

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

JEAN-GUY DUBOIS

JEAN-PAUL DUFOUR

OLEG STANEK

La théorie des catastrophes. IV. Déploiements universels et leurs catastrophes

Annales de l'I. H. P., section A, tome 24, n° 3 (1976), p. 261-300

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1976__24_3_261_0

© Gauthier-Villars, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

La théorie des catastrophes. IV. Déploiements universels et leurs catastrophes (1)

par

Jean-Guy DUBOIS, Jean-Paul DUFOUR (*) et Oleg STANEK

Département des Sciences Pures,
Université du Québec, Rimouski, P. Québec, Canada
(*) Institut de Mathématiques, Université des Sciences
et Techniques du Languedoc, Montpellier, France

RÉSUMÉ. — Nous démontrons que les déploiements infinitésimalement versels de même dimension d'une fonction sont équivalents. Comme corollaire, nous en déduisons l'équivalence entre la versalité et la versalité infinitésimale. Nous montrons que les ensembles catastrophes sous diverses conventions ne dépendent, à un difféomorphisme local près, que de la classe d'équivalence du multigerme de cette fonction au voisinage de ses points critiques. Ce qui fournit les bases d'une classification des ensembles catastrophes, en particulier des ensembles catastrophes de conflit.

SUMMARY. — We demonstrate that infinitesimal versal unfoldings of equal dimension of a function are equivalent. As a corollary, we infer the equivalence of versality and infinitesimal versality. We show that catastrophe sets under various conventions depend only, up to local diffeomorphisms, on the multigerme equivalence class of this function at the neighborhood of its critical points. This provides the bases for a classification of catastrophe sets, particularly for conflict catastrophe sets.

(1) Travail partiellement subventionné par le Conseil National de Recherches du Canada.

INTRODUCTION

Selon la théorie des catastrophes de R. Thom [1], le modèle des dynamiques gradientes est donné par un champ de fonctions, dites fonctions potentielles, $u \mapsto V_u$ où u parcourt un espace à k paramètres, l'espace de contrôle, et V_u est pour tout u une fonction à valeurs réelles de n variables, les variables d'état. Guidé par l'idée que seuls les phénomènes stables, en ce sens qu'ils restent qualitativement les mêmes malgré une légère variation des données, sont objets de science, on est amené à étudier les champs de fonctions potentielles stables.

Une notion de stabilité convenant à ce modèle, bien que peut-être un peu trop forte, est celle introduite par Latour [2] : un champ $V : u \mapsto V_u$ est stable si, pour tout champ $V' : u \mapsto V'_u$ assez voisin, il existe un difféomorphisme p de l'espace de contrôle tel que V'_u est, pour tout u , obtenu à partir de $V_{p(u)}$ par des changements de coordonnées. Le difféomorphisme p échange les ensembles catastrophes, obtenus sous les conventions habituelles, de V et de V' .

Une autre notion intéressante pour cette étude est celle de déploiement (uni)versel introduite par Thom [1] [3] [4] : elle donne des champs canoniques locaux (définis au voisinage de u_0) à partir desquels on peut induire localement tout autre champ $u \mapsto V_u$. Ces champs (ou déploiements versels) sont caractérisés algébriquement par une condition de « versalité infinitésimale ». Or il se trouve que la caractérisation algébrique de la stabilité donnée dans [2], la stabilité infinitésimale, est équivalente à la versalité infinitésimale en chaque point u_0 de l'espace de contrôle (modulo certaines hypothèses de compacité ou de propreté). Les champs stables sont donc versels en chaque point.

La propriété fondamentale des déploiements versels d'une fonction f est qu'ils sont déterminés, à équivalence près, par la classe d'équivalence de f . Même plus, leurs ensembles catastrophes sont localement déterminés, à difféomorphismes près, par la classe d'équivalence du germe de f au voisinage de ses points critiques. Cette propriété permet de déduire, d'une classification de ces germes, une classification des ensembles catastrophes.

Dans une étude de synthèse, Wassermann [5] a explicité ces idées dans le cas local où l'on se restreint à ne considérer que les germes de V_u au point $0 \in \mathbb{R}^n$. Duistermaat [6] (sect. 2) a explicité la caractérisation de la stabilité des déploiements dans le cas global, mais en se restreignant au cas (le d - cas) où l'on ne permet que des translations pour les changements de coordonnées au but des fonctions V_u .

Dans ce travail, nous nous proposons de justifier les propriétés des déploiements versels dans le cas global et de donner les outils pour une classification des ensembles catastrophes correspondant à ces déploiements.

Si les catastrophes de bifurcation peuvent s'étudier en se restreignant au cas local, il n'en va pas de même, par exemple, pour les catastrophes de conflit obtenues sous la convention de Maxwell. Une étude plus globale s'impose alors, au moins une étude tenant compte des multigerms (germes en plusieurs points).

Dans la première section de ce travail, nous nous limitons à étudier les fonctions de codimension finie ; nous verrons par la suite que ce sont les fonctions qui admettent des déploiements versels. Nous énonçons plusieurs

de ces fonctions et la construction de déploiements universels. Nous précisons ainsi les résultats de Sergeraert [7] (chap. 7).

La deuxième section est entièrement consacrée à la caractérisation algébrique des déploiements versels. Le théorème central de celle-ci est le théorème I qui affirme que deux déploiements infinitésimalement versels de même dimension d'une fonction sont équivalents. Le théorème II prouve que la versalité est équivalente à la versalité infinitésimale et fournit ainsi la caractérisation algébrique cherchée. On en déduit sans peine le théorème III qui dit qu'un déploiement versel d'une fonction ne dépend, à équivalence près, que de la classe d'équivalence de cette fonction.

La troisième section définit les ensembles catastrophes sous les conventions du retard parfait et de Maxwell. Les théorèmes IV et V montrent que les ensembles catastrophes d'un déploiement versel de f ne dépendent localement, à un difféomorphisme près, que du multigerme de f au voisinage de ses points critiques. Nous donnons finalement une méthode de classification des multigerms et des ensembles catastrophes correspondants.

Nous nous astreignons dans ce texte, afin d'utiliser un minimum de langage, à ne travailler que dans les espaces euclidiens \mathbb{R}^n . Les démonstrations données se généralisent sans peine aux déploiements de fonctions d'une variété dans une autre. Cependant, comme nous ne posons pas d'hypothèses de compacité sur l'espace des variables d'état, nous sommes amenés à quelques restrictions. Ainsi, sauf mention du contraire, la fonction f que nous utiliserons par la suite sera une fonction définie sur \mathbb{R}^n et à valeurs dans \mathbb{R} ayant ses points critiques intérieurs à un compact (noté M en général). Dans la troisième section, nous imposerons de plus une condition de propreté pour les déploiements de f .

Nous traiterons en parallèle le cas des déploiements versels, où l'on travaille modulo des changements de variables quelconques à la source et au but, et le cas des déploiements d -versels (versels à droite) où l'on ne permet que des translations au but.

Au cours de cet article, toutes les fonctions considérées seront de classe C^∞ , à moins que cela n'ait point de sens. Si $F : A \times B \rightarrow C$ est une fonction qui à $(a, b) \in A \times B$ associe $F(a, b)$, on notera F_a (respectivement F_b) la fonction de B dans C (respectivement de A dans C) telle que

$F_a(b) = F(a, b)$ (respectivement $F_b(a) = F(a, b)$). Si A et B sont des variétés différentiables, $C(A)$ désignera l'espace des applications (de classe C^∞) de A dans \mathbb{R} , $C(A, B)$ l'espace des applications de A dans B et $\text{Diff } A$ l'espace des difféomorphismes de A .

1. CODIMENSION D'UNE FONCTION

L'ensemble $C(\mathbb{R}^n)$ admet une structure naturelle d'algèbre unitaire commutative induite par celle de \mathbb{R} . Étant donnée $f \in C(\mathbb{R}^n)$, on lui associe l'idéal Jf de $C(\mathbb{R}^n)$, dit « idéal jacobien », engendré par les n fonctions $\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n$; Jf est l'ensemble des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} de la forme

$$x \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Soit $f^* : C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$ l'homomorphisme qui associe à $\eta \in C(\mathbb{R})$ la fonction $\eta \circ f$; on notera I_f l'espace image de f^* . Désignant par 1 la fonction constante égale à 1 de $C(\mathbb{R}^n)$, on dénotera par $[1]$ l'espace des fonctions constantes (engendré par 1).

DÉFINITION 1.1. — On appelle *codimension* de f , et on la note $c(f)$, la dimension du \mathbb{R} -espace quotient $C(\mathbb{R}^n)/(Jf + I_f)$; $c(f) = \dim_{\mathbb{R}} C(\mathbb{R}^n)/(Jf + I_f)$.

DÉFINITION 1.1'. — La *d-codimension* de f est donnée par

$$c_d(f) = \dim_{\mathbb{R}} C(\mathbb{R}^n)/(Jf + [1]).$$

Si q désigne la fonction constante de $C(\mathbb{R}^n)$ égale à q , on peut écrire $q = \tilde{q} \circ f$, où \tilde{q} est la fonction constante égale à q de $C(\mathbb{R})$. Ainsi $q \in I_f$ et $Jf + [1] \subset Jf + I_f$: donc $c(f) \leq c_d(f)$.

DÉFINITION 1.2. — Si g et h appartiennent à $C(A, B)$ et S est un sous-ensemble de A , on dit que g et h ont même germe (de classe C^∞) en S si g et h coïncident sur un voisinage de S . On définit ainsi une relation d'équivalence sur $C(A, B)$ dont les classes sont appelées les *germes* en S .

Le germe en S de $f \in C(A, B)$ sera noté f_S (on dira parfois, par abus de langage, le « germe f ») et l'ensemble de ceux-ci, $C_S(A, B)$. L'ensemble $C_S(A)$ possède la structure d'algèbre induite de celle de $C(A)$ lorsque l'on passe au quotient. On désignera par $\mathcal{M}_S C(A)$ (ou \mathcal{M}_S lorsque aucune confusion n'est à craindre) l'idéal de $C_S(A)$ formé des germes des fonctions nulles sur S . On notera aussi \mathcal{M}_S^k l'idéal engendré par les produits de k germes de \mathcal{M}_S .

Nous verrons que la codimension d'une fonction ne dépend que de son comportement au voisinage de ses points critiques. Par la suite S désignera

l'ensemble des points critiques de f . Si S est fini, f admet un nombre fini de valeurs critiques b_1, b_2, \dots, b_μ et S admet la partition

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_\mu,$$

où les points de S_j sont ceux qui correspondent à la valeur b_j .

LEMME 1.1. — Lorsque S est fini, g appartient à $Jf + If$ si et seulement si le germe g_{S_j} de g en S_j appartient à $(Jf + If)_{S_j}$, pour tout $j = 1, \dots, \mu$.

Démonstration. — La condition nécessaire est évidente, démontrons la condition suffisante. Supposons que pour tout $j = 1, \dots, \mu$ il existe des fonctions $\alpha_j^1, \dots, \alpha_j^n$ de $C(\mathbb{R}^n)$ et η_j de $C(\mathbb{R})$ telles que

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \alpha_j^i(x) + \eta_j \circ f(x)$$

pour tout x dans un voisinage U_j de S_j . Quitte à restreindre les U_j , on peut supposer que $U_j \cap U_k = \emptyset$ et que $f(U_j) \cap f(U_k) = \emptyset$ pour $j \neq k$. En modifiant les fonctions α_j^i hors des U_j , on peut les « recoller » de façon à construire des fonctions $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ telles que $\alpha^i(x) = \alpha_j^i(x)$ si $x \in U_j$, $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, \mu$. Ceci peut se faire en annulant les α_j^i hors de U_j par multiplication avec des fonctions « en cloche », i. e. égales à 1 sur U_j et à 0 hors d'un compact contenant U_j . De même, en modifiant les η_j hors de $f(U_j)$, on peut les recoller et obtenir une fonction $\eta \in C(\mathbb{R})$ telle que $\eta(y) = \eta_j(y)$ si $y \in f(U_j)$. Posons alors

$$h(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \alpha^i(x) + \eta \circ f(x).$$

Il est clair que $h \in Jf + If$ et que $g(x) = h(x)$ pour tout x dans un voisinage U de S , où $U = U_1 \cup \dots \cup U_\mu$.

Choisissons un voisinage compact V de S tel que $V \subset U$. Pour tout x dans le complémentaire CV dans \mathbb{R}^n de V , il existe un voisinage ouvert $U(x)$ de x , inclus dans CV , sur lequel l'une au moins des fonctions $\partial f / \partial x_j$ est non nulle. Considérant un recouvrement de \mathbb{R}^n par de tels voisinages et par U , soit $(\phi_v)_{v \in H}$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. Notons $(\phi_v)_{v \in K}$, $K \subset H$, les fonctions dont le support est dans U . Pour $v \in H - K$, le support est dans un $U(x)$ et on peut écrire :

$$\phi_v = \frac{\partial f}{\partial x_j} h_v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h_v^i.$$

Comme

$$\sum_{v \in H} \phi_v = 1,$$

on a

$$g - h = \sum_{v \in H} \phi_v(g - h) = \sum_{v \in H-K} \phi_v(g - h),$$

car la fonction $g - h$ est nulle sur U . On arrive alors à

$$g - h = \sum_{v \in H-K} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_v^i(g - h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} a^i$$

qui est un élément de Jf . Rapprochant ceci du fait que $h \in Jf + If$, on voit que $g \in Jf + If$.

LEMME 1.1'. — Lorsque $S = \{a_1, \dots, a_s\}$, alors $g \in Jf$ si et seulement si les germes de g en a_u vérifient $g_{a_u} \in Jf_{a_u}$ pour tout $u = 1, \dots, s$.

La démonstration est analogue à celle du lemme précédent.

LEMME 1.2. — Supposons que S soit fini et soient f_1, \dots, f_c des fonctions de $C(\mathbb{R}^n)$. Alors les classes des fonctions f_1, \dots, f_c modulo $Jf + If$ forment une base de $C(\mathbb{R}^n)/(Jf + If)$ si et seulement si les classes des germes $(f_1)_S, \dots, (f_c)_S$ forment une base de $C_S(\mathbb{R}^n)/(Jf + If)_S$.

