ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

K. CHADAN

Les propriétés de la fonction de Jost des potentiels coupés, et le problème inverse

Annales de l'I. H. P., section A, tome 21, nº 3 (1974), p. 233-244
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1974__21_3_233_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XXI, n° 3, 1974, p. 233-244.

Section A :
Physique théorique.

Les propriétés de la fonction de Jost des potentiels coupés, et le problème inverse

par

K. CHADAN

Laboratoire de Physique Théorique et Particules Élémentaires (*)

RÉSUMÉ. — Nous démontrons le théorème suivant :

Théorème. — Pour un potentiel local central qui est localement intégrable, sauf peut-être à l'origine, où il satisfait à (2) et qui a le rayon effectif R (5) et (6), la fonction de Jost de chaque onde partielle peut s'écrire sous la forme

$$F_l(k) = 1 + \int_0^R e^{2ikt} f_l(t)dt \tag{A}$$

où $f_l(t)$ est une fonction réelle appartenant à L(0, R). Inversement, à toute fonction de Jost de la forme (A), où f_l est réelle et intégrable, correspond un potentiel de rayon fini satisfaisant à (2), (5) et (6).

ABSTRACT. — For a local central potential, which is locally integrable, except perhaps at the origin, where it satisfies (2), and has radius R (5) and (6), the Jost function can be written in form (A), where f_l is a real function of class L(0, R).

Converseley, to a Jost function of the form (A), where f_l is real and integrable, there corresponds a potential of radius R satisfying (2), (5) and (6).

(*) Laboratoire associé au Centre National de la Recherche Scientifique.
Postal address: Bâtiment 211, Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France.

INTRODUCTION

Cet exposé concerne la théorie de la diffusion d'une particule non-relativiste par un potentiel central V(r), supposé réel. Comme il est d'usage, nous poserons, pour simplifier l'écriture, $\hbar = 2M = 1$, où M est la masse de la particule. Avec ce choix des unités, l'énergie totale de la particule sera donnée par $E = k^2$, où k est le nombre d'ondes. L'équation de Schrödinger radiale réduite pour l'onde « l » s'écrit alors ($E = k^2$) :

$$\varphi_l''(k, r) + \left(E - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\varphi_l(k\,;r) = V(r)\varphi_l(k, r) \tag{1}$$

Nous supposons que le potentiel V est régulier, c'est-à-dire qu'il est localement intégrable, sauf peut-être à l'origine $r = 0$ et qu'il satisfait à la condition de Bargmann

$$\int_0^\infty r\,|\,V(r)\,|\,dr < \infty \tag{2}$$

Dans ce cas, il est bien connu [*1*] [*2*] que l'on peut décrire à la fois la diffusion et les états liés par la fonction de Jost, définie par la représentation intégrale

$$F_l(k) = 1 + (-k)^l \int_0^\infty w_l(kr)V(r)\varphi_l(k, r)dr \tag{3}$$

où

$$w_l(z) = \sqrt{\pi z/2}H^{(1)}_{l+\frac{1}{2}}(z),$$

et φ_l est la solution régulière de (1) qui satisfait les conditions initiales

$$\lim_{r\to 0}\,[(2l+1)\,!!]r^{-l-1}\varphi_l = 1 \tag{4}$$

Il est également bien connu que la fonction de Jost est l'ingrédient essentiel pour résoudre le problème inverse, c'est-à-dire pour calculer le potentiel à partir des données de la diffusion (déphasage en fonction de l'énergie) et des états liés [*1*], [*2*], [*17*]. En effet, c'est la fonction de Jost qui est l'ingrédient essentiel des noyaux des équations de Gelfand-Levitan, et Marchenko-Blaczek, dont les solutions permettent de déterminer le potentiel.

Notre but est de caractériser de façon complète la fonction de Jost lorsque le potentiel a un rayon fini R, c'est-à-dire

$$V(r) = 0 \qquad \text{si } r > R \tag{5}$$

Il s'agit essentiellement de déterminer les propriétés analytiques et asymptotiques de la fonction de Jost dans le plan de la variable complexe k. Nous verrons alors que, à une fonction de Jost qui a ces propriétés correspond un potentiel de rayon R. En d'autres termes, nous devons trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on ait la correspondance biunivoque

$$V(r) \rightleftarrows F_l(k),$$

où le potentiel satisfait à (5).

