ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

J. EISENSTAEDT

Une nouvelle classe de solutions des équations d'Einstein à symétrie sphérique. Application à des modèles cosmologiques multi-couches

Annales de l'I. H. P., section A, tome 24, nº 2 (1976), p. 179-211

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1976__24_2_179_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XXIV, n° 2, 1976, p. 179-211. *Physique théorique.*

Une nouvelle classe de solutions des équations d'Einstein à symétrie sphérique. Application à des modèles cosmologiques multi-couches

par

J. EISENSTAEDT
Institut Henri Poincaré, Paris
Laboratoire de Physique Théorique,
11, rue P. et M. Curie, 75231 Paris, Cedex 5

RÉSUMÉ. — La solution générale des équations d'Einstein à symétrie sphérique est obtenue dans le cas où le tenseur matériel est décrit par un fluide parfait dont la densité de masse est une fonction en escalier de la variable radiale. Cette solution dynamique permet de construire des modèles cosmologiques comprenant une inhomogénéité centrale.

Le § 1 est consacré à un rappel des équations de champ à symétrie sphérique d'Einstein, écrites dans un système de coordonnées entraînées.

Le tenseur matériel est supposé du genre fluide parfait et on introduit une hypothèse supplémentaire d'indépendance radiale de la densité de masse (§ 2). Cette hypothèse permet l'utilisation d'un système de coordonnées isotropiques entraînées. On construit un modèle sphérique dont la densité de masse est une fonction en escalier de la variable radiale (§ 3). Les problèmes liés au système de coordonnées sont ensuite étudiés (§ 4). L'intégration des équations de champ est faite aux § 5 et 6. On propose au § 7 une classification des divers types de solutions. Les cas particuliers inclus dans notre solution générale sont alors explicités ; les solutions de Thomson et Whitrow, Robertson et Friedman au § 8 ; la solution de Schwarzschild au § 9 ; la solution de Mac Vittie au § 10.

Les § 11, 12 et 13 sont consacrés à l'étude approchée des solutions exactes obtenues sous forme implicite aux § 5 et 6. Le § 14 est consacré à l'interprétation physique des résultats obtenus.

§ 1. LES ÉQUATIONS DE CHAMP A SYMÉTRIE SPHÉRIQUE : RAPPELS

Soit une variété pseudo-riemannienne $V^4(C^2, C^4$ p. m.) munie de la métrique de type hyperbolique normal de signature $(---+)$:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1}$$

La connexion associée, le tenseur de Riemann-Christoffel, le tenseur de Ricci, la courbure riemannienne scalaire sont définis de manière usuelle.

Nous supposons le tenseur matériel T^μ_ν du genre fluide parfait :

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} \tag{2}$$

où $u^\mu = \dfrac{dx^\mu}{ds}$ représente la 4-vitesse de l'élément du fluide (avec $u^\mu u_\mu = 1$)

où ρ représente la densité de masse

et p représente la pression.

Les équations de champ d'Einstein s'écrivent :

$$S^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(R - 2\Lambda) = -8\pi T^{\mu\nu} \tag{3}$$

où Λ représente la constante cosmologique. On a choisi des unités telles que $G = c = 1$.

Les équations de conservation du tenseur matériel s'écrivent :

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{4}$$

Le problème est défini par 15 fonctions inconnues

— les 10 potentiels de gravitation $g^{\mu\nu}$,
— les 3 composantes indépendantes de la 4-vitesse u^μ,
— la densité de masse ρ,
— la pression p

or, le libre choix du système de coordonnées nous permet de fixer arbitrairement 4 potentiels tandis que les équations de champ (3) nous fournissent 10 équations. Il manque donc une équation.

En ce qui concerne les conditions de raccordement, nous supposons [*1*] qu'il existe un système de coordonnées admissible par rapport auquel les potentiels et leurs dérivées premières sont continus à travers toute hypersurface de discontinuité Σ. Alors si Σ est défini par :

$$f(x^\alpha) = 0 \tag{5}$$

on doit avoir :

$$[S^\alpha_\beta \partial_\alpha f] = 0 \tag{6}$$

où le crochet exprime le saut de la fonction à travers Σ.

Par rapport au système de coordonnées polaires sphériques (r, θ, φ, t) l'élément linéaire d'espace-temps a la forme :

$$ds^2 = -e^{\lambda}dr^2 - e^{\psi}d\Omega^2 + e^{\nu}dt^2 + 2adrdt \tag{7}$$

où λ, ψ, ν, a sont des fonctions de r et t et où $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$.

Nous supposerons que ce système de coordonnées est entraîné par le fluide.

Alors le changement de coordonnées :

$$\left.\begin{aligned} d\bar{t} &= \eta(adr + e^{\nu}dt) \\ \bar{r} = r, \quad \bar{\theta} &= \theta, \quad \bar{\varphi} = \varphi \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

où η est un facteur intégrant, est compatible avec le caractère entraîné des coordonnées et permet de mettre l'élément linéaire d'espace-temps (7) sous la forme :

$$ds^2 = -e^{\bar{\lambda}}d\bar{r}^2 - e^{\bar{\psi}}d\Omega^2 + e^{\bar{\nu}}d\bar{t}^2 \tag{9}$$

que l'on notera ensuite à nouveau sans barre.

Et la 4-vitesse s'écrit :

$$u^{\alpha} = \delta_4^{\alpha} e^{-\nu/2} \tag{10}$$

Ces conditions sont uniquement conservées par les transformations orthogonales du genre :

$$\left.\begin{aligned} \tilde{r} &= \tilde{r}(r) \\ \tilde{t} &= \tilde{t}(t) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Dans le système de coordonnées ainsi défini les composantes du tenseur de Riemann-Christoffel s'écrivent :

$$\left.\begin{aligned}
R^{12}{}_{24} = R^{13}{}_{34} &= e^{-\lambda}\left(\frac{\dot{\psi}'}{2} - \frac{\psi'\dot{\lambda}}{4} - \frac{\dot{\psi}\nu'}{4} + \frac{\dot{\psi}\psi'}{4}\right) \equiv B \\
R^{24}{}_{24} = R^{34}{}_{34} &= -e^{-\lambda}\frac{\nu'\psi'}{4} + e^{-\nu}\left(\frac{\ddot{\psi}}{2} + \frac{\dot{\psi}^2}{4} - \frac{\dot{\psi}\dot{\nu}}{4}\right) \equiv C \\
R^{23}{}_{23} &= e^{-\psi} - e^{-\lambda}\frac{\psi'^2}{4} + e^{-\nu}\frac{\dot{\psi}^2}{4} \equiv D \\
R^{12}{}_{12} = R^{13}{}_{13} &= e^{-\lambda}\left(-\frac{\psi''}{2} - \frac{\psi'^2}{4} + \frac{\psi'\lambda'}{4}\right) + e^{-\nu}\left(\frac{\dot{\psi}\dot{\lambda}}{4}\right) \equiv E \\
R^{14}{}_{14} &= e^{-\lambda}\left(-\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4}\right) + e^{-\nu}\left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4}\right) \equiv F
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

où

$$\alpha' = \frac{\partial\alpha}{\partial r} \qquad \dot{\alpha} = \frac{\partial\alpha}{\partial t}$$

Les équations d'Einstein s'écrivent alors :

$$\left.\begin{aligned} 8\pi T^1_1 &= 2C + D - \Lambda \\ 8\pi T^2_2 &= E + C + F - \Lambda = 8\pi T^3_3 \\ 8\pi T^4_4 &= 2E + D - \Lambda \\ 8\pi T^1_4 &= -\,2B \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Compte tenu de (2) et après quelques manipulations les équations d'Einstein s'écrivent :

$$8\pi p - \Lambda = -\,e^{-\psi} + e^{-\lambda}\left(\frac{\psi'^2}{4} + \frac{\nu'\psi'}{2}\right) + e^{-\nu}\left(\frac{\dot\psi\dot\nu}{2} - \ddot\psi - \frac{3\dot\psi^2}{4}\right) \tag{14}$$

$$-\,8\pi\rho - \Lambda = -\,e^{-\psi} + e^{-\lambda}\left(\frac{3\psi'^2}{4} + \psi'' - \frac{\lambda'\psi'}{2}\right) - e^{-\nu}\left(\frac{\dot\psi\dot\lambda}{2} + \frac{\dot\psi^2}{4}\right) \tag{15}$$

$$e^{-\psi} + e^{-\lambda}\left(\frac{\psi''}{2} + \frac{\nu''}{2} - \frac{\psi'}{4}(\nu' + \lambda') + \frac{\nu'}{4}(\nu' - \lambda')\right)$$
$$= e^{-\nu}\left(\frac{\ddot\lambda}{2} - \frac{\ddot\psi}{2} + \frac{\dot\lambda^2}{4} - \frac{\dot\psi^2}{2} + \frac{\dot\lambda\dot\psi}{4} - \frac{\dot\lambda\dot\nu}{4} + \frac{\dot\psi\dot\nu}{4}\right) \tag{16}$$

$$\frac{\psi'}{2}(\dot\lambda - \dot\psi) = \dot\psi' - \dot\psi\frac{\nu'}{2} \tag{17}$$

Les équations de conservation (4) restreignent l'indépendance des équations de champ et s'écrivent :

$$\dot\rho + (\rho + p)(\dot\psi + \dot\lambda/2) = 0 \tag{18}$$

$$p' + (\rho + p)\nu'/2 = 0 \tag{19}$$

Posant :

$$2M(r, t) = e^{\psi/2}\left(1 + \frac{\dot\psi^2}{4}e^{\psi-\nu} - \frac{\psi'^2}{4}e^{\psi-\lambda} - \frac{\Lambda}{3}e^{\psi}\right) \tag{20}$$

l'équation (15) se met grâce à (17) sous la forme :

$$M' = \frac{4\pi\rho}{3}\frac{\partial}{\partial r}(e^{3\psi/2}) \tag{21}$$

et de la même manière (14) s'écrit :

$$2\dot M = -\,\frac{4\pi}{3}p(e^{3\psi/2}) \tag{22}$$

Dans le système de coordonnées entraîné et t-orthogonal (9) notre problème est donc défini par 5 fonctions inconnues :

— trois potentiels de gravitation λ, ψ, ν,
— la densité de masse ρ,
— la pression p.

Nous disposons de 4 équations indépendantes (par exemple les équations (21) (22) (17) et (19)) que nous nous efforcerons de simplifier et d'intégrer. Cinq inconnues, quatre équations, afin de déterminer complètement le problème, il est donc nécessaire d'introduire une condition supplémentaire. Ce peut être soit une équation de compressibilité du type $p = p(\rho)$, soit une condition concernant l'une des variables physiques.

§ 2. LA CONDITION $\rho' = 0$

Sur un ouvert de la variété, limité par deux hypersurfaces orientées dans le temps nous supposerons que la densité de masse n'est fonction que du temps :

$$\rho' = 0 \tag{23}$$

Nous postulerons au paragraphe 13 une équation de compressibilité du type $p = p(\rho(t), \Sigma)$ sur une hypersurface Σ, qui permettra de préciser l'évolution temporelle de la densité de masse.

Revenant à nos équations de champ assorties de la condition (23), (21) s'intègre alors en :

$$\frac{4\pi\rho}{3} e^{3\psi/2} = \mathrm{M}(r, t) - m(t) \tag{24}$$

et (19) en :

$$8\pi(\rho + p) = \mathrm{K}(t)e^{-\nu/2} \tag{25}$$

où $\mathrm{K}(t)$ et $m(t)$ sont des fonctions arbitraires d'intégration.

