible à travers la zone de combustion, la fraction de masse g/c^2 associée à l'énergie de combustion dégagée ne doit pas être inclue dans r. Une telle définition de r, toujours possible car il suffit, par exemple, de faire le bilan massique du nombre de particules *élémentaires* par unité de volume, est celle que nous supposerons donnée ici.

Finalement, la relation $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ aura lieu pourvu que le milieu défini par $T^{\alpha\beta}$ soit isolé. Dans la zone de combustion, le tenseur impulsion-énergie $T^{\alpha\beta}$ sera donc celui d'un fluide certainement conducteur de la chaleur, et probablement de conductivité électrique non infinie.

Considérons dans Ω une famille à un paramètre d'hypersurfaces $\Sigma(\eta)$

telle que $\Sigma(0) = \Sigma_0$ et $\Sigma(1) = \Sigma_1$. l_α étant, au point x de Ω, le vecteur normal à l'hypersurface $\Sigma(\eta)$ passant par ce point, nous pouvons définir dans tout Ω les scalaires

$$\begin{aligned}
a(x) &= r(u^\alpha l_\alpha),\\
\mathrm{H}(x) &= \frac{(h^\alpha l_\alpha)^2}{a^2} - \frac{|h|^2}{r^2},\\
e(x) &= q - \frac{c^2a^2}{l^\alpha l_\alpha}\tau,\\
\mathrm{K}(x) &= f^2 - \frac{a^2}{l^\alpha l_\alpha}\tau^2 + 2\frac{\mu}{c^2}\chi\tau - \frac{\mu^2}{c^4}\mathrm{H}\chi,\\
\mathrm{L}(x) &= \chi^2
\end{aligned}$$

avec

$$q = p + 1/2\mu\,|h|^2, \qquad \chi = |h|^2 + \frac{a^2}{l^\alpha l_\alpha}\mathrm{H},$$
$$\alpha = c^2\tau - \mu\mathrm{H}.$$

c) La détermination précise des variables caractérisant un fluide en combustion est très complexe. Nous nous bornerons dans la suite à considérer les déflagrations particulières vérifiant les hypothèses suivantes :

F_1 : *En chaque point x de la zone de combustion on a :*

$$u^\alpha\partial_\alpha \mathrm{X} = 0, \qquad u^\alpha l^\beta \nabla_\alpha l_\beta = 0,$$

où X *représente un quelconque des scalaires* a, H, e, K, L *précédemment définis.*

F_2 : i) *Lors d'une déflagration, l'énergie totale du fluide en combustion est, à chaque instant, la somme des énergies totales des fractions présentes des fluides avant et après combustion c'est-à-dire :*

$$\rho(\tau, p) = (1-\eta)\rho_0(\tau, p) + \eta\rho_1(\tau, p) \tag{70}$$

où η, $0 < \eta < 1$, *est la fraction présente du fluide résultant de la combustion ;* ii) *La vitesse de réaction est positive pendant tout le processus de combustion, c'est-à-dire*

$$u^\alpha\partial_\alpha\eta > 0$$

pour tout η *tel que* $0 \leqslant \eta \leqslant 1$.

On peut écrire

$$\rho + p = c^2 rf = c^2\frac{f^2}{\tau},$$

d'où, tenant compte de (70),

$$c^2f^2 = (\rho + p)\tau = (1-\eta)\rho_0(\tau, p)\tau + \eta\rho_1(\tau, p)\tau + \tau p$$

et comme

$$\begin{aligned}
\rho_0\tau &= c^2f_0^2 - \tau p,\\
\rho_1\tau &= c^2f_1^2 - \tau p,
\end{aligned}$$

il résulte

$$f^2(\tau, p) = (1 - \eta) - f_0^2(\tau, p) + \eta f_1^2(\tau, p).$$

Finalement, tenant compte que, sous l'hypothèse F_1, le long des lignes de courant du fluide χ ne dépend que de la variable τ, on peut poser

$$f^2(\tau, \bar{q}) = (1 - \eta) f_0^2(\tau, \bar{q}) + \eta f_1^2(\tau, \bar{q}) \tag{71}$$

d) Comme conséquence de l'hypothèse F_1, l'état magnétohydrodynamique à un instant donné Y_η de la combustion d'un élément de volume du fluide et l'état magnétohydrodynamique avant combustion Y_0 du même élément sont reliés par les mêmes équations que les états avant et après combustion d'un front Σ.

L'équation d'Hugoniot pour l'état Y_η s'écrit alors

$$c^2 \{ f^2(\tau, \bar{q}) - f_0^2(\tau_0, \bar{q}_0) \} - (\tau + \tau_0)(\bar{q} - \bar{q}_0) + \mu(\tau k + \tau_0 k_0)(k - k_0) = 0,$$

et en différentiant le long de Λ,

$$c^2 \left[\frac{df^2}{d\tau} \right]_\Lambda - (\bar{q} - \bar{q}_0) - \left[\frac{d\bar{q}}{d\tau} \right]_\Lambda (\tau + \tau_0) + \mu \Psi = 0, \tag{72}$$

avec

$$\Psi = (k - k_0)k + \{ 2\tau k - (\tau - \tau_0) k_0 \} \left[\frac{dk}{d\tau} \right]_\Lambda .$$

