ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

B. LINET

Rayonnement électromagnétique d'un dipôle électrique au centre d'une enveloppe sphérique en relativité générale

Annales de l'I. H. P., section A, tome 25, nº 1 (1976), p. 79-89
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1976__25_1_79_0>

© Gauthier-Villars, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XXV, n° 1, 1976, p. 79-89.

Section A :
Physique théorique.

Rayonnement électromagnétique d'un dipôle électrique au centre d'une enveloppe sphérique en relativité générale

par

B. LINET

Équipe de Recherche Associée au C. N. R. S.
« Gravitation et Cosmologie relativiste », Université Paris VI
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie,
75231 Paris Cedex 05, France

RÉSUMÉ. — Le champ électromagnétique engendré par un dipôle électrique situé au centre d'une enveloppe sphérique de masse m et de rayon a est explicité à l'ordre $\frac{m}{a}$. L'énergie rayonnée à l'infini peut être calculée. Si le dipôle devient statique, la façon dont le champ devient asymptotiquement statique dans le temps est donnée.

Lorsque le champ gravitationnel considéré n'est pas globalement faible, sous certaines hypothèses très restrictives, l'énergie rayonnée à l'infini est obtenue.

ABSTRACT. — The electromagnetic field produced by an electric dipole at the center of a spherical shell of mass m with radius a is given to order $\frac{m}{a}$; and the energy radiated to infinity is computed. If the dipole becomes static, the way in which the field becomes asymptotically static in time is given.

When the gravitational field is not everywhere weak, with very restrictive assumptions, the energy radiated to infinity is obtained.

1. INTRODUCTION

Le phénomène de queue d'onde électromagnétique en espace-temps courbe a été étudié de façon approfondie, en particulier l'interaction monopôle gravitationnel et dipôle rayonnant électromagnétique : Rotenberg [*6*], Couch et Hallidy [*2*], Bardeen et Press [*1*] et Papapetrou [*5*]. Cependant ces études sont menées sans tenir compte explicitement de la source du champ électromagnétique considéré.

Dans ce travail, nous nous proposons d'examiner le champ électromagnétique engendré par une source dans un espace-temps donné, celui d'une enveloppe sphérique de masse m et de rayon a.

Les propriétés des champs électromagnétiques multipolaires sur l'espace-temps de Schwarzschild sont usuellement données dans le système de coordonnées radiatives (u, r, θ, φ). Par conséquent, nous introduisons un système de coordonnées radiatives (u, r, θ, φ) qui satisfait les propriétés suivantes :

a) il coïncide avec le système de coordonnées radiatives de l'espace-temps de Schwarzschild à l'extérieur de l'enveloppe

b) il est de telle sorte que les composantes de la métrique de l'espace-temps global soient continues à la traversée de l'enveloppe.

La métrique s'écrit sous la forme :

$$ds^2 = \begin{cases} (2K_1)^2 du^2 + 2dudr - \bar{r}^2(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) & -2K_0K_1 \leqslant r < a \\ \left(1 - \dfrac{2m}{r}\right)du^2 + 2dudr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) & r \geqslant a \end{cases} \tag{1}$$

où la fonction $\bar{r}(r)$ a pour expression :

$$\bar{r}(r) = \frac{r}{2K_1} + K_0 \tag{2}$$

et où les constantes K_0 et K_1 ont pour valeurs :

$$K_0 = a\left[1 - \frac{1}{\left(1 - \dfrac{2m}{a}\right)^{1/2}}\right] \quad \text{et} \quad 2K_1 = \left(1 - \frac{2m}{a}\right)^{1/2}. \tag{3}$$

Dans le système de coordonnées $(\bar{u}, \bar{r}, \theta, \varphi)$ défini par :

$$\bar{r} = \bar{r}(r) \qquad \text{et} \qquad \bar{u} = 2K_1 u \tag{4}$$

la métrique (1) pour $r < a$ s'exprime sous la forme minkowskienne. Notons que l'on a les relations suivantes :

$$\bar{r}(-2K_0K_1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \bar{r}(a) = a \tag{5}$$

La source sera un dipôle électrique situé au centre de l'enveloppe sphérique. A l'intérieur l'espace-temps est plat, nous n'aurons donc pas de difficulté pour interpréter la source.

