ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

A. CRUMEYROLLE

Une théorie d'Einstein-Dirac en spin maximum 1

Annales de l'I. H. P., section A, tome 22, nº 1 (1975), p. 43-61

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1975__22_1_43_0>

© Gauthier-Villars, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XXII, n° 1, 1975, p. 43-61. *Physique théorique.*

Une théorie d'Einstein-Dirac en spin maximum 1

par

A. CRUMEYROLLE
Université Paul-Sabatier, 118, route de Narbonne,
31077 Toulouse-Cedex.

ABSTRACT. — Using our spinor approach developed in several papers [*5*], we construct an unitary Einstein-Dirac theory, first in spin maximum 1. An original feature of this article is that we are working without any tetrapod technics, using simply basic notions and existence conditions for spinor structures on pseudo-riemannian fibre bundles. A coupling gravitation-electromagnetic field is pointed out, in the geometric setting of the tangent bundle over space-time. We obtain generalized Maxwell equations for inductive media in presence of gravitationnal field. Enlarged Einstein-Schrödinger theory, developed in [*5, d*] give a particular case of this E. D. theory. E. S. theory is a truncated E. D. theory in spin maximum 1. Exist close relation between torsion-vector and Schrödinger's potential and nullity of torsion-vector has a spinor meaning. A last we incorporate the Petiau-Duffin-Kemmer theory in this geometric setting. A following article will concern spin 1/2 and survey possible generalisations.

I. PRÉAMBULE

En théorie de Dirac on utilise usuellement la « densité » :

$$L_1 = a\sqrt{|g|}\,[(\nabla_\alpha\bar{\psi}\,.\,\gamma^\alpha\,.\,\psi - \bar{\psi}\,.\,\gamma^\alpha\,.\,\nabla_\alpha\psi) + 2m\bar{\psi}\,.\,\psi\,] \quad (1) \quad [8]\,[12]$$

où ψ est un spineur, $\bar{\psi}$ le spineur « conjugué », les γ^α représentent le « tenseur-spineur fondamental », ∇ est la dérivée covariante spinorielle, $\sqrt{|g|}$ l'élément de volume, m un facteur de masse et a une constante. Les spineurs et d'une manière générale toutes les grandeurs, recoivent une interprétation matricielle ainsi que l'algèbre de Clifford sous-jacente.

Nous abandonnons autant qu'il se peut toutes ces techniques d'algèbre linéaire, raisonnant directement en termes de représentations inéductibles d'algèbre de Clifford suivant les méthodes d'approche et utilisant les résultats de nos publications antérieures [*5*, *a*, *b*, *c*, *d*]. Le lecteur devra s'y reporter. Nous exposerons d'abord une théorie en spin 1, à l'aide de spineurs réels complexifiés, nous donnerons ensuite plus succinctement une théorie en spin 1/2 avec des spineurs essentiellement complexes, et envisagerons des généralisations possibles dans le même cadre mathématique. Aucune technique de « tétrapodes » ne sera utilisée. En spin 1, nos champs de repères locaux adaptés peuvent induire sur l'espace-temps des repères absolument quelconques.

II

V étant l'espace-temps relativiste (dim V = 4) et T(V) l'espace des états, celui-ci est muni d'une métrique Q réelle, avec forme bilinéaire symétrique associée g, et d'une connexion euclidienne. En fait comme dans [*5*, *d*] le cadre géométrique sera le fibré $T^2(V)$ avec base restreinte à V. Nous noterons $\xi = T^2(V)\,|\,V$. En chaque point $x \in V$, la fibre de ξ est la somme directe de 2 sous-espaces isomorphes à $T_x(V)$, totalement isotropes pour la métrique Q. Il existe des repères que nous appellerons « adaptés » tels que :

$$e_{\alpha'} = A^{\beta}_{\alpha'} e_{\beta}, \qquad e_{\alpha^{*\prime}} = A^{\beta}_{\alpha^{*\prime}} e_{\beta^*}, \qquad \| A^{\beta}_{\alpha'} \| = \| A^{\beta^*}_{\alpha^{*\prime}} \| \ ;$$

les $g(e_\alpha, e_{\beta^*})$ sont les seuls coefficients non nuls de la forme bilinéaire, Q est donc neutre sur ξ. V sera supposée orientable et d'après [*5*, *a*], ξ admet une structure Spin Q-spinorielle. Nos spineurs sont réels (du moins au départ) et leur espace en $x \in V$, $C(Q)_x f_x$, est l'idéal à gauche minimal que détermine un champ global de 4-vecteurs Q-isotropes, exprimé localement par

$$-\prod_{\alpha=1}^{4} (e_{\alpha^*})_x = f_x.$$

On peut évidemment identifier $C(Q)_x f_x$ et $\Lambda T_x(V)$ pour leurs structures d'espaces vectoriels. Par ailleurs, selon un résultat facile à établir, on peut toujours supposer qu'il existe des repères locaux naturels de coordonnées avec :

$$e_\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right), \qquad e_{\alpha^*} = \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha^*}}\right), \qquad \alpha = 1, 2, 3, 4,$$

tels que $e_1 \Lambda e_2 \Lambda e_3 \Lambda e_4$ définisse localement l'orientation de V. Dans ces repères naturels adaptés à la structure spinorielle, nous écrivons :

$$g_{\alpha\beta^*} = g\left(\partial/\partial x^\alpha, \partial/\partial x^{\beta^*}\right).$$

Notons, que plus particulièrement, il serait possible de choisir la forme volume de composante stricte $\sqrt{|g|}$, $|g| = |\det \| g_{\alpha\beta^*} \||$, pour orienter V et d'envisager donc des coordonnées sur V avec $\sqrt{|g|} = 1$, ($\det \| g_{\alpha\beta^*} \|$ sera supposé négatif, en raison des interprétations physiques).

β désigne l'anti-automorphisme principal de l'algèbre de Clifford et α l'automorphisme principal. $\tilde{\beta} = \beta \circ \alpha$. Il est possible d'introduire globalement sur le fibré des spineurs une « forme » bilinéaire B, symétrique, non dégénérée [5, c], telle que si φ et ψ sont des champs de spineurs : $\psi = uf$, $\varphi = vf$, alors

$$B(uf, vf).f = \tilde{\beta}(uf)vf \tag{2}$$

Nous posons enfin localement :

$$\left.\begin{aligned} e_{\underline{\alpha}^*} &= |g|^{1/4} e^{\alpha} = |g|^{1/4} g^{\alpha\beta^*} e_{\beta^*}, \qquad e_{\underline{\alpha}} = |g|^{-1/4} e_{\alpha} \\ e^{\alpha^*} &= g^{\alpha^*\beta} e_{\beta}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

de sorte que $g(e_{\underline{\alpha}}, e_{\underline{\beta}^*}) = \delta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}$ et que $\{ e_{\underline{\alpha}}, e_{\underline{\beta}^*} \}$ est un système local de repères de Witt réels adapté à la décomposition en somme directe de la fibre de ξ, fournissant des repères « canoniques » locaux pour la structure spinorielle.

Nous écrivons aussi : $\underline{f}(x) = \prod_{i=1}^{4} (e_{\underline{\alpha}^*}) = f(x)$.

Remarquons que l'on aurait pu tout aussi bien que $\{ e_{\underline{\alpha}}, e_{\underline{\beta}^*} \}$ introduire $\{ e_{\underline{\underline{\alpha}}^*}, e_{\underline{\underline{\beta}}} \}$ avec :

$$e_{\underline{\underline{\alpha}}^*} = |g|^{-1/4} e_{\alpha^*}, \qquad e_{\underline{\underline{\beta}}} = |g|^{1/4} g^{\lambda\beta^*} e_{\lambda}$$

et des spineurs déterminés par $\prod_{1}^{4} (e_{\alpha})_x$. Nous reviendrons plus loin sur ce point.

III

Pour l'intelligence de certains développements nous rappelons brièvement certains résultats donnés dans [5, c] et y ajoutons quelques précisions.

