ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

J. F. POMMARET

Théorie des déformations de structures

Annales de l'I. H. P., section A, tome 18, nº 4 (1973), p. 285-352
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1973__18_4_285_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XVIII, n° 4, 1973, p. 285-352.

Section A :
Physique théorique.

Théorie des déformations de structures

par

J. F. POMMARET

ABSTRACT. — In a former paper [3] we have shown how to modify some results obtained by M. Janet in 1920 in order to relate them with the modern formal theory of systems of partial differential equations.

Instead of looking at *orthonomic passive systems,* we shall consider only *formally integrable involutive systems.* This leads us to introduce the following formally exact complex, called *physical sequence* !

$$\mathrm{P}(\Theta): \quad 0 \to \Theta \to \mathrm{E} \xrightarrow{\mathscr{D}} \mathrm{F}_0 \xrightarrow{\mathscr{D}_1} \mathrm{F}_1 \xrightarrow{\mathscr{D}_2} \dots \xrightarrow{\mathscr{D}_n} \mathrm{F}_n \to 0,$$

E and F_p $(p = 0, 1, \dots, n)$ are vector bundles over the C^∞ manifold X with dim $\mathrm{X} = n$.

Θ is the solution sheaf of the homogeneous equation $\mathscr{D} u = 0$. $\mathscr{D}_1, \dots, \mathscr{D}_n$ determined by $\mathscr{D}$, are formally integrable involutive first order partial differential operators.

In accordance with the later result, we have been able to relate the *truncated sequence* obtained when *forgetting* $\mathscr{D}$:

$$\mathrm{P}(\Omega): \quad 0 \to \Omega \to \mathrm{F}_0 \xrightarrow{\mathscr{D}_1} \mathrm{F}_1 \xrightarrow{\mathscr{D}_2} \dots \xrightarrow{\mathscr{D}_n} \mathrm{F}_n \to 0,$$

with the second Spencer's sequence :

$$\mathrm{S}_2(\Theta): \quad 0 \to \Theta \xrightarrow{j_q} \mathrm{C}^0 \xrightarrow{\mathrm{D}^1} \mathrm{C}^1 \xrightarrow{\mathrm{D}^2} \dots \xrightarrow{\mathrm{D}^n} \mathrm{C}^n \to 0.$$

For some physical reasons that justify *a posteriori* the name given to $\mathrm{P}(\Theta)$, the later process seemed to us fundamental when studying pseudogroups in general.

However, all the authors, and in particular Spencer, develop technics in order to describe the first and second Spencer's sequences that are related to the equations defining a pseudogroup.

Following a quite different way, we use our physical sequence and the ideas of E. Vessiot [2] forgotten after 1903. Contrary to Cartan's one, the method to be used there will be that of *differential invariants*. The definition we give of *structure* generalises that of geometrical object.

We show that, to every sequence :

$$0 \to \Theta \to T \xrightarrow{\mathcal{D}} F_0$$

defining the infinitesimal equations of a pseudogroup Γ acting on X with $T(X) = T$, we can associate a sequence :

$$0 \to \Xi \to T \xrightarrow{\tilde{\mathcal{D}}} G_0$$

defining the infinitesimal equations of the pseudogroup $\tilde{\Gamma}$ *normaliser* of Γ in Aut (X). $\tilde{\mathcal{D}}$ is also formally integrable involutive (of order $q + 1$).

Let us now *forget the initial cell* !

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\mathcal{D}"] \arrow[d, equal] & F_0 \arrow[d, "\theta_0"] \\ T \arrow[r, "\tilde{\mathcal{D}}"] & G_0 \end{tikzcd}$$

where θ_0 is a first order formally integrable, finite type, partial differential operator, and define $\mathfrak{S}_p$ as the solution sheaf of the *transverse operators* $F_p \xrightarrow{\theta_p} G_p$. We get the diagram :

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{P} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}_0 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d] & \mathcal{S}_1 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d] & \mathcal{S}_2 \arrow[r, "\partial_3"] \arrow[d] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & \Omega \arrow[r] \arrow[d] & F_0 \arrow[r, "\mathcal{D}_1"] \arrow[d, "\theta_0"] & F_1 \arrow[r, "\mathcal{D}_2"] \arrow[d, "\theta_1"] & F_2 \arrow[r, "\mathcal{D}_3"] \arrow[d, "\theta_2"] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & \Pi \arrow[r] & G_0 \arrow[r, "\tilde{\mathcal{D}}_1"] & G_1 \arrow[r, "\tilde{\mathcal{D}}_2"] & G_2 \arrow[r, "\tilde{\mathcal{D}}_3"] & \cdots \end{tikzcd}$$

We then introduce the idea of *deformation*, generalising the one proposed by Spencer that was only related to the cohomology of the complex P (Θ) alone.