Pour être plus précis, il faut compléter la condition (5) par la condition :

$$\int_{R-\varepsilon}^{R} | V(r) | dr \neq 0 \qquad \text{pour} \qquad \forall \varepsilon > 0 \tag{6}$$

Cette condition nous assure que R est vraiment le rayon effectif du potentiel.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

Pour simplifier l'écriture, nous allons nous restreindre à l'onde $S(l = 0)$, et nous omettrons l'indice 0 dans les formules. Les démonstrations que nous allons donner dans ce cas particulier s'étendent automatiquement aux ondes plus élevées, et les résultats, en ce qui concerne la fonction de Jost, seront les mêmes à part quelques modifications mineures (introduction de i^l dans certaines formules, etc.). En combinant l'équation (1) et (4), nous obtenons $(l = 0)$

$$\varphi(k, r) = \frac{\sin kr}{k} + \int_0^r \frac{\sin k(r - r')}{k} V(r')\varphi(k, r')dr' \tag{7}$$

Par ailleurs, (3) s'écrit plus simplement

$$F(k) = 1 + \int_0^R e^{ikr} V(r)\varphi(k, r)dr \tag{8}$$

Moyennant la condition de Bargmann, (2), on obtient de l'équation intégrale (7) la majorante [*1*] [*2*]

$$| \varphi(k, r) | < C \frac{r}{1 + | k | r} e^{| \operatorname{Im} k | r} \tag{9}$$

et le comportement asymptotique

$$\varphi(k, r) = \frac{\sin kr}{k} + \frac{e^{| \operatorname{Im} k | r}}{| k |} o(1), k \to \infty, \tag{10}$$

où C est une constante finie. La solution φ est une fonction entière et paire de la variable k. Elle est, en fait, ce qu'on appelle une fonction de type exponentiel r (ordre 1, type r) [*3*]. En plus, elle est réelle lorsque k est réel. Elle satisfait donc à la propriété de symétrie (Schwarz !)

$$\varphi(- k, r) = \varphi(k, r) = [\varphi(k^*, r)]^* \tag{11}$$

où * représente le complexe conjugué.

Il s'ensuit alors immédiatement que la fonction de Jost définie par (8) est une fonction entière de la variable k. Par ailleurs, en utilisant (9) dans (8), nous obtenons, lorsque $|k| \to \infty$

$$F(k) = 1 + o(1) \qquad \text{dans} \qquad \operatorname{Im} k \geq 0, \tag{12}$$

$$|F(k) - 1| \leq Ce^{2|\operatorname{Im} k|R} \qquad \text{dans} \qquad \operatorname{Im} k < 0. \tag{13}$$

Il s'ensuit que la fonction de Jost est une fonction entière de croissance (1, 2R), *i. e.* ou bien l'ordre est inférieur à 1, ou bien s'il est égal à 1, alors le type est inférieur ou égal à 2R. En fait, il est intuitivement clair, d'après (10) et (8), qu'elle doit être une fonction d'ordre 1 et de type 2R, si R est le rayon effectif du potentiel. En fait, l'ordre est nécessairement 1. En effet, d'après (12), la fonction de Jost est bornée dans le demi-plan supérieur, et l'on sait par ailleurs (théorème de Phragmén-Lindelöf) qu'une fonction d'ordre inférieur à 1 ne peut rester bornée dans aucun demi-plan.

Pour montrer rigoureusement que la fonction F est de type 2R, il a été toujours fait appel au développement du potentiel autour de $r = R$ [*4*], [*5*] :

$$V(r) \simeq A(R - r)^{\sigma} \quad , \quad \sigma > -1. \tag{14}$$

Nous allons voir, par deux méthodes différentes, que le développement (14) n'est pas nécessaire, et que l'intégrabilité locale du potentiel, que nous avons mentionnée tout au début, est suffisante pour déduire que le type de la fonction de Jost est 2R. Nous en déduirons alors toutes ses propriétés essentielles. Notons ici que la propriété (11) entraîne pour $F(k)$ la propriété de « symétrie »

$$F(-k) = [F(k^*)]^*. \tag{15}$$

F est réelle sur l'axe imaginaire.