Dérivant l'équation (24) par rapport au temps et tenant compte de (22) on a :

$$\frac{8\pi\dot{\rho}}{3} + 8\pi(\rho + p)\frac{\dot{\psi}}{2} = -2\dot{m}e^{-3\psi/2} \tag{26}$$

et grâce à (18) :

$$8\pi(\rho + p)(\dot{\psi} - \dot{\lambda}) = -12\dot{m}e^{-3\psi/2} \tag{27}$$

§ 3. LE MODÈLE A n-COUCHES

Considérons une distribution matérielle à symétrie sphérique formée de $(n - 1)$ couches concentriques et plongée dans un fluide cosmologique. Nous supposons que les densités de masse de chaque couche de ce modèle — y compris celle du fluide cosmologique — ne dépendent que du temps. La densité de masse est donc une fonction de la variable radiale :

$$\left.\begin{array}{lll} \rho(r, t) = \rho_i(t) & r_{i-1} < r < r_i & (i = 1, \ldots, (n-1)) \\ \rho(r, t) = \rho_n(t) & r_{n-1} < r & (r_0 = 0) \end{array}\right\} \tag{28}$$

Les hypersurfaces de discontinuité Σ_i étant définies par :

$$\Sigma_i : r = r_i \qquad (i = 1, \ldots, (n-1)) \tag{29}$$

Nous supposons qu'il existe un système admissible de coordonnées entraînées. Les potentiels gravitationnels, leurs dérivées premières sont continus à la traversée de chaque hypersurface Σ_i, la pression est aussi continue et r_i est une constante (29).

Convenons que chaque fonction est affectée de l'indice « i » de la couche O_i ($r_{i-1} < r < r_i$) sur laquelle elle est définie. Alors sur chaque couche O_i, les équations du § 2 s'écrivent :

$$ds_i^2 = -e^{\lambda_i}dr^2 - e^{\psi_i}d\Omega^2 + e^{\nu_i}dt^2 \tag{30}$$

$$2M_i(r, t) = e^{\psi_i/2}\left(1 + \frac{\dot{\psi}_i^2}{4}e^{\psi_i - \nu_i} - \frac{\psi_i'^2}{4}e^{\psi_i - \lambda_i} - \frac{\Lambda}{3}e^{\psi_i}\right) \tag{31}$$

$$\frac{4}{3}\pi\rho_i e^{3\psi_i/2} = M_i - m_i \tag{32}$$

$$K_i\frac{\dot{\psi}_i}{2}e^{-\nu_i/2} = -2\dot{m}_i e^{-3\psi_i/2} - \frac{8\pi}{3}\dot{\rho}_i \tag{33}$$

$$8\pi(\rho_i + p_i) = K_i e^{-\nu_i/2} \tag{34}$$

$$\frac{\psi_i'}{2}(\dot{\lambda}_i - \dot{\psi}_i) = \dot{\psi}_i' - \dot{\psi}_i\nu_i'/2 \tag{35}$$

$$\dot{\rho}_i + (\rho_i + p_i)(\dot{\psi}_i + \dot{\lambda}_i/2) = 0 \tag{36}$$

L'équation (32) a une interprétation physique simple [2] [3]. Si nous interprétons $e^{\psi/2}$ comme le rayon physique, la masse incluse dans la boule de coordonnée radiale r s'écrit :

$$\mathcal{M}(r, t) = \frac{4}{3}\pi\rho(r, t)(e^{3\psi/2})_r \tag{37a}$$

avec

$$(e^{\psi/2})_{r=0} = 0 \tag{37b}$$

Et vu la définition de $\rho(r, t)$ (28) on démontre aisément que :

$$\mathcal{M}(r, t) = \frac{4}{3}\pi\sum_{j=1}^{i-1}\rho_j((e^{3\psi/2})_{r_j} - (e^{3\psi/2})_{r_{j-1}}) + \frac{4}{3}\pi\rho_i((e^{3\psi/2})_r - (e^{3\psi/2})_{r_{i-1}}) \qquad (r_{i-1} < r \leqslant r_i) \tag{38}$$

Nos conditions de raccordement impliquent d'autre part que $M(r, t)$ est une fonction continue à la traversée des Σ_i (31), d'où grâce à (32) :

$$m_{i+1} - m_i = \frac{4}{3}\pi(\rho_i - \rho_{i+1})(e^{3\psi_i/2})_{r_i} \tag{39}$$

Alors :

$$m_i - m_1 = \frac{4}{3}\pi \sum_{j=1}^{i-1} (\rho_j - \rho_i)((e^{3\psi/2})_{r_j} - (e^{3\psi/2})_{r_{j-1}}) \tag{40}$$

Et, grâce à (32), on a :

$$\mathrm{M}_i - m_1 = \frac{4}{3}\pi\rho_i((e^{3\psi/2})_r - (e^{3\psi/2})_{r_{i-1}}) + \frac{4}{3}\pi \sum_{j=1}^{i-1} \rho_j((e^{3\psi/2})_{r_j} - (e^{3\psi/2})_{r_{j-1}}) \quad (r_{i-1} < r \leqslant r_i) \tag{41}$$

Nous avons alors plusieurs raisons de poser :

$$m_1(t) = 0 \tag{42}$$

Tout d'abord écrivant (32) dans la première couche, on a :

$$\frac{4}{3}\pi\rho_1 e^{3\psi_1/2} = \mathrm{M}_1 - m_1 \tag{43}$$

Pour que M_1 soit finie au centre et compte tenu de la condition (37*b*), il est nécessaire d'imposer (42). D'autre part, comparant (38) et (41) on a :

$$\mathscr{M}(r, t) = \mathrm{M}(r, t) - m_1 \tag{44}$$

La condition (42) permet donc de donner à $\mathrm{M}(r, t)$ une signification physique précise : c'est la masse de la boule de coordonnée radiale r. Cette interprétation sera corroborée au § 9 par l'étude de la solution extérieure : si ρ_i est nulle, la couche O_i est évidemment décrite par la solution de Schwarzschild et $\mathrm{M}_i(r_{i-1})$ est la masse de Schwarzschild.

Enfin, il suffit d'imposer que les potentiels et leurs dérivées premières sont finies au centre pour retrouver (42) grâce à (31) et (37*b*).

Démontrons maintenant que :

$$\dot{m}_i = 0 \tag{45}$$

Sur l'hypersurface Σ_i, les potentiels, leurs dérivées premières sont continus. Alors (36) s'écrit :

$$(\rho_i + p_i(r_i, t))\dot{\rho}_{i+1} = \dot{\rho}_i(\rho_{i+1} + p_{i+1}(r_i, t)) \tag{46}$$

Sur Σ_i, l'équation (33) prend deux formes différentes : dans O_i :

$$\frac{8\pi}{3}\dot{\rho}_i + 8\pi(\rho_i + p_i)\frac{\dot{\psi}_i}{2} \underset{\Sigma_i}{=} -2\dot{m}_i e^{-\frac{3}{2}\psi_i} \tag{47a}$$

et dans O_{i+1} :

$$\frac{8\pi}{3}\dot{\rho}_{i+1} + 8\pi(\rho_{i+1} + p_{i+1})\frac{\dot{\psi}_{i+1}}{2} \underset{\Sigma_i}{=} -2\dot{m}_{i+1} e^{-\frac{3}{2}\psi_{i+1}} \tag{47b}$$

Multipliant (47*a*) par $(\rho_{i+1} + p_{i+1})_{\Sigma_i}$ et (47*b*) par $(\rho_i + p_i)_{\Sigma_i}$ utilisant la continuité de $\dot{\psi}_i$ et de ψ_i sur Σ_i, grâce à (46) on a :

$$\dot{m}_i(\rho_{i+1} + p_{i+1}) \underset{\Sigma_i}{=} \dot{m}_{i+1}(\rho_i + p_i) \tag{48}$$

Supposont que ni O_i, ni O_{i+1} ne sont vides, grâce à (42), par récurrence on a démontré (45).

Nous travaillerons désormais dans une couche O_i quelconque et sauf nécessité nous n'expliciterons pas les indices de couche. Grâce à (45), l'équation (33) s'écrit :

$$K\frac{\dot{\psi}}{2}e^{-\nu/2} = -\frac{8\pi}{3}\dot{\rho}(t) \tag{49}$$

qui implique :

$$\dot{\psi}' = \dot{\psi}\frac{\nu'}{2} \tag{50}$$

et donc, grâce à (35)

$$\dot{\lambda} = \dot{\psi} \tag{51}$$

qui s'intègre en :

$$e^{\lambda-\psi} = h^2(r) \tag{52}$$

où $h(r)$ est une fonction arbitraire d'intégration.

Alors le changement de coordonnées :

$$\frac{d\bar{r}^2}{\bar{r}^2} = h^2(r)dr^2 = e^{\lambda-\psi}dr^2 \tag{53}$$

conserve la symétrie sphérique et le caractère entraîné des coordonnées.

Par rapport à ce nouveau système de coordonnées, l'élément linéaire d'espace-temps prend une forme spatialement isotropique :

$$d\bar{s}^2 = -\frac{e^{\psi}}{\bar{r}^2}(d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2) + e^{\nu}dt^2 \tag{54}$$

que nous noterons désormais à nouveau sans barre et les équations de champ s'écrivent :

$$1 - \frac{\psi'^2}{4}r^2 + \frac{\dot{\psi}^2}{4}e^{\psi-\nu} = \frac{8\pi\rho + \Lambda}{3}e^{\psi} + 2me^{-\psi/2} \tag{55}$$

$$8\pi(\rho + p) = Ke^{-\nu/2} \tag{56}$$

$$\dot{\psi}Ke^{-\nu/2} = -\frac{16\pi}{3}\dot{\rho} \tag{57}$$

Remarquons que le caractère quadratique du changement de coordonnées (53) ne permet pas de définir univoquement le nouveau système de coordonnées (barré). Nous étudierons au § 4 les conséquences de cette ambiguïté.

L'équation (55) peut être mise sous forme intégrale ; posons :

$$\alpha(t) = \frac{8\pi\rho(t) + \Lambda}{3} - \frac{\dot{\psi}^2}{4} e^{-\nu} = \frac{8\pi\rho + \Lambda}{3} - \left(\frac{8\pi}{3K}\dot{\rho}\right)^2 \tag{58}$$

compte tenu de (57)

Alors (55) s'écrit :

$$\frac{\psi'^2}{4} r^2 = 1 - \alpha(t)e^{\psi} - 2me^{-\psi/2} \tag{59}$$

Cette équation introduit deux paramètres fondamentaux. D'une part $\alpha(t)$ qui induit la dépendance cosmologique et donc temporelle du mobile. D'autre part, le terme en m qui représente la contribution de l'amas central au potentiel gravitationnel. Posant

$$e^{\psi/2} = u(r, t) \tag{60}$$

l'équation (59) se met sous la forme :

$$\int \frac{du}{[-\alpha u(u^3 - u/\alpha + 2m/\alpha)]^{1/2}} = \varepsilon \int \frac{dr}{r} \qquad (\text{où } \varepsilon = \pm 1) \tag{61}$$

Notons que nos conditions de raccordement s'écrivent :

$$\dot{\rho}_{i+1}K_i = \dot{\rho}_i K_{i+1} \tag{62}$$

$$\alpha_{i+1} - \alpha_i = \frac{8\pi}{3}(\rho_{i+1} - \rho_i) \tag{63}$$

$$\frac{4}{3}\pi(\rho_{i+1} - \rho_i)(e^{3\psi_i/2})_{r_i} = m_i - m_{i+1} \tag{64}$$

$$8\pi(\rho_{i+1} - \rho_i) = (K_{i+1} - K_i)(e^{-\nu_i/2})_{r_i} \tag{65}$$

Seules les fonctions ρ, m, α et K peuvent être discontinues à la traversée de Σ_i.