La détermination explicite du champ électromagnétique se fera à l'ordre $\frac{m}{a}$. Cependant certains résultats pourront être discutés sans l'hypothèse que le champ gravitationnel est globalement faible.

2. SOLUTION DIPOLAIRE DES ÉQUATIONS DE MAXWELL

Le champ électromagnétique $F_{\mu\nu}$ est caractérisé par trois quantités complexes Φ_0, Φ_1 et Φ_2, composantes de $F_{\mu\nu}$ sur la tétrade isotrope du formalisme de Newman-Penrose [4].

La symétrie sphérique de la métrique (1), nous permet de séparer les variables angulaires comme dans l'espace-temps plat. Quand nous considérons le champ d'un dipôle électrique, la dépendance angulaire est la suivante :

$$\Phi_0 = \phi_0(u, r)\,{}_1Y_1^0(\theta, \varphi),$$
$$\Phi_1 = \phi_1(u, r)Y_1^0(\theta, \varphi) \quad \text{et} \quad \Phi_2 = \phi_2(u, r)\,{}_{-1}Y_1^0(\theta, \varphi) \tag{6}$$

où les ${}_sY_l^m(\theta, \varphi)$ sont les harmoniques sphériques de spin s.

2.1. Région : $-2K_0K_1 \leqslant r < a$

Pour ϕ_0, ϕ_1 et ϕ_2 les équations de Maxwell sans source s'écrivent :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial r}\phi_1 - 2\bar{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\bar{r}}\right)\cdot\phi_1 - \frac{1}{\bar{r}}\phi_0 = 0\\
&\frac{\partial}{\partial r}\phi_2 - \bar{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\bar{r}}\right)\cdot\phi_2 - \frac{1}{\bar{r}}\phi_1 = 0\\
&\frac{\partial}{\partial u}\phi_0 - 2K_1^2\frac{\partial}{\partial r}\phi_0 - \frac{K_1}{\bar{r}}\phi_0 + \frac{1}{\bar{r}}\phi_1 = 0\\
&\frac{\partial}{\partial u}\phi_1 - 2K_1^2\frac{\partial}{\partial r}\phi_1 - \frac{2K_1}{\bar{r}}\phi_1 + \frac{1}{\bar{r}}\phi_2 = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Connaissant la solution dipolaire générale dans l'espace-temps plat il est aisé, à l'aide du changement de système de coordonnées (4), d'obtenir la solution générale du système d'équations (7).

Premièrement, il y a la solution irrégulière au centre de moment $p(u)$ dont la source sera le moment dipolaire électrique donné. En fonction du moment du dipôle électrique usuel $D(\bar{u})$, $p(u)$ a pour expression :

$$p(u) = \frac{1}{2K_1}D(2K_1u). \tag{8}$$

Cette solution s'exprime sous la forme :

$$\left.\begin{aligned} \phi_2(u, r) &= \frac{1}{\bar{r}}\,\ddot{p}(u) + \frac{2K_1}{\bar{r}^2}\,\dot{p}(u) + \frac{2K_1^2}{\bar{r}^3}\,p(u) \\ \phi_1(u, r) &= -\frac{1}{\bar{r}^2}\,\dot{p}(u) - \frac{2K_1}{\bar{r}^3}\,p(u) \\ \phi_0(u, r) &= \frac{1}{\bar{r}^3}\,p(u)\,. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Deuxièmement, il y a la solution régulière dépendante d'une fonction arbitraire p_1 ; elle s'exprime sous la forme :