$\omega^{\underline{i}}_{\underline{j}}$ désigne les composantes dans le repère de Witt $\{ e_{\underline{\alpha}}, e_{\underline{\beta}^*} \}$ de la forme de connexion euclidienne (restreinte au fibré ξ), $i, j = 1, 2, \ldots 8$. $\omega^{\underline{i}}_{\underline{j}}(X)$ pour toute section différentiable X du fibré T(V) est un élément de l'algèbre de Lie de SO(Q) ; il lui est associé par isomorphisme un élément $u(X)$ de l'algèbre de Lie de Spin Q.

$$u(X) = \frac{1}{4} \omega^{\underline{i}}_{\underline{j}}(X) e_{\underline{i}} e^{\underline{j}} = \frac{1}{4} L^{\underline{i}}_{\underline{j}\underline{\alpha}} e_{\underline{i}} e^{\underline{j}} X^{\alpha}.$$

$\overset{s}{\nabla}$ désigne la différentiation spinorielle obtenue à l'aide de $u(X)$. On sait que si ψ est tout élément d'un repère canonique spinoriel $\underline{S}$ au-dessus du repère de Witt $\{ e_{\underline{\alpha}}, e_{\underline{\beta}^*} \}$, alors

$$\overset{s}{\nabla}_X \psi = u(X)\psi \tag{5}$$

En général, si ψ est un champ de spineurs contravariants :

$$\mathring{\nabla}_X \psi = d\psi_{\underline{S}}(X) + u(X)\psi \tag{6}$$

avec :

$$\psi = \psi_A(u^A \underline{f}), \qquad \underline{S} = \{ u^A \underline{f},\ A \text{ de } 1 \text{ à } 2^4 \}, \qquad d\psi_{\underline{S}}(X) = X^\alpha(\partial_\alpha \psi_A) u^A \underline{f}.$$

Pour un spineur covariant φ, (5) est remplacé par $\mathring{\nabla}_X \varphi = -\varphi u(X)$.

On étend ensuite aux « tenseurs-spineurs » de tout type le formulaire de dérivation covariante.

Considérant $\mathring{\nabla}_X(e^i\psi)$, où ψ est un élément de $\underline{S}$, il vient :

$$\mathring{\nabla}_X(e^i\psi) = \mathring{\nabla}_X(\tilde{e}^i\psi) + e^i(\mathring{\nabla}_X\psi),$$

$\tilde{e}^i$ étant l'opérateur linéaire associé au produit à gauche par e^i dans l'espace des spineurs.

Mais on voit aisément que

$$u(X)e^i - e^i u(X) = -\omega^i_j(X)e^j = \nabla_X e^i \qquad (\underline{i} \text{ fixé}),$$

on notera que $(e^i)_x$ est un élément du dual de ξ_x, de sorte que: $\mathring{\nabla}_X \tilde{e}^i = \nabla_X e^i$, ∇ étant la dérivation euclidienne dans ξ.

— On rectifiera dans [5, *c*], p. 180, lignes 4 et 5 du bas, une erreur de signe et p. 178, ligne 8, on lira $\hat{D}_X f \neq \omega^{\alpha *}_{\alpha *}(X) f$.

Quand on considère l'ensemble des $\tilde{e}^i$, $i = 1, 2, \ldots, 8$, on définit le « tenseur-spineur fondamental », noté γ^i et on pose :

$$\mathring{\nabla}_X \gamma^i = \nabla_X e^i + \omega^i_j(X)e^j \tag{7}$$

Ceci est nul, et cette nullité s'exprime encore par :

$$u(X)e^i - e^i u(X) + \omega^i_j(X)e^j = 0.$$

Dans le cadre de notre approche le « tenseur-spineur fondamental » n'est qu'un intermédiaire de calcul que l'on pourrait ne pas introduire. On se gardera de croire que pour i fixé : $\mathring{\nabla}_X e^i\psi = e^i\mathring{\nabla}_X\psi$, cependant il est correct d'écrire : $e^i\mathring{\nabla}_X\psi = \mathring{\nabla}_X\gamma^i\psi$.

De manière évidente on aurait des développements analogues pour e_i et $\gamma_{\underline{i}}$.

Notons que si on introduit le tenseur-spineur γ^i associe à e^i :

$$\mathring{\nabla}_X \gamma^i = 0, \text{ car } \nabla_X |g| = 0 \qquad \text{et} \qquad \nabla_X g^{ij} = 0.$$

Comme la notion de « tenseur-spineur fondamental » est du point de vue logique inutile ici, l'introduction de connexions pour lesquelles (7) n'est pas vérifiée, ne soulèvera aucune objection. Nous précisons maintenant ce point.

L'excès cliffordien d'une connexion spinorielle.

On observera que l'on obtient, selon un résultat standard, toute connexion spinorielle « au-dessus » de la connexion euclidienne ω, en ajoutant à $u(X)$ un champ de 1-formes à valeurs dans l'algèbre des endomorphismes linéaires des spineurs, ou ce qui revient au même, un champ de 1-forme à valeurs dans l'algèbre de Clifford. En particulier $\mathbb{D}$ étant une dérivation spinorielle quelconque, pour que $\mathbb{D}\gamma^i = 0$, il faut et il suffit que la forme $u'(X)$ correspondante soit telle que :

$$u'(X)e^i - e^i u'(X) + \omega^i_j(X)e^j = 0,$$

donc que

$$(u(X) - u'(X))e^i = e^i(u(X) - u'(X)) ;$$

comme les e^i engendrent l'algèbre de Clifford, l'étude du centre de cette algèbre nous assure que : $u'(X) = u(X) + \theta(X)$, où θ est une 1-forme à valeurs scalaires. Notant que $\theta(X)$ n'appartient pas à $\mathscr{L}$ (Spin Q), si $\theta(X)$ est un scalaire non nul [2], on obtient la proposition :

Parmi les connexions spinorielles $\mathbb{D}$, *au-dessus de la connexion euclidienne* ∇, *telles que* $\mathbb{D}\gamma^i = 0$, $\mathring{\nabla}$ *est caractérisée par la propriété :*

La forme de connexion de $\mathring{\nabla}$ *est à valeurs dans l'algèbre de Lie de Spin* Q.

On notera que cette propriété ne concerne pas la représentation spinorielle choisie.

DÉFINITION. — Soit W un supplémentaire de $\mathscr{L}$ (Spin Q) dans C(Q); écrivons :

$$u'(X) = u_1(X) + E_1(X) \begin{cases} u_1(X) \in \mathscr{L}\,(\text{Spin } Q) \\ E_1(X) \in W. \end{cases}$$

Si la connexion spinorielle $\mathbb{D}$ *est définie par la forme* u', *nous appellerons excès cliffordien de* $\mathbb{D}$ *la forme* E_1 *à valeurs dans* C(Q) (*).

La nullité de cet excès est une propriété intrinsèque. Utilisant [5, c], p. 198, il est facile de voir que la nullité de l'excès pour $\mathbb{D}$ telle que $\mathbb{D}\gamma^i = 0$, équivaut à $\mathbb{D}B = 0$. Ce résultat serait d'ailleurs valable en toute dimension $n = 2r$; et non seulement pour $r = 4$.

IV. LA DÉRIVATION SPINORIELLE EN REPÈRES ADAPTÉS QUELCONQUES

Nous voulons éliminer toute technique de « tétrapodes », pour cela cherchons à exprimer $\mathring{\nabla}\psi$ en repères adaptés, non canoniques. Nous introduisons donc les définitions (3).

On peut voir que le calcul peut se faire en prenant $e_{\underline{\alpha}*} = e^\alpha$, $e_{\underline{\alpha}} = e_\alpha$ (le facteur $|g|^{\frac{1}{4}}$ introduit dans le calcul deux termes qui s'éliminent). Avec cette convention épisodique :

$$\omega^{\underline{\alpha}*}_{\underline{\beta}*}e_{\underline{\alpha}*}e^{\underline{\beta}*} = \omega^{\lambda*}_{\mu*}e_{\lambda*}e^{\mu*} + e_{\alpha*}e_\beta dg^{\alpha*\beta}, \qquad e_{\lambda*}e^{\mu*} + e^{\mu*}e_{\lambda*} = 2\delta^{\mu*}_{\lambda*},$$

et tenant compte de :

$$\omega^{\lambda*}_{\mu*}g_{\lambda*\alpha} + \omega^\sigma_\alpha g_{\sigma\mu*} = d(g_{\alpha\mu*}) \qquad [5, d]$$

(*) Tout cela s'adapte au cas complexe, on pourra introduire des excès à valeurs dans l'algèbre de Clifford complexifiée.

il vient (nous supprimons les $\hat{}$ introduits dans [5, *d*] ces $\hat{}$ sont ici sous-entendus dès le début de l'article) :

$$\omega_{\mu^*}^{\lambda^*} e_{\lambda^*} e^{\mu^*} = \omega_{\beta}^{\alpha} e_{\alpha} e^{\beta} + e_{\beta} e_{\alpha^*} dg^{\alpha^* \beta} + 2\omega_{\underline{\alpha}^*}^{\underline{\alpha}^*}.$$

Mais $g^{\alpha\beta^*} dg_{\alpha\beta^*} = - g_{\alpha\beta^*} dg^{\alpha\beta^*} = \omega_{\alpha}^{\alpha} + \omega_{\alpha^*}^{\alpha^*}$, de sorte que

$$\omega_{\beta}^{\alpha} e_{\alpha} e^{\beta} + \omega_{\underline{\beta}^*}^{\underline{\alpha}^*} e_{\underline{\alpha}^*} e^{\beta^*} = 2\omega_{\beta}^{\alpha} e_{\alpha} e^{\beta} - 2\omega_{\alpha}^{\alpha},$$

et :

$$\overset{\circ}{\nabla}\psi = d\psi_{S} + \frac{1}{4}(2\omega_{\beta}^{\alpha} e_{\alpha} e^{\beta} + \omega_{\beta}^{\alpha^*} e_{\alpha^*} e^{\beta} + \omega_{\beta^*}^{\alpha} e_{\alpha} e^{\beta^*} - 2\omega_{\alpha}^{\alpha})\psi \tag{8}$$

soit encore :

$$\overset{\circ}{\nabla}\psi = d\psi_{S} + \frac{1}{4}(\omega_{j}^{i} e_{i} e^{j} - 2\omega_{i}^{i})\psi - \frac{1}{4} e_{\beta} e_{\alpha^*} dg^{\alpha^* \beta}.\psi \tag{9}$$

(S étant le repère spinoriel construit avec $\{ e_{\alpha}, e_{\beta^*} \}$.