§ 4. PROBLÈMES DE COORDONNÉES

Avec la notation (60) l'équation (59) s'écrit :

$$u'^2 r^2 = -\alpha u(u^3 - u/\alpha + 2m/\alpha) \tag{66}$$

Le discriminant du binôme en u du second membre de (66) s'écrit

$$\Delta = -\frac{4}{27\alpha^3}(1 - 27\alpha m^2) \tag{67}$$

Nous restreindrons notre étude aux modèles dont les paramètres vérifient la relation

$$\lambda^2 \equiv |\alpha| m^2 < \frac{1}{27} \tag{68}$$

condition qui n'exclut aucun cas physique (cf. § 14).

L'équation (66) est invariante par les transformations σ et τ :

$$\sigma : u \to -u, \qquad m \to -m \tag{69}$$

$$\tau : \tau(r) = \frac{a^2}{r} \tag{70}$$

donc, si $u = \varpi(r, \alpha, m)$ est solution de (66) alors $u = -\varpi(r, \alpha, -m)$ est encore solution et $u = \varpi(\tau(r), \alpha, m)$ l'est aussi.

L'équation (66) peut encore s'écrire :

$$u'r = \varepsilon[-\alpha u(u^3 - u/\alpha + 2m/\alpha)]^{1/2} \tag{71}$$

avec $\varepsilon = \pm 1$.

Et si nous notons $\overset{+}{u}(\alpha, m, r)$, [resp. $\overset{-}{u}(\alpha, m, r)$] la solution de (71) pour $\varepsilon = +1$, [resp. $\varepsilon = -1$] on aura alors :

$$\overset{+}{u}(\tau(r)) = \overset{-}{u}(r)$$

C'est en ce sens que u est invariante par τ. On peut démontrer facilement que l'élément linéaire d'espace-temps est invariant par τ en nous appuyant d'une part sur le fait que u est τ involutive et d'autre part que :

$$\tau^2 dr^2 = r^2 d\tau^2 \tag{73}$$

Reprenons le changement de coordonnées (53) qui nous a permis d'absorber le potentiel c^λ, on a :

$$\frac{d\bar{r}^2}{\bar{r}^2} = h^2(r)dr^2 = \left(\frac{d\tau(\bar{r})}{\tau(\bar{r})}\right)^2 \tag{74}$$

($\bar{r}$ représente ici la coordonnée radiale isotropique, et r la variable radiale).

Alors, si $\bar{r}$ est solution de (74), $\tau(\bar{r})$ l'est aussi.

Notre propriété d'invariance a donc été introduite p[illegible] une insuffisante détermination de notre nouvelle variable radiale isotro[illegible]que. Pour que $\bar{r}$ soit défini univoquement, il est nécessaire d'imposer une conditi[illegible] [illegible]u genre :

$$\frac{d\bar{r}}{dr} > 0 \tag{75}$$

Notons que cette condition revient à limiter les intervalles de valeurs de la variable radiale isotropique et permet d'éliminer une des branches ($\overset{+}{u}$ ou $\overset{-}{u}$) de la solution u.

§ 5. INTÉGRATION DES CAS DU TYPE $\alpha > 0$

Compte tenu de la condition (68), le discriminant Δ est alors négatif (67) et le trinôme du second membre de (66) possède trois racines réelles :

$$\left\{\begin{array}{l} .\quad u_1 = 2/\sqrt{3\alpha}\,.\,\cos\theta/3 \\ .\quad u_2 = 2/\sqrt{3\alpha}\,.\,\cos((\theta + 2\pi)/3) \\ .\quad u_3 = 2/\sqrt{3\alpha}\,.\,\cos\left(\dfrac{\theta + 4\pi}{3}\right) \end{array}\right. \tag{76}$$

où

$$\theta = \pi/2 + \text{Arc}\sin(m\sqrt{27\alpha}) \tag{77}$$

u_1, u_2, u_3 étant liées par les relations :

$$\begin{array}{l} .\quad u_1 + u_2 + u_3 = 0 \\ .\quad u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 = -1/\alpha \\ .\quad u_1u_2u_3 = -2m/\alpha \end{array} \tag{78}$$

L'équation (1) s'écrit donc de la manière suivante :

$$u'^2r^2 = -\alpha u(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) \tag{79}$$

dont l'étude du second membre nécessairement positif permet de poser les conditions suivantes liées au signe de m :

$$m > 0 \qquad \text{alors} \qquad u_2 < 0 < u_3 < u_1 \tag{80}$$

et u est à valeurs sur les intervalles :

$$u_2 \leqslant u \leqslant 0 \tag{80a}$$

$$u_3 \leqslant u \leqslant u_1 \tag{80b}$$

$$m < 0 \qquad \text{alors} \qquad u_2 < u_3 < 0 < u_1 \tag{81}$$

et u est à valeurs sur les intervalles :

$$u_2 \leqslant u \leqslant u_3 \tag{81a}$$

$$0 \leqslant u \leqslant u_1 \tag{81b}$$

D'autre part, la forme quadratique de l'équation (79) nous permet de dégager deux groupes de solutions.

En effet, (79) s'écrit encore :

$$u' = \frac{\varepsilon}{r}[-\alpha u(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)]^{1/2} \tag{82}$$

où $\varepsilon = \pm 1$.

Nous notons $\overset{+}{u}$ (resp. $\bar{u}$) les branches des solutions correspondant à $\varepsilon = +1$ ($\overset{+}{u}' \geqslant 0$) [resp. à $\varepsilon = -1$ ($\bar{u}' \leqslant 0$)].

Recherchons en premier lieu les solutions à valeur sur l'intervalle (80*b*).

Nous notons les intervalles de définition de la variable radiale de la manière suivante :

$$\left.\begin{array}{ll} \overset{+}{a}_3 = (\overset{+}{u})^{-1}(u_3) & \bar{a}_3 = (\bar{u})^{-1}(u_3) \\ \overset{+}{a}_1 = (\overset{+}{u})^{-1}(u_1) & \bar{a}_1 = (\bar{u})^{-1}(u_1) \end{array}\right\} \tag{83}$$

Les solutions de (82) correspondant à $\varepsilon = +1$ à valeurs sur l'intervalle (80*b*) sont définies dans le domaine $\overset{+}{\Omega}$:

$$\left\{\begin{array}{ll} \overset{+}{u} \in [u_3, u_1] & \\ r \in [\overset{+}{a}_3, \overset{+}{a}_1] & (\overset{+}{a}_3 > 0) \\ \alpha \in [\mathrm{O}, \mathrm{L}) & \\ m \in [\mathrm{O}, \mathrm{M}] & (\mathrm{LM}^2 < 1/27) \end{array}\right. \tag{84}$$

Les solutions correspondant à $\varepsilon = -1$, à valeurs sur (80*b*) sont définies sur $\bar{\Omega}$:

$$\begin{array}{ll} \bar{u} \in [u_3, u_1] & \\ r \in [\bar{a}_1, \bar{a}_3] & \bar{a}_1 > 0 \\ \alpha \in [\mathrm{O}, \mathrm{L}] & \\ m \in [\mathrm{O}, \mathrm{M}] & (\mathrm{LM}^2 < 1/27) \end{array} \tag{85}$$

L'équation (82) s'intègre par séparation des variables et en utilisant des fonctions elliptiques, à partir du pôle u_3.

$$\int_{u_3}^{u(r)} \frac{dv}{[-v(v-u_1)(v-u_2)(v-u_3)]^{1/2}} = \varepsilon\sqrt{+\alpha} \int_{u^{-1}(u_3)}^{r} \frac{dr}{r} \tag{86}$$

Posant :

$$g = 2(u_1(u_3 - u_2))^{-1/2}\,; \qquad k^2 = \frac{u_2(u_1 - u_3)}{u_1(u_2 - u_3)} \tag{87}$$

(86) s'intègre en :

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{F}(\overset{+}{\varphi}, k) = \sqrt{\alpha}/g\,.\,\mathrm{Ln}(r/\overset{+}{a}_3) \\ \sin \overset{+}{\varphi} = \left[\dfrac{u_1(\overset{+}{u} - u_3)}{(u_1 - u_3)\overset{+}{u}}\right]^{1/2} \end{array}\right\} \tag{88}$$

pour $\varepsilon = +1$; F représentant l'intégrale elliptique de première espèce et pour $\varepsilon = -1$ en :

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{F}(\bar{\varphi}, k) = \sqrt{\alpha}/g\,.\,\mathrm{Ln}(\bar{a}_3/r) \\ \sin \bar{\varphi} = \left[\dfrac{u_1(\bar{u} - u_3)}{(u_1 - u_3)\bar{u}}\right]^{1/2} \end{array}\right\} \tag{89}$$

Des solutions (88) et (89) on déduit que :

$$(g/\sqrt{\alpha})\mathrm{F}(\pi/2,\,k) = \mathrm{L}n(\overset{+}{a}_1/\overset{+}{a}_3) = \mathrm{L}n(\bar{a}_3/\bar{a}_1) \tag{90}$$

et donc :

$$\overset{+}{a}_3\,\bar{a}_3 = \overset{+}{a}_1\,\bar{a}_1 \tag{91}$$

Considérons la transformation τ de la variable radiale définie sur l'intervalle $[\overset{+}{a}_3,\ \overset{+}{a}_1]$ à valeur sur l'intervalle $[\bar{a}_1,\ \bar{a}_3]$ telle que :

$$r\tau(r) = \overset{+}{a}_3\,\bar{a}_3 = \overset{+}{a}_1\,\bar{a}_1 \tag{92}$$

alors τ est involutive et on a grâce aux équations (88) et (89) :

$$\mathrm{F}(\overset{+}{\varphi}(\tau(r)),\,k) = \frac{\sqrt{\alpha}}{g}\mathrm{L}n\left(\frac{\bar{a}_3}{r}\right) = \mathrm{F}(\bar{\varphi}(r),\,k)$$

donc :

$$\overset{+}{u}(r) = \bar{u}(\tau(r))$$

u est donc bien invariante par τ (72).

Les solutions à valeurs sur l'intervalle (80a) s'obtiennent en intégrant (82) à partir du pôle u_2.

Posant :

$$\begin{matrix} \overset{+}{a}_2 = (\overset{+}{u})^{-1}(u_2) & \bar{a}_2 = (\bar{u})^{-1}(u_2) \\ \overset{+}{a}_4 = (\overset{+}{u})^{-1}(0) & \bar{a}_4 = (\bar{u})^{-1}(0) \end{matrix} \tag{93}$$

Distinguant les cas $\varepsilon = +1$ et $\varepsilon = -1$, les solutions $\overset{+}{u}$ et $\bar{u}$ sont définies implicitement sur ces intervalles par :

$$\left\{\begin{aligned} \sin\overset{+}{\theta} &= \left[\frac{u_1(\overset{+}{u} - u_2)}{u_2(\overset{+}{u} - u_1)}\right]^{1/2} \\ \mathrm{F}(\overset{+}{\theta},\,k) &= \frac{\sqrt{\alpha}}{g}\mathrm{L}n(r/\overset{+}{a}_2) \end{aligned}\right. \tag{94}$$

$$\left\{\begin{aligned} \sin\bar{\theta} &= \left(\frac{u_1(\bar{u} - u_2)}{u_2(\bar{u} - u_1)}\right)^{1/2} \\ \mathrm{F}(\bar{\theta},\,k) &= \frac{\sqrt{\alpha}}{g}\mathrm{L}n(\bar{a}_2/r) \end{aligned}\right. \tag{95}$$

On en déduit que :

$$(g/\sqrt{\alpha})\mathrm{F}(\pi/2,\,k) = \mathrm{L}n(\overset{+}{a}_4/\overset{+}{a}_2) = \mathrm{L}n(\bar{a}_2/\bar{a}_4) \tag{96}$$

Il est alors clair que la transformation τ s'écrit dans ce cas :

$$r\tau(r) = \overset{+}{a}_4\,\bar{a}_4 = \overset{+}{a}_2\,\bar{a}_2$$

et permet d'exhiber l'invariance de u par τ (72).

