

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

R. ROSCA

L. VANHECKE

Sur les variétés lorentziennes munies d'une connexion principale

Annales de l'I. H. P., section A, tome 22, n° 3 (1975), p. 201-216

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1975__22_3_201_0

© Gauthier-Villars, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur les variétés lorentziennes munies d'une connexion principale

par

R. ROSCA et L. VANHECKE

Katholieke Universiteit te Leuven, Departement Wiskunde, Celestijnenlaan 200B
B 3030 Heverlee (Belgique)

RÉSUMÉ. — On considère une variété lorentzienne $V_{\mathcal{L}}^n$ à n dimensions sur laquelle on définit une connexion principale ∇_p . Une pareille connexion introduit d'une manière naturelle deux 1-formes et deux champs dont on étudie des automorphismes et transformations infinitésimales. On donne des applications et des exemples dans le cas d'un espace-temps ($n = 4$).

INTRODUCTION

Étant donnée une C^∞ -variété lorentzienne (ou hyperbolique) $V_{\mathcal{L}}^n$ de dimension n , on peut décomposer l'espace tangent $T_x(V_{\mathcal{L}}^n)$ en chaque point $x \in V_{\mathcal{L}}^n$ en un 2-plan de Minkowski H_x et un $(n-2)$ -plan spatial S_x . Le 2-plan H_x est déterminé par deux vecteurs isotropes réels ξ_1 et ξ_n qui avec les $n-2$ vecteurs spatiaux ξ_r ($r = 2, 3, \dots, n-1$) forment une base vectorielle *quasi-orthonormée* \mathcal{R}_{ξ} . Les formes de connexion α_B^A ($A, B = 1, 2, \dots, n$) afférentes à la base duale $\mathcal{R}_{\xi}^* \equiv \{\alpha^A\}$ qui sont du type α_1^r ou α_n^r ($\alpha_n^r = \alpha_r^1$) sont dénommées formes de connexion mixtes et une connexion ∇_p telle que $\alpha_1^r = \bar{k}_r \alpha^r$, $\alpha_r^1 = k_r \alpha^r$ (ne pas sommer) est appelée une *connexion principale*. Une variété $V_{\mathcal{L}}^n$ structurée par une pareille connexion (notée par V_p^n) jouit d'un ensemble de propriétés remarquables qui sont de plus susceptibles de différentes interprétations, physiques dans le cas d'un espace-temps ($n = 4$).

Ainsi, soient η_H et η_S les formes simples qui correspondent respectivement à H_x et S_x . La première de ces formes est fermée et définit sur V_p^n une structure *pré-symplectique*, le noyau de cette forme étant S_x , et la seconde est

complètement intégrable. Les *distributions* définies par H_x et S_x sont les deux *involutives* (elles définissent respectivement un 2- et un $(n - 2)$ -feuilletage); les sous-variétés intégrales de dimension maximale (surface temporelle) de H_x sont toujours *minimales* tandis que celles de S_x sont minimales si η_S est *harmonique*. Il convient de signaler que ces propriétés de minimalité sont en accord avec un récent travail de S. Tachibana [14].

Une connexion ∇_p met en évidence deux 1-formes de même classe θ et $\tilde{\theta}$ (la première est appelée 1-*forme principale* et la seconde son *associée*) et deux champs X et \tilde{X} (le *champ principal* et son *associé*) qui sont liés à ces formes moyennant l'isomorphisme pré-symplectique $\mathcal{A} : H_x(V_p^n) \rightarrow H_x^*(V_p^n)$. Dans le cas particulier $n = 4$, θ est le covecteur de Lee d'une certaine *structure presque symplectique* Ω . Dans le cas général, différents automorphismes et transformations infinitésimales sur V_p^n mettant en jeu θ , $\tilde{\theta}$, X et \tilde{X} sont étudiés.

Une V_p^n jouit aussi de la propriété suivant laquelle elle porte toujours un couple $\{ \underset{1}{V}^{n-1}(1), \underset{n}{V}^{n-1}(1) \}$ d'*hypersurfaces singulières de défaut 1*. Eu égard aux définitions données dans [7], [8] une V_p^n telle que $k = \Sigma k_r = 0$, $\bar{k} = \Sigma \bar{k}_r = 0$ est dénommée *potentiellement presque minimale* (dans ce cas η_S est harmonique et la réciproque est aussi vraie) et une V_p^n telle que $k_r = \lambda$, $\bar{k}_r = \mu$ est dénommée *potentiellement presque ombilicale*.

Dans le cas d'un espace-temps V_p^4 , la condition nécessaire et suffisante pour que Ω soit *symplectique* est que V_p^4 soit potentiellement presque minimale et si X est un automorphisme infinitésimal de Ω alors θ est *symplectiquement harmonique*.

Pour une V_p^n *localement plate* et potentiellement presque ombilicale la connexion ∇_p est *équ-affine* et la 1-forme principale (resp. son associée) est *fermée* (resp. complètement intégrable). Le champ principal et son associé définissent dans ce cas respectivement certains automorphismes et certaines transformations infinitésimales sur V_p^n .

L'usage du *formalisme vectoriel complexe* construit dans [2] permet de plus de mettre en évidence certaines propriétés qui ont trait à ce formalisme dans le cas d'un espace-temps V_p^4 structuré par une connexion ∇_p .

Pour finir on donne plusieurs *exemples* de variétés lorentziennes $V_{\mathcal{L}}^4$ qui sont munies d'une connexion ∇_p et qui sont de plus soit du type potentiellement presque minimale soit du type potentiellement presque ombilicale.