La première méthode est basée sur l'étude de la fonction

$$H(k) = \frac{F(k)F(-k) - F^2(0)}{k^2}. \tag{16}$$

Cette fonction est une fonction entière et paire, d'ordre 1 et de type au plus 2R. En plus, elle appartient à la classe $L^p(-\infty, \infty)$, $p > \frac{1}{2}$ notamment à $L(-\infty, \infty)$. D'après un théorème classique de Wiener-Boas et autres [*6*], on peut l'écrire sous la forme :

$$H(k) = \int_{-R}^{R} e^{2ikt}\Phi(t)dt, \tag{17}$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(k)e^{-2ikt}dk, \tag{18}$$

où $\Phi(t)$ est une fonction bornée continue, ayant la propriété $\Phi(R) = \Phi(-R) = 0$. $\Phi(t)$ est manifestement une fonction intégrable dans $(-R, R)$. En vertu d'un théorème classique de Titchmarsh sur les transformées de Fourier finies de fonctions intégrables [7], pour montrer que la fonction H est effectivement de type 2R, et non de type plus petit, il faut et il suffit de montrer que $\Phi(t)$ n'est pas identiquement nulle dans le voisinage de $t = R$ et $t = -R$. En fait, il suffit de considérer le voisinage de $t = R$ puisque la fonction Φ est paire (H est paire !) et qu'il y a complète symétrie entre les deux demi-plans $\operatorname{Im} k > 0$ et $\operatorname{Im} k < 0$. Nous remarquons maintenant que toutes les intégrales dans (8), (7) et (18) sont absolument convergentes. En effet, dans (8) et (7), ceci découle de la majorante (9) et dans (18) la fonction H est de la classe $L(-\infty, \infty)$. Nous remplaçons donc d'abord (7) dans (8). Nous portons ensuite le résultat (pour k quelconque et pour $k = 0$) dans (16). Finalement, nous remplaçons le résultat dans (18). En échangeant l'ordre des intégrations, ce qui est permis, et en tenant compte que φ est une fonction paire de k, nous aboutissons finalement à

$$\Phi(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^R V(r)dr\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ikt}\Big\{2[\cos kr\varphi(k, r) - \varphi(0, r)]$$
$$+ \frac{1}{2}\Big[\int_0^R V(r')(2\cos k(r-r')\varphi(k, r)\varphi(k, r') - 2\varphi(0, r)\varphi(0, r')dr'\Big]\Big\}\frac{dk}{k^2} \quad (19)$$

Pour chaque r donné, φ est une fonction paire entière de k d'ordre 1 et de type r, et a le comportement asymptotique (10).

On peut alors voir aisément, à l'aide de ce résultat, et de la majorante (9), que l'expression $\{\ldots\}$ qui figure dans l'intégrale ci-dessus est une fonction paire de k d'ordre 1 et de type $2r$ dont le terme dominant du comportement asymptotique vient de $\cos kr\varphi(k, r)$:

$$\{\ldots\} \underset{k\to\infty}{=} \frac{\sin 2kr}{k} + \frac{e^{2|\operatorname{Im} k|r}}{|k|}o(1) \quad (20)$$

Pour chaque r fixe, $k^{-2}\{\ldots\}$ est donc une fonction entière d'ordre 1 et de type effectif $2r$. Par ailleurs, elle appartient à $L^2(-\infty, \infty)$, ainsi donc que sa transformée de Fourier

$$\psi(r, t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ikt}\{\ldots\}k^{-2}dk \ (^1).$$

Le type de $k^{-2}\{\ldots\}$ par rapport à k étant effectivement $2r$, il résulte du théorème de Paley-Wiener que le support de ψ est $-r \leq t \leq r$ et que cette fonction ne peut s'annuler presque partout dans aucun voisinage de $t = \pm r$, quel que soit r fini [*8*]. Étant donné que d'après (6), le potentiel ne s'annule identiquement dans aucun voisinage de $r = R$, la fonction

$$\Phi(t) = \int_0^R V(r)\psi(r, t)dr$$

ne peut pas être identiquement nulle dans le voisinage de $t = R$. Q. E. D.

(1) Notons que $k^{-2}\{\ldots\} \in L(-\infty, \infty)$. Par conséquent, ψ est une fonction continue, et même continûment différentiable de t.