Démonstration. — Si les classes de f_1, \dots, f_c forment une base de $C(\mathbb{R}^n)/(Jf + If)$, il est clair que les classes de $(f_1)_S, \dots, (f_c)_S$ engendrent $C_S(\mathbb{R}^n)/(Jf + If)_S$. Pour démontrer qu'elles forment un système libre,

supposons que la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^c \lambda_i (f_i)_S$ soit dans $(Jf + If)_S$. La même technique de démonstration que celle utilisée lors du lemme 1.1

permet de montrer que $\sum_{i=1}^c \lambda_i f_i$ est dans $Jf + If$. On peut en conclure que

la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^c \lambda_i (f_i)_S$ est nulle, ce qui démontre la condition nécessaire.

Réciproquement, supposons que les classes de $(f_1)_S, \dots, (f_c)_S$ forment une base de $C_S(\mathbb{R}^n)/(Jf + If)_S$ et soit g une fonction de $C(\mathbb{R}^n)$. On a

$$g_S = \sum_{i=1}^c \lambda^i (f_i)_S + h_S,$$

où $h \in Jf + If$: alors la fonction $g - \sum_{i=1}^c \lambda^i f_i - h$ est nulle sur un voisinage de S . Comme lors de la démonstration du lemme 1.1, cela suffit

pour qu'elle soit dans Jf : alors $g - \sum_{i=1}^c \lambda^i f_i$ est dans $Jf + If$ et cela prouve

que les classes des $f_i, i = 1, \dots, c$, engendrent $C(\mathbb{R}^n)/(Jf + If)$. Par ailleurs, si les classes de ces fonctions formaient un système lié, il en serait de même pour les classes des $(f_i)_S$ dans $C_S(\mathbb{R}^n)/(Jf + If)_S$. Ceci suffit à prouver que les classes des f_i forment une base de $C(\mathbb{R}^n)/(Jf + If)$, et achève la démonstration du lemme.

Ce lemme reste inchangé lorsqu'on remplace $Jf + If$ par $Jf + [1]$.

Nous nous plaçons dans le cas où S est fini et admet la partition introduite plus haut.

LEMME 1.3. — Supposons que pour chaque $j, j = 1, \dots, \mu$, il existe une base $(\alpha_j^1, \dots, \alpha_j^i)$ finie de $C_{S_j}(\mathbb{R}^n)/(Jf + If)_{S_j}$. Choisissons pour chaque α_j^i un représentant $f_j^i \in C(\mathbb{R}^n)$ qui soit nul sur un voisinage de $S - S_j$. Alors la famille de tous ces $f_j^i, j = 1, \dots, \mu, i = 1, \dots, i_j$, forme une base de $C(\mathbb{R}^n)/(Jf + If)$.

Démonstration. — L'application $f_S \mapsto (f_{S_1}, \dots, f_{S_\mu})$ est un isomorphisme de $C_S(\mathbb{R}^n)$ sur $C_{S_1}(\mathbb{R}^n) \times \dots \times C_{S_\mu}(\mathbb{R}^n)$ qui envoie $(Jf + If)_S$ sur $(Jf + If)_{S_1} \times \dots \times (Jf + If)_{S_\mu}$. Passant au quotient, on obtient donc un isomorphisme de $C_S(\mathbb{R}^n)/(Jf + If)_S$ sur la somme directe

$$\bigoplus_{i=1}^{\mu} C_{S_i}(\mathbb{R}^n)/(Jf + If)_{S_i} .$$

Alors on obtient une base de $C_S(\mathbb{R}^n)/(Jf + If)_S$ en prenant une « somme directe » de bases des $C_{S_i}(\mathbb{R}^n)/(Jf + If)_{S_i}$. Enfin, le lemme 1.2 démontre notre résultat.

LEMME 1.4. — Soient a_1, \dots, a_s les points critiques de f . Supposons que pour chaque $j, j = 1, \dots, s$, il existe une base finie $(\alpha_j^1, \dots, \alpha_j^{i_j})$ de $C_{a_j}(\mathbb{R}^n)/Jf_{a_j}$ et choisissons pour chaque α_j^i un représentant $f_j^i \in C(\mathbb{R}^n)$ qui soit nul sur un voisinage de $S - \{a_j\}$. Alors la famille de tous ces f_j^i forme une base de $C(\mathbb{R}^n)/Jf$.

Démonstration. — On remarque que $f_S \mapsto (f_{a_1}, \dots, f_{a_s})$ induit un isomorphisme entre $C_S(\mathbb{R}^n)/Jf_S$ et $\bigoplus_{j=1}^s C_{a_j}(\mathbb{R}^n)/Jf_{a_j}$. Le résultat en découle en utilisant la même méthode que pour le lemme précédent.

Les résultats de ci-haut nous amènent à penser que l'étude de la codimension d'une fonction se réduit à une étude locale. Pour cela, nous introduisons les définitions suivantes.

DÉFINITION 1.3. — Soit a un point critique de f .

(a) On pose $c(f, a) = \dim_{\mathbb{R}} C_a(\mathbb{R}^n)/(Jf + If)_a$.

- (b) $c_d(f, a) = \dim_{\mathbb{R}} C_a(\mathbb{R}^n)/Jf_a$.
 (c) $d(f, a)$ le plus petit entier r tel que $(f - f(a))_a^r \in Jf_a$.
 (d) $d(f, b)$ la plus grande valeur de $d(f, a)$, où a parcourt l'ensemble des points critiques de valeur b .

LEMME 1.5 (Lemme de Nakayama). — Soient R un anneau commutatif unitaire et I un idéal de R tel que $1 + z$ soit inversible pour tout $z \in I$. Soient A et B deux sous-modules d'un certain R -module M tels que A soit de type fini sur R . Alors l'hypothèse

$$B + IA \supset A \tag{1.1}$$

entraîne

$$B \supset A, \tag{1.2}$$

et si on a l'égalité dans (1.1) on l'a dans (1.2).

LEMME 1.6. — Soient A un module de type fini sur $C_0(\mathbb{R}^n)$ et B un sous-module de A tel que

$$\dim_{\mathbb{R}} A/(B + \mathcal{M}_0^{k+1}A) \leq k. \tag{1.3}$$

Alors

$$\mathcal{M}_0^k A \subset B. \tag{1.4}$$

Un raisonnement élémentaire montre que \mathcal{M}_0 est l'idéal de $C_0(\mathbb{R}^n)$ engendré par les germes des fonctions $x_i : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$, donc \mathcal{M}_0^k est l'idéal engendré par les germes des monômes de degré k des variables x_1, \dots, x_n .

On trouvera les démonstrations de ces deux lemmes dans [5] (lemmes 1.13 et 1.14).

LEMME 1.7. — Si f est de codimension finie, alors pour chaque point critique a les nombres $c(f, a)$, $c_d(f, a)$ et $d(f, a)$ sont finis et vérifient

$$c(f, a) = c_d(f, a) - d(f, a).$$

Démonstration. — Supposons $c = c(f)$ fini et soit a un point critique de f . Si f_1, \dots, f_c forment un système de générateurs de $C(\mathbb{R}^n)$ modulo $Jf + If, (f_1)_a, \dots, (f_c)_a$ forment un système de générateurs de $C_a(\mathbb{R}^n)$ modulo $(Jf + If)_a$. Il en résulte que $c(f, a) \leq c$.

Au voisinage de a , tout élément de If s'écrit

$$\eta \circ f(x) = \lambda_0 + \lambda_1(f(x) - f(a)) + \dots + \lambda_q(f(x) - f(a))^q + (f(x) - f(a))^{q+1}h(x),$$

où $q = c(f, a)$, en utilisant une formule de Taylor. Considérons l'idéal \mathcal{M}_a^2 de $C_a(\mathbb{R}^n)$, où $a = (a_1, \dots, a_n)$: il contient tous les germes de monômes de degré 2 de la forme $\lambda(x_i - a_i)(x_j - a_j)$. Comme a est critique, on peut écrire

$$f(x) - f(a) = \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} \lambda_{ij}(x) (x_i - a_i)(x_j - a_j)$$

en utilisant une formule de Taylor. Donc $(f - f(a))_a \in \mathcal{M}_a^2$ et on peut écrire

$$Jf_a + If_a \subset Jf'_a + [1_a, (f - f(a))_a, \dots, (f - f(a))_a^q] + \mathcal{M}_a^{2q+2}$$

où $[1_a, (f - f(a))_a, \dots, (f - f(a))_a^q]$ désigne le \mathbb{R} -sous-espace de $C_a(\mathbb{R}^n)$ engendré par les germes en a de la fonction constante égale à 1 et des fonctions $(f - f(a))^p$, $1 \leq p \leq q$. Soit alors $(g_1)_a, \dots, (g_q)_a$ une base de $C_a(\mathbb{R}^n)$ modulo $Jf_a + If_a$; $(g_1)_a, \dots, (g_q)_a, 1_a, (f - f(a))_a, \dots, (f - f(a))_a^q$ forment ainsi un système de générateurs de $C_a(\mathbb{R}^n)$ modulo $Jf_a + \mathcal{M}_a^{2q+2}$. On a donc

$$\dim_{\mathbb{R}} C_a(\mathbb{R}^n)/(Jf_a + \mathcal{M}_a^{2q+2}) \leq 2q + 1;$$

et alors, grâce au lemme 1.6, on peut écrire

$$\mathcal{M}_a^{2q+2} \subset Jf_a. \tag{1.5}$$

On en déduit que $d(f, a)$ est fini et que

$$Jf_a + If_a = Jf'_a + [1_a, (f - f(a))_a, \dots, (f - f(a))_a^q];$$

d'où le résultat escompté.

DÉFINITION 1.4. — Si f et g sont dans $C(A, B)$, nous dirons que f est *équivalente* à g , et noterons $f \sim g$, s'il existe $h \in \text{Diff } A$ et $k \in \text{Diff } B$ tels que $g \circ h = k \circ f$.

DÉFINITION 1.4'. — Nous dirons que f est *d-équivalente* à g , noté $f \underset{d}{\sim} g$, si $f \sim g$ avec $k = \text{Id}$.

DÉFINITION 1.5. — Si $M \subset A$ et $N \subset A$, nous dirons que f est, au voisinage de M , *localement équivalente* à g au voisinage de N s'il existe des difféomorphismes h d'un voisinage de M sur un voisinage de N et k d'un voisinage de $f(M)$ sur un voisinage de $g(N)$ tels que $g \circ h = k \circ f$. On notera $f, M \sim g, N$.

DÉFINITION 1.5'. — Nous dirons que f est, au voisinage de M , *localement d-équivalente* à g au voisinage de N si $f, M \underset{d}{\sim} g, N$ avec $k = \text{Id}$. On notera $f, M \underset{d}{\sim} g, N$.

DÉFINITION 1.6. — Nous dirons que la fonction f est *k-déterminée* en $a \in \mathbb{R}^n$ si $f, a \sim f^{(k)}, a$, où $f^{(k)}$ désigne le développement de Taylor de f en a tronqué à l'ordre k .

LEMME 1.8 (Mather). — Si $\mathcal{M}_a^k \subset \mathcal{M}_a Jf_a + \mathcal{M}_a^{k+1}$, alors f est *k-déterminée* en a .

Pour la démonstration, nous référons à [5] (théorème 2.6).

COROLLAIRE 1.1. — Si f est de codimension finie c , alors f est au moins $2(c + 1)$ -déterminée en chaque point critique.

Démonstration. — Ce corollaire découle de la formule (1.5), du fait que $q \leq c$ et du lemme 1.8.

REMARQUE 1.1. — Si f est de codimension finie, on a $\mathcal{M}_a^N \subset Jf_a$, pour un certain N , en chaque point critique. Cela permet de travailler modulo \mathcal{M}_a^N lorsque l'on cherche une base de $C_a(\mathbb{R}^n)/Jf_a$ ou de $C_a(\mathbb{R}^n)/(Jf + If)_a$. Ce qui veut dire en fait qu'il est suffisant de chercher cette base parmi les germes de polynômes de degré $< N$.

LEMME 1.9. — Si f est de codimension finie, ses points critiques sont isolés et donc en nombre fini.

Démonstration. — Remarquons d'abord que si (u_n) et (v_n) sont deux suites disjointes de points tous distincts de \mathbb{R}^n qui convergent vers a , il existe une fonction $g \in C(\mathbb{R}^n)$ telle que $g(u_n) = 0$ et $g(v_n) \neq 0$ pour tout n . Pour le voir, on construit par récurrence une famille de boules disjointes B_n de centres v_n , de rayons strictement décroissants r_n et qui ne rencontrent pas $\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$. On prend alors

$$g(x) = \sum_n e^{-1/r_n} \phi\left(\frac{x - v_n}{r_n}\right),$$

où ϕ est une fonction « en cloche » appartenant à $C(\mathbb{R}^n)$, nulle hors de la boule unité et égale à 1 sur un voisinage de 0.

Supposons maintenant que le point critique a de f ne soit pas isolé, c'est-à-dire qu'il existe une suite (a_n) de points critiques de f , tous distincts, qui converge vers a . On extrait alors de (a_n) une famille dénombrable de sous-suites disjointes que l'on note $(a_n^p)_{n \in \mathbb{N}}$, $p \in \mathbb{N}$. Ceci est toujours possible à l'aide d'une bijection de \mathbb{Q} sur \mathbb{N} . A chacune de ces sous-suites, on associe une fonction $f_p \in C(\mathbb{R}^n)$ construite de façon que $f_p(a_n^q) = 0$ si $p \neq q$. Cette construction est possible grâce à la remarque du début.

Il reste à voir que les germes en a des fonctions f_p sont linéairement indépendants modulo Jf_a . Soit

$$g = \sum_{i=1}^r \lambda_i f_{p_i}$$

une combinaison linéaire de ces fonctions et supposons $g \in Jf_a$. On a alors

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h^i(x)$$

sur un voisinage de a . En particulier, $g(a_n^p) = 0$ pour tout n assez grand et tout p . Or $g(a_n^p) = \lambda_i f_{p_i}(a_n^p)$, donc $\lambda_i = 0$ pour tout i . Ceci prouve que la famille des classes modulo Jf_a des $(f_p)_a$ est libre, en contradiction avec le fait que $C_a(\mathbb{R}^n)/Jf_a$ est de dimension finie selon le lemme 1.7.