V. SUR LA NULLITÉ DU VECTEUR DE TORSION DE LA CONNEXION D'EINSTEIN-SCHRÖDINGER

Nous reportant aux notations et résultats de [5, *d*], nous introduisons :

$$\mathcal{L}_{\beta\gamma}^{\alpha} = \hat{L}_{\beta\gamma}^{\alpha} = \hat{L}_{\gamma^*\beta}^{\alpha^*},$$

ou encore

$$\mathcal{L}_{\beta\gamma}^{\alpha} = L_{\beta\gamma}^{\alpha} = L_{\gamma^*\beta}^{\alpha^*},$$

en notations allégées.

En repères de Witt on a : $\omega_{\underline{\alpha}}^{\underline{\alpha}} + \omega_{\underline{\alpha}^*}^{\underline{\alpha}^*} = 0$ (sans sommation [5, *d*], p. 173.)

Après passage aux repères adaptés $\{ e_{\alpha}, e_{\beta^*} \}$ définis par les formules (3) :

$$\omega_{\underline{\beta}}^{\underline{\alpha}} e_{\underline{\alpha}} e^{\underline{\beta}} = \omega_{\beta}^{\alpha} e_{\alpha} e^{\beta} - \frac{1}{4} \frac{dg}{g} e_{\alpha} e^{\beta} ;$$

appliquant l'anti-automorphisme β et ajoutant, il vient :

$$\omega_{\underline{\alpha}}^{\underline{\alpha}} = \omega_{\alpha}^{\alpha} - \frac{1}{4} \frac{dg}{g} \tag{10}$$

On trouve de la même facon :

$$\omega_{\underline{\alpha}^*}^{\underline{\alpha}^*} = \omega_{\alpha^*}^{\alpha^*} + g_{\alpha\beta^*} dg^{\alpha\beta^*} + \frac{1}{4} \frac{dg}{g} \tag{11}$$

On sait que la nullité du vecteur de torsion de la connexion $\mathcal{L}_{\beta\gamma}^{\alpha}$ équivaut à la condition :

$$\hat{\omega}_{\alpha}^{\alpha} = \hat{\omega}_{\alpha^*}^{\alpha^*} \qquad \text{ou} \qquad \omega_{\alpha}^{\alpha} = \omega_{\alpha^*}^{\alpha^*} \tag{12} \quad [5, d]$$

Supposons que nous ayons choisi la structure spinorielle de manière que $\sqrt{|g|} = 1$, le champ de 4-vecteurs isotropes $\Pi(e_{\alpha})$ oriente donc V.

$$\omega_{\underline{\alpha}}^{\underline{\alpha}} = \omega_{\alpha}^{\alpha}$$
$$\omega_{\underline{\alpha}^*}^{\underline{\alpha}^*} = \omega_{\alpha^*}^{\alpha^*} - (\omega_{\alpha}^{\alpha} + \omega_{\alpha^*}^{\alpha^*}) = - \omega_{\alpha}^{\alpha}.$$

La nullité de vecteur de torsion entraîne $\omega_{\alpha}^{\alpha} = 0$; donc $\omega_{\underline{\alpha}}^{\underline{\alpha}} = \omega_{\underline{\alpha}^*}^{\underline{\alpha}^*} = 0$.

Réciproquement si $\omega^{\underline{\alpha}}_{\underline{\alpha}} = \omega^{\underline{\alpha}^*}_{\underline{\alpha}^*} = 0$, on a bien $\omega^{\alpha}_{\alpha} = 0$ et comme $\sqrt{|g|} = 1$, le vecteur de torsion est nul.

Nous reportant à nos définitions [5, d], nous avons appelé connexion spin-euclidienne, au sens propre, une connexion euclidienne telle que :

$$\omega^{\underline{\alpha}}_{\underline{\alpha}} = \omega^{\underline{\alpha}^*}_{\underline{\alpha}^*} = \omega^{\underline{\alpha}}_{\underline{\beta}^*} = 0.$$

Nous avons donc la proposition :

Il est équivalent de postuler :

(I) *La connexion d'E. S. de coefficients* $\mathscr{L}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \mathrm{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$, *sur* V, *a son vecteur de torsion nul.*

(II) *La connexion euclidienne sur* ξ, *de coefficients* $(\mathrm{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}, \mathrm{L}^{\alpha^*}_{\beta^*\gamma})$ *en repères* $\{e_\alpha, e_{\beta^*}\}$, *tels que* $\mathrm{L}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \mathrm{L}^{\alpha^*}_{\gamma^*\beta}$, *est spin-euclidienne propre pour la structure spinorielle de repères adaptés* $\{e_\alpha, e_{\beta^*}\}$ *avec* $\sqrt{|g|} = 1$.

Evidemment si $\sqrt{|g|}$ est quelconque, la nullité du vecteur de torsion implique :

$$\omega^{\alpha}_{\alpha} = \frac{1}{2}\frac{dg}{g} \qquad \text{et} \qquad \omega^{\underline{\alpha}}_{\underline{\alpha}} = \frac{1}{4}\frac{dg}{g} \neq 0$$

$\mathring{\nabla} f = \left(\frac{1}{4}\omega^{\alpha}_{\beta^*} e_\alpha e^{\beta^*} - \frac{dg}{g}\right) f$, est bien non nul quand $\omega^{\alpha}_{\beta^*} = 0$.

La connexion $(\mathrm{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}, \mathrm{L}^{\alpha^*}_{\beta^*\gamma})$ qui induit la connexion d'E. S. reste spin-euclidienne au sens large, les dérivations spinorielles s'obtiennent donc par passage au quotient dans l'algèbre de Clifford [5, a]. Ce résultat simple cesse d'être vrai en théorie d'E. S. élargie [5, d].

VI. L'OBJECTION DE W. PAULI ET LE POTENTIEL DE SCHRÖDINGER

On a vu qu'on peut obtenir toutes les connexions spinorielles $\mathbb{D}$ telles que $\mathbb{D}\gamma^i = 0$ en ajoutant à la forme u, une 1-forme θ à valeurs scalaires. Selon Schrödinger θ représenterait le potentiel électromagnétique. Pauli a contesté cette interprétation ; selon ce dernier, il serait toujours possible de faire disparaître le quadrivecteur θ_α au moyen d'une transformation consistant à remplacer les opérateurs γ^i par les $\mathrm{S}^{-1}\gamma^i\mathrm{S}$, dans la version matricielle des spineurs :

Cela reviendrait à jouer sur l'indétermination de la représentation spinorielle pour faire disparaître θ.

Au raisonnement de W. Pauli nous opposerons les remarques suivantes :

1) l'excès cliffordien, défini au III, d'une connexion spinorielle a une signification intrinsèque, sa définition est indépendante de toute représentation spinorielle.

2) Supposons que nous ayons introduit une connexion spin-euclidienne

propre $\mathbb{D}$, alors $\mathbb{D}f = 0$, on définit alors une nouvelle dérivation $\mathbb{D}'$ telle que

$$\mathbb{D}'\gamma^i = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{D}'f = \theta f.$$

Le spineur $\psi = f$ aura maintenant une dérivée covariante non nulle. Modifions les e^i en $\gamma e^i \gamma^{-1}$, f devient $f' = \gamma f \gamma^{-1} = \frac{1}{\lambda} f$, λ est un scalaire si nous voulons conserver le même espace de spineurs, la nouvelle composante de ψ est λ et la dérivée covariante devient : $(d\lambda + \theta)f'$. Pour retrouver la situation antérieure on doit déterminer λ avec $d\lambda = -\theta$, mais selon [5, a], si on veut respecter l'espace des spineurs, λ ne peut prendre que les valeurs ± 1, donc $d\lambda = 0$ et $d\lambda + \theta$ reste différent de 0.

Le raisonnement de Pauli, qui ne tient d'ailleurs aucun compte des possibilités d'existence globale des structures spinorielles, semble donc infirmé par ces remarques et nous adopterons le point de vue de Schrödinger.