$$\left.\begin{aligned} \phi_2(u, r) &= \frac{1}{\bar{r}}\,\ddot{p}_1(u) + \frac{2K_1}{\bar{r}^2}\,\dot{p}_1(u) + \frac{2K_1^2}{\bar{r}^3}\,p_1(u) - \frac{2K_1^2}{\bar{r}^3}\,p_1(v) \\ \phi_1(u, r) &= -\frac{1}{\bar{r}^2}\,\dot{p}_1(u) - \frac{2K_1}{\bar{r}^3}\,p_1(u) - \frac{1}{\bar{r}^2}\,\dot{p}_1(v) + \frac{2K_1}{\bar{r}^3}\,p_1(v) \\ \phi_0(u, r) &= \frac{1}{\bar{r}^3}\,p_1(u) - \frac{1}{2K_1^2}\frac{1}{\bar{r}}\,\ddot{p}_1(v) + \frac{1}{K_1}\frac{1}{\bar{r}^2}\,\dot{p}_1(v) - \frac{1}{\bar{r}^3}\,p_1(v) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

où v le temps avancé est défini par :

$$v = u + \frac{1}{K_1}\bar{r} \tag{11}$$

2.2. **Région : $r \geqslant a$**

Pour ϕ_0, ϕ_1 et ϕ_2 les équations de Maxwell sans source s'écrivent :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r}\phi_1 + \frac{2}{r}\phi_1 - \frac{1}{r}\phi_0 = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial r}\phi_2 + \frac{1}{r}\phi_2 - \frac{1}{r}\phi_1 = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial u}\phi_0 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}\phi_0 - \frac{1}{2r}\phi_0 + \frac{1}{r}\phi_1 = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial u}\phi_1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}\phi_1 - \frac{1}{r}\phi_1 + \frac{2m}{r^2}\phi_1 + \frac{1}{r}\phi_2 = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Dans le problème que nous considérons, nous n'avons besoin que de la solution n'admettant pas de rayonnement entrant à l'infini. Cette solution donnée par Bardeen et Press [*1*] est représentée par une série convergente pour $r > 2m$ que nous avons examinée en détail [*3*]. Pour un moment $p_2(u)$

arbitraire que nous supposerons borné pour tout u, cette solution a pour expression :

$$\left.\begin{aligned}
\phi_2(u, r) &= \ddot{p}_2(u)\frac{1}{r} + \dot{p}_2(u)\frac{1}{r^2} + \frac{1}{2}\,p_2(u)\frac{1}{r^3} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^n}{2r^{n+4}}\int_{-\infty}^{u} p_2(u_0)f_n'\left(\frac{u-u_0}{2r}\right)du_0 \\
\phi_1(u, r) &= -\dot{p}_2(u)\frac{1}{r^2} - p_2(u)\frac{1}{r^3} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^n}{2r^{n+4}}\int_{-\infty}^{u} p_2(u_0)\sigma_n'\left(\frac{u-u_0}{2r}\right)du_0 \\
\phi_0(u, r) &= p_2(u)\frac{1}{r^3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^n}{2r^{n+4}}\int_{-\infty}^{u} p_2(u_0)v_n'\left(\frac{u-u_0}{2r}\right)du_0 \qquad (r > 2m).
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

où les fonctions f_n, σ_n et v_n peuvent être déterminées ainsi que leurs dérivées f_n', σ_n' et v_n'. En particulier au premier ordre en m, on a :

$$\left.\begin{aligned}
f_1(y) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+y)} \\
\sigma_1(y) &= \frac{3}{2} - \frac{3+2y}{2(1+y)^2} \\
v_1(y) &= 3 - \frac{3+3y+y^2}{(1+y)^3}\,.
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

3. DÉTERMINATION DE LA SOLUTION

A l'intérieur de l'enveloppe, la solution du système d'équations (7) est décomposée en une solution irrégulière (9) donnée et en une solution régulière (10) dont le moment p_1 est à déterminer.

A l'extérieur de l'enveloppe, nous adoptons la solution (13) dont le moment p_2 est à déterminer.