1. Soit $V_{\mathcal{L}}^n$ une C^∞ -variété lorentzienne (ou hyperbolique) de dimension n et de signature hyperbolique normale $(- \dots - +)$ et soit

$$F_q(V_{\mathcal{L}}^n) \equiv \{ x, \xi_A ; A, B, C = 1, 2, \dots, n \}$$

le faisceau des repères *quasi-orthonormés* [I], [II] associés au point générique $x \in V_{\mathcal{L}}^n$. La base vectorielle $\{ \xi_A \}$ d'un pareil repère, que nous

notons par $\mathcal{R}_\xi \equiv \{x, \xi_A\}$, est formée par deux vecteurs *isotropes* réels, soit ξ_1 et ξ_n , et par $n-2$ vecteurs *spatiaux* ξ_r ($r, s, \dots = 2, 3, \dots, n-1$) qui sont tels que l'on a

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = 1 \quad , \quad \langle \xi_r, \xi_A \rangle = 0 \quad \text{pour} \quad r \neq A. \quad (1)$$

Si $T_x(V_\varphi^n)$ est l'espace tangent à V_φ^n en x , on peut le décomposer suivant

$$T_x(V_\varphi^n) = H_x(V_\varphi^n) \oplus S_x(V_\varphi^n) \quad (2)$$

où $H_x(V_\varphi^n) = \{ \xi_1, \xi_n \}$ est un 2-plan de Minkowski et $S_x(V_\varphi^n) = \{ \xi_r \}$ est un $(n-2)$ -plan spatial.

Si $\{ \alpha^A \}$ est la base duale de $\{ \xi_A \}$, l'élément linéaire dx de V_φ^n s'écrit

$$dx = \alpha^A \otimes \xi_A \quad (3)$$

et en vertu de (1) la métrique de V_φ^n rapportée à $\{ \alpha^A \}$ a pour expression

$$ds^2 = 2\alpha^1\alpha^n - \sum_r (\alpha^r)^2. \quad (4)$$

La connexion ∇ sur V_φ^n est donnée par

$$\nabla \xi_A = \alpha^B \otimes \xi_B \quad (5)$$

et de (1) et (5) on déduit

$$\begin{aligned} \alpha_1^n &= 0 = \alpha_n^1 \quad , \quad \alpha_1^1 + \alpha_n^n = 0, \\ \alpha_r^n - \alpha_1^r &= 0 \quad , \quad \alpha_n^r - \alpha_r^1 = 0, \\ \alpha_s^r + \alpha_r^s &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Le premier et le second groupe d'équations de structure afférentes à \mathcal{R}_ξ sont

$$\begin{aligned} d \wedge \alpha^A &= \alpha^B \wedge \alpha_B^A, \\ d \wedge \alpha_B^A &= \alpha_B^C \wedge \alpha_C^A + \Omega_B^A \end{aligned} \quad (7)$$

où Ω_B^A sont les 2-formes de courbure et la forme $\alpha_1^1 (= -\alpha_n^n)$ est la *composante d'homothétie* (unique) de la connexion.

2. Nous dirons que la connexion ∇ est *principale* si les formes de connexion *mixtes* α_1^r et α_r^1 satisfont à

$$\alpha_1^r = \bar{k}_r \alpha^r \quad , \quad \alpha_r^1 = k_r \alpha^r \quad , \quad \bar{k}_r, k_r \in \mathcal{D}(V_\varphi^n). \quad (8)$$

(ne pas sommer !)

Nous noterons désormais par ∇_p et V_p^n respectivement la connexion ∇ définie par (8) et la variété structurée par une pareille connexion.

$$\eta = \alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \dots \wedge \alpha^n \quad (9)$$

étant l'élément de volume de V_p^n , on peut écrire

$$\eta = (-1)^{n-2} \eta_H \wedge \eta_S \tag{10}$$

où

$$\eta_H = \alpha^1 \wedge \alpha^n \quad , \quad \eta_S = \alpha^2 \wedge \alpha^3 \wedge \dots \wedge \alpha^{n-1} \tag{11}$$

sont des formes simples associées à H_x et S_x . En posant

$$k = \sum_r k_r \quad , \quad \bar{k} = \sum_r \bar{k}_r \tag{12}$$

nous conviendrons de dénommer la 1-forme

$$\theta = \bar{k}\alpha^1 + k\alpha^n \tag{13}$$

la 1-forme principale associée à la connexion ∇_p . Eu égard à (8) et (11) on trouve alors

$$d \wedge \eta_H = 0 \quad , \quad d \wedge \eta_S = \theta \wedge \eta_S. \tag{14}$$

D'autre part, en vertu de (8) on a

$$d \wedge \alpha^1 = \alpha^1 \wedge \alpha_1^1 \quad , \quad d \wedge \alpha^n = -\alpha^n \wedge \alpha_1^n. \tag{15}$$

Si on se rapporte aux définitions données dans [7], [8], les relations (15) montrent que toute variété V_p^n porte des couples d'hypersurfaces singulières de défaut 1 $\{V_1^{n-1}(1), V_n^{n-1}(1)\}$ qui sont définies par

$$\alpha^1 = 0 \text{ resp. } \alpha^n = 0. \tag{16}$$

La variété spatiale $V_s^{n-2} = V_1^{n-1}(1) \cap V_n^{n-1}(1)$ est alors une variété intégrale de la distribution involutive \mathcal{S} définie par les $(n-2)$ -plans $S_x(V_p^n)$. Il est aussi facile de voir à l'aide de (8) que la distribution \mathcal{H} définie par les 2-plans $H_x(V_p^n)$ est aussi involutive.

La condition nécessaire et suffisante pour que le champ isotrope ξ_1 (resp. ξ_n) soit un champ caractéristique [3] de $\eta_S(\xi_1 \lrcorner \eta_S = 0, \xi_1 \lrcorner d \wedge \eta_S = 0)$ est

$$\bar{k} = 0 \text{ resp. } k = 0. \tag{17}$$

En remarquant que η_H et η_S sont adjointes l'une de l'autre par rapport à la métrique (4), on peut dire que tout champ $h \in \mathcal{H}$ est caractéristique ($k = \bar{k} = 0$) si et seulement si η_S (ou η_H) est harmonique ($d\eta_S = 0 = \delta\eta_S$).