Remarques diverses.

1) Si en dehors de tout problème relativiste, on remplace ω^α_β par $\omega^\alpha_\beta + a^\alpha_\beta$ dans (8), la dérivation covariante reste à excès nul si et seulement si $\Sigma\, a^\alpha_\alpha = 0$, car $v \in \mathscr{L}(\text{Spin Q})$ équivaut à $\beta(v) + v = 0$, $v \in \mathrm{C}^+(\mathrm{Q})$, [2] et

$$\beta(a^\alpha_\beta e_\alpha e^\beta) + a^\alpha_\beta e_\alpha e^\beta = 2a^\alpha_\alpha.$$

En relativité si $\mathscr{L}^\alpha_{\beta\gamma}$ est à vecteur de torsion nul, cette propriété de permanence pour une autre connexion qui en différerait seulement par la torsion équivaudrait donc pour cette connexion à posséder un vecteur de torsion nul.

2) En théorie unitaire d'E. S. élargie, si on a déterminé $\mathscr{L}^\alpha_{\beta\gamma}$ de manière unique satisfaisant aux « équations aux connexions », comme $\mathrm{L}^\sigma_{\sigma\rho} = \mathrm{L}^\sigma_{(\sigma\rho)} - \mathrm{S}_\rho$ si on remplace $\mathrm{L}^\sigma_{\sigma\rho}$ par $\mathrm{L}^\sigma_{(\sigma\rho)}$ dans le dernier terme de (8), on introduit une dérivation spinorielle $\mathbb{D}$ à excès non nul telle que $\mathbb{D}\gamma^i = 0$.

Annuler le tenseur de torsion dans le dernier terme de (8) *revient donc formellement à ajouter une* 1-*forme θ à valeurs scalaires dans la dérivation spinorielle.*

VII. LE CHAMP D'ISOMORPHISMES FONDAMENTAUX

$\{ e_\alpha, e_{\beta^*} \}_x$ étant adapté en $x \in \mathrm{V}$, associons à $(e_\alpha)_x$ le vecteur $(e_{\alpha^*})_x$ et à $(e^\beta)_x$ le vecteur $(e^{\beta^*})_x$. Nous définissons ainsi intrinsèquement une isométrie de la fibre ξ_x sur elle-même qui s'étend de manière naturelle à un isomorphisme de l'algèbre de Clifford en x. Appelons J le champ global d'isomorphismes de ξ sur ξ ainsi défini, aussi bien que son extension au fibré de Clifford.

1) J envoie le repère $\{ e_{\underline{\alpha}}, e_{\underline{\beta}^*} \}$ sur le repère $\{ e_{\underline{\alpha}^*}, e_{\underline{\beta}} \}$, de manière précise:

$$\mathrm{J}(e_{\underline{\alpha}}) = |\, g\,|^{-1/4}\mathrm{J}(e_\alpha) = |\, g\,|^{-1/4} e_{\alpha^*} = e_{\underline{\alpha}^*}.$$
$$\mathrm{J}(e_{\underline{\beta}^*}) = |\, g\,|^{1/4}\mathrm{J}(g^{\beta\lambda^*} e_{\lambda^*}) = |\, g\,|^{1/4}\mathrm{J}(e^\beta) = |\,\mathrm{J}\,|^{1/4} e^{\beta^*} = e_{\underline{\beta}}.$$

2) *Si* $g_{\alpha\beta^*} = g_{\alpha^*\beta}$, *alors* $J^2 = \mathrm{Id}$. *Immédiat.*

Réciproquement : Si $J^2 = \mathrm{Id}$, comme $J(e_\alpha) = e_{\alpha^*}$,

$$J^2(e_\alpha) = J(e_{\alpha^*}) = e_\sigma g^{\sigma\beta^*} g_{\beta\alpha^*} = e_\alpha .$$

Pour que J *soit involutive, il faut et il suffit que* $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ *soit symétrique.*

Remarquons que l'on pourrait envoyer e_α sur e_{α^*}, e_{β^*} sur e_β, obtenant une isométrie de ξ_x avec métrique $g_{\alpha\beta^*}$, sur lui-même avec métrique $g_{\alpha^*\beta}$, qui s'étendrait à un isomorphisme des algèbres de Clifford, mais cet isomorphisme ne passe naturellement au dual ($e^\alpha \to e^{\alpha^*}$, $e^{\alpha^*} \to e^\alpha$) que si et seulement si $\mathcal{G}_{\alpha\beta} = \mathcal{G}_{\beta\alpha}$.

Au (II) on a fait observer que l'on pouvait naturellement introduire deux espaces de spineurs, $\dot{\psi}$ et ψ, attachés aux mêmes repères adaptés de ξ, selon que l'on choisit l'idéal des $\Pi(e_\alpha)$ ou des $\Pi(e_{\alpha^*})$ respectivement. Introduisant pour les $\dot{\psi}$ la connexion $\mathring{\nabla}$ analogue à $\mathring{\nabla}$ dans sa définition, il est immédiat que si $g_{\alpha\beta^*} = g_{\alpha^*\beta}$ et $L^{\alpha^*}_{\beta\gamma} = L^{\alpha}_{\beta^*\gamma}$, alors :

$$J \circ \mathring{\nabla} = \mathring{\nabla} \circ J,$$

et on peut voir que pour que J commute avec toutes les dérivations spinorielles arbitraires de ce type, il faut et il suffit que $\omega^\alpha_\beta = \omega^{\alpha^*}_{\beta^*}$, ce qui ramène au cas symétrique dans l'interprétation relativiste. On l'établirait en remarquant que si les connexions $\mathring{\nabla}$ et $\mathring{\nabla}$ sont spin-euclidiennes au sens large, il suffit de chercher à quelle condition J et ∇ commutent.

Passant d'un système de spineurs à l'autre on remplace ω^α_β, $\omega^{\alpha^*}_\beta$, $\omega^\alpha_{\beta^*}$, $g_{\alpha^*\beta}$ respectivement par $\omega^{\alpha^*}_{\beta^*}$, $\omega^\alpha_{\beta^*}$, $\omega^{\alpha^*}_\beta$, $g_{\alpha\beta^*}$ et dans le cas symétrique une réciprocité existe entre le rôle joué par $\omega^\alpha_{\beta^*}$ et $\omega^{\alpha^*}_\beta$ qui s'était manifestée dans [5, *d*] (formule 18 du 2)). Ces résultats sont proches, du moins formellement, de ceux de P. V. Grosjean [6]. Nous pourrons appeler « *spineurs champ électrique-induction magnétique* » les spineurs $\dot{\psi}$ déterminés par l'idéal associé à $\Pi(e_\alpha)$, et « *spineurs champ magnétique-induction électrique* » les spineurs ψ déterminés par $\Pi(e_{\alpha^*})$, en anticipant sur les interprétations physiques données plus bas.

VIII. LA VARIATION PUREMENT SPINORIELLE D'UN LAGRANGIEN DE DIRAC

Nous complexifions maintenant le fibré spinoriel introduit, les composantes des spineurs et tenseurs restant exprimées dans les bases réelles déjà utilisées. De plus nous définissons un champ global de « formes » hermitiennes non dégénérées, $\mathcal{H}$, en posant :

$$\mathcal{H}(uf, vf) = B(\bar{u}f, vf).$$

ceci est justifié dans [5, *c*].

Observons que $\tilde{\beta}(uf)(vf) = B(uf, vf)$. f, nous *assure que l'image de*

$x \to B(uf_x, vf_x)$ *dans l'algèbre tensorielle est une densité de poids* 1 *comme* $\sqrt{|g|}$. $\mathscr{H}$ *est donc une forme-densité.*

∇ est la connexion spinorielle réelle, au-dessus de la connexion euclidienne sur ξ, obtenue en annulant $L^{\alpha *}_{\beta\,\gamma}$ et $L^{\alpha}_{\beta *\gamma}$. Son excès est nul. Elle opère sur les spineurs ψ. $\mathbb{V}$ est une connexion spinorielle à *excès non nul* au-dessus de la connexion euclidienne de coefficients L^{i}_{jk} déjà introduite. Cet excès sera précisé et pourra être choisi de diverses façons.

Une densité telle que L_1 sera remplacée ici par :

$$L = a[(e^{\alpha}\mathbb{V}_{\alpha}\psi, \psi) + (\psi, e^{\alpha}\mathbb{V}_{\alpha}\psi) - 2m(\psi, \psi)], \tag{13}$$

en écrivant (uf, vf) pour $\mathscr{H}(uf, vf)$. Nous n'introduisons pas le facteur $\sqrt{|g|}$ selon la remarque précédente.

A partir de L nous considérons une intégrale $\mathscr{L}$ que nous faisons varier comme à l'usuel.