En $r = a$, il ne doit pas y avoir de source électromagnétique. Or, compte-tenu de la continuité en $r = a$ des coefficients de $\frac{\partial}{\partial r}$ dans les équations (7) et (12), toute discontinuité des composantes ϕ_0, ϕ_1 et ϕ_2 ferait apparaître des sources en $r = a$ sous forme de distribution de Dirac. Notre condition de raccordement des solutions intérieures et extérieures sera la continuité des composantes ϕ_0, ϕ_1 et ϕ_2. Il en résulte deux conditions indépendantes qui déterminent les fonctions p_1 et p_2 en fonction de p. Les trois relations sont les suivantes :

$$\ddot{p}(u)\frac{1}{a} + \frac{2K_1}{a^2}\dot{p}(u) + \frac{2K_1^2}{a^3}p(u) + \ddot{p}_1(u)\frac{1}{a} + \frac{2K_1}{a^2}\dot{p}(u) + \frac{2K_1^2}{a^3}p_1(u) - \frac{2K_1^2}{a^3}p_1\left(u + \frac{1}{K_1}a\right) = \phi_2(u, a) \quad (15)$$

$$-\dot{p}(u)\frac{1}{a^2} - \frac{2K_1}{a^3}p(u) - \dot{p}_1(u)\frac{1}{a^2} - \frac{2K_1}{a^3}p_1(u) - \frac{1}{a^2}\dot{p}_1\left(u + \frac{1}{K_1}a\right) + \frac{2K_1}{a^3}p_1\left(u + \frac{1}{K_1}a\right) = \phi_1(u, a) \quad (16)$$

$$p(u)\frac{1}{a^3} + p_1(u)\frac{1}{a^3} - \frac{1}{2K_1^2a}\ddot{p}_1\left(u + \frac{1}{K_1}a\right) + \frac{1}{K_1a^2}\dot{p}_1\left(u + \frac{1}{K_1}a\right) - \frac{1}{a^3}p_1\left(u + \frac{1}{K_1}a\right) = \phi_0(u, a) \quad (17)$$

où les $\phi_0(u, a)$, $\phi_1(u, a)$ et $\phi_2(u, a)$ sont les expressions (13).

Éliminons les termes en $p_1\left(u + \frac{1}{K_1}a\right)$, il vient l'équation :

$$\ddot{p}_1(u) + \ddot{p}(u) = a\frac{\partial}{\partial u}\phi_2(u, a) - 2K_1\phi_2(u, a) - 2K_1^2\phi_1(u, a). \quad (18)$$

Éliminons les termes en $p_1(u)$, il vient l'équation :

$$\ddot{p}_1\left(u + \frac{1}{K_1}a\right) = -2K_1^2a\frac{\partial}{\partial u}\phi_0(u, a) - 4K_1^3\phi_0(u, a) - 2K_1^2\phi_1(u, a). \quad (19)$$

Les équations (18) et (19) permettraient de trouver les fonctions inconnues p_1 et p_2. Nous ferons la détermination explicite à l'ordre $\frac{m}{a}$. Compte-tenu du fait qu'en absence de masse p_2 se réduit à p, les équations (18) et (19) deviennent à l'ordre $\frac{m}{a}$:

$$\ddot{p}_1(u) + \ddot{p}(u) - \ddot{p}_2(u) - \frac{m}{a^2}\ddot{p}(u) + \frac{1}{4}\frac{m}{a^4}p(u) = 0 \quad (20)$$

$$\dddot{p}_1(u) = -\frac{m}{a^4}p(u - 2a) + 48m\int_{-\infty}^{u-2a} p(u_0)\frac{du_0}{(u - u_0)^5}. \quad (21)$$

Nos formules nous limitent à considérer des moments $p(u)$ bornés pour tout u.