$\Phi(t)$ n'étant pas identiquement nulle dans le voisinage de $t = R$, la fonction $H(k)$ définie par (17) est donc bien une fonction de type effectif 2R. Par ailleurs, dans le demi-plan $\operatorname{Im} k < 0$, $F(-k)$ tend vers 1 uniformément lorsque $k \to \infty$. Il en résulte que $F(k)$ est bien une fonction entière de type exponentiel 2R, et non pas d'un type plus petit.

Il est bien connu que la fonction de Jost d'un potentiel de rayon fini a une infinité de zéros dans le demi-plan inférieur [*4*], [*5*], [*13*]. Ceci est une simple conséquence du théorème de factorisation de Hadamard [*9*] appliqué à la fonction $F(k)F(-k)$, qui est une fonction entière de $E = k^2$, d'ordre $\frac{1}{2}$ et de type 2R. Ainsi qu'il a été remarqué par Regge [*5*], ces zéros, dont le seul point d'accumulation est le point à l'infini, et qu'on peut ordonner par ordre de module croissant :

$$k_1, k_2, \dots k_n, \dots,$$
$$k_n = K_n e^{i\theta_n}, \qquad K_n = |k_n|, \pi < \theta_n < 2\pi$$
$$0 \leq K_1 \leq K_2 \leq \dots \leq K_n \leq \dots,$$

sont tels que l'on a, par exemple, en négligeant bien entendu le zéro éventuel à l'origine, mais tenant compte des multiplicités,

$$\sum_n \operatorname{Im} \left| \frac{1}{k_n} \right| = \sum_n \frac{|\sin \theta_n|}{K_n} < \infty$$

Les zéros sont donc relativement près de l'axe réel. Cependant, étant donné que $F(k) \to 1$ lorsque $k \to \infty$, $\operatorname{Im} k$ restant borné, il est clair que $\operatorname{Im} k_n \to -\infty$ lorsque $n \to \infty$. La convergence de la série ci-dessus est la conséquence d'un théorème sur les fonctions entières de type exponentiel. D'après ce théorème, lorsqu'une telle fonction, $f(z)$, satisfait à

$$\int_1^\infty \frac{\log |f(x)f(-x)|}{x^2} < \infty,$$

on a [*10*]

$$\sum_n \left| \operatorname{Im} \frac{1}{z_n} \right| < \infty,$$

z_n étant les zéros non nuls, chacun intervenant un nombre de fois égal à sa multiplicité. Ce théorème s'applique manifestement à $F(k)$. Pour obtenir des détails précis sur le comportement asymptotiques des zéros, il faut connaître le développement du potentiel autour de $r = R$, par exemple de la forme (14). Nous renvoyons le lecteur intéressé aux articles de Humblet [*4*] et Regge [*5*].

Sans faire aucune hypothèse particulière de ce genre, nous allons maintenant établir quelques propriétés générales des zéros. Tout d'abord, en supposant que $F(0) \neq 0$ (cette restriction peut être levée facilement dans le raisonnement qui suit) nous pouvons considérer la fonction $\tilde{F} = F(k)/F(0)$. Cette fonction satisfait à

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |\tilde{F}(k)|}{k^2} < \infty$$

P étant la partie principale. Il n'y a pas de divergence à l'origine puisque $\tilde{F}(k) = 1 + ak + \ldots$ Si $n(K)$ désigne le nombre des zéros, compte tenu des multiplicités, dans le cercle $|k| \leq K$, il résulte d'un théorème sur les fonctions de type exponentiel [*11*], que l'on a

$$\lim_{K \to \infty} \frac{n(K)}{K} = D < \infty \tag{21}$$

Les zéros ont donc une densité finie D.

La densité D est entièrement déterminée par le théorème suivant de Levinson et Koosis [*12*] : soit $f(z)$ une fonction entière, de type exponentiel A dans chaque demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ et $\operatorname{Im} z < 0$. Si $f(z)$ est bornée sur l'axe réel, nous avons

$$\lim_{R \to \infty} \frac{n_{\pm}(K)}{R} = \frac{A}{\pi}$$

$n_{\pm}(R)$ désignant le nombre des zéros dans $\operatorname{Re} z > 0$ et $\operatorname{Re} z < 0$, $|z| \leq R$, compte tenu de leurs multiplicités. Ce théorème s'applique immédiatement à $e^{-ikR}F(k)$ et nous donne