Posons $X^{\alpha} = (e^{\alpha}\delta\psi, \psi) + (\psi, e^{\alpha}\delta\psi)$.

Nous calculons $\hat{\nabla}_{\alpha}X^{\alpha}$, $\hat{\nabla}$ étant la dérivation, sur V, déterminée par les $\mathscr{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$. Notant que $\nabla\mathscr{H} = 0$ [*5*, *c*], il viendra :

$$\hat{\nabla}_{\alpha}X^{\alpha} = (e^{\alpha}\nabla_{\alpha}\delta\psi, \psi) + (\nabla_{\alpha}\psi, e^{\alpha}\delta\psi) + (\text{e. c.})$$

((e. c.) signifie expression conjuguée).

Remplaçant ∇ par $\mathbb{V}$, si l'excès de $\mathbb{V}$ est nul, on voit immédiatement que :

$$\hat{\nabla}_{\alpha}X^{\alpha} = (e^{\alpha}\mathbb{V}_{\alpha}\delta\psi, \psi) + (\mathbb{V}_{\alpha}\psi, e^{\alpha}\delta\psi) + (\text{e. c.}).$$

Mais selon un résultat bien connu en théorie d'Einstein-Schrödinger [*9*, *a*],

$$L^{\alpha}_{\gamma\alpha} = L^{\alpha}_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_{\gamma}g_{\alpha\beta} = \frac{\partial_{\gamma}\sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}}$$

et on pourra associer une divergence à $\hat{\nabla}_{\alpha}X^{\alpha}$, car si U^{α} est un champ de vecteurs :

$$\hat{\nabla}_{\alpha}U^{\alpha} = \partial_{\alpha}U^{\alpha} + L^{\alpha}_{\gamma\alpha}U^{\alpha} = \frac{\partial(\sqrt{|g|}\,U^{\alpha})}{\sqrt{|g|}}.$$

Tenant compte de cette remarque on sera ramené à considérer dans la variation de L :

$$2(e^{\alpha}\mathbb{V}_{\alpha}\psi, \delta\psi) - 2m(\psi, \delta\psi) + (\text{e. c.}) \tag{14}$$

si l'excès de $\mathbb{V}$, avons-nous précisé, est nul.

Si l'excès de $\mathbb{V}$ est non nul, envisageons trois cas dont deux joueront un rôle plus loin :

1) $\mathbb{V}$ *a l'excès* θ, θ 1-*forme à valeurs scalaires de composantes* θ_{α}.

Alors s'introduit dans L :

$$(e^{\alpha}\theta_{\alpha}\psi, \psi) + (\text{e. c.}),$$

et par variation il vient :

$$(e^{\alpha}\theta_{\alpha}\delta\psi, \psi) + (e^{\alpha}\theta_{\alpha}\psi, \delta\psi) + (\text{e. c.}),$$

soit :

$$(\theta_{\alpha} - \bar{\theta}_{\alpha})(e^{\alpha}\psi, \delta\psi) + (\text{e. c.})$$

Si θ_α est imaginaire pur, (14) garde la même forme.

$$2(e^\alpha\nabla_\alpha\psi, \delta\psi) - 2m(\psi, \delta\psi) + (\text{e. c.})$$

mais ∇ a maintenant l'excès θ.

2) *∇ à l'excès $ik\theta^\alpha e_\alpha$*, où $\{ \theta^\alpha \}$ est la base duale de e_α.

Dans L il s'introduit de plus :

$$k(e^\rho e_\rho\psi, \psi) + (\text{e. c.})$$

et par variation :

$$(v + \beta(\bar{v})\psi, \delta\psi) + (\text{e. c.}), \quad \text{avec} \quad v = ke^\rho e_\rho.$$

Prenant k réel, (14) devient :

$$2(e^\alpha\nabla_\alpha\psi, \delta\psi) - 8ik(\psi, \delta\psi) - 2m(\psi, \delta\psi) + (\text{e. c.})$$

où ∇ à l'excès $ik\theta^\alpha e_\alpha$.

3) *∇ a l'excès θe_{N}, e_{N} étant le produit des éléments d'un repère Q-orthonormé,*

$$(e_{\mathrm{N}})^2 = 1,$$

e_{N} commute avec tout élément pair de C(Q) et anticommute avec tout élément impair. θ est une 1-forme scalaire. On a à considérer :

$$(\theta_\rho + \bar{\theta}_\rho)(e^\rho e_{\mathrm{N}}\psi, \delta\psi) + (\text{e. c.}),$$

après variation. Prenant θ_ρ réel, ∇ ayant maintenant l'excès θe_{N}, (14) garde la même forme.

Par annulation de la variation arbitraire $\delta\psi$, on obtient : dans les cas 1) et 3) :

$$\underline{e^\alpha\nabla_\alpha\psi = m\psi} \tag{15}$$

et dans le cas 2)

$$\underline{e^\alpha\nabla_\alpha\psi = (m + 4ik)\psi} \tag{16}$$

On pourra évidemment développer des calculs analogues sur les spineurs $\dot{\psi}$, en introduisant une autre « forme-densité hermitienne » (;).

IX. UNE THÉORIE D'EINSTEIN-DIRAC EN SPIN 1. LE CAS SYMÉTRIQUE

Nous postulerons que l'intégrale d'action doit rester invariante en appliquant en chaque point de V une isométrie « voisine de l'identité » qui opère sur les repères adaptés, transformant $g_{\alpha\beta^*}$ en $g_{\lambda\mu^*}A^\lambda_\alpha A^{\mu^*}_{\beta^*}$, $\| A^i_j \|$ matrice de cette isométrie dans les repères $\{ e_\alpha, e_{\beta^*} \}$. Cette isométrie se relève en un élément γ appartenant à la composante connexe de l'identité de Spin Q et γ opère dans l'espace des spineurs, comme $(\gamma uf, \gamma vf) = (uf, vf)$, les termes en $(e_i\nabla_k\psi, \psi)$ seront invariants. Il faudra simplement tenir compte de la variation des $g^{\alpha\beta^*}$ dans le lagrangien.

— Dans la méthode dite des « tétrapodes » on joue, au fond, sur l'indétermination en chaque point du repère orthonormé, défini modulo une transformation de Lorentz, et cela revient à la méthode que nous venons de décrire, du moins formellement.

Au lagrangien de Dirac nous ajoutons $\sqrt{|g|}\,\mathscr{P}_{\alpha\beta}\mathscr{G}^{\alpha\beta}$, comme dans [5, d], avec :

$$\mathscr{P}_{\alpha\beta} = \mathscr{R}_{\alpha\beta} + \dot{\mathscr{R}}_{\alpha\beta}$$
$$\dot{\mathscr{R}}_{\alpha\beta} = \mathrm{L}^{\lambda}_{\rho^*\lambda}\mathrm{L}^{\rho^*}_{\alpha\beta} - \mathrm{L}^{\lambda}_{\alpha^*\beta}\mathrm{L}^{\rho^*}_{\alpha\lambda},$$

et nous écrivons le lagrangien complet :

$$\left.\begin{array}{r} \sqrt{|g|}\,\mathscr{P}_{\alpha\beta}\mathscr{G}^{\alpha\beta} + a[(e^{\alpha}\nabla_{\alpha}\psi, \psi) + (\psi, e^{\alpha}\nabla_{\alpha}\psi) - 2m(\psi,\ \psi)] \\ + \dot{a}[(e^{\alpha}\dot{\nabla}_{\alpha}\dot{\psi};\ \dot{\psi}) + (\dot{\psi}\ ;\ e^{\alpha}\dot{\nabla}_{\alpha}\dot{\psi}) - 2\dot{m}(\dot{\psi}\ ;\ \dot{\psi})] \end{array}\right\} \quad (17)$$

L'excès de ∇ étant choisi comme en (VIII, 2), celui de $\dot{\nabla}$ comme en (VIII, 1), de sorte que l'on a les équations de Dirac :

$$e^{\alpha}\nabla_{\alpha}\psi = (m + 4ik)\psi, \quad m, \dot{m}, k \text{ réels}, \qquad (16)$$
$$e^{\alpha}\dot{\nabla}_{\alpha}\dot{\psi} = \dot{m}\dot{\psi}. \qquad (18)$$

1) Nous varions les $g^{\alpha\beta^*}$, c'est-à-dire les $\mathscr{G}^{\alpha\beta} = \mathscr{G}^{\beta\alpha}$ librement, en tenant compte des remarques faites au début de ce n° (IX), dans le lagrangien :

$$\sqrt{|g|}\left(\mathscr{P}_{\alpha\beta}\mathscr{G}^{\alpha\beta} + \frac{a\mathrm{L} + \dot{a}\dot{\mathrm{L}}}{\sqrt{|g|}}\right).$$

Si nous nous plaçons dans les conditions de [5, d] (3 et 4) nous obtenons aisément, avec les mêmes notations :