Une première intégration conduit à l'expression de $\ddot{p}_2(u)$:

$$\ddot{p}_2(u) = \ddot{p}(u) - \frac{m}{a^2}\dot{p}(u) + \frac{m}{4a^4}\int_{u-2a}^{u} p(u_0)du_0 - 12m\int_{-\infty}^{u-2a} p(u_0)\frac{du_0}{(u-u_0)^4} \quad (22)$$

où la constante d'intégration est prise nulle puisque si $p(u)$ est nul pour $u < u_1$, il en est de même pour $p_2(u)$. De la même manière, on obtient l'expression du moment $p_2(u)$:

$$p_2(u) = p(u) + m\int_{u-2a}^{u}\left[-\frac{1}{a^2} + \frac{1}{8a^4}(u-u_0)^2\right]p(u_0)du_0 - 2m\int_{-\infty}^{u-2a} p(u_0)\frac{du_0}{(u-u_0)^2}. \quad (23)$$

4. DISCUSSION DES RÉSULTATS

4.1. Étude asymptotique dans le temps

La première remarque sur la solution (23) est que si le moment de la source $D(\bar{u})$ devient une constante D à partir d'un certain instant alors le champ électromagnétique ne devient statique qu'asymptotiquement dans le temps. Son moment dipolaire tend vers la valeur statique à l'ordre $\frac{m}{a}$, soit :

$$p_2 = \frac{1}{2K_1}\left[1 - \frac{8}{3}\frac{m}{a}\right]D \quad (24)$$

Notons que la solution statique exacte a été établie pour un dipôle électrique au centre d'une enveloppe sphérique par Wald [7].

D'une façon plus précise, nous allons voir sur l'expression de $\phi_2(u, r)$ comment le champ statique s'établit dans l'hypothèse où $p(u)$ est nul pour $u < u_1$ et où $p(u)$ à la valeur $p(\infty)$ pour $u > u_2$. Tout d'abord examinons le moment $p_2(u)$. Pour $u > u_2 + 2a$, il vient :

$$p_2(u) = p(\infty) - \frac{5}{3}\frac{m}{a}p(\infty) - 2m\int_{u_1}^{u_2} p(u_0)\frac{du_0}{(u-u_0)^2} - 2mp(\infty)\int_{u_2}^{u-2a}\frac{du_0}{(u-u_0)^2}. \quad (25)$$

On obtient lorsque u tend vers l'infini un développement asymptotique de la forme :

$$p_2(u) = p(\infty)\left[1 - \frac{8}{3}\frac{m}{a}\right] + \frac{2mp(\infty)}{(u-u_2)} - \left(2m\int_{u_1}^{u_2} p(u_0)du_0\right)\frac{1}{u^2} + \dots . \quad (26)$$

Dans l'expression (13) de la composante $\phi_2(u, r)$, le développement asymptotique du terme sous forme intégrale coïncide avec celui donné par Papapetrou [5], c'est-à-dire avec nos notations :

$$\frac{1}{2}\frac{mp(\infty)}{r^4} - \frac{mp(\infty)}{r^3(u - u_2 + 2r)} + \left(\frac{m}{r^3}\int_{u_1}^{u_2} p(u_0)du_0\right)\frac{1}{(u + 2r)^2} + \dots \quad (27)$$

Le travail cité ne contenait pas d'autres termes pour $\phi_2(u, r)$ puisqu'il y était supposé que le montant dipolaire, noté $p_2(u)$ ici, prenait la valeur $p(\infty)$ pour $u \geqslant u_2$. Cette hypothèse n'est pas admissible si, comme nous le faisons, on tient compte explicitement de la source.

Reportons dans (13) les expressions (26) et (27), nous constatons que si : $p(\infty) \neq 0$, alors $\phi_2(u, r)$ tend vers la valeur statique comme $\frac{1}{u^2}$; si : $p(\infty) = 0$ et $\int_{u_1}^{u_2} p(u_0)du_0 \neq 0$, alors $\phi_2(u, r)$ tend vers la valeur statique comme $\frac{1}{u^3}$; et ainsi de suite.

Il s'avère donc que la différence avec le travail de Papapetrou [5] est importante.