LEMME 1.10 (Sergeraert). — La fonction f est de codimension finie si et seulement si elle admet un nombre fini de points critiques a pour lesquels les $c_d(f, a)$ et $d(f, a)$ sont finis. De plus, on a alors

$$c(f) = \sum_{a \in S} c_d(f, a) - \sum_{b \in f(S)} d(f, b).$$

Démonstration. — Les lemmes précédents prouvent que si f est de codimension finie, elle n'a qu'un nombre fini de points critiques pour lesquels $c_d(f, a)$ et $d(f, a)$ sont finis. Réciproquement, plaçons-nous dans ces conditions. Du lemme 1.4, on a

$$\dim_{\mathbb{R}} C(\mathbb{R}^n)/Jf = \sum_{a_i \in S} \dim_{\mathbb{R}} C_{a_i}(\mathbb{R}^n)/Jf_{a_i} = \sum_{a_i \in S} c_d(f, a_i),$$

qui est finie selon le lemme 1.7. Comme

$$c(f) = \dim_{\mathbb{R}} C(\mathbb{R}^n)/(Jf + If) \leq \dim_{\mathbb{R}} C(\mathbb{R}^n)/Jf,$$

la première partie du lemme est démontrée.

Pour la deuxième partie, compte tenu du lemme 1.3, il suffit de démontrer que

$$\dim_{\mathbb{R}} C_S(\mathbb{R}^n)/(Jf + If)_S = \sum_{a \in S} c_d(f, a) - d(f, b)$$

dans le cas où $f(S) = \{b\}$. Par définition de $d = d(f, b)$, $(f - b)_S^d \in Jf_S$, mais $(f - b)_S^{d-1} \notin Jf_S$. Si $g \in If$, on a

$$g(x) = \eta \circ f(x) = \lambda_0 + \lambda_1(f(x) - b) + \dots + \lambda_{d-1}(f(x) - b)^{d-1} + (f(x) - b)^d h(x);$$

donc

$$g_S = \lambda_0 + \lambda_1(f - b)_S + \dots + \lambda_{d-1}(f - b)_S^{d-1}$$

modulo Jf_S . Alors

$$(Jf + If)_S = Jf_S \oplus [1_S, (f - b)_S, \dots, (f - b)_S^{d-1}] \tag{1.6}$$

et l'on arrive à

$$\dim_{\mathbb{R}} C_S(\mathbb{R}^n)/Jf_S = \sum_{a \in S} c_d(f, a) = \dim_{\mathbb{R}} C_S(\mathbb{R}^n)/(Jf + If)_S + d;$$

ce qui suffit pour terminer la démonstration du lemme.

De même, nous pourrions démontrer le lemme suivant.

LEMME 1.10'. — La fonction f est de d -codimension finie si et seulement si elle admet un nombre fini de points critiques a pour lesquels les $c_d(f, a)$ sont finis. On a alors

$$c_d(f) = \left(\sum_{a \in S} c_d(f, a) \right) - 1.$$

En particulier, $c_d(f)$ est fini si et seulement si $c(f)$ l'est.

LEMME 1.11. — Si $f, a \sim f', a'$, alors $c(f, a) = c(f', a')$, $c_d(f, a) = c_d(f', a')$ et $d(f, a) = d(f', a')$.

Démonstration. — Supposons que f_1, \dots, f_c forment une base de $C_a(\mathbb{R}^n)/(Jf' + If')$. Toute fonction $\lambda \in C(\mathbb{R}^n)$ s'écrit alors, sur un voisinage de a' ,

$$\lambda = \sum_{i=1}^c \lambda_i f_i + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f'}{\partial y_j} \alpha^j + \eta \circ f'.$$

Ainsi

$$\lambda \circ h = \sum_{i=1}^c \lambda_i f_i \circ h + \sum_{\substack{j=1 \\ l=1}}^n \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial (h^{-1})^l}{\partial y_j} \alpha^j \circ h + \eta \circ k \circ g$$

et les $f_i \circ h, i = 1, \dots, c$, engendrent $C_a(\mathbb{R}^n)/(Jf + If)_a$, car toute fonction de $C(\mathbb{R}^n)$ peut s'écrire selon $\lambda \circ h$ au voisinage de a . Par symétrie, on voit que $c(f, a) = c(f', a')$. Un raisonnement analogue amène à $c_d(f, a) = c_d(f', a')$. Par le lemme 1.7, on a finalement que $d(f, a) = d(f', a')$. Ce qui démontre le lemme.

On déduit de ce lemme que si $f \sim g$, alors $c(f) = c(g)$ et $c_d(f) = c_d(g)$.

EXEMPLE 1.1. — Dans le cas $n = 1$, $c_d(f, a) = i$ si et seulement si

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(i)}(a) = 0 \neq f^{(i+1)}(a).$$

En effet, par la formule de Taylor, cette dernière condition est équivalente à

$$f(x) - f(a) = (x - a)^{i+1} r(x)$$

avec $r(a) \neq 0$. Les difféomorphismes locaux $h : x \mapsto (x - a)\sqrt[i+1]{r(x)}$ et $k : y \mapsto y - f(a)$ échangent f , au voisinage de a , et la fonction $x^{i+1} : x \mapsto x^{i+1}$ au voisinage de 0. Alors d'après le lemme précédent, on a $c_d(f, a) = c_d(x^{i+1}, 0)$ et $d(f, a) = d(x^{i+1}, 0)$. Or dans le cas où $f(x) = x^{i+1}$, Jf est l'idéal engendré par x^i et il est clair que les germes des fonctions $1, x, \dots, x^{i-1}$ forment une base de $C_0(\mathbb{R})/Jf_0$, d'où $c_d(f, a) = i$.

Comme de plus $x^{i+1} \in Jf$, $d(f, a) = 1$. Il s'en suit que pour toute valeur critique b on a $d(f, b) = 1$ et

$$c(f) = \sum_{a \in \mathcal{S}} c_d(f, a) - \mu,$$

où μ est le nombre de valeurs critiques.

Revenons au cas où n est quelconque. Travaillant à équivalence près, nous pouvons supposer que $a = 0$ et que $f(a) = 0$. Nous désignerons par f_q le polynôme des termes de degré q dans le développement de Taylor de f au voisinage de 0.

LEMME 1. 12. — Si f_2 est une forme quadratique de rang $n - p$ et d'indice i (nombres de signes — dans une décomposition en carrés), alors

$$f, 0 \sim v - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \dots - x_{p+i}^2 + x_{p+i+1}^2 + \dots + x_n^2, 0,$$

où v est une fonction des p premières variables dont le développement de Taylor commence par des termes de degré au moins 3.

Il existe plusieurs démonstrations de ce lemme dans la littérature ; on pourra en trouver une dans [5] (lemme 5. 12).

LEMME 1. 13. — Le point a sera un point critique non dégénéré de f si et seulement si $c(f, a) = 0$, et dans ce cas $c_d(f, a) = d(f, a) = 1$.

Démonstration. — Si a est critique non dégénéré, le rang de f_2 est n et, d'après le lemme précédent, on peut raisonner avec

$$f = \pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm \dots \pm x_n^2$$

au voisinage de 0. Alors Jf_0 est l'idéal engendré par x_1, \dots, x_n : c'est \mathcal{M}_0 , et le résultat suit puisque $C(\mathbb{R}^n)/\mathcal{M}_0 \simeq \mathbb{R}$.

Pour la réciproque, supposons que a est critique dégénéré. On peut alors travailler avec

$$f = v \pm x_{p+1}^2 \pm \dots \pm x_n^2,$$

$p \geq 1$, au voisinage de 0 ; d'où Jf_0 est engendré par les germes de

$$\partial v / \partial x_1, \dots, \partial v / \partial x_p, x_{p+1}, \dots, x_n.$$

Alors $c_d(f, 0) = c_d(v, 0)$, car tous les monômes contenant l'une des $n - p$ dernières variables sont dans Jf_0 (cf. remarque 1. 1). Il est clair que 1 et x_1 au moins sont indépendants modulo Jv_0 dans $C_0(\mathbb{R}^p)$, car les polynômes $\partial v / \partial x_i$ n'ont pas de termes de degré inférieur à 2 pour $i = 1, \dots, p$; alors $c_d(v, 0) > 1$. Or si $c(f, 0) = 0$, la formule (1. 5) amène à $\mathcal{M}_0 \subset Jf_0$ et donc, en particulier, à $c_d(f, 0) \leq 1$; d'où contradiction et on a $c(f, 0) > 0$. Ce qui termine la démonstration du lemme.

De ce lemme nous pouvons tirer le résultat suivant : si b est une valeur critique de f correspondant au seul point critique a et si a est non dégénéré, ce point critique n'ajoute pas de codimension à f . Cela résulte clairement de la formule de calcul de $c(f)$ établie par le lemme 1. 10. En particulier, une fonction de Morse est de codimension 0. Nous appellerons *points critiques déterminants* de f l'ensemble de ses points critiques autres que ceux-là. Un exercice amène à voir que f ne possède pas plus de $2c(f)$ points critiques déterminants. De même il est clair, par le lemme 1. 10', que f ne possède pas plus de $c_d(f) + 1$ points critiques.

2. DÉPLOIEMENTS VERSELS

DÉFINITION 2. 1. — Un *déploiement* de $f \in C(\mathbb{R}^n)$ relatif à un compact M de dimension k en 0 est une application $F : \mathcal{C} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$, où \mathcal{C} est un

voisinage de 0 dans \mathbb{R}^k et \mathcal{E} un voisinage de M dans \mathbb{R}^n , qui à $(u, x) \in \mathcal{C} \times \mathcal{E}$ associe $F(u, x)$ de sorte que $F(0, x) = f(x)$ pour tout x dans M .

La donnée de F est équivalente à la donnée du champ de fonctions $u \mapsto F_u$; on peut aussi considérer que F est une déformation à k paramètres de f . A tout déploiement F , nous associerons l'application \tilde{F} définie par $\tilde{F}(u, x) = (u, F(u, x))$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$.

Soit $G : (v, x) \mapsto G(v, x)$ un autre déploiement de f relativement à M en 0, mais de dimension s qui peut être différente de k , et soit $p : \mathbb{R}^s, 0 \rightarrow \mathbb{R}^k, 0$ une application locale, c'est-à-dire définie sur un voisinage de 0 et telle que $p(0) = 0$.

DÉFINITION 2.2. — Nous dirons que G est *induit par F* à l'aide de p s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} \times \mathcal{E} & \xrightarrow{\tilde{G}} & \mathcal{C} \times \mathcal{V} \\
 \downarrow H & & \downarrow K \\
 \mathcal{C}' \times \mathcal{E}' & \xrightarrow{\tilde{F}} & \mathcal{C}' \times \mathcal{V}'
 \end{array} \tag{2.1}$$

où \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont des voisinages de 0 respectivement dans \mathbb{R}^s et \mathbb{R}^k , \mathcal{E} et \mathcal{E}' des voisinages de M dans \mathbb{R}^n , \mathcal{V} et \mathcal{V}' des voisinages respectifs de $G(\{0\} \times M)$ et $F(\{0\} \times M)$ dans \mathbb{R} . On impose en outre que $H(v, x) = (p(v), h(v, x)) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, que $K(v, y) = (p(v), k(v, y)) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ (c'est dire que H et K conservent les fibres des fibrations triviales $(u, x) \mapsto u$ et $(u, y) \mapsto u$), où les h_v sont des difféomorphismes d'un voisinage de M sur un voisinage de M pour tout $v \in \mathcal{C}$ avec $h_0 = Id$ et les k_v des difféomorphismes d'un voisinage de $G_v(M)$ sur un voisinage de $F_{p(v)}(M)$ avec $k_0 = Id$.

Remarquons que G est induit par F à l'aide de p si $G_v, M \sim F_{p(v)}, M$ pour tout v proche de 0 et que les difféomorphismes h_v et k_v qui réalisent cette équivalence dépendent différemment de v .

DÉFINITION 2.2'. — Nous dirons que G est *d-induit par F* si G est induit par F et si de plus k_v est pour tout v une translation. Le diagramme (2.1) ainsi obtenu sera alors dit du type (2.1').

DÉFINITION 2.3. — Nous dirons que le *déploiement F est équivalent* au déploiement G , et noterons $F \approx G$ (rel. M) ou $F \approx G$, s'il existe un diagramme du type (2.1) où H et K sont des difféomorphismes (ou, ce qui revient au même, p est un difféomorphisme local).

DÉFINITION 2.3'. — Si de plus le diagramme est de type (2.1'), on dira que le *déploiement F est d-équivalent* au déploiement G ; on écrira $F \approx_d G$.

Notons que $F \approx G$ ou $F \approx_d G$ entraîne que $s = k$. Nous définirons les déploiements de f en $u_0 \in \mathbb{R}^k$ de manière analogue en remplaçant partout 0 par u_0 . Dans les diagrammes du type (2.1), il faudrait alors

imposer que p envoie v_0 sur u_0 , etc. Sauf mention du contraire, tous nos déploiements seront considérés en 0.

DÉFINITION 2.4. — Un *déploiement* F de f sera dit *versel* (resp. *d-versel*) si tout autre déploiement de f peut être induit par F (resp. *d-induit* par F).

REMARQUE 2.1. — On réservera le terme *universel* (resp. *d-universel*) aux déploiements versels (resp. *d-versels*) de dimension minimale, i. e. à ceux dont la dimension est la codimension (resp. la *d*-codimension) de f . En effet, on pourra voir plus loin que les déploiements versels ne sont pas uniques.

DÉFINITION 2.5. — Un *déploiement* $F(u, x)$ de f de dimension k en 0 sera dit *infinitésimalement versel* (resp. *infinitésimalement d-versel*) si les classes des k fonctions $(\partial F/\partial u_1)_0, \dots, (\partial F/\partial u_k)_0$ modulo $Jf + If$ (resp. $Jf + [1]$) engendrent $C(\mathbb{R}^n)/(Jf + If)$ (resp. $C(\mathbb{R}^n)/(Jf + [1])$).

On remarque que si f admet un déploiement infinitésimalement versel (resp. infinitésimalement *d-versel*) de dimension k , f est de codimension c (resp. de *d*-codimension c_d) $\leq k$.