Dans le cas symétrique (cas intérieur, matière pure) :

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathscr{R}_{(\alpha\beta)} = \dfrac{\chi}{2}\left[\left(\rho + \dfrac{p}{c^2}\right)\dfrac{u_\beta v_\alpha + u_\alpha v_\beta}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\rho - \dfrac{p}{c^2}\right)\mathscr{G}_{\alpha\beta}\right] \\ - \dfrac{a}{2\sqrt{|g|}}[(e_{\alpha^*}\nabla_\beta\psi,\ \psi) + (e_{\beta^*}\nabla_\alpha\psi,\ \psi)] \\ \qquad - \dfrac{\dot{a}}{2\sqrt{|g|}}[(e_{\alpha^*}\dot{\nabla}_\beta\dot{\psi}\ ;\ \dot{\psi}) + (e_{\beta^*}\dot{\nabla}_\alpha\dot{\psi}\ ;\ \dot{\psi})] + (\text{e. c.}) \end{array}\right.$$

et dans le cas symétrique, considéré comme cas limite du cas asymétrique *(schéma « subasymétrique »)* :

$$(20)\quad \begin{array}{l} \mathscr{R}_{(\alpha\beta)} = \dfrac{x}{2}\left[\left(\rho + \dfrac{p}{c^2}\right)u_\beta v_\alpha - \dfrac{1}{2}\left(\rho - \dfrac{p}{c^2}\right)g_{\alpha\beta}\right] + \dfrac{1}{4}(\partial_\alpha \mathrm{S}_\beta - \partial_\beta \mathrm{S}_\alpha) \\ \qquad - \dfrac{a}{\sqrt{|g|}}(e_{\alpha^*}\nabla_\beta\psi, \psi) - \dfrac{\dot{a}}{\sqrt{|g|}}(e_{\alpha^*}\dot{\nabla}_\beta\dot{\psi}\,;\dot{\psi}) + (\text{e. c.}) \end{array}$$

2) Nous varions maintenant les $\mathrm{L}^{\alpha}_{\beta^*\gamma}$, $\mathrm{L}^{\alpha^*}_{\beta\gamma}$ en supposant simplement que $\mathrm{L}_{\alpha^*\beta^*\gamma}$ et $\mathrm{L}^{\alpha^*\beta^*\gamma}$ sont antisymétriques en leurs deux premiers indices, comme cela résulte nécessairement des conditions traduisant que la connexion, sur le fibré ξ, est euclidienne [5, d] :

$$\mathscr{G}^{\alpha\beta}\dot{\mathscr{R}}_{\alpha\beta} = (-\,\mathrm{L}_{\gamma^*\alpha^*\beta} + g_{\beta\gamma^*}\mathrm{L}_{\lambda^*\alpha^*\sigma}g^{\sigma\lambda^*})\mathrm{L}^{\alpha^*\beta^*\gamma^*},$$

de sorte que la variation des $L^{\alpha^*\beta^*\gamma^*}$ seuls donne :

$$L_{\gamma^*\beta^*\alpha} - g_{\alpha\gamma^*}g^{\sigma\lambda^*}L_{\lambda^*\beta^*\sigma} - L_{\gamma^*\alpha^*\beta} + g_{\beta\gamma^*}g^{\sigma\lambda^*}L_{\lambda^*\alpha^*\sigma}$$
$$= -\frac{a}{2\sqrt{|g|}}(e_{\gamma^*}e_{\alpha^*}e_{\beta^*}\psi, \psi) - \frac{\dot{a}}{2\sqrt{|g|}}(e_{\gamma^*}e_{\alpha^*}e_{\beta^*}\dot{\psi}\ ;\ \dot{\psi}) + (\text{e. c.}),$$

d'où l'on déduit aisément :

$$L_{\alpha^*\beta^*\gamma} + g_{\alpha^*\beta}L^{\lambda}_{\gamma^*\lambda} = \frac{a}{4\sqrt{|g|}}(e_{\alpha^*}e_{\beta^*}e_{\gamma^*}\psi, \psi) + \frac{\dot{a}}{4\sqrt{|g|}}(e_{\alpha^*}e_{\beta^*}e_{\gamma^*}\dot{\psi}\ ;\ \dot{\psi}) + (\text{e. c.}).$$

Cette égalité entraîne (si $\mathcal{G}_{(\alpha\beta)} \not\equiv 0$) que nécessairement $L^{\lambda}_{\alpha^*\lambda} = 0$.

Varions ensuite les $L_{\alpha^*\beta^*\gamma}$, nous obtenons finalement des formules de « couplage » :

$$\begin{cases} L_{\alpha^*\beta^*\gamma} = \dfrac{a}{4\sqrt{|g|}}(e_{\alpha^*}e_{\beta^*}e_{\gamma^*}\psi, \psi) + \dfrac{\dot{a}}{4\sqrt{|g|}}(e_{\alpha^*}e_{\beta^*}e_{\gamma^*}\dot{\psi}\ ;\ \dot{\psi}) + (\text{e. c.}) & (21) \\ L^{\alpha^*\beta^*\gamma^*} = \dfrac{-a}{4\sqrt{|g|}}((e^{\alpha}e^{\beta^*}e^{\gamma^*} - e^{\gamma}e^{\alpha^*}e^{\beta^*} + e^{\beta}e^{\gamma^*}e^{\alpha^*})\dot{\psi}\ ;\ \dot{\psi}) & \\ \qquad\qquad - \dfrac{\dot{a}}{4\sqrt{|g|}}((e^{\beta}e^{\gamma^*}e^{\alpha^*} - e^{\gamma}e^{\alpha^*}e^{\beta^*} + e^{\alpha}e^{\beta^*}e^{\gamma^*})\psi, \psi) + (\text{e. c.}) & (22) \end{cases}$$

X. COMPARAISON AVEC LA THÉORIE MACROSCOPIQUE [5, *d*]

Nous prendrons ici $k = 0$, puis nous ferons $\dot{\psi} = J(\psi)$.

Nos calculs concernent d'abord le cas symétrique.

Pour calculer $\hat{\nabla}_\alpha L^{\alpha^*\beta^*\gamma^*}$, on peut utiliser indifféremment les dérivations spinorielles ∇ ou $\boldsymbol{\nabla}$. En effet :

Si on remplace $\boldsymbol{\nabla}$ par ∇ on supprime des termes dont l'un à la forme :

$$(L^{\underline{\lambda}}_{\underline{\mu}^*\underline{\alpha}}e_{\underline{\lambda}^*}e^{\underline{\mu}}e^{\underline{\alpha}}e^{\underline{\beta}^*}e^{\underline{\gamma}^*}\psi, \psi^{\zeta} + (e^{\underline{\alpha}}e^{\underline{\beta}^*}e^{\underline{\gamma}^*}\psi, L^{\underline{\lambda}^*}_{\underline{\mu}\ \underline{\alpha}}e_{\underline{\lambda}^*}e^{\underline{\mu}}\psi)$$

qui est nul en raison de

$$e_{\underline{\lambda}^*}e^{\underline{\mu}} + e^{\underline{\mu}}e_{\underline{\lambda}^*} = 0.$$

On raisonne de la même manière sur les autres termes à supprimer :

On trouve :

$$\hat{\nabla}_\alpha L^{\alpha^*\beta^*\gamma^*} = \frac{\dot{a}}{\sqrt{|g|}}(g^{\alpha\gamma^*}e^{\beta^*}\boldsymbol{\nabla}_\alpha\psi, \psi) + \frac{a}{\sqrt{|g|}}(g^{\alpha^*\gamma}e^{\beta}\boldsymbol{\nabla}_\alpha\psi, \psi) + (\text{e. c.})$$
$$\hat{\nabla}_\alpha L^{\alpha\beta\gamma^*} = 0.$$

Définissant comme dans [5, *d*] :

$$L^{\alpha^*}_{\beta\gamma} = \dot{\Lambda}^{\alpha}_{\beta\gamma}, \qquad L^{\alpha}_{\beta^*\gamma} = \Lambda^{\alpha}_{\gamma\beta},$$

il vient :

$$\hat{\nabla}_\rho \dot{\Lambda}^\rho_{\alpha\beta} = \frac{\dot{a}}{\sqrt{|g|}}(e_\alpha \nabla_\beta \psi, \psi) + \frac{a}{\sqrt{|g|}}(e_{\alpha^*}\nabla_\beta\psi, \psi) + (\text{e. c.}) \tag{23}$$

$$\hat{\nabla}_\rho \Lambda^\rho_{\alpha\beta} = 0.$$

Si $L^{\alpha^*\beta^*\gamma^*}$ est totalement antisymétrique (comme dans [5, *d*]) alors $\Lambda^\rho_{\alpha\beta}$ est antisymétrique en α et β et nous retrouvons bien :

$$\mathscr{R}_{(\alpha\beta)} = \chi\left(\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{u_\beta v_\alpha + u_\alpha v_\beta}{2} - \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{p}{c^2}\right)g_{\alpha\beta}\right).$$