Nous avons donc trouvé toutes les solutions de l'équation (82) satisfaisant à la condition (68) et telles que $\alpha > 0$ m > 0. L'invariance de l'équation (82) par la transformation σ définie par (69) implique que si $\varpi(r, \alpha, m)$ est solution de (22), $-\varpi(r, \alpha, -m)$ en est aussi solution. Nous avons donc du même coup trouvé les solutions correspondant aux cas $\alpha > 0$, $m < 0$. Plus précisément si l'on note $\varpi(\varepsilon, \alpha, m, r)$ les branches des solutions de (82) (ε représentant le signe de u') l'invariance par σ (69) permet d'écrire que :

$$\varpi(\varepsilon, \alpha, m, r) = -\varpi(-\varepsilon, \alpha, -m, r) \tag{97}$$

Et l'invariance par (70) implique que :

$$\varpi(\varepsilon, \alpha, m, r) = \varpi(-\varepsilon, \alpha, m, \tau(r)) \tag{98}$$

§ 6. INTÉGRATION DES CAS DU TYPE $\alpha < 0$

Le discriminant Δ (67) est alors négatif et le trinôme du second membre de (66) possède deux racines complexes conjuguées c et $\bar{c}$ et une racine réelle u_s. L'équation (66) s'écrit alors de la manière suivante :

$$u'^2 r^2 = -\alpha u(u - u_s)(u - c)(u - \bar{c}) \tag{99}$$

où u_s, c, $\bar{c}$ sont déterminées par les relations :

$$\left.\begin{aligned} &.\quad u_s = \beta + \gamma \\ &.\quad c = -\frac{(\beta + \gamma)}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(\beta - \gamma) \\ &.\quad \bar{c} = -\frac{(\beta + \gamma)}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(\beta - \gamma) \end{aligned}\right\} \tag{100}$$

β et γ étant les solutions réelles des équations :

$$\left.\begin{aligned} &.\quad \beta^3 = -\frac{m}{\alpha} + \left(\frac{m^2}{\alpha^2} - \frac{1}{27\alpha^3}\right)^{1/2} \\ &.\quad \gamma^3 = -\frac{m}{\alpha} - \left(\frac{m^2}{\alpha^2} - \frac{1}{27\alpha^3}\right)^{1/2} \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

u_s, c et $\bar{c}$ étant liées par les relations :

$$\left.\begin{aligned} &.\quad u_s + c + \bar{c} = 0 \\ &.\quad u_s c + c\bar{c} + \bar{c}u_s = -1/\alpha \\ &.\quad u_s c\bar{c} = -2m/\alpha \end{aligned}\right\} \tag{102}$$

L'étude du signe du second membre de (99) permet de distinguer les cas suivants liés au signe de m :

$$m > 0 \qquad \text{alors} \qquad 0 \leqslant u_s \tag{103}$$

et u est à valeurs sur les intervalles :

$$u \leqslant 0 \tag{103a}$$

$$u_s \leqslant u \tag{103b}$$

$$m < 0 \qquad \text{alors} \qquad u_s < 0 \tag{104}$$

et u est à valeurs sur les intervalles :

$$u \leqslant u_s \tag{104a}$$

$$0 \leqslant u \tag{104b}$$

D'autre part et parallèlement au cas $\alpha > 0$, la forme quadratique du premier membre de (99) nous permet de distinguer deux groupes de solutions suivant le signe de u' ($\varepsilon = \pm 1$). Nous notons $\overset{+}{u}$ (resp. $\overset{-}{u}$) les branches de u solutions de (99) pour $u' > 0$ ($\varepsilon = +1$) (resp. $u' < 0$, $\varepsilon = -1$). Recherchons tout d'abord les solutions à valeurs sur l'intervalle (103b) ($m > 0$). Notons :

$$\overset{+}{b}_3 = (\overset{+}{u})^{-1}(u_s) \qquad \overset{-}{b}_3 = (\overset{-}{u})^{-1}(u_s) \tag{105}$$

Définissons les grandeurs :

$$\left.\begin{aligned} &.\quad A^2 = (u_s - b_1)^2 + a_1^2 \\ &.\quad B^2 = b_1^2 + a_1^2 \\ &.\quad 2b_1 = c + \bar{c} \\ &.\quad a_1^2 = -\frac{(c - \bar{c})^2}{4} \end{aligned}\right\} \tag{106}$$

Alors $\overset{+}{u}$ est défini implicitement par :

$$\left.\begin{aligned} &.\quad F(\overset{+}{\varphi}, k) = \frac{\sqrt{-\alpha}}{g} \operatorname{Ln}\left(\frac{r}{\overset{+}{b}_3}\right) \\ &.\quad \cos \overset{+}{\varphi} = \frac{(A - B)\overset{+}{u} + Bu_s}{(A + B)\overset{+}{u} - Bu_s} \end{aligned}\right\} \tag{107}$$

et $\overset{-}{u}$ par :

$$\left.\begin{aligned} &.\quad F(\overset{-}{\varphi}, k) = \frac{\sqrt{-\alpha}}{g} \operatorname{Ln}\left(\frac{\overset{-}{b}_3}{r}\right) \\ &.\quad \cos \overset{-}{\varphi} = \frac{(A - B)\overset{-}{u} + Bu_s}{(A + B)\overset{-}{u} - Bu_s} \end{aligned}\right\} \tag{108}$$

avec

$$k^2 = \frac{(A + B)^2 - u_s^2}{4AB} \; ; \qquad g = \frac{1}{\sqrt{AB}} \tag{109}$$

On définira les limites radiales $\overset{+}{b}_1$ et $\overset{-}{b}_1$ correspondant à u infini :

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname*{Lim}_{\overset{+}{u}\to\infty} [\mathrm{F}(\overset{+}{\varphi}, k)] &= \mathrm{F}\left(\mathrm{Arcos}\,\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}, k\right) = \frac{\sqrt{-\alpha}}{g}\,\mathrm{L}n\left(\frac{\overset{+}{b}_1}{\overset{+}{b}_3}\right) \\
\operatorname*{Lim}_{\overset{-}{u}\to\infty} [\mathrm{F}(\overset{-}{\varphi}, k)] &= \mathrm{F}\left(\mathrm{Arcos}\,\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}, k\right) = \frac{\sqrt{-\alpha}}{g}\,\mathrm{L}n\left(\frac{\overset{-}{b}_3}{\overset{-}{b}_1}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{110}$$

Et la transformation τ est ici définie par :

$$r\tau(r) = \overset{-}{b}_1\overset{+}{b}_1 = \overset{-}{b}_3\overset{+}{b}_3 \tag{111}$$

u est évidemment invariante par τ (72).

Les solutions à valeurs sur (103*a*) s'obtiennent en intégrant (99) à partir du pôle $u = 0$.

On note :

$$\left.\begin{aligned}
(\overset{+}{u})^{-1}(0) &= \overset{+}{b}_4 & \qquad (\overset{-}{u})^{-1}(0) &= \overset{-}{b}_4 \\
(\overset{+}{u})^{-1}(-\infty) &= \overset{-}{b}_2 & \qquad (\overset{-}{u})^{-1}(-\infty) &= \overset{-}{b}_2
\end{aligned}\right\} \tag{112}$$

A, B, g, k étant définis par les formules (106) et (109), la branche $\overset{+}{u}$ de u est donc définie implicitement sur l'intervalle $[\overset{+}{b}_2, \overset{+}{b}_4]$ par les équations :

$$\left.\begin{aligned}
g\mathrm{F}(\overset{+}{\varphi}, k) &= \sqrt{-\alpha}\,\mathrm{L}n(\overset{+}{b}_4/r) \\
\cos\overset{+}{\varphi} &= \frac{(\mathrm{B}-\mathrm{A})\overset{+}{u} - u_s\mathrm{B}}{(\mathrm{A}+\mathrm{B})\overset{+}{u} + u_s\mathrm{B}}
\end{aligned}\right\} \tag{113}$$

et la branche $\overset{-}{u}$ sur l'intervalle $[\overset{-}{b}_4, \overset{-}{b}_2]$ par :

$$\left.\begin{aligned}
g\mathrm{F}(\overset{-}{\varphi}, k) &= \sqrt{-\alpha}\,\mathrm{L}n(r/\overset{-}{b}_4) \\
\cos\overset{-}{\varphi} &= \frac{(\mathrm{B}-\mathrm{A})\overset{-}{u} - u_s\mathrm{B}}{(\mathrm{A}+\mathrm{B})\overset{-}{u} + u_s\mathrm{B}}
\end{aligned}\right\} \tag{114}$$

de sorte que :

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname*{Lim}_{\overset{+}{u}\to\infty} \mathrm{F}(\overset{+}{\varphi}, k) &= \mathrm{F}\left(\mathrm{Arcos}\,\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}, k\right) = \frac{\sqrt{-\alpha}}{g}\,\mathrm{L}n\left(\frac{\overset{+}{b}_4}{\overset{+}{b}_3}\right) \\
\operatorname*{Lim}_{\overset{-}{u}\to\infty} \mathrm{F}(\overset{-}{\varphi}, k) &= \mathrm{F}\left(\mathrm{Arcos}\,\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}, k\right) = \frac{\sqrt{-\alpha}}{g}\,\mathrm{L}n\left(\frac{\overset{-}{b}_2}{\overset{-}{b}_4}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{115}$$

Et la transformation τ est définie par :

$$r\tau(r) = \overset{+}{b}_4\overset{-}{b}_4 = \overset{+}{b}_2\overset{-}{b}_2 \tag{116}$$

u est invariante par τ (72).

Nous avons donc obtenu les solutions de l'équation (99) satisfaisant aux conditions (103). L'invariance de (99) par les transformations σ (69) et τ (70) implique (97) et (98) que nous avons du même coup obtenu les solutions de (99) satisfaisant aux conditions (104).

Dans le cadre de la condition (68) nous avons donc obtenu toutes les solutions de l'équation (66).