We generalise the Jacobi's identities between the structure constants of a Lie group, getting the bilinear relations :

$$\text{(J)} \qquad J(c) = 0,$$

where the c are some constants characteristic of a given structure.

If we consider, as in example I, a Lie group as a particular case of pseudogroup, we find again the classical deformation theory of Lie algebra structures.

This leads us to generalise in the following way the theorems that can be found in the algebraic case.

If $H_p(P)$ is the cohomogy at $\mathcal{S}_p$ of the sequence :

$$(\Upsilon) \qquad 0 \rightarrow \Upsilon \rightarrow \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2 \rightarrow \ldots.$$

we get in particular (*cf.* examples I, II) :

— A sufficient condition of rigidity for a structure is $H_1(\Upsilon) = 0$.

— A sufficient condition of formal integrability for every cocycle $\in Z_1(\Upsilon)$ is $H_2(\Upsilon) = 0$.

One should note the change of grading with respect to that of the algebraic case. (Hochschild cohomology.)

It is possible to get similar results in the case of intransitive pseudogroups and subpseudogroups. We get in particular an easy criterium, when looking only to the infinitesimal equations, in order to know if $\hat{\Gamma} \subset \Gamma$ is a normal subpseudogroup of Γ.

As an exercise we invite the reader to show that it is possible to deform the pseudogroup

$$y^1 = x^1 + a, \qquad y^2 = x^2 + \varphi(x^1)$$

in the pseudogroup :

$$y^1 = f(x^1), \qquad y^2 = \frac{x^2}{f'(x^1)}.$$

In fact, the laws of physics are expressed by systems of p. d. e. invariant under an arbitrary change of coordinates, in a sense that we will make precise.

For this we extend the preceeding results in order to study the systems of p. d. e. invariant under a given pseudogroup Γ acting on Y, with arbitrary base space X.

Such a system is called *automorphic* and can be written :

$$(\mathrm{A}) \qquad U^\tau(y, y^k_\mu) = \omega^\tau(x) \qquad \text{(Lie's form).}$$

This gives rise to the non linear commutative diagram :

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[rr] \arrow[dr, shift left] & & \mathcal{U} \arrow[dl, shift right] \\ & X \arrow[ul, shift left, "f"] \arrow[ur, shift right, "\omega"'] & \end{tikzcd}$$

where, in local coordinates

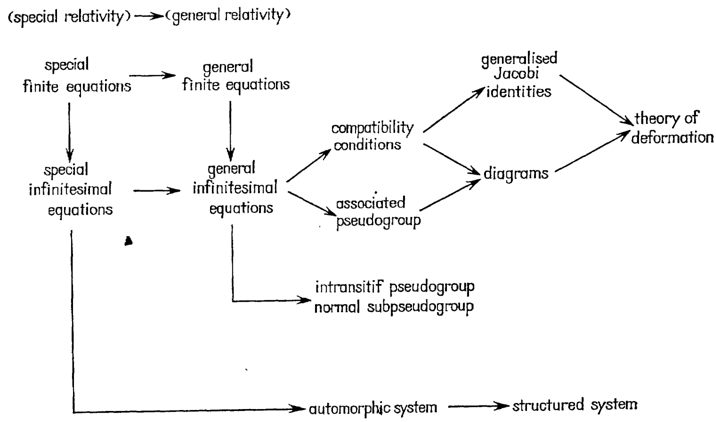
$$X \ni (x) \xrightarrow{f} (x, f(x)) \in X \times Y,$$
$$X \ni (x) \xrightarrow{\omega} (x, \omega(x)) \in \mathcal{U}.$$

Now it is natural to think that the $\omega(x)$ must satisfy some *compatibility conditions* (S) and we may introduce a class of systems of p. d. e. called *structured systems.*

Finally we show that the trick of forgetting the initial cell, as described above, leads to another process called *contraction,* that gives all the systems (S) from the knowledge of the bundle $\mathcal{U} \to X$.