L'élément linéaire d'une surface intégrale de la distribution \mathcal{H} étant

$$dx = \tilde{\alpha}^1 \otimes \xi_1 + \tilde{\alpha}^n \otimes \xi_n, \tag{18}$$

les secondes formes fondamentales φ_r de cette surface s'écrivent à l'aide de (5) et (8) :

$$\begin{aligned} \varphi_r &= - \langle dx, \nabla \xi_r \rangle \\ &= - \{ \tilde{k}_r (\tilde{\alpha}^1)^2 + \tilde{k}_r (\tilde{\alpha}^n)^2 \} \end{aligned} \tag{19}$$

où « \sim » indiquent les fonctions et formes induites. Le calcul des courbures principales (par rapport au $ds^2 = 2\tilde{\alpha}^1\tilde{\alpha}^n$) montre aussitôt que cette surface est toujours *minimale*.

D'autre part, l'élément linéaire d'une sous-variété intégrale de dimension maximale de la distribution \mathcal{S} est

$$dx = \tilde{\alpha}^r \otimes \xi_r. \tag{20}$$

Les secondes formes fondamentales sont ici

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= - \langle dx, \nabla \xi_1 \rangle = \sum_r \tilde{k}_r (\tilde{\alpha}^r)^2, \\ \varphi_n &= - \langle dx, \nabla \xi_n \rangle = \sum_r \tilde{k}_r (\tilde{\alpha}^r)^2 \end{aligned} \tag{21}$$

et par conséquent, en vertu de (12), les traces γ^1, γ^n respectivement de φ_1 et φ_n sont

$$\gamma^1 = \tilde{k} \quad , \quad \gamma^n = \tilde{k}. \tag{22}$$

On en déduit que le vecteur de courbure moyenne (dans le sens de Bompiani) associé à l'immersion considérée est

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \gamma^1 \xi_1 + \gamma^n \xi_n \\ &= \tilde{k} \xi_1 + \tilde{k} \xi_n. \end{aligned} \tag{23}$$

En premier lieu il résulte de là que l'immersion de la variété intégrale est *minimale* si η_S est harmonique. En second lieu, elle est *pseudo-minimale*, c'est-à-dire $\|\mathbf{H}\| = 0$ [9], [10] si ξ_1 ou ξ_n définit un champ caractéristique de η_S .

Il est bon de signaler que les propriétés de minimalité sont en accord avec les considérations faites par S. Tachibana dans [14].

On a donc :

THÉORÈME. — Soit V_p^n resp. $T_x(V_p^n)$ une C^∞ -variété lorentzienne de dimension n munie d'une connexion principale ∇_p et l'espace tangent en $x \in V_p^n$. Si $H_x(V_p^n)$ et $S_x(V_p^n)$ désignent respectivement le 2-plan de Minkowski et le $(n - 2)$ -plan spatial de $T_x(V_p^n)$ et si η_H resp. η_S est la forme simple correspondant à H_x resp. S_x et θ est la 1-forme principale associée à la connexion ∇_p , alors

- (i) η_H est fermée et η_S est complètement intégrable;
- (ii) ξ_1 resp. ξ_n est un champ caractéristique de η_S si et seulement si $\theta \sim \alpha^n$ resp. $\theta \sim \alpha^1$;
- (iii) η_S et η_H sont harmoniques si et seulement si tout champ $\{h_x \in \mathcal{H}_x\}$ est un champ caractéristique pour η_S ;

(iv) V_p^n porte des couples d'hypersurfaces singulières de défaut 1 associées;
 (v) la distribution \mathcal{H} définie par les 2-plans H_x est involutive et les surfaces intégrales sont toujours minimales;

(vi) la distribution \mathcal{S} définie par les $(n - 2)$ -plans S_x est involutive. Les sous-variétés intégrales de dimension maximale sont minimales si η_S est harmonique et pseudo-minimales si ξ_1 ou ξ_n définit un champ caractéristique de η_S .

3. Le rang de la forme η_H étant 2 (noyau $\eta_H = S_x$) on peut dire en vertu de (i) du théorème précédent, qu'elle définit sur V_p^n une structure pré-symplectique [13]. Par rapport à cette 2-forme la 1-forme principale paraît comme la duale du champ

$$X = k\xi_1 - \bar{k}\xi_n, \tag{24}$$

qu'on dénomme par la suite le *champ principal*. ($X \lrcorner \eta_H = \varphi$ où $X_x \in H_x(V_p^n)$, $\varphi \in H_x^*(V_p^n)$ définit en effet un isomorphisme $\mathcal{A} : H_x(V_p^n) \rightarrow H_x^*(V_p^n)$). Invariantement lié au champ X est le champ

$$\tilde{X} = k\xi_1 + \bar{k}\xi_n \tag{25}$$

orthogonal à X et satisfaisant à

$$\langle X, X \rangle = - \langle \tilde{X}, \tilde{X} \rangle = - 2k\bar{k}. \tag{26}$$

On le dénomme le *champ principal associé*. Il lui correspond par l'isomorphisme \mathcal{A} la 1-forme principale associée

$$\tilde{\theta} = \tilde{X} \lrcorner \eta_H = - \bar{k}\alpha^1 + k\alpha^n. \tag{27}$$

Eu égard à (9), (13) et (27) on peut écrire

$$\eta = (-1)^n (2k\bar{k})^{-1} \theta \wedge \bar{\theta} \wedge \eta_S \tag{28}$$

et

$$X \lrcorner \tilde{\theta} = - \tilde{X} \lrcorner \theta = - 2k\bar{k}. \tag{29}$$

Nous dirons que ces deux champs sont *en involution* par rapport à η_H si

$$\eta_H(X, \tilde{X}) = 2k\bar{k} = 0.$$

On peut donc dire que X et \tilde{X} sont en involution si et seulement si ξ_1 ou ξ_n définit un champ caractéristique de η_S .