4.2. Énergie rayonnée

L'énergie rayonnée à l'infini peut aisément se calculer à l'ordre $\frac{m}{a}$, en fonction du moment dipolaire de la source, à l'aide de l'expression (22) de $\ddot{p}_2(u)$. Celle-ci a en effet pour expression :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\ddot{p}_2(u)]^2 du . \quad (28)$$

Un cas simple se présente si le support de la fonction p est contenu dans l'intervalle 0 à $\frac{1}{K_1}a$, soit 0 à $2a$ à l'ordre $\frac{m}{a}$. D'ailleurs dans le paragraphe suivant, ce cas sera examiné avec la métrique exacte (1) à l'aide des lois de conservation.

5. LOIS DE CONSERVATION

La métrique (1) admet un vecteur de Killing dont les composantes dans le système de coordonnées (u, r, θ, φ) sont :

$$\xi^\alpha : (1, 0, 0, 0) . \quad (30)$$

Le tenseur impulsion-énergie du champ électromagnétique conduit, en dehors de la source électromagnétique, à la loi de conservation :

$$\nabla_\alpha(T^\alpha_\beta \xi^\beta) = 0 \qquad \text{soit} \qquad \partial_\alpha(\sqrt{-g}\, T^\alpha_\beta \xi^\beta) = 0 \,. \tag{31}$$

Nous allons appliquer le théorème de Gauss de la façon suivante. Considérons le volume dont le bord est constitué de deux cônes isotropes σ_1 et σ^1 à $u = u_1$ et $u = u^1$, et de deux hypersurfaces Σ_1 et Σ_2 à $r = r_1$ et $r = r_2$.

Considérons un moment dipolaire $p(u)$ nul pour $u < u_1$ et $u > u_2$. Alors nous sommes amenés à affirmer sans démonstration que le champ tend asymptotiquement vers zéro dans le temps retardé de telle sorte que l'intégrale considérée sur le cône σ^1 tende vers zéro lorsque u^1 tend vers l'infini. Ceci est clairement vrai à l'ordre $\frac{m}{a}$ que nous avons étudié précédemment.

Sous cette condition, il vient :

$$\int_{\Sigma_1} \sqrt{-g}\, T^r_\beta \xi^\beta du d\theta d\varphi = \int_{\Sigma_2} \sqrt{-g}\, T^r_\beta \xi^\beta du d\theta d\varphi \,. \tag{32}$$

L'expression à intégrer dans (32) est :

$$T^r_\beta \xi^\beta = \begin{cases} -\, 8K_1^4\Phi_0^2 + 2\Phi_2^2 & -\,2K_0K_1 \leqslant r < a \\ -\,\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{2m}{r}\right)\Phi_0^2 + 2\Phi_2^2 & r \geqslant a \,. \end{cases} \tag{33}$$

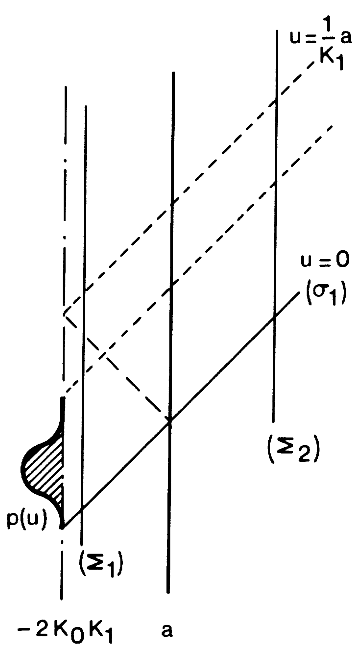

FIG. 1.

Maintenant si l'on fait l'hypothèse que le support de la fonction p est contenu dans l'intervalle 0 à $\frac{1}{K_1}a$, alors l'intégrale (32) sur Σ_1 se sépare en deux parties distinctes comme le montre clairement la figure 1.