THÉORÈME I. — Si F et G sont deux déploiements infinitésimalement versels (resp. infinitésimalement *d-versels*) de f de même dimension, alors ils sont équivalents (resp. *d*-équivalents).

Les trois sous-sections qui suivent sont destinées à démontrer ce théorème.

2.1. Préliminaires algébriques

Soient $\phi : R \rightarrow S$ un homomorphisme d'anneaux commutatifs et unitaires, I et J des idéaux de R et S respectivement tels que $\phi[I] \subset J$, $\phi' : R/I \rightarrow S/J$ l'homomorphisme évident induit par ϕ . Si $\alpha : A \rightarrow C$ est un homomorphisme (de groupe) entre le R -module A et le S -module C , on dira que α est *au-dessus de* ϕ si $\alpha(ra) = \phi(r)\alpha(a)$ pour tout $a \in A$ et $r \in R$.

DÉFINITION 2.6 (Tougeron [8]). — Nous dirons que ϕ' est une *contraction adéquate* de ϕ si pour tout R -module A de type fini, tous S -modules B et C , C de type fini, tout homomorphisme $\alpha : A \rightarrow C$ au-dessus de ϕ et tout S -homomorphisme $\beta : B \rightarrow C$, l'hypothèse

$$\alpha[A] + \beta[B] + J.C = C$$

implique

$$\begin{aligned} \alpha[A] + \beta[B] &= C, \\ \alpha[I.A] + \beta[J.B] &= J.C. \end{aligned}$$

LEMME 2.1 (Théorème de préparation de Mather). — Soient U et V deux variétés différentiables, N une sous-variété fermée de V , $f : U \rightarrow V$ une application transverse à N telle que $M = f^{-1}[N] \neq \emptyset$. Posons

$R = C_N(V)$, $S = C_M(U)$ et soit $\phi : R \rightarrow S$ l'homomorphisme induit par f . Notons I et J les idéaux respectifs de R et S formés des germes des fonctions nulles sur M et N respectivement. Alors $\phi' : R/I \rightarrow S/J$ est une contraction adéquate de ϕ .

On trouvera une démonstration de ce lemme dans [8] (théorème 3). Cette démonstration utilise comme outil essentiel le théorème de division de Mather [9].

Soient R' , R et S trois anneaux commutatifs et unitaires, I' , I et J des idéaux respectifs de R' , R et S , $\phi : R \rightarrow S$ un homomorphisme tel que $\phi(I) \subset J$ et $\psi : R' \rightarrow R$ un homomorphisme tel que $\psi(I') \subset I$.

LEMME 2.2. — Supposons que $\phi' : R/I \rightarrow S/J$ et $\psi : R'/I' \rightarrow R/I$ sont des contractions adéquates respectivement de ϕ et ψ . Alors si A' est un R' -module, A un R -module, C un S -module, tous trois de type fini, et B un S -module quelconque, si $\alpha' : A' \rightarrow C$ et $\alpha : A \rightarrow C$ sont des homomorphismes au-dessus de $\phi \circ \psi$ et ϕ respectivement, si $\beta : B \rightarrow C$ est un S -homomorphisme, l'hypothèse

$$\alpha'[A'] + \alpha[A] + \beta[B] + J.C = C \quad (2.2)$$

entraîne

$$\alpha'[A'] + \alpha[A] + \beta[B] = C. \quad (2.3)$$

Démonstration. — Raisonnons dans un premier temps avec $B = 0$. Construisons un R -module de type fini par le produit tensoriel $A'' = A' \otimes_{R'} R$ sur R' , où R est muni de la structure de R' -module induite par ϕ . Définissons $\alpha'' : A'' \rightarrow C$ par $\alpha''(a' \otimes r) = \phi(r)\alpha'(a')$. Il est facile de vérifier que cette définition est cohérente et que α'' est un homomorphisme au-dessus de ϕ ; de plus, $\alpha''[A''] \supset \alpha'[A']$ et $\alpha''[I.A''] \supset \alpha'[I'.A']$. Alors $\alpha''' = \alpha'' \oplus \alpha : A'' \oplus A \rightarrow C$ est un homomorphisme au-dessus de ϕ . L'équation (2.2) devient

$$\alpha'[A'] + \alpha[A] + J.C = C, \quad (2.4)$$

donc

$$\alpha'''[A'' \oplus A] + J.C = C.$$

Comme ϕ' est adéquate, on en déduit que

$$\begin{aligned} \alpha'''[A'' \oplus A] &= C, \\ \alpha'''[I.(A'' \oplus A)] &= J.C. \end{aligned}$$

La première équation entraîne que C est de type fini quand on le considère comme module sur R (à l'aide de ϕ); la deuxième équation implique que $J.C \subset I.C$ (notation évidente), donc $J.C = I.C$.

Revenons à la formule (2.4) : elle entraîne que

$$\alpha'[A'] + \alpha[A] + I.C = C.$$

Considérant C comme un module (de type fini) sur R , α' est un homo-

morphisme au-dessus de ψ et α un \mathbb{R} -homomorphisme : le fait que ψ' soit adéquate entraîne que

$$\alpha'[A'] + \alpha[A] = C.$$

Cela prouve le lemme dans le cas $B = 0$. Si B est non nul, on emploie le même type de démonstration en remplaçant C par $C' = C/\beta[B]$.

2.2. Lemmes préparatoires

LEMME 2.3. — On note (t, x) un point de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$. Soit $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$. On suppose qu'il existe des fonctions $\lambda_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $\mu_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, p$, telles que

$$\frac{\partial G_j}{\partial t}(t, x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial G_j}{\partial x_i}(t, x) \lambda_i(t, x) + \mu_j(t, G(t, x)) \quad (2.5)$$

pour toute composante G_j de G , $j = 1, \dots, p$. Alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^m$ il existe un voisinage U de x_0 , un voisinage V de $G(0, x_0)$, un nombre réel $\varepsilon > 0$, des difféomorphismes H_t et K_t définis respectivement sur U et V et pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| < \varepsilon$, avec $H_0 = Id_U$ et $K_0 = Id_V$, tels que

$$K_t^{-1} \circ G_t \circ H_t(x) = G_0(x). \quad (2.6)$$

De plus, les courbes $t \mapsto H_t(x)$ et $t \mapsto K_t(y)$ sont des courbes intégrales des champs dépendant du temps définis respectivement sur \mathbb{R}^m par $\lambda(t, x) = (\lambda_1(t, x), \dots, \lambda_m(t, x))$ et sur \mathbb{R}^p par $\mu(t, y) = (\mu_1(t, y), \dots, \mu_p(t, y))$.

Démonstration. — Le théorème d'existence (et d'unicité) locale des solutions d'un système d'équations différentielles affirme que les champs $-\lambda$ et μ admettent des courbes intégrales respectives $t \mapsto \phi(t, x)$ et $t \mapsto \psi(t, y)$ telles que $\phi(0, x) = x$, $\psi(0, y) = y$, définies pour $|t| < \varepsilon$, x sur un voisinage U de x_0 , y sur un voisinage V de $G(0, x_0)$. Il suffit donc de prendre $H_t(x) = \phi(t, x)$ et $K_t(y) = \psi(t, y)$ pour définir des difféomorphismes du type de ceux que l'on cherche. Notons que l'on peut alors écrire

$$\frac{\partial H_t}{\partial t}(H_t^{-1}(x)) = -\lambda(t, x), \quad \frac{\partial K_t}{\partial t}(K_t^{-1}(y)) = \mu(t, y) \quad (2.7)$$

par définition des intégrales des champs.

Il nous reste à vérifier (2.6). Comme $H_0 = Id_U$ et $K_0 = Id_V$, il suffira de montrer que $K_t^{-1} \circ G_t \circ H_t$ est indépendant de t , donc que

$$\frac{\partial}{\partial t}(K_t^{-1} \circ G_t \circ H_t(x)) = 0$$

pour tout x voisin de x_0 et tout t tel que $|t| < \varepsilon$. Avant de calculer cette dérivée, remarquons que

$$\frac{\partial}{\partial t} (P_t \circ Q_t)(x) = (TP_t)_{Q_t(x)} \frac{\partial Q_t}{\partial t}(x) + \frac{\partial P_t}{\partial t}(Q_t(x))$$

pour tout couple convenable de fonctions $(t, x) \mapsto Q_t(x)$ et $(t, y) \mapsto P_t(y)$, où on désigne par $(TF)_z$ l'application linéaire tangente à F en z . En particulier,

$$\frac{\partial K_t^{-1}}{\partial t}(K_t(y)) + (TK_t^{-1})_{K_t(y)} \frac{\partial K_t}{\partial t}(y) = \frac{\partial Id}{\partial t}(y) = 0$$

et

$$\frac{\partial K_t^{-1}}{\partial t}(y) = - (TK_t^{-1})_y \frac{\partial K_t}{\partial t}(K_t^{-1}(y)).$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (K_t^{-1} \circ G_t \circ H_t)(x) &= (TK_t^{-1})_{G_t \circ H_t(x)} \frac{\partial}{\partial t} (G_t \circ H_t)(x) + \frac{\partial K_t^{-1}}{\partial t}(G_t \circ H_t(x)) \\ &= (TK_t^{-1})_{G_t(x')} \left[(TG_t)_{x'} \frac{\partial H_t}{\partial t}(H_t^{-1}(x')) + \frac{\partial G_t}{\partial t}(x') - \frac{\partial K_t}{\partial t}(K_t^{-1} \circ G_t(x')) \right] \end{aligned}$$

avec $x' = H_t(x)$. Utilisant (2.7), l'expression entre crochets devient

$$- (TG_t)_{x'} \lambda(t, x') + \frac{\partial G_t}{\partial t}(x') - \mu(t, G_t(x')).$$

Enfin, il est clair que (2.5) implique que cette expression est nulle.

LEMME 2.4. — Soient F et G deux déploiements en 0 de f de dimension k relatifs à un compact M . Si F est infinitésimalement versel et si $(\partial G/\partial u_j)_0 - (\partial F/\partial u_j)_0 \in Jf + If$ pour $j = 1, \dots, k$, alors $F \approx G$ (rel. M). Le même lemme reste vrai en remplaçant versel par d -versel, $Jf + If$ par $Jf + [1]$ et $F \approx G$ par $F \approx_d G$.

Démonstration. — On considère $F_t = F + t(G - F)$, où $t \in [0, 1]$. Alors

$$\left(\frac{\partial F_t}{\partial u_j} \right)_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial u_j} \right)_0 + t \left(\left(\frac{\partial F}{\partial u_j} \right)_0 - \left(\frac{\partial G}{\partial u_j} \right)_0 \right)$$

et il est clair que, pour tout t , F_t est un déploiement infinitésimalement versel de f ($= F_{t_0}$). Comme $F_0 = F$ et $F_1 = G$, à cause de la connexité et de la compacité de $[0, 1]$, il suffit de montrer que F_{t_0} est équivalent à F_t pour tout t voisin de t_0 , en particulier de $t_0 = 0$, pour obtenir le résultat. Pour y arriver, l'idée centrale est de construire des difféomorphismes H_t et K_t tels que $K_t^{-1} \circ \tilde{F}_t \circ H_t = \tilde{F}$ en utilisant le lemme 2.3. Seulement le problème se complique du fait que l'on veut des difféomorphismes H_t et K_t

satisfaisant les propriétés du diagramme (2.1). Cela nous oblige à imposer des restrictions sur les champs λ et μ à partir desquels nous construirons H_t et K_t .

Première étape : construction des champs. — Nous déterminerons l'existence de fonctions X^1, X^2, \dots, X^n définies sur un voisinage de $0 \times 0 \times \mathbb{R}^n$ (variables (t, u, x)), de fonctions E^1, E^2, \dots, E^k définies sur un voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$, d'une fonction Y définie sur un voisinage de $0 \times 0 \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ (variables (t, u, y)) telles que

$$\frac{\partial F_t}{\partial t}(u, x) = (F - G)(u, x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_t}{\partial x_i}(u, x) X^i(t, u, x) + \sum_{j=1}^k \frac{\partial F_t}{\partial u_j}(u, x) E^j(t, u) + Y(t, u, F_t(u, x)). \quad (2.8)$$

Pour cela, nous utiliserons le lemme 2.2 avec les notations suivantes. On pose

$$R' = C_{(0,0)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k), \quad R = C_{0 \times 0 \times \mathbb{R}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}),$$

$$S = C_{0 \times 0 \times \mathbb{R}^n}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n),$$

$$I' = \mathcal{M}_{(0,0)} R', \quad I = \mathcal{M}_{0 \times 0 \times \mathbb{R}} R \quad \text{et} \quad J = \mathcal{M}_{0 \times 0 \times \mathbb{R}^n} S.$$

On prend pour $\phi : R \rightarrow S$ l'homomorphisme induit par \bar{F} :

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$$

tel que $\bar{F}(t, u, x) = (t, u, F_t(u, x))$. L'application \bar{F} vérifie les hypothèses du lemme 2.1, donc $\phi' : R/I \rightarrow S/J$ est adéquate. On prend $\psi : R' \rightarrow R$ l'homomorphisme induit par $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ tel que $\pi(t, u, x) = (t, u)$. Pour les mêmes raisons, $\psi' : R'/I' \rightarrow R/I$ est adéquate. On pose $A' = (R')^k$, $A = R$, $B = S^n$ et $C = S$. On définit $\alpha' : A' \rightarrow C$ de la manière suivante : si $\tilde{\beta}$ est un élément de A' représenté par le k -uplet de fonctions $(\beta^1, \dots, \beta^k)$, $\alpha'(\tilde{\beta})$ sera le germe en $0 \times 0 \times \mathbb{R}^n$ de la fonction qui à (t, u, x) associe la valeur

$$\sum_{j=1}^k \frac{\partial F_t}{\partial u_j}(u, x) \beta^j(t, u).$$

On définit $\alpha : A \rightarrow C$ de la façon suivante : si $\tilde{\eta}$ est un élément de A représenté par une fonction η , $\alpha(\tilde{\eta})$ sera le germe en $0 \times 0 \times \mathbb{R}^n$ de la fonction $(t, u, x) \mapsto \eta(t, u, F_t(u, x))$. On définit $\beta : B \rightarrow C$ comme suit : si $\tilde{\alpha}$ est un élément de B représenté par le n -uplet de fonctions $(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$, $\beta(\tilde{\alpha})$ sera le germe en $0 \times 0 \times \mathbb{R}^n$ de la fonction

$$(t, u, x) \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_t}{\partial x_i}(u, x) \alpha^i(t, u, x).$$

Nous prouverons maintenant qu'avec ces notations nous avons (2.2). Soit \bar{z} un élément quelconque de C représenté par une fonction z . Fixant les variables t et u à la valeur 0, la fonction $x \mapsto z(0, 0, x)$ est dans $C(\mathbb{R}^n)$. Comme F_t est infinitésimalement versel, on peut alors écrire

$$z(0, 0, x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_t}{\partial x_i}(0, x) \bar{\alpha}^i(x) + \sum_{j=1}^k \frac{\partial F_t}{\partial u_j}(0, x) \bar{\beta}^j + \bar{\eta}(F_t(0, x)).$$

On pose

$$h(t, u, x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_t}{\partial x_i}(u, x) \bar{\alpha}^i(x) + \sum_{j=1}^k \frac{\partial F_t}{\partial u_j}(u, x) \bar{\beta}^j + \bar{\eta}(F_t(u, x)).$$

Alors la fonction $k(t, u, x) = z(t, u, x) - h(t, u, x)$ est telle que $k(0, 0, x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$: son germe \tilde{k} en $0 \times 0 \times \mathbb{R}^n$ est donc dans $J = J.C$. Il est clair que le germe \tilde{h} en $0 \times 0 \times \mathbb{R}^n$ de h est dans $\alpha'[A'] + \alpha[A] + \beta[B]$, alors $\tilde{z} = \tilde{h} + \tilde{k}$ est dans $\alpha'[A'] + \alpha[A] + \beta[B] + J.C$ et donc que (2.2) est vérifiée.