De plus, l'adjointe $_*\theta$ de θ (resp. $_*\tilde{\theta}$ de $\tilde{\theta}$) par rapport à la métrique étant

$$_*\theta = (-1)^{n-2} (\bar{k}\alpha^n - k\alpha^1) \wedge \eta_S \tag{30}$$

resp.

$$_*\tilde{\theta} = (-1)^{n-1} (\bar{k}\alpha^n + k\alpha^1) \wedge \eta_S, \tag{31}$$

on a

$$\tilde{\theta} \wedge *_\theta = (k^2 - \bar{k}^2)\eta. \tag{32}$$

Ainsi θ et $\tilde{\theta}$ sont orthogonales si et seulement si \mathbf{X} est colinéaire à $\xi_1 \pm \xi_n$.

Eu égard à (13), (27), (7) et (8) on a

$$\begin{aligned} d \wedge \theta &= (d\bar{k} - \bar{k}\alpha_1^1) \wedge \alpha^1 + (dk + k\alpha_1^1) \wedge \alpha^n, \\ d \wedge \tilde{\theta} &= - (d\bar{k} - \bar{k}\alpha_1^1) \wedge \alpha^1 + (dk + k\alpha_1^1) \wedge \alpha^n \end{aligned} \tag{33}$$

d'où

$$\theta \wedge d \wedge \theta = - \tilde{\theta} \wedge d \wedge \tilde{\theta} = \varphi \wedge \alpha^1 \wedge \alpha^n \tag{34}$$

où

$$\varphi = \bar{k}dk - k d\bar{k} + 2k\bar{k}\alpha_1^1. \tag{35}$$

On en conclut que θ et $\tilde{\theta}$ sont de même classe. De plus, on trouve

$$d \wedge \theta = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\eta_H = 0. \tag{36}$$

Introduisons maintenant sur une V_p^{2n} de dimension paire $2n$ la 2-forme presque symplectique

$$\Omega = \eta_H + \sum_{i=1}^n \alpha^i \wedge \alpha^{i+1}. \tag{37}$$

Par rapport à cette forme on a en vertu des définitions données dans [6]

$$\tilde{\delta}\Omega = \underset{*}{\sim} d \underset{*}{\sim} \Omega, \tag{38}$$

$$d\Omega = \psi + \frac{1}{n-1} \tilde{\delta}\Omega \wedge \Omega \tag{39}$$

où ψ (forme de torsion conforme ou deuxième tenseur conforme de courbure [6]) est effective ($\psi < \Omega^{n-2} = 0$) et $\tilde{\delta}\Omega$ est le covecteur de Lee [5] (forme de torsion symplectique [6]). Dans le cas $n = 2$ on a

$$\tilde{\delta}\Omega = \underset{*}{\sim} d\Omega \tag{40}$$

et puisque

$$\Omega = \eta_H + \eta_S, \tag{41}$$

il vient à l'aide de (14)

$$\tilde{\delta}\Omega = \underset{*}{\sim} (\theta \wedge \Omega) = \mathbf{X} \lrcorner \Omega = \theta. \tag{42}$$

De même que pour $n = 2$ on trouve dans le cas général

$$\tilde{\delta}\Omega = 0 \Rightarrow \theta = 0. \tag{43}$$

A l'aide de (24), (25) et (8) on déduit sur une V_p^n :

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{X} &= (dk + k\alpha_1^1) \otimes \xi_1 - (d\bar{k} - \bar{k}\alpha_1^1) \otimes \xi_n + (k\bar{k}_r - \bar{k}k_r)\alpha^r \otimes \xi_r, \\ \nabla \tilde{\mathbf{X}} &= (dk + k\alpha_1^1) \otimes \xi_1 + (d\bar{k} - \bar{k}\alpha_1^1) \otimes \xi_n + (k\bar{k}_r + \bar{k}k_r)\alpha^r \otimes \xi_r, \end{aligned} \tag{44}$$

ce qui montre que \mathbf{X} et $\tilde{\mathbf{X}}$ sont parallèles dans le faisceau $\cup H_x$ [16] si et seulement si

$$dk + k\alpha_1^1 = 0 \quad , \quad d\bar{k} - \bar{k}\alpha_1^1 = 0. \tag{45}$$

On en déduit que dans ce cas la connexion est *équi-affine* (α_1^1 est un cobord) et θ est *fermée*.

On peut donc formuler le

THÉORÈME. — Soit V_p^n une variété lorentzienne munie d'une connexion principale. Le champ X sur V_p^n , défini par $X \lrcorner \eta_H = \theta$ est dénommé le champ principal, le champ \tilde{X} défini à un signe près par $\tilde{X}_x \in H_x$, $\tilde{X} \perp X = 0$, $\langle \tilde{X}, \tilde{X} \rangle = -\langle X, X \rangle$, son associé et $\tilde{\theta} = \tilde{X} \lrcorner \eta_H$ la 1-forme principale associée. Ces deux champs et formes jouissent des propriétés suivantes ;

- (i) X et \tilde{X} sont en involution si et seulement si ξ_1 ou ξ_n définit un champ caractéristique de η_S ;
- (ii) θ et $\tilde{\theta}$ sont orthogonales si et seulement si X est colinéaire à $\xi_1 \pm \xi_n$;
- (iii) θ et $\tilde{\theta}$ sont de même classe;
- (iv) θ est fermée si et seulement si η_H est invariante par X ;
- (v) si l'on considère sur une V_p^{2n} de dimension $2n$ la 2-forme presque symplectique Ω défini par (37), alors θ est le covecteur de Lee pour $n = 2$ et si Ω est cofermée alors η_S est harmonique.

4. Faisons maintenant quelques considérations sur les couples $\{V^{n-1}(1), V^{n-1}(1)\}$ d'hypersurfaces singulières (de défaut 1) associées qui ont été signalés au n° 2. $V^{n-1}(1)$ (resp. $V^{n-1}(1)$) est définie par $\alpha^1 = 0$ (resp. $\alpha^n = 0$) et eu égard aux définitions données dans [7], [8] on a

- a) si $k = 0$ (resp. $\bar{k} = 0$) la variété $V^{n-1}(1)$ (resp. $V^{n-1}(1)$) est *presque minimale*;
- b) si $k_r = \lambda$ (resp. $k_r = \mu$) la variété $V^{n-1}(1)$ (resp. $V^{n-1}(0)$) est *presque ombilicale*.