$$\lim_{K \to \infty} \frac{n_{\pm}(K)}{K} = \frac{R}{\pi} \tag{22}$$

et par conséquent

$$D = \frac{2R}{\pi} \tag{23}$$

Nous allons voir maintenant que les zéros lointains sont simples. La démonstration est tout à fait analogue à celle qui permet de démontrer que les zéros de la fonction de Jost dans le demi-plan $\operatorname{Im} k > 0$, qui, comme on sait [*1*], [*2*], correspondent aux états liés (par conséquent purement imaginaires), sont simples. En procédant exactement de la même façon que pour les états liés, nous trouvons [*14*] :

$$\dot{F}(k_n) = \frac{d}{dk} F(k) \,|_{k=k_n} = \frac{-4ik_n^2}{F(-k_n)} \left[\int_0^R \varphi^2(k_n, r)dr + \frac{i}{2k_n} \varphi^2(k_n, R) \right]$$

Si nous utilisons maintenant la forme asymptotique (10), en nous rappelant que lorsque $n \to \infty$, $\operatorname{Im} k \to -\infty$ et $F(-k_n) \to 1$, nous trouvons

$$\dot{F}(k_n) = -2iR + o_n(1). \tag{24}$$

Ceci montre bien que pour n suffisamment grand, les zéros k_n sont simples. Avec un peu plus de travail, on peut même montrer que, moyennant la condition (2), la série $n^{-1}o_n(1)$ est absolument convergente, mais nous ne nous y attarderons pas ici [*15*]. Comme nous verrons un peu plus bas, on peut montrer, en toute généralité, qu'on a aussi

$$| k_n | = \pm \frac{n\pi}{\mathrm{R}} [1 + o(1)], \; n \to \infty \tag{25}$$

Les résultats (23) et (25), ainsi que d'autres, peuvent se déduire directement de ce grand théorème de Titchmarsh [*16*] :

Soit une fonction donnée par

$$\mathrm{F}(k) = \mathrm{A} + \int_a^b e^{ikt} f(t) dt$$

où $f(t) = f_1(t) + if_2(t), f_1$ et f_2 étant intégrables dans (a, b) et a et b réels et finis, avec $a < b$. A est un nombre complexe quelconque. On suppose que a et b sont les bornes supérieures et inférieures effectives de l'intégrale, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun nombre $\alpha > a$ tel que

$$\int_a^\alpha | f(t) | dt = 0,$$

et aucun nombre $\beta < b$ tel que

$$\int_\beta^b | f(t) | dt = 0.$$

On suppose que $\mathrm{F}(0) \neq 0$, ce qu'on peut achever dans le cas contraire par un nombre fini d'intégrations par parties successives qui permettent à chaque fois de mettre en facteur k pour aboutir finalement à une fonction de même genre ne s'annulant plus à l'origine. Soient $k_1 = \mathrm{K}_1 e^{i\theta_1}$, $k_2 = \mathrm{K}_2 e^{i\theta_2}, \ldots$, les zéros de $\mathrm{F}(k)$, arrangés dans l'ordre de modules non décroissants. Nous avons alors les résultats suivants :

a) La fonction F a une infinité de zéros, et on a

$$\sum_n \frac{1}{\mathrm{K}_n} = \infty \; ;$$

b) La série

$$\sum_n \frac{\sin \theta_n}{\mathrm{K}_n}$$

est absolument convergente.

c) Si $n(\mathrm{K})$ est le nombre de zéros de F dans $| k | \leq \mathrm{K}$, compte tenu des multiplicités, alors

$$n(\mathrm{K}) \sim \frac{b - a}{\pi} \mathrm{K}$$

d) La série

$$\sum_n \frac{\cos \theta_n}{\mathrm{K}_n}$$

est simplement, mais pas absolument, convergente.

e) Nous avons

$$\mathrm{F}(k) = \mathrm{F}(0)e^{\frac{1}{2}(a+b)ik}\prod_n\left(1 - \frac{k}{k_n}\right),$$

le produit infini étant simplement, mais pas absolument, convergent.

Pour appliquer le théorème précédent à la fonction de Jost, il faut montrer qu'elle peut s'écrire, comme une transformée de Fourier d'une fonction intégrable. Pour cela, nous remarquons d'abord que le terme correctif qui figure dans l'expression asymptotique (10) est intégrable à l'infini :

$$\int_0^\infty \left|\varphi - \frac{\sin kr}{k}\right| dk < \infty \tag{26}$$

moyennant la seule condition (2). Ce résultat est connu [*17*] et se démontre aisément en utilisant la majorante (9), ainsi que la majorante [*1*], [*2*]

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| < \mathrm{C}\frac{|x|}{1 + |x|}, \ x \text{ réel},$$

dans l'équation (7).