Calculons $\left[\dfrac{df^2}{d\tau} \right]_\Lambda$; de (71) il résulte

$$c^2 \left[\frac{df^2}{d\tau} \right]_\Lambda = 2c^2 f \left[\left(\frac{df}{d\tau} \right)_\eta \right]_\Lambda - c^2 \{ f_0^2(\tau, \bar{q}) - f_1^2(\tau, \bar{q}) \} \left[\frac{d\eta}{d\tau} \right]_\Lambda$$

et de (27)

$$2c^2 f \left[\left(\frac{df}{d\tau} \right)_\eta \right]_\Lambda = 2f\theta \left[\left(\frac{dS}{d\tau} \right)_\eta \right]_\Lambda + 2\tau \left\{ \left[\frac{d\bar{q}}{d\tau} \right]_\Lambda - \mu k \left[\frac{dk}{d\tau} \right]_\Lambda \right\}.$$

Par substitution de ces valeurs dans (72) il résulte

$$2f \left[\left(\frac{dS}{d\tau} \right)_\eta \right]_\Lambda - c^2 \{ f_0^2(\tau, \bar{q}) - f_1^2(\tau, \bar{q}) \} \left[\frac{d\eta}{d\tau} \right]_\Lambda + \mu\Omega = 0 \tag{73}$$

avec

$$\Omega = -2\tau k \left[\frac{dk}{d\tau} \right]_\Lambda + \Psi .$$

Or, $k^2 = L/\alpha^2$ et l'on déduit par dérivation

$$\left(\frac{dk}{d\tau} \right)_\Lambda = -\frac{c^2 k}{\alpha};$$

en substituant cette valeur dans Ω, compte tenu de la définition de Ψ, il résulte :

$$\Omega = 2c^2\tau\frac{k^2}{\alpha} + (k - k_0)k - \{ 2\tau k - (\tau - \tau_0)k_0 \} \frac{c^2k}{\alpha}$$

$$= k\left\{ \frac{k_0}{\alpha}(c^2\tau - c^2\tau_0) + k - k_0 \right\} = k\left\{ k_0 - \frac{k_0\alpha_0}{\alpha} + k - k_0 \right\} = 0,$$

car $k_0\alpha_0 = k\alpha$. (73) s'écrit donc

$$2f\theta\left[\left(\frac{dS}{d\tau}\right)_\eta\right]_\Lambda - c^2 \{ f_0^2(\tau, \bar{q}) - f_1^2(\tau, \bar{q}) \} \left[\frac{d\eta}{d\tau}\right]_\Lambda = 0 .$$

D'après l'hypothèse fondamentale de combustion C, le crochet de cette expression est positif, et comme, pour les déflagrations, τ croît le long des lignes de courant du fluide, l'hypothèse F_2 entraîne

$$\left[\frac{d\eta}{d\tau}\right]_\Lambda > 0 .$$

Il s'ensuit

$$\left[\left(\frac{dS}{d\tau}\right)_\eta\right]_\Lambda > 0 ,$$

et ceci en particulier pour $\eta = 1$. Du tableau (61) il découle alors l'impossibilité des déflagrations fortes et, munis de ce résultat, le théorème 9 exclut les détonations faibles. Nous avons donc démontré :

THÉORÈME 10. — *Sous l'hypothèse relativiste de combustion* C, *les fronts de combustion vérifiant les hypothèses* F_1 *et* F_2 *ne peuvent être ni déflagrations fortes ni détonations faibles.*

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] A. H. TAUB, *Phys. Rev.*, t. **74**, 1948, p. 328-334.
[*2*] A. LICHNEROWICZ, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **5**, 1966, p. 37-75.
[*3*] A. LICHNEROWICZ, *Relativistic Gydrodynamics and Magneto-hydrodynamics*, Benjamin Inc., New York, 1967.
[*4*] H. WEYL, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. **2**, 1909, p. 103-122.
[*5*] A. LICHNEROWICZ, *Comm. math. phys.*, t. **1**, 1966, p. 328-373.
[*6*] F. HOFFMANN et E. TELLER, *Phys. Rev.*, t. **80**, 1950, p. 692-703.
[*7*] Y. CHOQUET-BRUHAT, *Astron. Acta*, t. **6**, 1960, p. 354-365.
[*8*] PHAM-MAU-QUAN, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **2**, 1965, p. 151-165.
[*9*] R. COURANT et K. O. FRIEDRIHS, *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience Inc., New York, 1967.
[*10*] SOUBRARAMAYER, *Sur les chocs dans un milieu magnétodynamique réactif*, Thèse, Paris, 1967.
[*11*] H. CABANNES, *Magnétodynamique des Fluides*, *C. D. U.*, Paris, 1969.

[*12*] A. A. BARMIN, *Soviet Physics, Doklady*, vol. **138**, n° 1, 1961, p. 77-80. *Jour. Math. Mech (P. M. M.)*, vol. **26**, n° 5, 1962, p. 801-810.
[*13*] E. LARISH et I. SHEKHTMAN, *Soviet Physics, Jour. Exp. and Theo. Physics*, vol. **35**, n° 8, 1958, p. 203.
[*14*] J. C. LUCQUIAUD, *Comptes Rendus*, t. **270**, p. 85 (1970) et *Comptes Rendus*, t. **271**, 1970, p. 1089.

(Manuscrit reçu le 28 novembre 1975).