§ 7. CLASSIFICATION DES SOLUTIONS

Cas	Signe de u	ε = signe de u'	Signe de m	Signe de α	Signe de mu	Int. de définition		Int. de valeurs		Invariances
(1)	+	+	+	+	+	a_3	a_1	u_3	u_1	
(2)	+	−	+	+	+	a_1	a_3	u_1	u_3	$\tau \sim$ (1)
(3)	−	+	+	+	−	a_2	a_4	u_2	0	
(4)	−	−	+	+	−	a_4	a_2	0	u_2	$\tau \sim$ (3)
(5)	+	+	−	+	−	a_4	a_1	0	u_1	$\sigma \sim$ (4)
(6)	+	−	−	+	−	a_1	a_4	u_1	0	$\sigma \sim$ (3)
(7)	−	+	−	+	+	a_2	a_3	u_2	u_3	$\sigma \sim$ (2)
(8)	−	−	−	+	+	a_3	a_2	u_3	u_2	$\sigma \sim$ (1)
(9)	+	+	+	−	+	b_3	b_1	u_s	∞	
(10)	+	−	+	−	+	b_1	b_3	∞	u_s	$\tau \sim$ (9)
(11)	−	+	+	−	−	b_2	b_4	$-\infty$	0	
(12)	−	−	+	−	−	b_4	b_2	0	$-\infty$	$\tau \sim$ (11)
(13)	+	+	−	−	−	b_4	b_1	0	∞	$\sigma \sim$ (12)
(14)	+	−	−	−	−	b_1	b_4	∞	0	$\sigma \sim$ (11)
(15)	−	+	−	−	+	b_2	b_3	$-\infty$	u_s	$\sigma \sim$ (10)
(16)	−	−	−	−	+	b_3	b_2	u_s	∞	$\sigma \sim$ (9)

(117)

Ce tableau fait apparaître chacune des branches de solutions de l'équation (66). Les bornes atteintes par u sont fonctions de α et m. Les bornes des intervalles radiaux de définition sont fonctions de α, m et ε.

Les invariances τ et σ (69) et (70) permettent de réduire à quatre le nombre des schémas indépendants. En particulier, l'invariance σ implique que le signe de m n'a de sens que par rapport à celui de u.

Ces remarques nous permettent d'expliciter une classification en quatre types :

$\alpha > 0, \quad m > 0$ (cas (1) (2) (7) et (8))

$\alpha > 0, \quad m < 0$ (cas (3) (4) (5) et (6))

$\alpha < 0, \quad m > 0$ (cas (9) (10) (15) et (16))

$\alpha < 0, \quad m < 0$ (cas (11) (12) (13) et (14))

Ainsi, par exemple, à une transformation près du type σ ou τ, les branches de solutions (1) (2) (7) et (8) sont équivalentes.

Pour ces cas, on a $mu > 0$, $\alpha > 0$ d'où la dénomination $\alpha > 0$, $m > 0$.

N. B. : Les cas de type $\alpha = 0$ n'ont pas été considérés ici. Cf. § 10.

§ 8. LES SOLUTIONS DE THOMPSON-WHITROW ET DE ROBERTSON-FRIEDMAN

La première couche d'indice 1, de densité de masse $\rho_1(t)$ de pression $p_1(r, t)$, définie sur l'intervalle radial $[0, r_1]$ est décrite par les équations (54) à (59) qui compte tenu de la condition (42) s'écrivent :

$$ds^2 = -\frac{e^{\psi_1(r,t)}}{r^2}(dr^2 + r^2 d\Omega^2) + e^{\nu_1}dt^2 \tag{118}$$

$$\frac{\psi_1'^2}{4} r^2 = 1 - \alpha_1 e^{\psi_1} \tag{119}$$

$$\alpha_1(t) = \frac{8\pi\rho_1 + \Lambda}{3} - \left(\frac{8\pi\dot{\rho}_1}{3\mathrm{K}_1}\right)^2 \tag{120}$$

$$8\pi(\rho_1 + p_1) = \mathrm{K}_1 e^{-\nu_1/2} \tag{121}$$

$$\frac{8\pi\dot{\rho}_1}{3\mathrm{K}_1} = -\frac{\dot{\psi}_1}{2} e^{-\nu_1/2} \tag{122}$$

L'équation (119) s'intègre en :

$$|\alpha_1| e^{\psi_1} = \frac{r^2/\lambda_1^2}{(1 + \eta r^2/4\lambda_1^2)^2} \qquad \text{et où} \qquad \eta = \alpha_1/|\alpha_1| \tag{123}$$

$\lambda_1(t)$ est une fonction d'intégration $(\lambda_1^2 > 0)$.

Grâce à (122) et par dérivation de (123), on a :

$$e^{\nu_1/2} = \frac{3\mathrm{K}_1}{8\pi\dot{\rho}_1}\left\{\frac{\dot{\alpha}_1}{2\alpha_1} + \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1}\left(\frac{1 - \eta r^2/4\lambda_1^2}{1 + \eta r^2/4\lambda_1^2}\right)\right\} \tag{124}$$

Cette solution centrale peut aussi bien être raccordée au vide qu'à une solution intérieure de notre cas général. Cette solution n'est autre que celle de Bonnor et Faulkes [*4*] ou de Thompson et Whitrow [*2*] [*3*]. En ce qui concerne les problèmes de systèmes de coordonnées, on démontre [*5*] que ces solutions n'échappent pas à l'invariance τ signalée au § 4. Remarquons d'autre part que cette solution contient comme cas particuliers les solutions de Robertson et de Friedman. Si l'on ajoute l'hypothèse $p' = 0$ alors ν' est nul (19) et on en déduit que $\dot{\lambda}_1 = 0$. Il suffit alors d'une homothétie sur le temps pour imposer (124) :

$$e^{\nu_1/2} = 1 \tag{125}$$

avec :

$$\frac{3\mathrm{K}_1}{8\pi\dot{\rho}_1}\frac{\dot{\alpha}_1}{2\alpha_1} = 1 \tag{126}$$

Posant

$$|\alpha_1| \equiv e^{-\varphi_1(t)}/\lambda_1^2 \tag{127}$$

on a grâce à (120) (122) (123) :

$$8\pi\rho_1 + \Lambda = 3\frac{\dot{\varphi}_1^2}{4} + \frac{3e^{-\varphi_1}}{\eta\lambda_1^2} \tag{128}$$

et grâce à (126) :

$$8\pi p_1 - \Lambda = -\ddot{\varphi}_1 - 3\frac{\dot{\varphi}_1^2}{4} - \frac{e^{-\varphi_1}}{\eta\lambda_1^2} \tag{129}$$

qui sont les équations de Robertson.

Le potentiel cosmologique $\varphi_1(t)$ est déterminé dès que l'on introduit une équation de compressibilité du type $p = p(\rho)$. Parallèlement la condition supplémentaire $p = 0$ conduit à la solution de Friedman.

§ 9. LA SOLUTION DE SCHWARZSCHILD

Reprenons nos équations générales écrites dans un système de coordonnées isotropiques entraînées : l'élément linéaire d'espace-temps a la forme :

$$ds^2 = -\frac{e^{\psi}}{r^2}(dr^2 + r^2 d\Omega^2) + e^{\nu}dt^2 \tag{130}$$

Et dans le cas du vide les équations de champ associées s'écrivent :

$$\frac{\psi'^2}{4}r^2 - \frac{\dot{\psi}^2}{4}e^{\psi-\nu} = 1 - \frac{\Lambda}{3}e^{\psi} - 2me^{-\psi/2} \equiv \mathrm{W}(e^{\psi/2}) \tag{131}$$

$$\dot{\psi}' = \dot{\psi}\nu'/2 \tag{132}$$

Effectuant le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{cases} \bar{r} = e^{\psi/2} \equiv \mathrm{S}(r, t) \\ \bar{t} = \mathrm{T}(r, t) \end{cases} \tag{133}$$

où

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{T}} = \dfrac{\mathrm{S}'e^{\frac{\nu-\psi}{2}}}{\mathrm{W}}r \\[2ex] \mathrm{T}' = \dfrac{\dot{\mathrm{S}}e^{\frac{\psi-\nu}{2}}}{\mathrm{W}r} \end{cases} \tag{134}$$

On démontre alors que T est intégrable. Et l'élément linéaire d'espace-temps prend la forme :

$$ds^2 = -(\mathrm{W}(\bar{r}))^{-1}d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 d\Omega^2 + \mathrm{W}(\bar{r})d\bar{t}^2 \tag{135}$$

qui n'est autre que la solution de Schwarzschild associée à la masse m avec constante cosmologique.

Remarquons que, pour pouvoir décrire la solution du vide d'une manière explicitement statique, conformément au théorème de Birkhoff, nous avons dû effectuer une transformation qui n'obéit pas à la condition (11) ; notre système de coordonnées isotropiques entraînées n'est pas adapté à la description statique du vide.

D'autre part, cette solution étant applicable à toute couche vide, m_i représente bien dans ce cas la masse de Schwarzschild de l'amas interne.

Les solutions statiques à symétrie sphérique de Schwarzschild intérieur, cosmologiques d'Einstein et de Sitter sont elles aussi contenues dans notre solution générale (Cf. [5]). D'autre part, le parallèle statique du n-couches est évidemment un cas particulier de notre travail (Cf. [5] [6] [7]).

§ 10. LES CAS DU TYPE $\alpha = 0$

Dans ce cas les équations de champ s'écrivent :

$$\frac{u'^2}{u^2} r^2 = 1 - \frac{2m}{u} \tag{136}$$

$$\frac{8\pi\rho + \Lambda}{3} = \left(\frac{8\pi\dot{\rho}}{3K}\right)^2 \tag{137}$$

$$\frac{\dot{u}}{u} e^{-\nu/2} = - \frac{8\pi\dot{\rho}}{3K} \tag{138}$$

$$8\pi(\rho + p) = Ke^{-\nu/2} \tag{139}$$

où

$$ds^2 = - \frac{u^2}{r^2}(dr^2 + r^2 d\Omega^2) + e^\nu dt^2 \tag{140}$$

L'équation (136) s'intègre dans le cas $m > 0$ en :

$$u = \frac{rm}{2a_3}\left(1 + \frac{a_3}{r}\right)^2 \tag{141}$$

et si $m < 0$ en :

$$u = \frac{-rm}{2a_4}\left(1 - \frac{a_4}{r}\right)^2 \tag{142}$$

que nous notons dans tous les cas :

$$u^2 = e^\psi = r^2 e^{\Phi_0}\left(1 + \frac{m}{2}\frac{1}{re^{\Phi_0/2}}\right)^4 \qquad (m \gtrless 0) \tag{143}$$

Par dérivation de (143) et grâce à (138) on a :

$$e^\nu = \frac{3}{8\pi\rho + \Lambda}\frac{\dot{\Phi}_0^2}{4}\left(\frac{1 - \dfrac{m}{2re^{\Phi_0/2}}}{1 + \dfrac{m}{2re^{\Phi_0/2}}}\right)^2 \tag{144}$$

Une homothétie sur le temps permet d'imposer un temps asymptotiquement cosmique :

$$\lim_{r \to \infty} e^{\nu} = \frac{3}{8\pi\rho + \Lambda} \frac{\dot{\Phi}_0^2}{4} = 1 \tag{145}$$

L'élément linéaire d'espace-temps définissant la structure gravitationnelle de ce type de modèle s'écrit :

$$ds^2 = -e^{\Phi_0}\left(1 + \frac{m}{2re^{\Phi_0/2}}\right)^4 (dr^2 + r^2 d\Omega^2) + \left(\frac{1 - \dfrac{m}{2re^{\Phi_0/2}}}{1 + \dfrac{m}{2re^{\Phi_0/2}}}\right)^2 dt^2 \tag{146}$$

Et tenant compte des relations (137) (138) et (139) on a :

$$8\pi\rho + \Lambda = 3\frac{\dot{\Phi}_0^2}{4} \tag{147}$$

$$8\pi p - \Lambda = -\ddot{\Phi}_0 e^{-\nu/2} - 3\frac{\dot{\Phi}_0^2}{4} \tag{148}$$

qui déterminent pression et densité en fonction de $\Phi_0(t)$.