En vertu de ces définitions nous dirons qu'une V_p^n dont $k = \bar{k} = 0$ est *potentiellement presque minimale* et une V_p^n dont $k_r = \lambda, \bar{k}_r = \mu$ est *potentiellement presque ombilicale*.

Considérons par exemple la variété $V^{n-1}(1)$. L'élément linéaire s'écrit

$$dx = \tilde{\alpha}^r \otimes \xi_r + \tilde{\alpha}^n \otimes \xi_n \tag{46}$$

et on en déduit

$$*dx = (-1)^{n-2} \tilde{\alpha}^2 \wedge \dots \wedge \tilde{\alpha}^{n-1} \otimes \xi_1 + (-1)^{r-1} \tilde{\alpha}^2 \wedge \tilde{\alpha}^3 \wedge \dots \wedge \tilde{\alpha}^r \wedge \dots \wedge \tilde{\alpha}^n \otimes \xi_r. \tag{47}$$

A l'aide de (7) et (8) on trouve

$$d \wedge *dx = \tilde{\alpha}_1^1 \wedge *dx - \tilde{k} \tilde{\eta} \otimes \xi_n \tag{48}$$

où

$$\tilde{\eta} = \tilde{\alpha}^2 \wedge \tilde{\alpha}^3 \wedge \dots \wedge \tilde{\alpha}^n \tag{49}$$

et nous formulons le

THÉORÈME. — Une V_p^n jouit des propriétés suivantes :

(i) V_p^n est potentiellement presque minimale si et seulement si η_S est harmonique;

(ii) l'élément linéaire de $V^{n-1}(1)$ resp. $V^{n-1}(1)$ est *-complètement intégrable si ξ_n resp. ξ_1 est un champ caractéristique de η_S .

Remarque. — Si la composante d'homothétie induite sur $V^{n-1}(1)$ ($a = 1, 2n$) est nulle, alors les variétés sont harmoniquement minimales ($d \wedge *_s dx = 0$) dans le cas (ii) du théorème précédent.

5. Supposons maintenant que V_p^n est un espace de Minkowski muni d'une connexion principale (noté \mathcal{M}_p^n) qui est de plus potentiellement presque ombilicale. En vertu de la définition donnée, on a

$$\bar{k}_r = \lambda \quad , \quad k_r = \mu \quad , \quad \lambda, \mu \in \mathcal{D}(\mathcal{M}_p^n). \tag{50}$$

La différentiation de

$$\alpha_1^r = \lambda \alpha^r \quad , \quad \alpha_r^1 = \mu \alpha^r \tag{51}$$

donne

$$\left\{ \begin{array}{l} d \ln \lambda - \alpha_1^1 + \lambda \alpha^1 + \mu \alpha^n = 0 \\ d \ln \mu + \alpha_1^1 + \lambda \alpha^1 + \mu \alpha^n = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} d \ln \frac{k}{\bar{k}} + 2\alpha_1^1 = 0 \\ d \ln k\bar{k} + k\bar{k}\theta = 0. \end{array} \right. \tag{52}$$

Cela montre aussitôt que la connexion principale est équi-affine et que la 1-forme principale est un cobord. En outre, eu égard à (33) on trouve que l'associée de θ est complètement intégrable, soit

$$d \wedge \tilde{\theta} = \frac{1}{n-2} \theta \wedge \tilde{\theta}. \tag{53}$$

En vertu de (9), (14), (24), (25), (29) et (52) il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \eta &= (\operatorname{div} X)\eta = 0, \\ \mathcal{L}_{\tilde{X}} \eta &= (\operatorname{div} \tilde{X})\eta = \frac{2}{n-2} k\bar{k}\eta \end{aligned} \tag{54}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \theta &= 0 \quad , \quad \mathcal{L}_{\tilde{X}} \theta = -(n-2) (\operatorname{div} \tilde{X})\theta, \\ \mathcal{L}_X \tilde{\theta} &= (n-1) (\operatorname{div} \tilde{X})\theta \quad , \quad \mathcal{L}_{\tilde{X}} \tilde{\theta} = (\operatorname{div} \tilde{X})\tilde{\theta}. \end{aligned} \tag{55}$$

THÉORÈME. — Soit \mathcal{M}_p^n un espace de Minkowski muni d'une connexion principale qui est aussi potentiellement presque ombilicale. Par rapport aux champs principaux et leurs formes duales, \mathcal{M}_p^n jouit des propriétés suivantes :

- (i) la connexion principale est équi-affine;
- (ii) la 1-forme principale est fermée et son associée est complètement intégrable;
- (iii) le champ principal est un automorphisme infinitésimal de l'élément de volume et la divergence de son associé est homothétique au produit $k\bar{k}$;
- (iv) le champ principal est un automorphisme infinitésimal de la 1-forme principale et son associé est une transformation infinitésimale de cette forme et de la forme associée.

6. Considérons maintenant le cas où V_p^n est un espace-temps ($n = 4$). En nous rapportant à (41) et (14) on a

$$d \wedge \Omega = \theta \wedge \Omega \quad (56)$$

et on peut dire que (V_p^4, Ω) est une variété symplectique si et seulement si elle est potentiellement presque minimale.