Il est facile de voir que la partie de l'intégrale sur le champ électromagnétique diffusé est nulle.

Pour la partie de l'intégrale sur le champ électromagnétique irrégulier il faut intégrer :

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}T^r_\beta\xi^\beta &= [\ddot{p}(u)]^2\frac{1}{\bar{r}^2} + [\dot{p}(u)]^2\frac{4K_1^2}{\bar{r}^4}\\ &\quad + 2\ddot{p}(u)\dot{p}(u)\frac{2K_1}{\bar{r}^3} + 2\ddot{p}(u)p(u)\frac{2K_1^2}{\bar{r}^4} + 2\dot{p}(u)p(u)\frac{4K_1^3}{\bar{r}^5}.\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Compte tenu de l'hypothèse sur le support de p seul le terme en $[\ddot{p}(u)]^2$ contribue à l'intégrale.

L'intégrale sur Σ_2 donne l'énergie rayonnée à l'infini. Ainsi à partir de (32), il vient :

$$\int_0^\infty [\ddot{p}_2(u)]^2 du = \int_0^{\frac{1}{K_1}a} [\ddot{p}(u)]^2 du \tag{35}$$

c'est-à-dire en fonction du moment dipolaire de la source :

$$\int_0^\infty [\ddot{p}_2(u)]^2 du = 2K_1 \int_0^{2a} [\ddot{D}(\bar{u})]^2 d\bar{u}\,. \tag{36}$$

6. CONCLUSION

De façon à obtenir un exemple d'influence d'un corps massif sur le rayonnement électromagnétique d'un courant, nous avons examiné un cas particulier. C'est celui d'un dipôle électrique donné, situé au centre d'une enveloppe sphérique. Nous avons su expliciter à l'ordre $\frac{m}{a}$ le champ électromagnétique engendré. En particulier l'énergie rayonnée à l'infini peut être calculée. En outre nous précisons comment le champ statique s'établit dans l'hypothèse où le dipôle électrique devient statique.

Le cas où le moment reprend sa valeur initiale (zéro pour simplifier) avant que le rayonnement diffusé par la métrique extérieure de Schwarzchild retourne au centre, a été examiné sans l'hypothèse de champ gravitationnel globalement faible. Sous la condition que l'on sache que le champ tend asymptotiquement vers zéro, nous avons obtenu l'expression de l'énergie sortante à l'infini. Il est important de remarquer que lorsque $\frac{2m}{a} \to 1$ l'énergie rayonnée tend vers zéro.

REMERCIEMENT

L'auteur remercie Monsieur A. Papapetrou pour les conseils donnés pendant l'élaboration de ce travail.

RÉFÉRENCES

[1] J. BARDEEN et W. PRESS, Radiation Field in the Schwarzschild Back ground. *J. Math. Phys.*, t. **14**, 1973, p. 7.
[2] W. COUCH et W. HALLIDY, Radiation Scattering in Einstein-Maxwell Theory. *J. Math. Phys.*, t. **12**, 1971, p. 2170.
[3] B. LINET, Dipole Field Solution of Maxwell's Equations in the Schwarzschild Metric. *J. Phys. A : Math. Gen.*, t. **8**, 1975, p. 328.
[4] E. NEWMAN et R. PENROSE, An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficient. *J. Math. Phys.*, t. **3**, 1962, p. 566.
[5] A. PAPAPETROU, Dipole Electromagnetic Radiation in a Schwarzschild Space. The Wavetail to Order $\frac{m}{r}$. *J. Phys. A : Math. Gen.*, t. **8**, 1975, p. 313.
[6] M. ROTENBERG, Electromagnetic Wave tails in the Second Approximation to the Einstein-Maxwell Equations. *J. Phys. A : Math. Gen.*, t. **4**, 1971, p. 617.
[7] R. WALD, Electromagnetic Fields and Massive Bodies. *Phys. Rev.*, t. **D 6**, 1972, p. 1476.

(Manuscrit reçu le 9 décembre 1975)