A l'infini — ou pour m nul — pression, densité et élément linéaire d'espace-temps définissent une solution de Robertson de type euclidien. D'autre part, si l'on suppose Φ_0 nul, on reconnaît la solution de Schwarzschild d'une masse m plongée dans le vide exprimée sous forme isotropique. Soulignons l'intérêt de cette solution particulière. D'une part, cette solution permet d'exprimer analytiquement la double dépendance de notre modèle, dépendance par rapport à m qui représente la contribution gravitationnelle de l'amas central et par rapport à $\Phi_0(t)$ qui représente la solution cosmologique. D'autre part, cette solution représente la contribution gravitationnelle à courte portée des cas généraux ainsi que nous le verrons ensuite.

§ 11. ÉTUDE APPROCHÉE DES SOLUTIONS

Les cas du type $\alpha > 0$ $m > 0$

Ainsi que nous l'avons vu au § 5, nous pouvons nous limiter à un seul cas de ce type, les trois autres cas lui étant équivalents à une transformation σ ou τ près (117). Étudions donc le cas (1) (117).

$\overset{+}{u}$ est alors défini sur $\overset{+}{\Omega}$ (84) par les équations (88), en se limitant à la branche $\overset{+}{u}$ ($u' > 0$).

u est alors solution de (71) et le changement de variable

$$u = 2m\omega \qquad (m \neq 0) \tag{149}$$

permet d'écrire (71) de la manière suivante :

$$\frac{\omega'^2}{\omega^2} r^2 = 1 - \frac{1}{\omega} - 4\alpha m^2 \omega^2 \tag{150}$$

qui fait apparaître le paramètre $\lambda = m\sqrt{\alpha}$.

u est donc analytique en λ^2 et admet un développement limité par rapport à λ^2 au voisinage de $\alpha = 0$:

$$u = u^\alpha_{(0)} + u^\alpha_{(2)}\lambda^2 + o(\lambda^4) \tag{151}$$

De la même manière u_1, u_2, u_3 (76) et donc g et k (87) admettent un tel développement :

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(1 - \lambda + o(\lambda^2)) \\ u_2 &= -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}(1 + \lambda + o(\lambda^2)) \\ u_3 &= 2m(1 + o(\lambda^2)) \end{aligned}\right\} \tag{152}$$

D'autre part, F(φ, k), intégrale elliptique de première espèce admet un développement en série par rapport aux puissances de k^2 c'est-à-dire de λ puisque :

$$k'^2 = 1 - k^2 = 4\lambda + o(\lambda^2) \tag{154}$$

Ce développement s'écrit :

$$\mathrm{F}(\varphi, k) = \sum_{m=0} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} k'^{2m} \sigma_{2m}(\varphi) \tag{155}$$

où

$$\sigma_0(\varphi) = \mathrm{Ln}\left(\frac{1 + \sin\varphi}{\cos\varphi}\right) ; \qquad \sigma_2(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{1}{2}\sigma_0(\varphi)$$

qui est valable si :

$$0 < k'^2 \,\mathrm{tg}^2\,\varphi < 1 ; \qquad k^2 < 1 \tag{156}$$

Les équations (88) (151) et (152) nous permettent d'écrire le développement de φ au voisinage de $\lambda = 0$:

$$\varphi = \varphi_{(0)} + \varphi_{(1)}\lambda + o(\lambda^2) \tag{157}$$

Et on pose :

$$\overset{+}{a}_3 = \overset{+}{a}_{3(0)} + \overset{+}{a}_{3(1)}\lambda + o(\lambda^2) \tag{158}$$

Alors à l'ordre zéro en λ on a :

$$u^\alpha_{(0)} = \frac{m}{2a_{3(0)}} r\left(1 + \frac{\overset{+}{a}_{3(0)}}{r}\right)^2 \tag{159}$$

tandis que les termes d'ordre 1 s'annulent deux à deux.

Les conditions (156) de validité de notre développement s'expriment alors en terme de la variable radiale :

$$\overset{+}{a}_3 \leqslant r < \frac{\overset{+}{a}_3}{m\sqrt{\alpha}} \tag{160}$$

A partir de l'expression (159), on peut évaluer grâce à (57) le terme d'ordre zéro en λ du développement du potentiel g_{44} au voisinage de $\alpha = 0$. On obtient :

$$(e^{\nu})^{\alpha}_{(0)} = \left[\left(\frac{3K}{8\pi\dot{\rho}}\right)_{(0)} \frac{\overset{\dot{+}}{a}_{3(0)}}{\overset{+}{a}_{3(0)}}\right]^2 \left(\frac{1 - \dfrac{\overset{+}{a}_{3(0)}}{r}}{1 + \dfrac{\overset{+}{a}_{3(0)}}{r}}\right)^2 \tag{161}$$

Les expressions (159) et (161) permettent donc d'écrire l'ordre zéro en λ au voisinage de $\alpha = 0$ de l'élément linéaire d'espace-temps :

$$ds^2_{(0)} = -\left(\frac{m}{2\overset{+}{a}_{3(0)}}\right)^2 \left(1 + \frac{\overset{+}{a}_{3(0)}}{r}\right)^4 (dr^2 + r^2 d\Omega^2) + \left[\left(\frac{3K}{8\pi\dot{\rho}}\right)_{(0)} \frac{\overset{\dot{+}}{a}_{3(0)}}{\overset{+}{a}_{3(0)}}\right]^2 \frac{\left(1 - \dfrac{\overset{+}{a}_{3(0)}}{r}\right)^2}{\left(1 + \dfrac{\overset{+}{a}_{3(0)}}{r}\right)^2} dt^2 \tag{162}$$

Approximation uniquement valable près de l'amas central (160). L'expression (162) est très proche de l'élément linéaire d'espace-temps du cas extérieur à symétrie sphérique en coordonnées isotropiques. Remarquons pourtant qu'il ne s'agit pas exactement d'une solution du vide, notre développement ayant été fait au voisinage de $\alpha = 0$ et non pas de $\rho = 0$.

Recherchons maintenant le comportement de u au voisinage de $m = 0$. Dans ce cas, la forme (88) sous laquelle nous avons exprimé notre solution ne nous permet pas d'utiliser le développement (155). Intégrons (71) à partir du pôle u_1

$$\int_{u(r)}^{u_1} \frac{dv}{[-v(v-u_1)(v-u_2)(v-u_3)]^{1/2}} = \sqrt{\alpha}\int_r^{\overset{+}{a}_1} \frac{dr}{r} \tag{163}$$

en :

$$\begin{aligned} F(\theta, k) &= \frac{\sqrt{\alpha}}{g}\,\mathrm{Ln}(\overset{+}{a}_1/r) \\ \sin\theta &= \left[\frac{(2u_3 + u_1)(u_1 - u)}{(u_1 - u_3)(u + u_1 + u_3)}\right]^{1/2} \end{aligned} \tag{164}$$

où k^2 et g sont déterminés par (87).

Remarquons que le changement de variable

$$v = u\sqrt{\alpha} \qquad \alpha > 0 \tag{165}$$

permet de mettre l'équation (71) sous la forme :

$$\frac{v'^2}{v^2} r^2 = 1 - v^2 - \frac{2\lambda}{v} \qquad (\lambda = m\sqrt{\alpha}) \tag{166}$$

v et donc u admettent un développement limité par rapport à λ au voisinage de $m = 0$.

Utilisant les développements (152) (153) nous obtenons à l'ordre zéro en :

$$\left.\begin{aligned} \frac{1 + \sin^2 \theta_{(0)}}{\cos \theta_{(0)}} &= \left(\frac{\overset{+}{a}_{1(0)}}{r}\right)^{1/2} \\ \sin^2 \theta_{(0)} &= \frac{1 - u^m_{(0)}\sqrt{\alpha}}{1 + u^m_{(0)}\sqrt{\alpha}} \end{aligned}\right\} \tag{167}$$

qui se résout en :

$$\alpha(u^m_{(0)})^2 = \frac{4r^2/(\overset{+}{a}_{1(0)})^2}{\left(1 + \dfrac{r^2}{(\overset{+}{a}_{1(0)})^2}\right)^2} \tag{168}$$

et à l'ordre un en λ :

$$u^m_{(1)}\sqrt{\alpha}(1 + \sin^2 \theta_{(0)})^2 = 8 \sin^2 \theta_{(0)} - (1 + \sin^2 \theta_{(0)})^2 - 2\frac{\overset{+}{a}_{1(1)}}{\overset{+}{a}_{1(0)}} \cos^2 \theta_{(0)} \sin \theta_{(0)} \tag{169}$$

Alors l'élément linéaire d'espace-temps s'écrit à l'ordre zéro en λ au voisinage de $m = 0$

$$ds^2_{(0)} = \frac{-4/\alpha(\overset{+}{a}_{1(0)})^2}{\left(1 + \dfrac{r^2}{(\overset{+}{a}_{1(0)})^2}\right)^2}(dr^2 + r^2 d\Omega^2) + \left(\frac{3K\dot{\alpha}}{16\pi\rho\alpha}\right)^2_{(0)} dt^2 \tag{170}$$

Les conditions de validité de notre développement s'expriment en terme de la variable radiale par :

$$\overset{+}{a}_1 m\sqrt{\alpha} < r \leqslant \overset{+}{a}_1 \tag{171}$$

de sorte que nos expressions (169) (170) ne sont valables qu'à grande distance de l'amas central.

Remarquons que l'expression (170) est très proche de l'élément linéaire d'espace-temps d'un espace cosmologique de Robertson. Rappelons encore que $\overset{+}{a}_3$ et $\overset{+}{a}_1$, sont liés par la relation (90) qui s'écrit à l'ordre un en λ :

$$\frac{\overset{+}{a}_{1(0)}}{\overset{+}{a}_{3(0)}}\left(1 + \lambda\frac{\overset{+}{a}_{1(1)}}{\overset{+}{a}_{1(0)}} + o(\lambda^2)\right) = \frac{4}{m\sqrt{\alpha}}(1 - 2\lambda + o(\lambda^2)) \tag{172}$$

§ 12. LES AUTRES TYPES DE CAS $\begin{cases} \alpha > 0 & m < 0 \\ \alpha < 0 & m > 0 \\ \alpha < 0 & m < 0 \end{cases}$

Étude approchée

L'étude du § 7 nous permettant de nous limiter à un seul cas de chaque type (117), nous étudions successivement :

— le cas (4) qui représente le type $\alpha > 0$ $m < 0$,
— le cas (9) qui représente le type $\alpha < 0$ $m > 0$,
— le cas (13) qui représente le type $\alpha < 0$ $m < 0$.

Nous ne donnons ici que les résultats essentiels.

Le type $\alpha > 0$, $m < 0$.

Le cas (4) répond aux conditions :

$$u \leqslant 0 ; \quad u' \leqslant 0 ; \quad m > 0 ; \quad \alpha > 0 \tag{173}$$

Il est défini sur l'intervalle radial $[\bar{a}_4, \bar{a}_2]$ et est à valeurs sur $[0, u_2]$. Il est défini implicitement par les équations (95).

Près de l'amas central, très précisément dans un voisinage radial défini par :

$$\bar{a}_4 \leqslant r < \frac{\bar{a}_4}{m\sqrt{\alpha}} \tag{174}$$

le potentiel u a pour développement d'ordre zéro en $\lambda = m\sqrt{|\alpha|}$ au voisinage de $\alpha = 0$:

$$u^{\alpha}_{(0)} = -\frac{mr}{2\bar{a}_{4(0)}}\left(1 - \frac{\bar{a}_{4(0)}}{r}\right)^2 \tag{175}$$

La contribution d'ordre 1 en λ est nulle.