Dans le cas général d'une structure presque symplectique on trouve après calculs

$$\mathcal{L}_X \Omega = d \wedge \theta, \quad (57)$$

$$*_\theta = X \lrcorner \eta = \theta \wedge \eta_s, \quad *_\tilde{\theta} = \tilde{X} \lrcorner \eta = \tilde{\theta} \wedge \eta_s, \quad (58)$$

$$X \lrcorner *_\theta = 0, \quad \tilde{X} \lrcorner *_\theta = 2k\bar{k}\eta_s, \quad (59)$$

$$X \lrcorner *_\tilde{\theta} = -2k\bar{k}\eta_s, \quad \tilde{X} \lrcorner *_\tilde{\theta} = 0$$

et

$$d \wedge *_\theta = d\theta \wedge \eta_s, \quad d \wedge *_\tilde{\theta} = \{d \wedge \tilde{\theta} + \tilde{\theta} \wedge \theta\} \wedge \eta_s. \quad (60)$$

De plus, si L est l'opérateur défini par $L : \varphi \rightarrow \varphi \wedge \Omega$ (φ p -forme) et Λ son adjoint par rapport à Ω ($\Lambda\varphi = *_\theta L *_\theta \varphi$) [6], on trouve

$$\Lambda *_\theta = \theta, \quad \Lambda *_\tilde{\theta} = \tilde{\theta}. \quad (61)$$

Dans le cas d'un espace relativiste \mathcal{M}_p^4 qui est potentiellement presque ombilicale, on déduit aussitôt

$$\tilde{\delta}\theta = 0, \quad (62)$$

$$\mathcal{L}_{X_*} *_\theta = 0 = \mathcal{L}_{\tilde{X}_*} *_\tilde{\theta}. \quad (63)$$

On a donc le

THÉORÈME. — Si V_p^4 est un espace-temps muni d'une connexion principale et si $\Omega = \eta_H + \eta_S$ est la 2-forme presque symplectique, alors on a :

- (i) la condition nécessaire et suffisante pour que Ω soit symplectique est que l'espace-temps soit potentiellement presque minimale;

(ii) les adjointes symplectiques de la 1-forme principale et de son associée sont simultanément autoconformes et conformes à la 2-forme spatiale η_S ;

(iii) le champ principal (resp. son associé) est une relation intégrale d'invariance de l'adjointe symplectique de la 1-forme principale (resp. de la forme associée);

(iv) Ω est conformétement symplectique ($\theta = \tilde{\delta}\Omega$ fermée) si et seulement si X est un automorphisme infinitésimal de la structure presque symplectique et dans ce cas la 1-forme principale est Ω -harmonique;

(v) par rapport à la structure presque symplectique, θ et $\tilde{\theta}$ jouissent de la propriété suivante ;

$$\Lambda_{*}\tilde{\theta} = \theta \quad , \quad \Lambda_{*}\tilde{\theta} = \tilde{\theta}.$$

Si V_p^4 est un espace de Minkowski qui est potentiellement presque ombilicale, on a

(i) X est un automorphisme infinitésimal de la structure presque symplectique;

(ii) la 1-forme principale est Ω -harmonique;

(iii) l'adjointe symplectique de la 1-forme principale est invariante par le champ principal et son associé.

7. Dans le cas d'un espace-temps nous allons mettre en évidence certaines propriétés susceptibles d'être interprétées par le formalisme vectoriel complexe [2].

Rappelons rapidement que ce formalisme est basé sur l'isomorphisme local

$$f : \mathcal{L}(4) \Rightarrow SO^3(C)$$

où $\mathcal{L}(4)$ et $SO^3(C)$ sont respectivement le groupe de Lorentz à 4 dimensions et le groupe tridimensionnel complexe de rotation. Il existe un automorphisme entre l'espace réel $L^{\Lambda(2)}$ des bivecteurs et l'espace tridimensionnel complexe E^3 des bivecteurs autoduaux. De même, l'espace $L^{*\Lambda(2)}$ des 2-formes $\theta^i \wedge \theta^k$, $\{\theta^i\}$ désignant un corepère de Sachs [12], est isomorphe à l'espace des 2-formes autoduales C^3 . On peut prendre pour base de $L^{*\Lambda(2)}$ les 2-formes complexes Z^a et les formes complexes conjuguées \bar{Z}^a . Ces formes ont pour expressions

$$\begin{aligned} Z^1 &= \theta^3 \wedge \theta^4 \quad , \quad Z^2 = \theta^1 \wedge \theta^2 \quad , \quad Z^3 = \frac{1}{2}(\theta^1 \wedge \theta^4 - \theta^2 \wedge \theta^3), \\ \bar{Z}^1 &= \theta^2 \wedge \theta^4 \quad , \quad \bar{Z}^2 = \theta^1 \wedge \theta^3 \quad , \quad \bar{Z}^3 = \frac{1}{2}(\theta^1 \wedge \theta^4 + \theta^2 \wedge \theta^3). \end{aligned} \tag{64}$$

A l'aide des équations de structure qui lient $d \wedge \theta^k$ aux formes de con-

nexion, on obtient les équations de structure des 2-formes Z^a . Il vient :

$$\begin{aligned} d \wedge Z^1 &= \frac{1}{2} \sigma_3 \wedge Z^1 - \sigma_2 \wedge Z^3, \\ d \wedge Z^2 &= \frac{1}{2} \sigma_3 \wedge Z^2 + \sigma_1 \wedge Z^3, \\ d \wedge Z^3 &= \frac{1}{2} \sigma_1 \wedge Z^1 - \frac{1}{2} \sigma_2 \wedge Z^2 \end{aligned} \quad (65)$$

où σ_a sont les 1-formes de connexion correspondant à l'espace C^3 . Les formes σ_a et leurs complexes conjuguées sont exprimées en fonction des formes de connexion θ_k^i par

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -2\theta_3^1 & , & \quad \bar{\sigma}_1 = -2\theta_2^1, \\ \sigma_2 &= 2\theta_1^3 & , & \quad \bar{\sigma}_2 = 2\theta_1^2, \\ \sigma_3 &= -2(\theta_1^1 + \theta_2^2) & , & \quad \bar{\sigma}_3 = -2(\theta_1^1 - \theta_2^2). \end{aligned} \quad (66)$$

Par rapport au corepère $\{\theta^k\}$ σ_α et $\bar{\sigma}_\alpha$ sont exprimées par

$$\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha k} \theta^k \quad , \quad \bar{\sigma}_\alpha = \bar{\sigma}_{\alpha k} \bar{\theta}^k \quad (67)$$

où les douze coefficients $\sigma_{\alpha k}$, $\bar{\sigma}_{\alpha k}$ à valeurs complexes correspondent dans le formalisme vectoriel complexe aux coefficients spinoriels de Newmann et Penrose.