Les hypothèses du lemme 2.2 sont toutes vérifiées, on en conclut que

$$\alpha'[A'] + \alpha[A] + \beta[B] = C. \quad (2.9)$$

Ceci entraîne que toute fonction $(t, u, x) \mapsto z(t, u, x)$ s'écrit, au moins sur un voisinage de $0 \times 0 \times \mathbb{R}^n$, comme le dernier membre de (2.8). Ce qui prouve en particulier la formule (2.8).

Deuxième étape. — Nous montrerons que l'on peut imposer en outre

$$X^i(t, 0, x) = E^j(t, 0) = Y(t, 0, y) = 0 \quad (2.10)$$

pour tout t, x et y dans les domaines qui nous intéressent. Pour cela, on remarque d'abord que si $L(u, v)$ est une fonction de $u \in \mathbb{R}^k$ et $v \in \mathbb{R}^q$, q quelconque, telle que $L(0, v) = 0$ pour tout v , on peut écrire

$$L(u, v) = \sum_{r=1}^k u_r \Phi_r(L)(u, v),$$

où $\Phi_r(L)$ est une fonction de u et v . En effet, on a

$$\begin{aligned} L(u, v) &= L(1u, v) - L(0u, v) \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} L(tu, v) dt \\ &= \sum_{r=1}^k u_r \int_0^1 \frac{\partial L}{\partial u_r}(tu, v) dt. \end{aligned}$$

En particulier

$$F(0, x) - G(0, x) = 0,$$

donc

$$F(u, x) - G(u, x) = \sum_{r=1}^k u_r \Phi_r(u, x). \tag{2.11}$$

Par (2.9), on a

$$\Phi_r(u, x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_t}{\partial x_i}(u, x) X_r^i(t, u, x) + \sum_{j=1}^k \frac{\partial F_t}{\partial u_j}(u, x) E_r^j(t, u) + Y_r(t, u, F_t(u, x))$$

sur un voisinage de $0 \times 0 \times \mathbb{R}^n$. Revenant à (2.11), on peut écrire la formule (2.8) avec

$$\begin{aligned} X^i(t, u, x) &= \sum_{r=1}^k u_r X_r^i(t, u, x), \\ E^j(t, u) &= \sum_{r=1}^k u_r E_r^j(t, u), \\ Y(t, u, y) &= \sum_{r=1}^k u_r Y_r(t, u, y). \end{aligned}$$

La condition (2.10) est alors vérifiée.

Dernière étape : construction de H_t et K_t . — Pour nous placer dans les hypothèses du lemme 2.3, on pose $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^p$ et on prend pour G la fonction $(t, u, x) \mapsto (u, F_t(u, x))$. On pose

$$\lambda = (E^1, \dots, E^k, X^1, \dots, X^n), \quad \mu = (-E^1, \dots, -E^k, Y)$$

alors (2.5) est vérifiée car pour $j = 1$ cette relation n'est autre que (2.8) et pour $j > 1$ elle devient $0 = 0$. Nous pouvons alors appliquer la conclusion du lemme 2.3 : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un voisinage U_x de 0 dans \mathbb{R}^k , un voisinage V_x de x dans \mathbb{R}^n et un nombre $\varepsilon_x > 0$ tels que la conclusion du lemme 2.3 tienne avec $U = U_x \times V_x$, $x_0 = (0, x)$, $\varepsilon = \varepsilon_x$. On étendra H_t à un voisinage de $\{0\} \times M$ et K_t à un voisinage de $G_t(\{0\} \times M)$. Pour cela, on recouvre le compact M par un nombre fini de V_x , par exemple

V_{x_1}, \dots, V_{x_q} , et on pose $W = \bigcap_{i=1}^q U_{x_i}$, $\varepsilon = \inf_{i=1, \dots, q} \varepsilon_{x_i}$. On peut alors

« recoller » les difféomorphismes locaux H_t que nous donnait le lemme 2.3

pour obtenir des difféomorphismes H_t de domaine $W \times \bigcup_{i=1}^q V_{x_i}$ pour

$|t| < \varepsilon$. Le fait que $t \mapsto H_t(x)$ soit une courbe intégrale et l'unicité des intégrales assurent la possibilité de cette opération. Par un raisonnement analogue, on étend les difféomorphismes K_t de façon qu'ils soient définis

sur un voisinage de $G_t(\{0\} \times M)$ pour $|t| < \varepsilon$, où l'on doit peut-être restreindre encore ε . De plus, par le même calcul que dans la démonstration du lemme 2.3, la conclusion (2.6) est valable pour tout (u, x) dans un voisinage de $\{0\} \times M$ et l'on a bien sur ce voisinage

$$K_t^{-1} \circ \tilde{F}_t \circ H_t = \tilde{F}$$

pour $|t| < \varepsilon$.

Il reste à vérifier que H_t et K_t sont de bons difféomorphismes vérifiant les propriétés requises dans les diagrammes de type (2.1). Notons

$$H_t(u, x) = (H_t^1(u, x), \dots, H_t^k(u, x), h_t^1(u, x), \dots, h_t^n(u, x)).$$

Comme $H_t(u, x)$ est obtenu par intégration du champ λ , on a en particulier que $t \mapsto H_t^j(u, x)$ est déterminée par l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}(\gamma(t)) = E^j(t, \gamma(t))$$

avec $\gamma(0) = u_j$. On obtient donc une courbe indépendante de x et $H_t^j(u, x) = p_t^j(u)$. On a le même résultat pour K_t et on peut ainsi affirmer que H_t et K_t conservent les fibres des fibrations $(u, x) \mapsto u$ et $(u, y) \mapsto u$. Enfin (2.10) implique que $H_{t=0} = Id$ et $K_{t=0} = Id$. Ceci suffit à démontrer le lemme dans le cas des déploiements infinitésimalement versels.

Pour démontrer le lemme dans le cas des déploiements infinitésimalement d -versels, on utilise la même technique, mais pour avoir des K_t convenable il faut établir une formule (2.8) dans laquelle Y ne dépend plus que de t et u . Il est clair que l'on peut obtenir cette formule par la même technique en prenant $A = 0$, $A' = (\mathbb{R}')^{k+1}$ et

$$\alpha'(\beta^1, \dots, \beta^{k+1}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial F_t}{\partial u_j}(u, x) \beta^j(t, u) + \beta^{k+1}(t, u).$$

On voit que le lemme 2.2 n'est pas nécessaire dans ce cas.

2.3. Démonstration du théorème I

Montrons d'abord que si (f_1, \dots, f_k) et (g_1, \dots, g_k) forment deux systèmes de générateurs d'un \mathbb{R} -espace E , il existe toujours une matrice inversible $(a_j^i)_{j=1, \dots, k}^{i=1, \dots, k}$ à coefficients réels, telle que

$$f_j = \sum_{i=1}^k a_j^i g_i,$$

$j = 1, \dots, k$. Pour cela, on sélectionne parmi ces deux systèmes deux

bases de E, par exemple (f_1, \dots, f_p) et (g_1, \dots, g_p) ; il est clair qu'il existe une matrice inversible $(a_j^i)_{j=1, \dots, p}^{i=1, \dots, p}$ qui échange ces bases. Par ailleurs,

$$f_j - g_j = \sum_{i=1}^p b_j^i g_i$$

pour tout $j > p$. On peut alors compléter la matrice (a_j^i) en posant $a_j^i = b_j^i$ pour $j = p + 1, \dots, k$ et $i = 1, \dots, p$, $a_j^i = 1$ pour $j > p$ et $a_j^i = 0$ pour tous les autres coefficients, et ainsi obtenir une matrice qui convient.

Soient maintenant F et G deux déploiements infinitésimalement versels de f de même dimension k . Posons $f_f(x) = \partial F / \partial u_f(0, x)$ et $g_f(x) = \partial G / \partial u_f(0, x)$ pour $j = 1, \dots, k$. Considérons l'application linéaire $p: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ qui admet pour matrice (dans la base canonique) la matrice (a_j^i) donnée dans le paragraphe précédent. Considérons les deux déploiements de f définis par

$$\bar{F}(u, x) = f(x) + \sum_{j=1}^k u_j f_j(x)$$

et

$$\bar{G}(u, x) = f(x) + \sum_{j=1}^k u_j g_j(x).$$

On a que $\bar{F} \approx \bar{G}$ puisque l'on peut construire un diagramme du type (2.1) en prenant $H(u, x) = (p(u), x)$ et $K(u, y) = (p(u), y)$. Finalement, par le lemme 2.4, $\bar{F} \approx F$ et $\bar{G} \approx G$.

2.4. Équivalence entre versalité et versalité infinitésimale

LEMME 2.5. — Soient $(u, x) \mapsto F(u, x)$ et $(v, x) \mapsto G(v, x)$ deux déploiements de f de dimensions respectives k et s . Si G est induit par F à l'aide de $p: v \mapsto (p^1(v), \dots, p^k(v))$, où $v = (v_1, \dots, v_s)$, alors

$$\sum_{j=1}^k \frac{\partial p^j}{\partial v_r}(0) \left(\frac{\partial F}{\partial u_j} \right)_0 = \left(\frac{\partial G}{\partial v_r} \right)_0$$

modulo $Jf + If$, pour $r = 1, \dots, s$. De plus, si G est d -induit par F, on peut remplacer If par $[1]$.

Démonstration. — Il existe entre \bar{F} et \bar{G} un diagramme du type (2.1) : on peut donc écrire

$$F(p(v), h(v, x)) = k(v, G(v, x)).$$

Dérivant en $v = 0$ les deux membres de cette équation par rapport à v_r , nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(0, h(0, x)) \frac{\partial h^i}{\partial v_r}(0, x) + \sum_{j=1}^k \frac{\partial F}{\partial u_j}(0, h(0, x)) \frac{\partial p^j}{\partial v_r}(0) \\ = \frac{\partial k}{\partial v_r}(0, f(x)) + \frac{\partial k}{\partial y}(0, f(x)) \frac{\partial G}{\partial v_r}(0, x). \end{aligned}$$

Compte tenu des hypothèses, cette équation devient

$$\sum_{j=1}^k \frac{\partial p^j}{\partial v_r}(0) \left(\frac{\partial F}{\partial u_j} \right)_0 = \left(\frac{\partial G}{\partial v_r} \right)_0 - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\frac{\partial h^i}{\partial v_r} \right)_0 + \left(\frac{\partial k}{\partial v_r} \right)_0 \circ f ;$$

ce qui démontre le lemme dans le cas versel. Le lemme est aussi démontré dans le cas d -versel, puisque $(\partial k / \partial v_r)_0$ est une fonction constante indépendante de y .

THÉORÈME II. — Un déploiement F est versel (resp. d -versel) si et seulement s'il est infinitésimalement versel (resp. infinitésimalement d -versel).

Démonstration. — Versel entraîne infinitésimalement versel. Soit $g \in C(\mathbb{R}^n)$ et considérons le déploiement de f défini par $G(v, x) = f + vg$, $v \in \mathbb{R}$. Si F est versel, alors G peut être induit par F et le lemme précédent affirme alors que

$$g = \sum_{j=1}^k \lambda_j \left(\frac{\partial F}{\partial u_j} \right)_0$$

modulo $Jf + If$. Ainsi la classe de g dans $C(\mathbb{R}^n)/(Jf + If)$ est une combinaison linéaire des classes des $(\partial F / \partial u_j)_0$. Ceci étant vrai pour tout g , F est infinitésimalement versel. Le même raisonnement vaut dans le cas d -versel.

Infinitésimalement versel entraîne versel. — Soit $(u, x) \mapsto F(u, x)$ un déploiement infinitésimalement versel de f de dimension k et soit $(v, x) \mapsto G(v, x)$ un autre déploiement de f de dimension q . On définit un nouveau déploiement \bar{G} de f en posant

$$\bar{G}(u, v, x) = G(v, x) + \sum_{j=1}^k u_j \frac{\partial F}{\partial u_j}(0, x).$$

On remarque que G est induit par \bar{G} à l'aide de $p : v \mapsto (v, 0)$. Il reste à montrer que \bar{G} est induit par F . Il est clair que \bar{G} est infinitésimalement versel car

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial u_j}(0, 0, x) = \frac{\partial F}{\partial u_j}(0, x).$$

Considérons le déploiement $\bar{F}(u, v, x) = F(u, x)$ induit par F à l'aide de $p : (u, v) \mapsto u$. Or \bar{F} est lui aussi infinitésimalement versel de façon évidente et de même dimension que \bar{G} . Le théorème I prouve que $\bar{G} \approx \bar{F}$, donc \bar{G} est induit par F . Ce qui termine la démonstration du théorème II.