Le théorème de Wiener-Boas que nous avons utilisé plus haut [*6*] nous montre cette fois que l'on peut écrire, en nous souvenant que φ et $k^{-1}\sin kr$ sont des fonctions paires de k, et de type r,

$$\varphi - \frac{\sin kr}{k} = \frac{1}{2}\int_{-r}^{r} \mathrm{L}(r, t)e^{ikt}dt = \int_0^r \mathrm{L}(r, t)\cos ktdt, \tag{27 a}$$

$$\mathrm{L}(r, t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi(k, r) - \frac{\sin kr}{k}\right]e^{-ikt}dk = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty [\ldots]\cos ktdk, \tag{27 b}$$

où L est une fonction continue et bornée ayant la propriété $\mathrm{L}(r, \pm r) = 0$. Remarquons que le noyau de Gel'fand-Levitan $\mathrm{K}(r, t)$ du problème inverse [*1*], [*2*], [*17*] est la dérivée partielle de L par rapport à t, changée de signe, car on obtient la représentation de Gel'fand-Levitan en intégrant par parties la formule (27 *a*). Par ailleurs, la fonction L étant continue et bornée, l'intégrale qui figure dans cette formule est absolument convergente. On peut remplacer cette représentation dans (3) et intervertir à volonté l'ordre des intégrations. On arrive ainsi à la représentation :

$$\mathrm{F}(k) = 1 + \int_0^{\mathrm{R}} e^{2ikt}dt\int_t^{\mathrm{R}} \mathrm{V}(r)dr + \int_0^{\mathrm{R}} e^{ikr}dr\int_0^r \mathrm{L}(r, t)\cos ktdt \tag{28}$$

Il faut donc montrer que la deuxième intégrale est la transformée de Fourier d'une fonction intégrable. Ceci se voit aisément en écrivant

$$e^{ikr}\cos kt = \frac{1}{2}[e^{ik(r+t)} + e^{ik(r-t)}]$$

et en procédant au changement de variables

$$\xi = \frac{r + t}{2} \qquad \eta = \frac{r - t}{2}$$

On voit alors immédiatement que (28) est de la forme qui figure dans le théorème de Titchmarsh, avec $a = 0$, $b = 2\mathrm{R}$. Ce théorème s'applique donc sans aucune modification à la fonction de Jost et nous donne directement les propriétés (23) et (25). La propriété (25) découle du fait que les zéros lointains sont simples et que nous avons

$$n(\mathrm{K}) \sim \frac{2\mathrm{R}}{\pi}\mathrm{K} \tag{29}$$

En ce qui concerne la représentation de la fonction de Jost par un produit infini, nous pouvons obtenir un produit absolument convergent en utilisant le fait que les zéros sont symétriques par rapport à l'axe imaginaire. Nous pouvons donc combiner les facteurs de k_n et $-k_n^*$ pour écrire le produit de Titchmarsh sous la forme

$$\mathrm{F}(k) = \mathrm{F}(0)e^{ik\mathrm{R}} \prod_{j=1}^{\mathrm{N}} \left(1 - \frac{k}{i\gamma_j}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{k}{k_n}\right)\left(1 + \frac{k}{k_n^*}\right) \tag{30}$$

où les $i\gamma_j$ sont les zéros dans le demi-plan supérieur (états liés), le produit infini convergeant absolument en vertu de (21). Notons pour terminer que Titchmarsh démontre dans son théorème que le type effectif de la fonction est le plus grand des deux nombres $|a|$ et $|b|$. On voit donc, d'après la formule (28), que le type de la fonction de Jost est bien 2R.

LE PROBLÈME INVERSE

Nous arrivons maintenant au problème inverse, c'est-à-dire le calcul du potentiel à partir du déphasage $\delta(k)$, supposé connu à toutes les énergies et des énergies des états liés éventuels, $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_n$. Si le nombre de ces derniers est n, nous devons tout d'abord avoir, d'après le théorème de Levinson et en supposant $\mathrm{F}(0) \neq 0$,

$$\delta(0) - \delta(\infty) = n\pi \tag{31}$$

Par ailleurs, si nous voulons que la condition de Bargmann soit satisfaite, il est nécessaire que $k^{-1}\delta(k)$ soit intégrable à l'infini [*17*].