Les coefficients de connexion θ_i^j s'expriment en fonction des coefficients α_i^j par rapport au repère quasi-orthonormé, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \theta_1^1 &= \alpha_1^1 & , & \quad \theta_2^2 = i\alpha_2^3, \\ \theta_1^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1^2 + i\alpha_1^3) & , & \quad \theta_1^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1^2 - i\alpha_1^3), \\ \theta_2^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_2^1 - i\alpha_3^1) & , & \quad \theta_3^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_2^1 - i\alpha_3^1). \end{aligned} \quad (68)$$

Il suit de là que les conditions nécessaires et suffisantes pour que la connexion ∇ soit principale sont que

$$\begin{aligned} \theta_1^2 &= a\theta^2 + b\theta^3 & , & \quad \theta_2^1 = f\theta^2 + g\theta^3 \\ \theta_1^3 &= b\theta^2 + a\theta^3 & , & \quad \theta_3^1 = g\theta^2 + f\theta^3 \end{aligned} \quad , \quad a, b, f, g \in \mathbb{R} \quad (69)$$

ou à l'aide de (66) :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= l\theta^3 - k\theta^2 & , & \quad \sigma_2 = -\bar{l}\theta^2 + \bar{k}\theta^3, \\ \bar{\sigma}_1 &= l\theta^2 - k\theta^3 & , & \quad \bar{\sigma}_2 = \bar{k}\theta^2 - \bar{l}\theta^3 \end{aligned} \quad (70)$$

où

$$l = k_3 - k_2 \quad , \quad \bar{l} = \bar{k}_3 - \bar{k}_2. \quad (71)$$

Conformément à [4]

$$\sigma = -\frac{1}{2}\bar{\sigma}_{13} \text{ resp. } \sigma' = \frac{1}{2}\bar{\sigma}_{22} \tag{72}$$

est la distorsion complexe de la congruence $[\mathbf{h}_4]$ resp. $[\mathbf{h}_1]$ et

$$\rho = -\frac{1}{2}\bar{\sigma}_{12} \text{ resp. } \rho' = \frac{1}{2}\bar{\sigma}_{23} \tag{73}$$

est la dilatation complexe de la congruence $[\mathbf{h}_4]$ resp. $[\mathbf{h}_1]$.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour une connexion principale s'écrivent

$$\begin{aligned} \sigma_{14} &= 0, & \sigma_{21} &= 0, \\ \sigma_{12} &= \bar{\sigma}_{12}, & \sigma_{23} &= \bar{\sigma}_{23}, \\ \sigma_{13} &= \bar{\sigma}_{13}, & \sigma_{22} &= \bar{\sigma}_{22}, \\ \sigma_{11} &= 0, & \sigma_{24} &= 0 \end{aligned} \tag{74}$$

et dans ce cas on a

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{1}{2}l, & \sigma' &= -\frac{1}{2}\bar{l}, \\ \rho &= \frac{1}{2}k, & \rho' &= \frac{1}{2}\bar{k}. \end{aligned} \tag{75}$$

On peut donc formuler, en nous rapportant au dictionnaire du formalisme vectoriel complexe, le

THÉORÈME. — *Un espace-temps est muni d'une connexion principale si et seulement si*

- (i) *les congruences $[\mathbf{h}_4]$ et $[\mathbf{h}_1]$ sont géodésiques;*
- (ii) *les distorsions et dilatations complexes $(\sigma, \sigma'$ resp. $\rho, \rho')$ sont réelles;*
- (iii) $\langle \nabla_{\mathbf{h}_4}\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \rangle = 0 = \langle \nabla_{\mathbf{h}_1}\mathbf{h}_4, \mathbf{h}_2 \rangle$.

Dans ce cas, on a

$$\sigma = -\frac{1}{2}l \quad , \quad \sigma' = -\frac{1}{2}\bar{l} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{1}{2}k \quad \rho' = \frac{1}{2}\bar{k}.$$

V_p^4 est potentiellement presque minimale si et seulement si les dilatations complexes sont nulles et potentiellement presque ombilicale si et seulement si les distorsions complexes sont nulles.

8. Nous allons maintenant donner des exemples d'espaces-temps munis d'une connexion principale. On considère les métriques étudiées dans [15].

Exemple 1.

$$ds^2 = -Adx^2 - Bdy^2 - Cdz^2 + dt^2 \tag{76}$$

où A, B, C sont des fonctions à valeurs positives de t.

Posons

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(dt + \sqrt{A}dx) \quad , \quad \alpha^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(dt - \sqrt{A}dx), \\ \alpha^2 &= \sqrt{B}dy \quad , \quad \alpha^3 = \sqrt{C}dz \end{aligned} \quad (77)$$

et

$$\lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\log A)' \quad , \quad \mu = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\log B)' \quad , \quad \nu = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\log C)'. \quad (78)$$

Un calcul qui ne pose pas de difficultés donne

$$\begin{aligned} \alpha_1^1 &= \lambda(\alpha^1 - \alpha^4) \quad , \quad \alpha_2^3 = 0, \\ \alpha_1^2 &= \mu\alpha^2 \quad , \quad \alpha_2^1 = \mu\alpha^2, \\ \alpha_1^3 &= \nu\alpha^3 \quad , \quad \alpha_3^1 = \nu\alpha^3. \end{aligned} \quad (79)$$

On peut donc conclure que la connexion est principale et $k = \bar{k}$. La variété V_p^4 est potentiellement minimale si et seulement si BC est constant et potentiellement presque ombilicale si et seulement si BC^{-1} est constant.