Un corollaire évident est que deux déploiements versels de même dimension sont équivalents : donc f détermine, à équivalence près, ses déploiements versels.

Pour terminer cette section, nous donnerons une caractérisation des systèmes de générateurs de $C(\mathbb{R}^n)/(Jf + If)$ dans le cas $n = 1$. Ceci fournira, au vu du théorème II, une caractérisation des déploiements versels qui généralise celle que l'on a dans [10] pour les bonnes fonctions.

DÉFINITION 2.7. — L'ensemble des *points critiques déterminants* $S^d \subset S$ de f est l'ensemble de ses points critiques a tels que ou bien a est dégénéré ou bien il existe $a' \in S$, $a' \neq a$, avec $f(a) = f(a')$.

Soit l'ensemble S^d de $f \in C(\mathbb{R})$ qui admet une partition

$$S^d = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_\mu,$$

où S_j correspond à la valeur critique b_j . On ordonne chaque ensemble S_j de façon arbitraire, par exemple $S_j = \{x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{s_j}\}$ avec

$$x_{1j} < x_{2j} < \dots < x_{s_j},$$

et on note K_j l'ensemble des couples $(x_{pj}, x_{(p+1)j})$ d'éléments de S_j que l'on peut ainsi construire. Remarquons que si g appartient à $Jf + If$ et (x_i, x_i') appartient à $K = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_\mu$, on a

$$g(x_i) = \eta(f(x_i)) = \eta(f(x_i')) = g(x_i').$$

Supposons que $S^d = \{x_1, \dots, x_s\}$ et que $c(f, x_i) = c_i$. Si $g \in Jf + If$,

$$g = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \circ f$$

et alors

$$g'(x_i) = g''(x_i) = \dots = g^{(c_i)}(x_i) = 0,$$

en dérivant successivement l'expression de g et en tenant compte de

$$f'(x_i) = f''(x_i) = \dots = f^{(c_i+1)}(x_i) = 0$$

(cf. exemple 1.1).

LEMME 2.6. — Soit $f \in C(\mathbb{R})$ de codimension c et dont x_1, \dots, x_s sont les points critiques déterminants. Les fonctions f_1, \dots, f_k engendrent $C(\mathbb{R})/(Jf + If)$ si et seulement si la matrice $k \times c$

$$\begin{bmatrix} f_1'(x_1) \dots f_1^{(c_1)}(x_1) & f_1'(x_2) \dots f_1^{(c_s)}(x_s) & f_1(x_i) - f_1(x_i') \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ f_k'(x_1) \dots f_k^{(c_1)}(x_1) & f_k'(x_2) \dots f_k^{(c_s)}(x_s) & f_k(x_i) - f_k(x_i') \dots \end{bmatrix},$$

où les dernières colonnes sont obtenues en prenant tous les couples $(x_i, x_{i'}) \in K$, est de rang c .

Démonstration. — Si cette matrice est de rang c , on peut en extraire une sous-matrice régulière, par exemple celle obtenue en gardant les c premières lignes. Supposons que

$$\sum_{j=1}^c \lambda_j f_j \in Jf + If,$$

alors

$$\sum_{j=1}^c \lambda_j f_j'(x_1) = \sum_{j=1}^c \lambda_j f_j''(x_1) = \dots = \sum_{j=1}^c \lambda_j f_j^{(c_s)}(x_s) = 0$$

et

$$\sum_{j=1}^c \lambda_j (f_j(x_i) - f_j(x_{i'})) = 0$$

pour tout $(x_i, x_{i'}) \in K$. Ainsi les c premiers vecteurs lignes de la matrice sont liés par une relation linéaire. Comme ceci n'est possible que si les coefficients λ_i sont tous nuls, il en résulte que les f_1, \dots, f_c sont indépendantes modulo $Jf + If$ et qu'elles forment une base de $C(\mathbb{R})/(Jf + If)$.

Réciproquement, il est clair que si les f_1, \dots, f_c engendrent $C(\mathbb{R})/(Jf + If)$, on peut en extraire une base, par exemple f_1, \dots, f_c . Si la matrice $c \times c$ obtenue à partir de f_1, \dots, f_c comme ci-dessus n'est pas régulière, il existe une combinaison linéaire des lignes de cette matrice, dont on note les coefficients λ_i , qui est nulle. Considérons alors

$$g = \sum_{i=1}^c \lambda_i f_i;$$

on a

$$g'(x_1) = \dots = g^{(c_1)}(x_1) = \dots = g^{(c_s)}(x_s) = g(x_i) - g(x_{i'}) = \dots = 0.$$

Finalement, un exercice utilisant le lemme 1.1 montre que $g \in Jf + If$ et que les f_1, \dots, f_c ne peuvent donc pas former une base de $C(\mathbb{R})/(Jf + If)$.

3. CLASSIFICATION DES CATASTROPHES

Dans cette section, nous nous restreindrons à ne considérer que des déploiements F vérifiant la propriété suivante : la projection $(u, x) \mapsto u$, restreinte à l'ensemble des (u, x) tels que x est un point critique de F_u , est propre. Cela nous permettra d'affirmer que pour u assez proche de 0 (sur un voisinage compact de 0), F_u n'a pas de points critiques hors d'un

compact. Nous imposons de plus que $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, ceci pour être sûr que f admet un minimum absolu.

DÉFINITION 3.1. — Soit F un déploiement de f de dimension k .

(a) Un point u de \mathbb{R}^k sera dit *point catastrophe de bifurcation* si F_u admet un point critique dégénéré.

(b) Il sera dit *point catastrophe de conflit* si F_u admet un minimum absolu dégénéré ou bien si F_u atteint son minimum absolu en plusieurs points distincts.

Nous noterons $K^b(F)$ l'ensemble des points catastrophes de bifurcation de F , $K^c(F)$ celui de ses points catastrophes de conflit.

LEMME 3.1. — Si F et G sont deux déploiements versels relatifs à M de f de dimension k en 0 , il existe un difféomorphisme local $p : \mathbb{R}^k, 0 \rightarrow \mathbb{R}^k, 0$ qui échange $K^b(F)$ et $K^b(G)$ ainsi que $K^c(F)$ et $K^c(G)$.

Démonstration. — D'après les théorèmes I et II, F et G sont équivalents, i. e. qu'il existe un difféomorphisme local $p : \mathbb{R}^k, 0 \rightarrow \mathbb{R}^k, 0$ tel que $F_u, M \sim G_{p(u)}, M$. Pour u proche de 0 , F_u et $G_{p(u)}$ sont proches de f (pour une topologie convenable) et leurs points critiques sont dans M . Il est clair alors que $p(u)$ est dans $K^b(G)$ si et seulement si u est dans $K^b(F)$.

Revenant sur les détails de la démonstration du lemme 2.4, on voit que l'équivalence entre F et G est construite à l'aide d'une famille de difféomorphismes H_t et K_t tels que $H_0 = Id$ et $K_0 = Id$. On peut écrire $K_t(u, y) = (p(u), k_{tu}(y))$, où le difféomorphisme k_{tu} dépend continûment de t et u . Comme $k_{00} = Id$, il est clair que k_{tu} restera dans la même composante connexe de $\text{Diff } \mathbb{R}$ lorsque t varie de 0 à 1 et u reste proche de 0 . On en déduit que k_{1u} conserve l'orientation et que non seulement $F_u \sim G_{p(u)}$, mais encore que les minima de F_u sont envoyés sur ceux de $G_{p(u)}$. Il apparaît donc que $p(u) \in K^c(G)$ si et seulement si $u \in K^c(F)$. Ce qui termine la démonstration du lemme.

Ce lemme est, à plus forte raison, vrai dans le cas des déploiements d -versels. A un difféomorphisme près, les ensembles catastrophes ne dépendent localement que de f , non du déploiement versel choisi : par abus d'écriture, nous noterons $K^b(f)$ et $K^c(f)$ plutôt que $K^b(F)$ et $K^c(F)$ les ensembles catastrophes correspondants.

3.1. Construction d'un déploiement versel standard

Nous considérons une fonction f de codimension $c \leq k$, S^d son ensemble de points critiques déterminants qui admet la partition

$$S^d = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_\mu,$$

où S_j correspond à la valeur critique b_j (valeur critique déterminante).

On choisit des voisinages compacts U_1, \dots, U_μ de S_1, \dots, S_μ respectivement tels que $U_i \cap U_j = \emptyset$ et $f(U_i) \cap f(U_j) = \emptyset$ si $i \neq j$. Pour chaque j , $j=1, \dots, \mu$, on sélectionne les fonctions $f_j^1, \dots, f_j^{i_j}$ dont les germes en S_j forment une base de $C_{S_j}(\mathbb{R}^n)/(Jf + If)_{S_j}$ et qui sont nulles hors de U_j . On ordonne ces fonctions de façon à obtenir f_1, \dots, f_c qui, d'après le lemme 1.3, forment une base de $C(\mathbb{R}^n)/(Jf + If)$. On définit alors un *déploiement versel standard* de f par

$$\bar{f}(u, x) = f(x) + \sum_{i=1}^c u_i f_i(x). \quad (3.1)$$

Ici $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ est dans \mathbb{R}^k , mais les variables u_{c+1}, \dots, u_k ne jouent aucun rôle. En particulier, les ensembles catastrophes de \bar{f} dans \mathbb{R}^k seront déduits de ceux de

$$f + \sum_{i=1}^c u_i f_i,$$

considéré comme déploiement (universel) de dimension c , en multipliant par les composantes triviales \mathbb{R}^{k-c} . Dans le cas des déploiements d -versels, nous considérerons comme *déploiement d -versel standard*

$$\bar{f}(u, x) = f(x) + \sum_{i=1}^{ca} u_i g_i(x), \quad (3.2)$$

où les g_i forment une base, du type de celle construite dans le lemme 1.3, de $C(\mathbb{R}^n)/(Jf + [1])$.

On peut écrire

$$\bar{f} = f + D_1 + D_2 + \dots + D_\mu,$$

où D_j est de la forme

$$D_j(u, x) = \sum_{i=1}^{i_j} u_i^j f_j^i(x),$$

chacun de ces D_j étant nul hors de U_j . Une petite variation de $(u_1^j, u_2^j, \dots, u_{i_j}^j)$ ne modifie la fonction \bar{f}_u que dans le voisinage U_j de S_j . En particulier, on peut imposer, en se plaçant au voisinage de $u = 0$, que cette variation laisse $\bar{f}_u(U_i)$ et $\bar{f}_u(U_j)$ disjoints pour tout $i \neq j$. De plus, on peut imposer que $\bar{f}_u(U_j)$ reste disjoint des valeurs critiques de f autres que les valeurs critiques correspondant aux points critiques déterminants. D'où u est un point catastrophe de bifurcation du déploiement $f + D_j$ pour au moins une valeur j , $j = 1, \dots, \mu$. On peut alors énoncer le lemme suivant.

LEMME 3.2. — Sur un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^k , l'ensemble catastrophe

de bifurcation de \tilde{f} est la réunion des ensembles catastrophes de bifurcation des déploiements élémentaires $f + D_j$, $j = 1, \dots, \mu$.

Supposant en outre que b_1 est par exemple le minimum absolu de f , une petite variation de u au voisinage de 0 laissera ce minimum absolu atteint dans U_1 : seul les paramètres $u_1^1, u_2^1, \dots, u_{i_1}^1$ intervenant dans D_1 déterminent l'évolution de ce minimum. Nous pouvons alors énoncer le lemme suivant.

LEMME 3.3. — Si le minimum absolu de f est b_j , l'ensemble catastrophe de conflit de \tilde{f} est celui de $f + D_j$.

On pourrait énoncer des lemmes analogues pour les d -déploiements. Deux choses apparaissent clairement : d'une part, qu'il suffit d'étudier le cas où f n'a qu'une seule valeur critique, d'autre part, que les ensembles catastrophes ne dépendent que des germes de f au voisinage de ses points critiques. Nous affinerons encore ce résultat pour voir que ces ensembles catastrophes ne dépendent que de la classe d'équivalence de f sous la relation \sim . Pour cela, nous aurons besoin du théorème III ci-après.

DÉFINITION 3.2. — Lorsque F est un déploiement de f relatif à M et G un déploiement de g relatif à N de même dimension que F , nous dirons que F est équivalent à G relativement à M et N , noté $F \approx G$ (rel. M, N), si $K \circ \tilde{F} = \tilde{G} \circ H$, où H et K sont des difféomorphismes, conservant les fibrations, respectivement d'un voisinage de $\{0\} \times M$ sur un voisinage de $\{0\} \times N$ et d'un voisinage de $\tilde{F}(\{0\} \times M)$ sur un voisinage de $\tilde{G}(\{0\} \times N)$ de la forme $H(u, x) = (p(u), h(u, x))$ et $K(u, y) = (p(u), k(u, y))$ avec $p(0) = 0$.

THÉORÈME III. — Soient f et g deux fonctions de codimensions finies, F un déploiement versel de f relatif à M et G un déploiement versel de g relatif à N de même dimension que F . Alors $f, M \sim g, N$ entraîne que $F \approx G$ (rel. M, N).

Démonstration. — Compte tenu des théorèmes I et II, il suffit de montrer que $G \approx \tilde{G}$ (rel. N, M), où \tilde{G} est un déploiement versel de f de même dimension que G . Soient h et k deux difféomorphismes tels que $k \circ g \circ h = f$ et posons $\tilde{G}(u, x) = k(G(u, h(x)))$. Il est clair que $\tilde{G}(0, x) = f(x)$. Si $(w, x) \mapsto \Lambda(w, x)$ est un déploiement quelconque de f , alors $k^{-1}(\Lambda(w, h^{-1}(x)))$ est un déploiement de g . On peut alors induire $k^{-1}(\Lambda(w, h^{-1}(x)))$ par G à l'aide de p . Il est clair que Λ est aussi induit par \tilde{G} à l'aide de p , donc que \tilde{G} est versel.

THÉORÈME IV. — Soient f et g deux fonctions de codimensions finies, S et T leurs ensembles critiques déterminants respectifs. Alors si $f, S \sim g, T$, les ensembles catastrophes $K^b(f)$ et $K^b(g)$ sont localement difféomorphes.