Loin de l'amas central, dans un voisinage radial défini par :

$$\bar{a}_{2(0)}m\sqrt{\alpha} < r \leqslant \bar{a}_2 \tag{176}$$

Le potentiel u a pour développement d'ordre 0 en $\lambda = m\sqrt{|\alpha|}$, au voisinage de $m = 0$:

$$u^{\alpha}_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{-2r/(\bar{a}_{2(0)})^2}{(1 + r^2/(\bar{a}_{2(0)})^2)^2} \tag{177}$$

et à l'ordre 1 en λ :

$$u^m_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - 2(u^m_{(0)})^2\sqrt{\alpha} - \frac{\bar{a}_{2(1)}}{\bar{a}_{2(0)}} u_{(0)}\sqrt{1 - \alpha u^2_{(0)}} \tag{178}$$

En $r = \bar{a}_2$, on retrouve le développement de u_2 (152).
Enfin la relation (96) s'écrit :

$$\frac{\bar{a}_{2(0)}}{\bar{a}_{4(0)}}\left(1 + \lambda\frac{\bar{a}_{2(1)}}{\bar{a}_{2(0)}} + o(\lambda^2)\right) = \frac{4}{m\sqrt{|\alpha|}}(1 - 2\lambda + o(\lambda^2) \tag{179}$$

De la même manière que dans le cas $\alpha > 0$, $m > 0$, le comportement d'ordre 0 de l'élément linéaire d'espace-temps s'écrit près de l'amas central:

$$ds^2_{(0)} = -\left[\frac{m}{2\bar{a}_{4(0)}}\right]^2\left(1 - \frac{\bar{a}_{4(0)}}{r}\right)^4(dr^2 + r^2d\Omega^2) + \left[\left(\frac{3K}{8\pi\dot{\rho}}\right)_{(0)}\frac{\dot{a}_{4(0)}}{a_{4(0)}}\right]^2\left[\frac{1 + \bar{a}_{4(0)}/r}{1 - \bar{a}_{4(0)}/r}\right]^2 dt^2 \tag{180}$$

et, loin de l'amas central :

$$ds^2_{(0)} = \frac{-4/\alpha(\bar{a}_{2(0)})^2}{(1 + r^2/(\bar{a}_{2(0)})^2)^2}(dr^2 + r^2d\Omega^2) + \left(\frac{3K\dot{\alpha}}{16\pi\dot{\rho}\alpha}\right)^2_{(0)} dt^2 \tag{181}$$

Reconnaissant d'une part l'élément linéaire d'espace-temps d'un espace de Robertson et d'autre part une forme proche de l'élément linéaire de Schwarzschild à masse négative, nous pouvons interpréter notre structure gravitationnelle comme celle d'une masse différentielle négative plongée dans un univers cosmologique de type sphérique.

Le type $\alpha < 0$ $m > 0$.

Le cas (9) qui est de ce type répond aux conditions :

$$u' \geqslant 0\,; \qquad u > 0\,; \qquad \alpha < 0\,; \qquad m > 0. \tag{182}$$

solution définie implicitement par les équations (107) sur l'intervalle radial $[\overset{+}{b}_3, \overset{+}{b}_1]$, à valeurs sur $[u_s, \infty]$.

Près de l'amas central, dans un voisinage radial défini par :

$$\overset{+}{b}_3 \leqslant r < 2\overset{+}{b}_3/m\sqrt{-\alpha} \tag{183}$$

Le potentiel u a pour développement d'ordre 0 en λ au voisinage de $\alpha = 0$:

$$u^\alpha_{(0)} = \frac{m}{2}\frac{r}{\overset{+}{b}_{3(0)}}\left(1 + \frac{\overset{+}{b}_{3(0)}}{r}\right)^2 \tag{184}$$

La contribution d'ordre 1 en λ est nulle.

Loin de l'amas central :

$$\frac{\overset{+}{b}_1}{2} m\sqrt{-\alpha} < r < \overset{+}{b}_1 \tag{185}$$

le potentiel u a pour développement d'ordre 0 en $\lambda = m\sqrt{-\alpha}$ au voisinage de $m = 0$:

$$\sqrt{-\alpha}u^m_{(0)} = \frac{2r/\overset{+}{b}_{1(0)}}{1 - r^2/(\overset{+}{b}_{1(0)})^2} \tag{186}$$

et à l'ordre 1 :

$$u^m_{(1)}\sqrt{-\alpha} = \left(\frac{1 - \dfrac{\overset{+}{b}_{1(0)}}{r}}{1 + \dfrac{\overset{+}{b}_{1(0)}}{r}}\right)^2 - \frac{2b_{1(1)}}{r} \frac{\left(1 + \left(\dfrac{\overset{+}{b}_{1(0)}}{r}\right)^2\right)}{\left(1 - \left(\dfrac{\overset{+}{b}_{1(0)}}{r}\right)^2\right)^2} \tag{187}$$

La relation (110*a*) s'écrit :

$$\frac{\overset{+}{b}_{1(0)}}{\overset{+}{b}_{3(0)}}\left(1 - \lambda\frac{\overset{+}{b}_{1(1)}}{\overset{+}{b}_{1(0)}} + o(\lambda^2)\right) = \frac{4}{m\sqrt{-\alpha}}(1 + o(\lambda^2)) \tag{188}$$

à l'ordre 1 en $\lambda = m\sqrt{-\alpha}$.

Quant au comportement d'ordre zéro de l'élément linéaire d'espace-temps décrivant une structure gravitationnelle du type $\alpha < 0$ $m > 0$ il s'écrit :

Près de l'amas central :

$$ds^2_{(0)} = -\left(\frac{m}{\overset{+}{b}_{3(0)}}\right)^2\left(1 + \frac{\overset{+}{b}_{3(0)}}{r}\right)^4 (dr^2 + r^2d\Omega^2) + \left[\left(\frac{3K}{8\pi\rho}\right)_{(0)} \frac{\overset{\dot{+}}{b}_{3(0)}}{\overset{+}{b}_{3(0)}}\right]^2 \left[\frac{1 - \dfrac{\overset{+}{b}_{3(0)}}{r}}{1 + \dfrac{\overset{+}{b}_{3(0)}}{r}}\right]^2 dt^2 \tag{189}$$

Loin de l'amas central :

$$ds^2_{(0)} = \frac{4/\alpha(\overset{+}{b}_{1(0)})^2}{(1 - r^2/(\overset{+}{b}_{1(0)})^2)^2}(dr^2 + r^2d\Omega^2) + \left(\frac{3K\dot{\alpha}}{16\pi\dot{\rho}\alpha}\right)^2_{(0)} dt^2 \tag{190}$$

Reconnaissant d'une part l'élément linéaire d'espace-temps d'un modèle de Robertson de type hyperbolique et d'autre part une forme proche de l'élément linéaire de Schwarzschild à masse positive, notre structure gravitationnelle s'interprète comme celle d'une masse différentielle positive plongée dans un univers cosmologique de type hyperbolique.

Les cas du type $\alpha < 0$ $m < 0$.

Le cas (13) qui est de ce type répond aux conditions :

$$u' \geqslant 0\,; \qquad u \geqslant 0\,; \qquad m < 0\,; \qquad \alpha < 0\,. \tag{191}$$

solution définie implicitement par les équations :

$$F(\varphi, k) = \frac{\sqrt{-\alpha}}{g} \mathrm{Ln}\left(\frac{r}{\overset{+}{b}_4}\right) \qquad \cos\varphi = \frac{(A - B)u - u_s A}{(A + B)u - u_s A} \tag{192}$$

(où k^2, g, A, B, u_s sont définies dans le § 6) sur l'intervalle radial $[\overset{+}{b}_4; \overset{+}{b}_1]$ à valeurs sur $[0, \infty]$.

Près de l'amas central, très précisément dans un voisinage radial défini par :

$$\overset{+}{b}_4 \leqslant r < 2\overset{+}{b}_4/(|m|\sqrt{|\alpha|}) \tag{193}$$

le potentiel u a pour développement d'ordre 0 en $\lambda = (m\sqrt{|\alpha|})$ au voisinage de $\alpha = 0$:

$$u^{\alpha}_{(0)} = -\frac{m}{2}\frac{r}{\overset{+}{b}_{4(0)}}\left(1 - \frac{\overset{+}{b}_{4(0)}}{r}\right)^2 \tag{194}$$

Les termes d'ordre 1 en λ étant nuls.

Loin de l'amas central, dans un voisinage radial défini par :

$$\frac{\overset{+}{b}_1}{2}|m\sqrt{|\alpha|}| \leqslant r < \overset{+}{b}_1 \tag{195}$$

le potentiel u a pour développement d'ordre 0 en $\lambda = |m\sqrt{|\alpha|}|$ au voisinage de $m = 0$:

$$u^{m}_{(0)}\sqrt{|\alpha|} = \frac{2r/\overset{+}{b}_{1(0)}}{1 - r^2/(\overset{+}{b}_{1(0)})^2} \tag{196}$$

et à l'ordre 1 en λ :

$$u^{m}_{(1)}\sqrt{-\alpha} = -\left(\frac{1 - \overset{+}{b}_{1(0)}/r}{1 + \overset{+}{b}_{1(0)}/r}\right)^2 + \frac{2\overset{+}{b}_{1(1)}}{r}\,\frac{1 + \left(\dfrac{\overset{+}{b}_{1(0)}}{r}\right)^2}{\left(1 - \left(\dfrac{\overset{+}{b}_{1(0)}}{r}\right)^2\right)^2} \tag{197}$$

On démontre d'autre part aisément à partir de (192) que

$$\frac{\overset{+}{b}_{1(0)}}{\overset{+}{b}_{4(0)}}(1 + \lambda\overset{+}{b}_{1(1)} + o(\lambda^2)) = \frac{4}{-m\sqrt{-\alpha}}(1 + o(\lambda^2)) \tag{198}$$

à l'ordre 1 en $\lambda = |m\sqrt{|\alpha|}|$ et compte tenu du fait que $\overset{+}{b}_{4(1)} = 0$.

Les comportements d'ordre zéro en λ de l'élément linéaire d'espace-temps décrivant une structure gravitationnelle de type $\alpha < 0$ $m < 0$ s'écrivent :

Près de l'amas central :

$$ds^2_{(0)} = -\left(\frac{-m}{2\overset{+}{b}_{4(0)}}\right)^2\left(1 - \frac{\overset{+}{b}_{4(0)}}{r}\right)^4(dr^2 + r^2 d\Omega^2) + \left[\left(\frac{3K}{8\pi\dot{\rho}}\right)_{(0)}\frac{\dot{\overset{+}{b}}_{4(0)}}{\overset{+}{b}_{4(0)}}\right]^2\left(\frac{1 + \dfrac{\overset{+}{b}_{4(0)}}{r}}{1 - \dfrac{\overset{+}{b}_{4(0)}}{r}}\right)^2 dt^2 \qquad (199)$$

Et loin de l'amas central :

$$ds^2_{(0)} = \frac{4/\alpha(\overset{+}{b}_{1(0)})^2}{(1 - r^2/(\overset{+}{b}_{1(0)})^2)^2}(dr^2 + r^2 d\Omega^2) + \left(\frac{3K\dot{\alpha}}{16\pi\dot{\rho}\alpha}\right)^2_{(0)} dt^2 \qquad (200)$$

La structure gravitationnelle décrivant ce type de solution nous permet donc de l'interpréter comme celle d'une masse différentielle négative plongée dans un univers cosmologique de type hyperbolique.