Dans le cas « subasymétrique », on aura toujours :

$$\hat{\nabla}_\rho \Lambda^\rho_{\alpha\beta} = 0, \qquad \dot{\Lambda}^\alpha_{\beta\gamma} = \dot{\Lambda}^\alpha_{[\beta\gamma]},$$

et en posant $\tau = -1$, *on retrouve exactement les formules* (21) *et* (22) *de* 4), [5, *d*] *et cet accord nous paraît très significatif. Il est conforme aux conjectures que nous avions faites dans l'introduction de* [5, *d*]. *De plus l'analogie formelle entre l'excès* θ *et un vecteur de torsion, permet d'identifier* $\frac{1}{2}(\partial_\alpha S_\beta - \partial_\beta S_\alpha)$ *aux composantes d'un tenseur proportionnel à un champ électromagnétique.*

XI. LES ÉQUATIONS DE MAXWELL GÉNÉRALISÉES ET L'INTERACTION GRAVITATION-CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Nous reprenons les équations de Dirac :

$$\begin{cases} e^\rho \nabla_\rho \psi = (m + 4ik)\psi & (16) \\ e^\rho \dot{\nabla}_\rho \dot{\psi} = \dot{m}\dot{\psi} & (17) \end{cases}$$

$\dot{\nabla}$ a un excès $\theta = \{\theta_\alpha\}$ non nul, ainsi d'ailleurs que ∇ dont l'excès est $ik\theta^\alpha e_\alpha$, avec les conditions $\theta + \bar{\theta} = 0$, k réel.

Supposons que $g_{\alpha\beta^*} = g_{\alpha^*\beta}$, nous écrivons encore (16) et (17) sous la forme équivalente :

$$e^\rho \nabla_\rho \psi = (m + 4ik - ike_\rho e^\rho - \lambda e^\rho)\psi \tag{24}$$

$$e^{\rho^*}\nabla_\rho \varphi = (\dot{m} - \theta_\rho e^{\rho^*} - \lambda e^{\rho^*}) \tag{25}$$

Avec :

$$\dot{\psi} = J(\varphi)$$

$$\lambda = \frac{1}{4}(\omega^{\alpha^*}_\beta e_{\alpha^*} e^\beta + \omega^\alpha_{\beta^*} e_\alpha e^{\beta^*})$$

$$\dot{\lambda} = J(\lambda)$$

1) *Les équations dans l'espace de Minkowski.*

Elles se réduisent à :

$$e^\rho(\partial_\rho \psi) = (m + 4ik - ike_\rho e^\rho)\psi \tag{26}$$

$$e^{\rho^*}(\partial_\rho \varphi) = (\dot{m} - \theta_\rho e^{\rho^*})\varphi \tag{27}$$

Définissons :

$$\varphi = (a + a_\alpha e^{\alpha^*} + a_{\alpha_1\alpha_2} e^{\alpha_1^*} e^{\alpha_2^*} + \ldots) f$$
$$\psi = (b + b^\alpha e_\alpha + b^{\alpha_1\alpha_2} e_{\alpha_1} e_{\alpha_2} + \ldots) f$$

(On écrira dans le 1, pour simplifier, e_α pour $e_{\underline{\alpha}}$ et e^{α^*} pour $e^{\underline{\alpha}^*}$),
(27) donne alors aisément :

$$\left.\begin{aligned} \dot{m}\dot{a} &= 0, \quad \text{soit} \quad a = 0 \text{ si } \dot{m} \neq 0, \ \dot{m}a_\alpha = \theta_\alpha \\ 2\dot{m}a_{\alpha_1\alpha_2} &= \partial_{\alpha_1} a_{\alpha_2} - \partial_{\alpha_2} a_{\alpha_1} \\ a_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} &= a_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

On peut poser : $\theta_\alpha = 2(\dot{m})^2 \varphi_\alpha$ et on obtient :

$$\underline{\partial_{\alpha_1}\varphi_{\alpha_2} - \partial_{\alpha_2}\varphi_{\alpha_1} = a_{\alpha_1\alpha_2}} \tag{29}$$

où le coefficient $\dot{m}$ n'intervient plus explicitement. Prenons $m = 0$, $k \neq 0$ dans (26), on obtient :

$$\begin{aligned} b^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} &= b^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = 0 \\ \partial_\rho b^{\alpha\rho} &= 2ikb^\alpha \Rightarrow \partial_\alpha b^\alpha = 0 \\ b &= 0 \end{aligned} \tag{30}$$

On a donc finalement :

$$\left.\begin{aligned} \partial_\alpha\varphi_\beta - \partial_\beta\varphi_\alpha &= a_{\alpha\beta} \\ \partial_\rho b^{\alpha\rho} &= 2ikb^\alpha \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Ce sont les *équations de Maxwell*, les $a_{\alpha\beta}$ représentent le « champ », les $b_{\alpha\beta}$ « l'induction », b^α est proportionnel au « courant ».

2) *L'isomorphisme linéaire entre l'algèbre extérieure et l'espace des spineurs.*

Nous nous replaçons dans l'espace-temps de la relativité générale. Soit S l'isomorphisme linéaire de l'algèbre extérieure sur l'espace des spineurs.

Si $\varphi = a_{\alpha^*_1 \ldots \alpha^*_h} e^{\alpha_1^*} \ldots e^{\alpha_h^*} f$, nous posons $S(\alpha) = \varphi$ avec :

$$\alpha = a_{\alpha^*_1 \ldots \alpha^*_h} \theta^{\alpha_1} \Lambda \ldots \Lambda \theta^{\alpha_h}.$$

La base duale de $\{ e_\rho \}$ soit $\{ \theta^\rho \}$ est ainsi identifiée par S à $\{ e^{\rho^*} f \}$. Nous démontrons très aisément en utilisant notre approche, et nous généralisons, certains résultats donnés par A. Lichnerowicz dans [*9*, *b*] ; nos résultats sont valables d'ailleurs en toute dimension $n = 2r$.

$$S(d\alpha) = \nabla(S\alpha) - \frac{1}{4}\frac{dg}{g} S(\alpha) \tag{32}$$

Il est essentiel de noter que ∇ est « au-dessus » de la connexion pseudoriemannienne de torsion nulle. Dans ces conditions l'une des formules de Maurer-Cartan donne :

$$d\theta^\alpha = -\,\omega^\alpha_\rho \Lambda \theta^\rho$$

et

$$d\alpha = (da_{\alpha^*_1 \ldots \alpha^*_h}) \Lambda \theta^{\alpha_1} \Lambda \ldots \Lambda \theta^{\alpha_h} - \sum_{\alpha_i} a_{\alpha^*_1 \ldots \alpha^*_h} \omega^{\alpha_i}_\rho \theta^{\alpha_1} \Lambda \ldots \Lambda \theta^\rho \Lambda \ldots \theta^{\alpha_h}$$

où θ^ρ remplace θ^{α_i}.

Mais la connexion ∇, selon ce que nous avons remarqué au § V est spin-euclidienne au sens large, de sorte que :

$$\nabla(S\alpha) = (da_{\alpha_1^* \dots \alpha_h^*})e^{\alpha_1^*} \dots e^{\alpha_h^*} f - \sum_{\alpha_1^*} a_{\alpha_1^* \dots \alpha_h^*} \omega^{\alpha}_{\rho} e^{\alpha_1^*} \dots e^{\rho^*} \dots e^{\alpha_h^*} f$$

$$- \frac{1}{4} \frac{dg}{g} a_{\alpha_1^* \dots \alpha_h^*} e^{\alpha_1^*} \dots e^{\alpha_h^*} f. \qquad \left(\frac{dg}{g} = 2\omega^{\alpha}_{\alpha}\right).$$

Ainsi d'après (32) :

$$e^{\rho^*}\nabla_{\rho}\varphi = S\left(\theta^{\rho}\partial_{\rho}\alpha + \frac{1}{2}\theta^{\rho}L^{\lambda}_{\lambda\rho}.\alpha\right)$$
$$= S\left(d\alpha + \frac{1}{2}\omega^{\lambda}_{\lambda}\Lambda\alpha\right)$$

et l'équation (25) s'écrit :

$$\nabla(S\alpha) = S\left(d\alpha + \frac{1}{2}\omega^{\lambda}_{\lambda}\Lambda\alpha\right) = (\dot{m} - \theta_{\rho}e^{\rho} - \dot{\lambda}e^{\rho^*})S\alpha$$
$$= S[(\dot{m} - \theta)\Lambda\alpha] - \dot{\lambda}e^{\rho^*}S\alpha.$$

En dehors des masses pondérables, si nous prenons $\lambda \equiv 0$, l'équation (25) se traduit par :

$$\underline{d\alpha = \left(\dot{m} - \frac{1}{2}\omega^{\lambda}_{\lambda} - \theta\right)\Lambda\alpha.}$$

Par ailleurs, l'action à gauche de e^{ρ} s'identifie à un produit intérieur, dans l'algèbre extérieure, on peut écrire le premier membre de (24) sous la forme :

$$S\left(\delta\alpha' + \frac{1}{2}\omega^{\lambda}_{\lambda} \lrcorner \alpha'\right),$$

si $S\alpha' = \psi\!\!\!/$ (δ codifférentielle).