Supposons maintenant que la fonction de Jost, qui est donnée par [1]

$$\mathrm{F}(k) = \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{\mathrm{E}_j}{\mathrm{E}}\right) \exp\left(-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\delta(k')}{k'^2 - k^2}k'dk'\right), \tag{32}$$

soit une fonction entière satisfaisant à toutes les propriétés que nous avons vues avant, notamment avoir le type 2R dans le demi-plan inférieur. On peut se demander alors s'il existe un potentiel régulier qui lui correspond. La réponse est affirmative. Il suffit de choisir les constantes de normalisation des états liés, qui interviennent dans les noyaux des équations de Gel'fand-Levitan et Marchenko par les relations

$$C_j^{-1} = \int_0^\infty \varphi^2(E_j, r)dr = \frac{F(-i\gamma_j)\dot{F}(i\gamma_j)}{4iE_j}, \tag{33}$$

où $\dot{F}(k)$ désigne la dérivée de F par rapport à k et $E_j = -\gamma_j^2$ [*18*]. Le potentiel ainsi obtenu est unique. Les autres potentiels de la famille des « potentiels équivalents », c'est-à-dire les potentiels qui correspondent à un choix différent de (33) de l'une ou de plusieurs des constantes C_j ont tous la propriété de ne plus s'annuler identiquement pour $r > R$.

En résumé, si la fonction de Jost peut s'écrire sous la forme qui figure dans l'énoncé du théorème de Titchmarsh, avec

$$A = 1 \quad , \quad a = 0 \quad , \quad b = 2R,$$

et $f(t)$ une fonction réelle intégrable, alors il existe un potentiel réel régulier de rayon R qui lui correspond. Ceci achève la démonstration de notre théorème.

RÉFÉRENCES

[*1*] R. G. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles*. McGraw-Hill, New York, 1966, chap. 11 et 12. Nous suivons les notations de ce livre.
[*2*] V. de Alforo et T. Regge, *Potential Scattering*. North Holland, Amsterdam, 1965, chap. 3-5.
[*3*] R. P. Boas, *Entire Functions*. Academic Press, New York, 1954, p. 8. Nous adoptons la terminologie de ce livre.
[*4*] J. Humhlet, *Mém. Soc. Roy. Sci. Liège*, t. **4**, 1952, p. 12.
[*5*] T. Regge, *Nuovo Cimento*, t. **8**, 1958, p. 671.
[*6*] Réf. [*3*], p. 106, Th. 6.8.11.
[*7*] *Ibid.*, p. 108, Th. 6.9.1.
[*8*] *Ibid.*, p. 103, Th. 6.8.1.
[*9*] *Ibid.*, p. 24, Th. 2.9.2.
[*10*] *Ibid.*, p. 86, Th. 6.3.14.
[*11*] *Ibid.*, p. 143, Th. 8.4.1.
[*12*] N. Levinson, *Gap and Density Theorems*. American Math. Soc., New York, 1940, chap. 3. Voir aussi P. Koosis, *Bull. Soc. Math. France*, t. **86**, 1958, p. 27.
[*13*] H. Rollnik, *Z. Phys.*, t. **145**, 1956, p. 639 et 654.
[*14*] Réf. [*1*], p. 344-346, notamment les formules (12.49 à 52), qu'il faut adapter à notre cas.
[*15*] K. Chadan et A. Montes, *J. Math. Phys.*, t. **9**, 1968, p. 1898, Appendice A.

[16] E. C. TITCHMARSH, *Proc. London Math. Soc.*, (2), t. **25**, 1926, p. 283, théorèmes I, II, III, IV, V et VI et la remarque au début de la page 286. A noter les changements de notation $z \to ik$.

[17] L. D. FADDEEV, *Usp. Mat. Nauk*, t. **14**, 1959, p. 57; *Transl. J. Math. Phys.*, t. **4**, 1963, p. 72.

[18] Ce résultat est connu et se trouve dans la littérature russe. La démonstration est reproduite dans la référence [15].

(Manuscrit reçu le 13 juin 1974)