§ 13. COMPORTEMENT DE LA SOLUTION DE TYPE $\alpha > 0$ $m > 0$ LOIN DE L'AMAS CENTRAL

Afin de rapprocher nos notations des notations traditionnelles, posons :

$$\begin{aligned} \overset{+}{a}_1 &= 2R \\ \alpha e^{\Phi(t)} &= 1/R^2 \end{aligned} \qquad (201)$$

et développons chacune de nos fonctions au voisinage de $m = 0$ et par rapport à $\lambda = m\sqrt{\alpha}$:

$$R = R_{(0)} + \lambda R_{(1)} + o(\lambda^2) \qquad (202)$$

etc.

Alors, l'équation (172) implique :

$$\left.\begin{aligned} &\cdot\quad \overset{+}{a}_{3(0)} = \frac{m}{2} R_{(0)}\sqrt{\alpha_{(0)}} \\ &\cdot\quad R_{(1)}/R_{(0)} = -\alpha_{(1)}/(2\alpha_{(0)}) - 2 \end{aligned}\right\} \qquad (203)$$

à l'ordre 0 et 1 respectivement.

De la même manière, l'équation (201*b*) s'écrit :

$$\left.\begin{aligned} &\cdot\quad \alpha_{(0)} e^{\Phi_0} = 1/R^2_{(0)} \\ &\cdot\quad \alpha_{(1)}/\alpha_{(0)} + \Phi_{(1)} = -2R_{(1)}/R_{(0)} \end{aligned}\right\} \qquad (204)$$

d'où (203a) s'écrit :

$$a_{3(0)} = \frac{m}{2} e^{-\Phi_{(0)}/2} \tag{205}$$

Supposons maintenant que

$$\dot{R}_{(0)} = 0 \tag{206}$$

qui revient à supposer que $[p'_{(0)}]_{2R_0} = 0$ et qui permettra l'identification de notre solution d'ordre zéro avec la solution de Robertson. Alors grâce à (204a) :

$$\alpha_{(0)}\dot{\Phi}_{(0)} + \dot{\alpha}_{(0)} = 0 \tag{207}$$

Grâce à une homothétie sur le temps, il est possible de supposer que :

$$(e^{\nu/2})_{2R} = 1 \tag{208}$$

qui nous permet de définir un temps asymptotiquement cosmique. Et compte tenu de (57), (152a), alors :

$$\left.\begin{aligned} &\cdot \quad \frac{8\pi\dot{\rho}}{3K_{(0)}} = \frac{\dot{\alpha}_{(0)}}{2\alpha_{(0)}} \\ &\cdot \quad \frac{K_{(1)}}{K_{(0)}} = -1 - \frac{\dot{\alpha}_{(1)}}{\dot{\alpha}_{(0)}} + \frac{\alpha_{(1)}}{2\alpha_{(0)}} \end{aligned}\right. \tag{209}$$

Développons maintenant les équations (56) et (58) par rapport à λ et au voisinage de $m = 0$; on obtient :

$$\left.\begin{aligned} &\cdot \quad 8\pi(\rho + p_{(0)})_{2R_{(0)}} = K_{(0)} \\ &\cdot \quad K_{(1)} = 8\pi(p_{(1)})_{2R} \end{aligned}\right\} \tag{210}$$

et

$$\left.\begin{aligned} &\cdot \quad \alpha_{(0)} = \frac{8\pi\rho + \Lambda}{3} - \frac{\dot{\Phi}^2_{(0)}}{4} \\ &\cdot \quad \alpha_{(1)} = -\frac{\dot{\Phi}^2_{(0)}}{4}\left(1 + \frac{\dot{\alpha}_{(1)}}{\dot{\alpha}_{(0)}} - \frac{\alpha_{(1)}}{2\alpha_{(0)}}\right) \end{aligned}\right\} \tag{211}$$

Eliminant $K_{(1)}$ entre les expressions (209b) et (210b) :

$$(8\pi p_{(1)})_{2R} = 8\pi(\rho + p_{(0)})_{2R} 2\alpha_{(1)}/\dot{\Phi}^2_{(0)} \tag{212}$$

Enfin (210a) s'écrit compte tenu de (209a) et (211a) :

$$(8\pi p_{(0)} - \Lambda)_{2R_{(0)}} = -\alpha_{(0)} - \frac{3\dot{\Phi}^2_{(0)}}{4} - \ddot{\Phi}_{(0)} \tag{213}$$

qui déterminent respectivement la déviation de la pression (212) et la pression (213) sur l'hypersurface.

§ 14. INTERPRÉTATION PHYSIQUE

Nous avons donc étudié en détail le cas du type $\alpha > 0$, $m > 0$. Rassemblons-en les éléments. A l'ordre zéro en λ au voisinage de $m = 0$ nous avons vu que l'élément linéaire d'espace-temps prenait la forme (170) qui, compte tenu de (206) et de (209*a*) n'est autre que l'élément linéaire d'espace-temps d'un modèle cosmologique robertsonien de type sphérique. Cette interprétation se confirme en comparant les équations (211*a*) et (128), (213) et (129) qui permettent d'exprimer densité et pression en fonction du potentiel $\Phi_{(0)}(t)$. Notre solution de type $\alpha > 0$, $m > 0$ se décompose donc à longue portée en

— une contribution cosmologique du type Robertson sphérique ;

— une contribution gravitationnelle d'ordre supérieur représentant l'amas central.

Dans les autres cas (et en particulier dans le cas $\alpha = 0$) (146) (147) (148) nous parvenons à la même conclusion (pour les cas de type $\alpha < 0$ voir [*5*]), le comportement de notre solution est robertsonien en première approximation de type sphérique, hyperbolique ou euclidien suivant le signe de α. Ayant supposé la densité de masse uniquement fonction du temps, hypothèse qui nous a jusqu'alors dispensé de choisir une équation de compressibilité, notre solution possède les mêmes degrés de liberté que celle de Robertson. Nous pouvons maintenant supposer que sur l'hypersurface $r = 2R$, pression et densité sont liées par une équation de compressibilité du type :

$$p_{(0)} = p_{(0)}(\rho(t)) \tag{214}$$

Cette hypothèse, jointe aux équations (211*a*) et (213) [(147) et (148) si $\alpha = 0$] permet de déterminer $\Phi_{(0)}(t)$ et donc la solution d'ordre zéro.

L'amas central induit d'autre part, par l'intermédiaire du paramètre m une perturbation à la solution de Robertson, perturbation exprimée sur l'hypersurface $r = 2R$ par les équations d'ordre 1. Ainsi $\alpha_{(1)}$ s'exprime par l'expression (211*b*). Le rayon de courbure est lui-même perturbé et sa déviation s'exprime par (203*b*). Enfin, la perturbation de la pression est donnée par l'équation (212).

L'inhomogénéité centrale est représentée par le paramètre m, masse différentielle apparente qui n'est autre que la masse de la perturbation superposée à la densité cosmologique de densité ρ_2. Ainsi l'équation (64) s'écrit dans le cas d'un deux-couches :

$$m = \frac{4}{3}\pi(\rho_1 - \rho_2)(e^{3\psi/2})_{r_1} \tag{215}$$

qui représente la masse d'une boule de densité $\rho_1 - \rho_2$ dont le signe n'est donc pas forcément positif.

Supposons pourtant un instant que :

$$\rho_2 \ll \rho_1 \tag{216}$$

Alors (187) s'écrit en première approximation :

$$m \# \frac{4}{3}\pi\rho_1(e^{3\psi/2})_{r_1} = \mathrm{M} \tag{217}$$

qui représente la masse totale de l'amas central.

Lorsque la région cosmologique est vide de toute source gravitationnelle ($\rho_2 = p_2 = 0$) alors $m = \mathrm{M}$ qui représente bien la masse de Schwarzschild de l'amas central (§ 3 et § 9). Les études que nous avons faites au voisinage de $\alpha = 0$ sont valables près du rayon r_1 de la configuration centrale si :

$$a_3 < r_1 < a_3/(m\sqrt{\alpha}) \tag{218}$$

qui s'écrit encore :

$$\frac{m}{2}e^{-\Phi_{(0)}/2} < r_1 < \mathrm{R}_{(0)}/2 \tag{219}$$

en tenant compte de (203*a*).

Les limites des intervalles radiaux de définition de nos solutions : a_3 et a_1 ($\alpha > 0$, $m > 0$) ; a_4 et a_3 ($\alpha > 0$, $m < 0$) ; b_3 et b_1 ($\alpha < 0$, $m > 0$) ; b_4 et b_1 ($\alpha < 0$, $m < 0$) s'introduisent naturellement par l'intermédiaire des racines et pôles de notre équation différentielle en u. Elles représentent respectivement l'image, dans notre système de coordonnées isotropiques du rayon de la singularité de Schwarzschild et du rayon de courbure de l'univers.

Près de l'amas central, nous avons vu que l'élément linéaire d'espace-temps d'ordre zéro en λ au voisinage de $\alpha = 0$ s'écrivait :

$$ds^2_{(0)} = -e^{\Phi_{(0)}(t)}\left(1 + \frac{m}{2re^{\Phi_{(0)}/2}}\right)^4(dr^2 + r^2d\Omega^2) + \left[\frac{1 - \dfrac{m}{2re^{\Phi_0/2}}}{1 + \dfrac{m}{2re^{\Phi_0/2}}}\right]^2 dt^2 \tag{220}$$

que l'on tire dans le cas $\alpha > 0$, $m > 0$ des équations (162) (203*a*) (204*a*) et (209*a*). Remarquons tout d'abord que le caractère dynamique de (220) qui s'exprime par l'intermédiaire de $\Phi_0(t)$ est lié au système de coordonnées choisi pour décrire un système entraîné. D'autre part cette expression correspond à un développement au voisinage de $\alpha_2 = 0$ et non de $\rho_2 = 0$, elle ne représente donc pas exactement une solution du vide.

L'erreur commise en négligeant les termes d'ordre supérieur à 0 dans nos développements sont de l'ordre de $\lambda = |m\sqrt{|\alpha|}|$ on a :

$$\lambda = m\sqrt{\alpha} \# me^{-\Phi/2}/\mathrm{R} = 2a_3/\mathrm{R} \tag{221}$$

grace à (204*a*) et (205) qui représente donc le rapport entre le rayon de la singularité de Schwarzschild de la masse centrale et le rayon de courbure de l'univers et est par conséquent tout à fait négligeable dans la plupart des cas physiques.

REFERENCES

[*1*] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, 1955.
[*2*] I. H. THOMPSON and G. J. WHITROW, *M. N. R. A. S.*, t. **136**, 1967, p. 207.
[*3*] I. H. THOMPSON and G. J. WHITROW, *M. N. R. A. S.*, t. **139**, 1968, p. 499.
[*4*] W. B. BONNOR and M. C. FAULKES, *M. N. R. A. S.*, t. **137**, 1967, p. 239.
[*5*] J. EISENSTAEDT, Thèse d'État, Paris, 1974.
[*6*] A. L. MEHRA, P. C. VAIDYA and R. S. KUSHWAHA, *Phys. Rev.*, t. **186**, 1969, p. 1333.
[*7*] J. EISENSTAEDT, *C. R. Acad. Sci.*, t. **270**, 1970, p. 422.
[*8*] J. EISENSTAEDT, *Phys. Rev.*, D 15, Vol. **11**, 1975, p. 2021.
[*9*] J. EISENSTAEDT, *Phys. Rev. (à paraître)*.

(Manuscrit reçu le 14 mai 1975)