(On se placera en repères de Witt et on observera que si

$$\alpha' = a'_{\underline{\alpha}_1^* \dots \underline{\alpha}_h^*}\theta^{\underline{\alpha}_1}\Lambda \dots \Lambda\theta^{\underline{\alpha}_h}$$

il est connu que :

$$\delta\alpha' = \sum_{\underline{\rho}} (i_{e\underline{\rho}})\nabla_{\underline{\rho}}\alpha'$$

où $(i_{e\underline{\rho}})$ est le produit intérieur classique par $e^{\underline{\rho}}$, d'autre part une forme s'identifie à un vecteur puisqu'il existe une métrique).

Prenons $m = 0$, et plaçons-nous en dehors des masses pondérables, (24) s'écrit alors :

$$\underline{\delta\alpha' = \left(\sigma - \frac{1}{2}\omega^{\lambda}_{\lambda} - \mathcal{U}\right) \lrcorner \alpha'}$$

où σ est un scalaire imaginaire pur, $\mathcal{U}$ un champ de vecteurs que le lecteur n'aura aucun mal à expliciter.

(33) *et* (34) *traduisent les équations de Maxwell généralisées, tenant compte de l'interaction gravitation, champ électromagnétique, en dehors des masses pondérables* ($\rho = p \equiv 0$, $\mathcal{G}_{\alpha\beta} = \mathcal{G}_{\beta\alpha}$).

A l'intérieur des masses pondérables, il intervient de plus au 2^e^ membre de (25) :

$$- \dot{\lambda} e^{\rho^*} \varphi = - \frac{e^{\rho^*}}{4} (\mathrm{L}_{\alpha\beta\rho} e^{\alpha^*} e^{\beta^*} + \mathrm{L}_{\alpha^*\beta^*\rho} e^{\alpha} e^{\beta}) \varphi$$
$$= \mathrm{S}(\mathrm{T}\alpha)$$

où T est un endomorphisme linéaire que nous n'expliciterons pas ici ; de même nous posons :

$$- \lambda e^{\rho} \psi = \mathrm{ST}'(\alpha').$$

Finalement à l'intérieur des masses, les équations de Maxwell, généralisées, en interaction avec la gravitation s'écriront :

$$\underline{d\alpha = \left(\dot{m} - \frac{1}{2}\omega_\lambda^\lambda - \theta\right)\Lambda\alpha + \mathrm{T}\alpha} \tag{35}$$

$$\underline{\delta\alpha' = \left(\sigma - \frac{1}{2}\omega_\lambda^\lambda - \mathcal{U}\right) \lrcorner\, \alpha' + \mathrm{T}'\alpha'} \tag{36}$$

dans le cas « symétrique » : $\mathcal{G}_{\alpha\beta} = \mathcal{G}_{\beta\alpha}$.

Remarque. — Si l'on écrit (24) (25) en faisant $m = k = 0, \psi = \varphi$ on obtient dans l'espace de Minkowski, au lieu des équations de Maxwell complètes, l'équation (29) et les conditions classiques de Lorentz. C'est dans ce cadre simplifié que se placent nos schémas « subasymétriques » [*5, d*].

XII. LA THÉORIE DE PETIAU-DUFFIN-KEMMER DANS NOTRE FORMALISME ET L'INTERACTION AVEC LA GRAVITATION

Selon Lichnerowicz [*9, b*], introduisons le système de conditions :

$$\mathrm{P}\psi = m\psi$$
$$\overline{\mathrm{P}}\psi = m\psi$$

avec

$$\mathrm{PS}(\alpha) = \mathrm{S}(d\alpha + \delta\alpha)$$
$$\overline{\mathrm{P}}\mathrm{S}(\alpha) = \mathrm{S}(\nu d\alpha - \nu\delta\alpha), \quad \text{où} \quad \nu\alpha = \Sigma(-1)^p \alpha^{(p)},$$

si $\alpha^{(p)}$ est la composante homogène de degré p de la forme α.

Il revient au même d'introduire : $\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{S}\alpha) = e_\mathrm{N}\mathrm{S}(d\alpha - \delta\alpha)$, e_N étant le produit des 8 éléments d'un repère Q-orthonormé déjà considéré en § VIII, 3), $(e_\mathrm{N})^2 = 1$, e_N appartient au centre de $\mathrm{C}^+(\mathrm{Q})$, et on vérifie que $e_\mathrm{N} f = f$ [*2*], et $\tilde{\beta}(e_\mathrm{N}) = e_\mathrm{N}$. e_N se transforme comme un scalaire dans tout changement de repère orthonormé direct.

On en déduit aisément :

$$\left(\frac{P + e_N\bar{P}}{2}\right) S\alpha = S(d\alpha)$$

$$\left(\frac{P - e_N\bar{P}}{2}\right) S\alpha = S(\delta\alpha)$$

Donc comparant avec nos résultats :

$$P = (e^\rho + e^{\rho *})\nabla_\rho \tag{37}$$

$$\bar{P} = e_N(e^\rho - e^{\rho *})\nabla_\rho \tag{38}$$

La théorie de P. D. K. conduit donc, à prendre les équations de Dirac :

$$e^\rho \nabla_\rho \psi = \frac{m(1 + e_N)}{2}\psi \tag{39}$$

$$e^{\rho *}\nabla_\rho \psi = \frac{m(1 - e_N)}{2}\psi \tag{40}$$

Le couplage avec le champ de gravitation se fait par des calculs analogues à ceux du § XI. On sait qu'on obtient séparément les équations des particules de spin 0 et 1 tandis que dans notre théorie on obtient les équations de Maxwell des milieux inductifs, sans séparation de spin.

Quant au lagrangien (17) on doit le remplacer par le lagrangien analogue avec ∇ au lieu de $\mathbb{V}$, $(m\psi, \psi)$ est remplacé par $\left(m\frac{(1 + e_N)}{2}\psi, \psi\right)$, $(\dot{m\psi} ; \dot{\psi})$ par $\left(m\frac{(1 - e_N)}{2}\dot{\psi} ; \dot{\psi}\right)$ puis après variation, on fait $\dot{\psi} = J(\psi)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. de Broglie, *Théorie générale des particules à spin (Méthode de fusion)*, Gauthier-Villars, Paris, 1954.

[2] Cl. Chevalley, *The algebraic theory of spinors*. Columbia U. P., 1954.

[3] R. Clerc, *Thèse*, Toulouse, 1972.

[4] O. Costa de Beauregard, *La théorie de la relativité restreinte*, Masson, Paris, 1949.

[5] A. Crumeyrolle,
- *a.* Structures spinorielles. *Ann. Inst. H. Poincaré*, Vol. XI, n° 1, 1969.
- *b.* Groupes de spinorialité, *Id.*, Vol. XIV, n° 4, 1971.
- *c.* Dérivations, formes et opérateurs usuels sur les champs spinoriels, etc., *id.*, Vol. XVI, n° 3, 1972.
- *d.* Sur une géométrisation de la mécanique relativiste de milieux à spin. *Ann. Inst. H. Poincaré*, Vol. XX, n° 3, 1974.

[6] P. V. Grosjean, *Les variétés semi-métriques et la théorie unitaire des champs*, Thèse, Liège, 1958.

[7] F. Hehl et P. von der Hyde, Spin and the structure of space-time. *Ann. Inst. H. Poincaré*, Vol. XIX, n° 2, 1973-1974.

[8] M. Lenoir, Sur les équations des particules de spin 1/2. *C. R. A. S., Paris*, t. **273**. Série A, p. 943-946, 1971.

[9] A. LICHNEROWICZ,
a. Th. relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, 1955.
b. Bulletin de la S. M. F., t. **92**, 1964, fasc. 1.
[10] G. PETIAU, Contribution à l'étude des ondes corpusculaires. Thèse, 1936 *(Acad. Roy. Belge. cl. sc. math. Mémoires*, 2e série, t. **16**, n° 2*)*.
[11] A. TRAUTMAN, *Bull. Acad. Pol. des Sciences*, Varsovie, Vol. XX, n° 2, 1972, p. 6, 10.
[12] H. WEYL, A remark on the coupling of gravitation and electron. *Physical Review*, vol. **77**, n° 5, 1950.

(Manuscrit reçu le 10 octobre 1974).