Exemple 2. — Prenons maintenant la métrique du type « symétrie centrale » :

$$ds^2 = -A(x)dx^2 - x^2dy^2 - x^2 \sin^2 y dz^2 + A(x)dt^2 \quad , \quad A > 0. \quad (80)$$

En posant

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= \sqrt{\frac{A}{2}}(dt + dx) \quad , \quad \alpha^4 = \sqrt{\frac{A}{2}}(dt - dx), \\ \alpha^2 &= xdy \quad , \quad \alpha^3 = x \sin y dz \end{aligned} \quad (81)$$

et

$$\lambda = \frac{1}{2\sqrt{2A}}(\log A)' \quad , \quad \mu = \frac{1}{x\sqrt{2A}}, \quad (82)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \alpha_1^1 &= \lambda(\alpha^1 + \alpha^4) \quad , \quad \alpha^3 = \frac{\cotg y}{x} \alpha^3, \\ \alpha_1^2 &= \mu\alpha^2 \quad , \quad \alpha_2^1 = -\mu\alpha^2, \\ \alpha_1^3 &= \mu\alpha^3 \quad , \quad \alpha_3^1 = -\mu\alpha^3. \end{aligned} \quad (83)$$

On voit aussitôt que la connexion est principale et V_p^4 est toujours potentiellement presque ombilicale. De plus, $k + \bar{k} = 0$.

Exemple 3. — Finalement nous considérons la métrique

$$ds^2 = -Adx^2 - Bdy^2 - Cdz^2 + Ddt^2 \quad (84)$$

où A, B, C, D sont des fonctions à valeurs positives de x et t . Nous posons

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{D}dt + \sqrt{A}dx) \quad , \quad \alpha^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{D}dt - \sqrt{A}dx), \\ \alpha^2 &= \sqrt{B}dy \quad , \quad \alpha^3 = \sqrt{C}dz \end{aligned} \quad (85)$$

et

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2\sqrt{2AD}} \left(\frac{D_x}{\sqrt{D}} - \frac{A_t}{\sqrt{A}} \right) , & \mu &= -\frac{1}{2\sqrt{2AD}} \left(\frac{D_x}{\sqrt{D}} + \frac{A_t}{\sqrt{A}} \right) , \\ a &= \frac{1}{2B} \left(\frac{B_x}{\sqrt{2A}} + \frac{B_t}{\sqrt{2D}} \right) , & b &= \frac{1}{2B} \left(\frac{B_x}{\sqrt{2A}} - \frac{B_t}{\sqrt{2D}} \right) , \\ f &= \frac{1}{2C} \left(\frac{C_x}{\sqrt{2A}} + \frac{C_t}{\sqrt{2D}} \right) , & g &= \frac{1}{2C} \left(\frac{C_x}{\sqrt{2A}} - \frac{C_t}{\sqrt{2D}} \right) . \end{aligned} \tag{86}$$

On trouve alors

$$\begin{aligned} \alpha_1^1 &= \mu\alpha^1 + \lambda\alpha^4 , & \alpha_2^3 &= 0 , \\ \alpha_1^2 &= a\alpha^2 , & \alpha_2^1 &= -b\alpha^2 , \\ \alpha_1^3 &= f\alpha^3 , & \alpha_3^1 &= -g\alpha^3 , \end{aligned} \tag{87}$$

ce qui montre de nouveau que la connexion est principale. L'espace-temps est potentiellement presque minimale si et seulement si $BC = \text{cte}$ et potentiellement presque ombilicale si et seulement si $BC^{-1} = \text{cte}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. CAGNAC, Géométrie des hypersurfaces isotropes, *C. R. Acad. Sc. Paris, Série A*, t. 261, 1965, p. 3045-3048.
- [2] M. CAHEN, R. DEBEVER et L. DEFRISE, A complex Vectorial Formalism in General Relativity, *Journ. Math. and Mech.*, t. 16, 7, 1967, p. 761-785.
- [3] Cl. GODBILLON, *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Hermann, Paris, 1969.
- [4] W. ISRAEL, Differential forms in general relativity, *Comm. of the Dublin Inst. f. Adv. Studies, A*, t. 19, 1970.
- [5] H. C. LEE, A kind of even-dimensional geometry and its applications to exterior calculus, *Amer. Journ. of Math.*, t. 55, 1943, p. 433-438.
- [6] P. LIBERMANN, Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales, *Ann. di Matem.*, t. 36, 1954, p. 27-120.
- [7] R. ROSCA, Sur les hypersurfaces isotropes de défaut 1 incluses dans une variété lorentzienne, *C. R. Acad. Sc. Paris, Série A*, t. 272, 1971, p. 393-396.
- [8] R. ROSCA et L. VANHECKE, Sur les hypersurfaces isotropes $V^{2n+1}(1)$ incluses dans une variété lorentzienne et admettant un champ concourant dans le plan lorentzien associé, *C. R. Acad. Sc. Paris, Série A*, t. 274, 1972, p. 1635-1638.
- [9] R. ROSCA, Varietatile bidimensionale din spatiul Minkowski M_4 pentru care curburile lui Ötsuki sint nule, *Studii si cercetari*, 1, t. 24, 1972, p. 133-141.
- [10] R. ROSCA et L. VANHECKE, Sur les variétés spatiales pseudo-minimales 2-dimensionnelles ou 2-codimensionnelles immergées dans une variété lorentzienne à $n+2$ dimensions, *Bull. Cl. Sc. Acad. Roy. Belg.*, 5^e série, LVIII, 6, 1972. p. 747-758.
- [11] R. ROSCA et L. VANHECKE, Sous-variétés remarquables d'un espace pseudo-riemannien ou pseudo-euclidien, *Monographie, à paraître*, Édit. Acad. Bucarest.
- [12] R. K. SACHS, Gravitational waves in general relativity, *Proc. Roy. Soc.*, 1961, p. 309-338.
- [13] J. M. SOURIAU, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris, 1970.

- [14] S. TACHIBANA, On harmonic simple forms. *Tensor*, N. S., t. 27, 1973, p. 123-130.
- [15] L. VANHECKE, Exemples de variétés isotropes de défaut 1 d'une variété lorentzienne, *Simon Stevin*, t. 47, 3-4, 1974, p. 107-114.
- [16] K. YANO et B. Y. CHEN, On the concurrent vector fields of immersed manifolds, *Kōdai Math. Sem. Rep.*, t. 23, 1971, p. 343-350.

(Manuscrit reçu le 2 juillet 1974)