Démonstration. — Nous supposons qu'il existe un difféomorphisme h

d'un voisinage U de S sur un voisinage V de T et un difféomorphisme k convenable tels que $g \circ h = k \circ f$. On considère alors des déploiements versels standards de f et g , soient \bar{f} et \bar{g} . Choisisant convenablement D et E , on peut alors imposer que

$$\bar{f}(u, x) = f(x) + D(u, x)$$

et

$$g(u, x) = g(x) + E(u, x),$$

où $D(u, x) = 0$ si $x \notin M$ et $E(u, x) = 0$ si $x \notin N$ avec M et N des voisinages compacts respectifs de S et T , $S \subset M \subset U$ et $T \subset N \subset V$. Le théorème III permet d'affirmer que $\bar{f} \approx \bar{g}$ (rel. M, N). On a donc $\bar{f}_u, M \sim \bar{g}_{p(u)}, N$, où p est un difféomorphisme local ; de plus, avec les précautions que nous venons de prendre, les seuls points critiques de \bar{f}_u (resp. de $\bar{g}_{p(u)}$) pouvant faire de u un point catastrophe sont dans M (resp. dans N) pour u proche de 0. Il en résulte que $p(u) \in K^b(\bar{f})$ si et seulement si $u \in K^b(\bar{g})$.

THÉORÈME V. — Soient f et g deux fonctions de codimensions finies, S_0 et T_0 leurs ensembles respectifs de minima absolus. Alors si $f, S_0 \sim g, T_0$, les ensembles catastrophes $K^c(f)$ et $K^c(g)$ sont localement difféomorphes.

Ce théorème se démontre de manière analogue au précédent. Il faut cependant s'assurer que le difféomorphisme k qui établit l'équivalence conserve l'orientation. C'est le cas, car il envoie un minimum sur un minimum.

D'après les théorèmes IV et V, il suffit de classifier à équivalence près tous les multigerms possibles f_S pour classifier les ensembles catastrophes. Les lemmes 3.2 et 3.3 nous ramènent au cas où f n'a qu'une seule valeur critique déterminante b ($f(S) = \{b\}$). Nous donnerons maintenant les premiers éléments pour une telle classification.

3.2. Germes en un point

Avec les travaux de Mather [11], Siersma [12] et Arnol'd [13] [14], nous disposons d'une classification des germes de fonctions de petites codimensions. Dans ce genre de travail, on essaye d'établir une liste de polynômes tel que toute fonction vérifiant $c_d(f, a) \leq k$ soit d -équivalente, au voisinage de a , à l'un de ces polynômes au voisinage de 0. Tout au moins pour les codimensions les plus basses, la technique de cette classification est simple. Le corollaire 1.1 permet de se restreindre à prendre pour f un polynôme. Le lemme 1.12 permet de se ramener aux polynômes qui n'ont que des termes de degré ≥ 3 . Alors on essaye toutes les possibilités, à équivalence près, pour les termes de plus bas degré. Dans chaque cas, on « stabilise » en rajoutant, s'il le faut, des termes de degré supérieur pour se mettre dans les conditions du lemme 1.8.

Si on se restreint à l'étude des minima, les situations possibles sont

moins nombreuses. Par exemple, un raisonnement simple amène à voir que f n'a pas de termes de degré 3. Sa partie homogène de degré 4 (si non nulle) est équivalente à x^4 dans le cas d'une variable, ou bien à $(x^2 + y^2)(x^2 + \alpha y^2)$ avec $\alpha > 0$, $x^2(x^2 + y^2)$, x^2y^2 ou x^4 dans le cas de deux variables, etc. Ici $(x^2 + y^2)^2$, $x^2(x^2 + y^2)$, x^2y^2 , x^4 ne sont pas déterminées : il faut alors rajouter des termes de degré supérieur. On est guidé en cela, au moins pour les trois derniers types, par le fait que 0 doit être un minimum isolé. Alors quelques calculs amènent, par exemple, aux types X, Y et W de Arnol'd [14].

Voici un tableau de classification qui comporte tous les germes de fonctions de codimension < 10 , dont les noms furent donnés par Arnol'd.

TABLEAU 1. — Classification des germes en un point.

Type	Représentant	$c_d(f, 0)$	$d(f, 0)$
A_k	$\pm x^{k+1}$, $k \geq 1$	k	1
D_k	$x^2y \pm y^{k-1}$, $k \geq 4$	k	1
E_6	$x^3 \pm y^4$	6	1
E_7	$x^3 + xy^3$	7	1
E_8	$x^3 + y^5$	8	1
P_8	$x^2z + y^3 + ay^2z + z^3$, $a(4a^3 + 27) \neq 0$	8	1
X_9	$x^4 \pm x^2y^2 + ay^4$, $a(4a - 1) \neq 0$	9	1
J_{10}	$x^3 + \varepsilon x^2y^2 + ay^6$, $\varepsilon = \pm 1$, $a(4\varepsilon + 27a) \neq 0$	10	1
X_{p+5}	$x^4 \pm x^2y^2 + ay^p$, $p > 4$, $a \neq 0$	$p + 5$	2

Dans ce tableau, a est un paramètre réel ; en général, des valeurs différentes de a amènent à des germes non équivalents.

3.3. Multigermes

D'une telle classification des germes en un point, on déduit une classification des multigermes f_S , où $S = \{a_1, \dots, a_s\}$ et $f(S) = \{b\}$. En effet, lorsque $T = \{b_1, \dots, b_s\}$ et $g(T) = \{b\}$, $f, S \sim_a g, T$ (cf. définition 1.5') si et seulement s'il existe une permutation σ de $\{1, 2, \dots, s\}$ telle que $f, a_i \sim_a g, b_{\sigma(i)}$ pour $i = 1, \dots, s$. Chaque classe de s -germe f_S est donc déterminée par un s -uplet de classes de germes tels que ceux figurant dans une classification des germes en un point. Le lemme 1.10 permet de déduire la codimension de ce s -uplet. Par exemple, on trouvera dans le tableau 3 ci-après la classification des multigermes f_S de codimension ≤ 3 .

REMARQUE 3.1. — Il découle du tableau 1 et du lemme 1.10 que les multigermes de minima ne comportent que des s -uplets de type A_{2k-1} , $1 \leq k \leq 4$, si la codimension est < 8 .

3.4. Construction des déploiements universels

Ayant classifié les multigerms, on peut construire les déploiements universels correspondants. Soit donc un multigermes f_S , $S = \{a_1, \dots, a_s\}$ avec $f(S) = \{b\}$. Notons $c(f, a_i) = c_i$, $d(f, a_i) = d_i$ et $d(f, b) = d$.

Cas $s = 1$. — On peut supposer que le point critique qui nous intéresse est 0. Si la matrice hessienne de f en 0 est de rang $n - p$, le lemme 1.12 nous ramène au cas où

$$f = v \pm x_{p+1}^2 \pm x_{p+2}^2 \pm \dots \pm x_n^2,$$

avec v un polynôme à p variables figurant dans un tableau tel que le tableau 1. Si f_1, \dots, f_c sont telles que les classes de leurs germes en 0 forment une base de $C_0(\mathbb{R}^p)/(Jv + Iv)_0$, une discussion telle que celle apparaissant dans la démonstration du lemme 1.13 prouve que f_1, \dots, f_c , considérées comme fonctions des n variables x_1, \dots, x_n , sont telles que leurs germes en 0 forment une base de $C_0(\mathbb{R}^n)/(Jf + If)_0$. En particulier, un déploiement universel de f (au voisinage de 0) est donné par

$$\bar{f}(u, x) = f(x) + \sum_{i=1}^c u_i f_i(x),$$

où $u \in \mathbb{R}^c$. Une méthode pour déterminer un tel déploiement est de choisir des polynômes f_1, \dots, f_c tels que les classes des germes en 0 de

$$1, v, v^2, \dots, v^{d-1}, f_1, \dots, f_c$$

forment une base de $C_0(\mathbb{R}^p)/Jv_0$ (cf. formule (1.6)). Si l'on ne s'intéresse qu'aux déploiements d -versels, on pourra prendre comme déploiement d -universel

$$\bar{f}(u, x) = f(x) + \sum_{i=1}^{c+d-1} u_i g_i,$$

où les classes des germes en 0 des g_i forment une base de $\mathcal{M}_0 C(\mathbb{R}^p)/Jv_0$; on peut prendre pour g_i , $i = 1, 2, \dots, c + d - 1$, les fonctions

$$v, v^2, \dots, v^{d-1}, f_1, \dots, f_c.$$

Correspondant à chaque type du tableau 1, nous trouverons dans le tableau 2 ci-dessous des fonctions f_1, \dots, f_c convenables.

Cas $s > 1$. — On peut supposer que $b = 0$ et que f_S est donné par un s -uplet (f_1, f_2, \dots, f_s) de polynômes tels que $f(x) = f_i(x - a_i)$ sur un voisinage de a_i , $i = 1, \dots, s$. Une méthode est la suivante: pour chaque $i = 1, \dots, s$,

TABLEAU 2. — Composantes des déploiements universels.

Type	f_1, f_2, \dots, f_c
A_k	x, x^2, \dots, x^{k-1}
D_k	$x, y, y^2, \dots, y^{k-2}$
E_6	x, y, y^2, xy, xy^2
E_7	x, y, y^2, y^3, y^4, xy
E_8	$x, y, y^2, y^3, xy, xy^2, xy^3$
P_8	$x, y, z, z^2, xy, yz, yz^2$
X_9	$x, x^2, y, y^2, xy, x^2y, xy^2, x^2y^2$
J_{10}	$x, y, y^2, y^3, y^4, xy, xy^2, xy^3, xy^4$
X_{p+s}	$x, x^2, x^3, y, y^2, \dots, y^{p-1}, xy, x^2y, x^2y^2$

on détermine (comme dans le cas $s = 1$) des fonctions $f_j^i, j = 1, \dots, c_i$, telles que les classes des germes en 0 des fonctions

$$1, f_i, f_i^2, \dots, f_i^{d_i-1}, f_1^i, \dots, f_{c_i}^i$$

forment une base de $C_0(\mathbb{R}^n)/(Jf_i)_0$. Nous noterons $\varepsilon_i, i = 1, \dots, s$, une fonction « en cloche » égale à 1 sur un voisinage de a_i et nulle sur un voisinage de a_k pour $k \neq i$. Alors

$$C_S(\mathbb{R}^n)/Jf_S = \bigoplus_{i=1}^s C_{a_i}(\mathbb{R}^n)/Jf_{a_i}^i$$

admet la base obtenue par réunion pour $i = 1, \dots, s$ des classes des germes en S des fonctions déterminées par

$$\varepsilon_i(x), \varepsilon_i(x)f(x), \dots, \varepsilon_i(x)f^{d_i-1}(x), \varepsilon_i(x)f_1^i(x - a_i), \dots, \varepsilon_i(x)f_{c_i}^i(x - a_i)$$

(cf. lemme 1.4). Il existe au moins un indice i pour lequel $d_i = d$. Supposant par exemple que l'un de ces indices est s , on peut alors modifier la base ci-dessus en remplaçant les fonctions $\varepsilon_s, \varepsilon_s f, \dots, \varepsilon_s f^{d-1}$ par $1, f, \dots, f^{d-1}$ puisque l'on remarque que

$$(f^q)_S = \sum_{i=1}^s (\varepsilon_i f^q)_S.$$

On fait apparaître ainsi $1, f, \dots, f^{d-1}$ dont les germes forment une base de I_S/Jf_S (cf. formule (1.6)). On obtient alors une base de $C_S(\mathbb{R}^n)/(Jf + If)_S$ en supprimant les germes de ces fonctions. Partant d'un déploiement versel standard construit à l'aide de cette base et regroupant certains termes, on obtient le lemme suivant.

LEMME 3.4. — Si on suppose que $d = d(f, a_s)$, il existe un déploiement universel de f (localement) donné (aux abus d'écriture près) par

$$\bar{f}(u, x) = f(x) + \sum_{i=1}^{s-1} u_i \varepsilon_i(x) + \sum_{i=1}^{s-1} \varepsilon_i D_i + \varepsilon_s D_s,$$

où $f + D_i$, $i = 1, \dots, s-1$, est un déploiement d -universel de f au voisinage de a_i et $f + D_s$ est un déploiement universel de f au voisinage de a_s .

REMARQUE 3.2. — La quantité $\sum_{i=1}^{s-1} u_i \varepsilon_i(x)$ a pour effet de dissocier les valeurs critiques de f . Elle n'influe pas sur les catastrophes de bifurcation : l'ensemble catastrophe de bifurcation est alors la réunion transverse des ensembles de bifurcation (locaux) des déploiements $f + D_i$, $i = 1, \dots, s$.

Cas particulier. — Si $d_i = 1$ pour tout i , on a

$$\bar{f}(u, x) = f(x) + \sum_{i=1}^{s-1} u_i \varepsilon_i(x) + \sum_{i=1}^s \varepsilon_i(x) D_i,$$

où D_i , $i = 1, \dots, s$, est de la forme $\sum u_k f_k^i$ et tel que $f + D_i$ est un déploiement universel de f au voisinage de a_i construit, par exemple, comme dans le cas $s = 1$.

Si dans ce cas particulier f n'a qu'une seule valeur critique déterminante, $\bar{f}(u, x)$ est aussi un déploiement d -universel. Dans le cas général où d_i est quelconque, on peut énoncer le lemme suivant.

LEMME 3.4'. — Si f n'a qu'une seule valeur critique déterminante, il existe un déploiement d -universel de f donné par

$$\bar{f}(u, x) = f(x) + \sum_{i=1}^{s-1} u_i \varepsilon_i(x) + \sum_{i=1}^s \varepsilon_i(x) D_i;$$

ici D_i , de la forme $\sum u_k f_k^i$, est tel que $f + D_i$ est un déploiement d -universel de f au voisinage de a_i .

EXEMPLE 3.1. — Si les points critiques a_1, \dots, a_s sont non dégénérés, un déploiement universel (ou d -universel et f n'ayant qu'une seule valeur critique déterminante) de f est (localement) donné par

$$\bar{f}(u, x) = f(x) + \sum_{i=1}^{s-1} u_i \varepsilon_i(x).$$

Une telle fonction a un ensemble catastrophe de bifurcation vide. L'ensemble catastrophe de conflit est non vide si a_1, \dots, a_s sont tous des minima (points critiques d'indice 0) : en effet, si l'un des a_i n'est pas un minimum, b n'est pas un minimum absolu. L'ensemble catastrophe de conflit est alors la réunion de portions d'hyperplans

$$\bigcup_{i=1}^{s-1} \{ u_i = 0, u_i < u_j \text{ si } j \neq i \} \cup \{ u_i = u_j \text{ si } i \neq j, u_i < u_k \text{ si } k \neq i \text{ et } k \neq j, u_i < 0 \} .$$

On peut visualiser cet ensemble de la façon suivante. On part du $(s - 1)$ -simplexe de sommets $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1), (-1, -1, \dots, -1)$ dans \mathbb{R}^{s-1} , on le subdivise à partir de 0 et on ne garde que les n -simplexes, $n < s - 1$, adhérents à 0.

EXEMPLE 3.2. — On considère le bigerme en $\{0, 1\}$ de représentant $f \in C(\mathbb{R})$ tel que $f, 0 \sim x^4, 0$ et $f, 1 \sim x^2, 0$. On peut prendre

$$f(x) = \varepsilon_0(x)x^4 + \varepsilon_1(x)(x - 1)^2,$$

où ε_0 est une fonction égale à 1 sur un voisinage de 0 et à 0 sur un voisinage de 1, $\varepsilon_1 = 1 - \varepsilon_0$. Alors on a $c(f, 0) = 2, c(f, 1) = 0, d(f, 0) = d(f, 1) = 1$ et on peut prendre

$$\bar{f}(u, v, w, x) = \varepsilon_0(x)(x^4 + ux^2 + vx + w) + \varepsilon_1(x)(x - 1)^2 .$$

L'ensemble catastrophe de bifurcation est une cuspide multipliée par une composante triviale, puisque dans le plan $w = w_0$ on obtient une cuspide. Qu'en est-il de l'ensemble catastrophe de conflit ? La fonction f est minimale en $x = 0$ et $x = 1$, donc $(u, v, w) = 0$ est un point de conflit. Pour $(u, v, w) \neq 0, \bar{f}_{(u,v,w)}$ admet le minimum 0 atteint au point $x = 1$: les points de conflit seront donc les points de conflit de $x^4 + ux^2 + vx + w$, à condition que le minimum absolu soit négatif, ou bien les points (u, v, w) pour lesquels $x^4 + ux^2 + vx + w$ admet 0 comme minimum absolu. Les conflits du premier type correspondent aux conflits de $x^4 + ux^2 + vx$, soit à $v = 0, u \leq 0$. Comme le minimum absolu de $x^4 + ux^2 + vx + w$ est alors $-u^2/4 + w$, étant atteint aux points $x = \pm (-u/2)^{\frac{1}{2}}$, on obtient la portion de plan $v = 0, u \leq 0, w \leq u^2/4$. Les conflits du deuxième type sont compris parmi les points (u, v, w) qui vérifient

$$\begin{aligned} x^4 + ux^2 + vx + w &= 0, \\ 4x^3 + 2ux + v &= 0 ; \end{aligned}$$

on trouve là l'équation de la queue d'aronde. Prenant pour axe des w l'axe vertical montant, on se rend compte que seule la partie supérieure de la queue d'aronde correspond aux conflits. L'ensemble de conflit obtenu est représenté sur la figure 1.

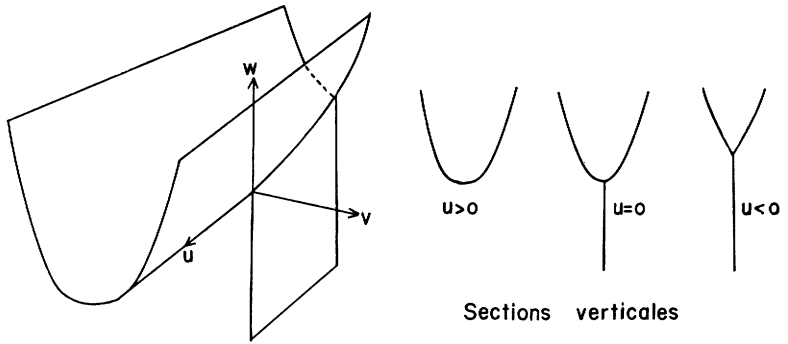






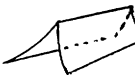

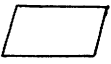

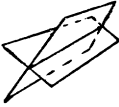




FIG. 1. — La coque.

TABLEAU 3. — Ensembles catastrophes.


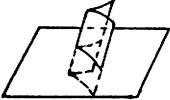
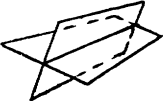
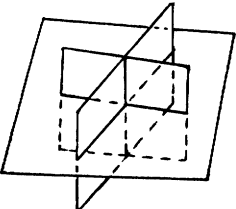
Multigerme	Codim	Conflit	Bifurcation
x^3	1	\emptyset	{0} pli
$-x^2, \pm x^2$	1	\emptyset	\emptyset
x^2, x^2	1	{0} pli	\emptyset
x^4	2	 demi-pli	 cuspide
$-x^2, \pm x^2, \pm x^2$	2	\emptyset	\emptyset
x^2, x^2, x^2	2	 point triple	\emptyset
$x^3, \pm x^2$	2	\emptyset	 pli
x^5	3	\emptyset	 queue d'aronde
x^4, x^2	3	 coque	 cuspide
$x^4, -x^2$	3	\emptyset	 cuspide
$x^3, \pm x^2, \pm x^2$	3	\emptyset	 pli
$-x^2, \pm x^2, \pm x^2, \pm x^2$	3	\emptyset	\emptyset

x^2, x^2, x^2, x^2	3		point quadruple	\emptyset
x^3, x^3	3	\emptyset		 intersection de deux plis
$x^2 y + y^3$	3	\emptyset		 vague
$x^2 y - y^3$	3	\emptyset		 cheveu

Pour terminer cette section, donnons dans le tableau 3 la liste des ensembles catastrophes que l'on rencontre dans $\mathbb{R}^k, k \leq 3$.

Il conviendrait de rajouter à ce tableau les catastrophes (de bifurcation) correspondant à des valeurs critiques multiples. On trouve alors le tableau suivant.

TABLEAU 4. — *Ensembles catastrophes (suite).*

Multigerme	Codim	Bifurcation	
x^3 x^3	2		Intersection de deux plis
x^3 x^4	3		Intersection pli-cuspide
x^3 x^3, x^2	3		Intersection de deux plis
x^3 x^3 x^3	3		Intersection de trois plis

Remarquons que l'on ne retrouve que le premier cas pour les déploiements d -versels ; les trois autres sont respectivement de d -codimension 4, 4 et 5.

REMARQUE 3.3. — Comme on l'indique par exemple dans [2], les déploiements versels peuvent être caractérisés par le fait que les multijets de $F(u, x)$ sont transverses à certaines orbites dans l'espace des multijets de fonctions. Cette caractérisation nous renseigne sur la nature topologique des ensembles catastrophes : on en déduit, par exemple, une stratification de ces ensembles. Elle peut aussi être utilisée pour démontrer que les déploiements sont génériquement versels si $n = 1$ ou bien si $n = 2$ et $k \leq 6$ ou bien si $n > 2$ et $k \leq 5$. S'intéressant uniquement aux conflits, ces techniques s'appliquent aux déploiements $F(u, x)$ qui sont versels au voisinage des minima : on peut caractériser ces fonctions par le fait que leurs multijets sont transverses aux « orbites de minima ». Cette restriction permet d'affirmer que l'on est génériquement dans ce cas si $n = 1$ ou $n > 1$ et $k \leq 6$. Or nous avons vu qu'en codimension ≤ 6 les seuls germes de minima permis sont les germes de type A_k . Nous pouvons donc affirmer que génériquement pour $n = 1$ ou $n > 1$ et $k \leq 6$ on ne rencontre que des conflits de type A_k . On remarque que dans ce cas une seule variable d'état suffit à déterminer l'ensemble catastrophe.

Conventions de retard. — L'étude des déploiements versels abordée dans ce travail permet d'étudier d'autres types d'ensembles catastrophes. Dans les modèles physiques, les catastrophes de conflit correspondent à la convention de Maxwell qui consiste à considérer que l'état adopté par le système physique est celui qui correspond au minimum absolu. Les catastrophes de bifurcation correspondent à la convention du retard parfait qui consiste à considérer que l'état, un minimum local, persiste jusqu'à destruction de ce minimum. On pourrait introduire d'autres conventions de retard : l'une d'elles serait de considérer que l'état du système persiste dans un minimum local tant qu'il n'existe pas d'autre minimum plus bas dont la valeur diffère du premier par ε , cette quantité étant fixée à l'avance. Le cadre d'étude de ce modèle est celui des déploiements d -versels. Les multigerms correspondant à ces catastrophes sont, avec certains multigerms de bifurcation, des germes ayant deux valeurs de différence égale à ε .

Par exemple, si f est égale à x^4 , au voisinage de 0, et à $(x - 1)^2 - \varepsilon$ au voisinage de 1, un déploiement d -universel est alors donné par

$$\bar{f}(u, v, w, x) = \varepsilon_0(x)(x^4 + ux^2 + vx + w) + \varepsilon_1(x)((x - 1)^2 - \varepsilon).$$

Son ensemble catastrophe est une cuspidale d'arête Ow limitée par la partie supérieure d'une queue d'aronde, comme l'indique la figure 2.

Toujours dans le cadre des déploiements d -versels, on pourrait étudier les catastrophes associées à une convention de retard faisant intervenir les barrières de potentiel séparant les minima. Par exemple, on peut convenir

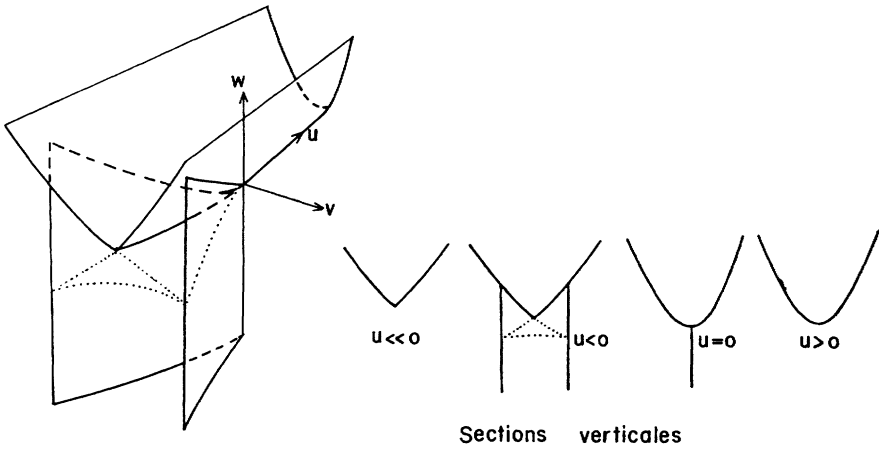


FIG. 2. — Le soc.

du fait que le système persiste dans son état tant qu'une barrière de potentiel supérieure à ε le sépare du minimum absolu. Avec cette convention, l'ensemble catastrophe du déploiement $x^4 + ux^2 + vx$ est du type de celui représenté sur la figure 3.

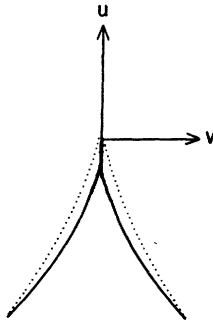


FIG. 3. — La pseudo-cuspide.

REMERCIEMENTS

L'un des auteurs (J.-P. Dufour) remercie le Département des Sciences Pures de l'Université du Québec à Rimouski de sa bienveillante hospitalité.

REFERENCES

[1] R. THOM, *Stabilité structurelle et morphogénèse*. Benjamin, Reading, Mass., 1972.
 [2] F. LATOUR, Stabilité des champs d'applications différentiables ; généralisation d'un théorème de J. Mather. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 268, 1969, p. 1331.

- [3] R. THOM, Topological models in biology. *Topology*, vol. **8**, 1969, p. 313.
- [4] R. THOM, *Modèles mathématiques de la morphogénèse*, chapitre 3. Théorie du déploiement universel, I. H. E. S., Bures-sur-Yvette, multigr., 1971.
- [5] G. WASSERMANN, Stability of Unfoldings. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. **393**, Springer-Verlag, Berlin, 1974.
- [6] J. J. DUISTERMAAT, Oscillatory Integrals, Lagrange Immersions, and Unfoldings of Singularities. *Commun. pure appl. Math.*, vol. **XXVII**, no. 2, 1974, p. 207.
- [7] F. SERGERAERT, Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications. *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, 4^e série, t. **5**, 1972, p. 599.
- [8] J.-C. TOUGERON, Stabilité des applications différentiables. *Séminaire Bourbaki*, n^o 336, 1967, p. 1.
- [9] J. N. MATHER, Stability of C^∞ mappings. I. The division theorem. *Ann. of Math.*, no. 87, 1968, p. 89.
- [10] J.-G. DUBOIS et J.-P. DUFOUR, La théorie des catastrophes. II. Dynamiques gradientes à une variable d'état. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Section A, vol. **XX**, n^o 2, 1974, p. 135.
- [11] J. N. MATHER, Stability of C^∞ mappings. III. Finitely determined map-germs. *Publ. Math. I. H. E. S.*, no. 35, 1968, p. 279.
- [12] D. SIERSMA, The singularities of C^∞ -functions of right-codimension smaller or equal than eight. *Indag. Math.*, vol. **35**, 1973, p. 31.
- [13] V. I. ARNOL'D, Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups of A_k , D_k , E_k and Lagrangian singularities. *Funct. Anal. and its Appl.*, vol. **6**, no. 4, 1972, p. 254.
- [14] V. I. ARNOL'D, Remarques sur la méthode de la phase stationnaire et les nombres de Coxeter (en russe). *Uspekhi Mat. Nauk*, t. **XXVIII**, n^o 5, 1973, p. 17.

(Manuscrit reçu le 6 janvier 1975)