Example III shows that the set of Einstein gravitational equations is such a system and gives a new sight on the cosmological constant Λ.

It is a pleasure to express my deep sense of gratitude to professor A. Lichnerowicz for this personal interest and to professor D. C. Spencer for many helpful conversations.



INTRODUCTION

A. Einstein écrivait en 1954, à propos de la théorie relativiste du champ non symétrique :

« Des théories du champ plus compliquées ont souvent été proposées. Elles peuvent être classées d'après les traits caractéristiques suivants :

(1) Accroissement du nombre de dimensions du continuum. Dans ce cas, on doit expliquer pourquoi le continuum est apparemment limité à quatre dimensions.

(2) Introduction de champs d'un genre différent (par exemple un champ vectoriel) en plus du champ de déplacement et son champ tensoriel corrélatif $g_{ij}(x)$.

(3) Introduction d'équations de champ d'un ordre supérieur de différentiation.

A mon avis, de tels systèmes plus compliqués et leurs combinaisons, devraient être pris en considération seulement s'il existe des raisons de physique expérimentale de procéder ainsi. »

Cette classification reste encore valable aujourd'hui mais il faut cependant noter que toutes les théories actuelles reposent sur une utilisation commune du calcul tensoriel ou d'autres méthodes classiques de géométrie différentielle.

Ce faisant, on semble oublier que la forme des équations du champ de gravitation n'a été donnée par Einstein qu'en 1915, après huit années de tâtonnements, au cours desquelles il dut même faire appel au mathématicien Grossmann pour se familiariser avec le calcul tensoriel.

On peut alors se demander si, au lieu de continuer à puiser dans un arsenal de moyens connus, une voie toute différente des précédentes n'existait pas dans la recherche d'un outil mathématique nouveau.

En particulier cet outil devrait généraliser la notion de structure riemannienne, faire apparaître, indépendamment du contexte tensoriel, les notions de contraction, de variance, enfin nous permettre de retrouver naturellement les équations de gravitation linéarisées, sans le secours d'aucun postulat physique.

C'est cet outil qui sera brièvement présenté puis illustré par des exemples concrets.

La rédaction de cet article a été volontairement simplifiée mais on suppose connu [3]. Une exposition rapide de la théorie générale sert de modèle à trois exemples que nous avons traités en détails, pensant en cela être utiles au lecteur physicien.

Nous exposons tout d'abord quelques-unes des motivations d'ordre physique qui nous ont conduit à développer une théorie des déformations de structures.

Le point de départ est un exemple simple donné par Inonu et Wigner pour illustrer le principe de la contraction des groupes de Lie et de leurs représentations (1953).

Il montre comment on peut passer du groupe de Lorentz inhomogène :

$$x' = x \operatorname{ch} \lambda + t \operatorname{sh} \lambda + a_x, \qquad t' = x \operatorname{sh} \lambda + t \operatorname{ch} \lambda + a_t$$

au groupe de Galilée inhomogène :

$$x' = x + vt + b_x, \qquad t' = t + b_t.$$

Les générateurs du premier groupe sont :

$$\mathrm{I}_t = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathrm{I}_x = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathrm{I}_r = t\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial t}.$$

Ils satisfont aux relations de commutation :

$$[\mathrm{I}_t, \mathrm{I}_x] = 0, \qquad [\mathrm{I}_t, \mathrm{I}_r] = \mathrm{I}_x, \qquad [\mathrm{I}_x, \mathrm{I}_r] = \mathrm{I}_t.$$

Posons

$$J_t(c) = I_t, \qquad J_x(c) = \frac{1}{c} I_x, \qquad J_r(c) = \frac{1}{c} I_r.$$

Ceci équivaut à changer la base de l'algèbre de Lie considéré. Les nouvelles relations de commutation sont :

$$[J_t(c), J_x(c)] = 0, \qquad [J_t(c), J_r(c)] = J_x(c), \qquad [J_x(c), J_r(c)] = \frac{1}{c} J_t(c).$$

Lorsque $c \to \infty$ on est amené à chercher un groupe dont les générateurs satisfont aux relations de commutation :

$$[J_r, J_x] = 0, \qquad [J_t, J_r] = J_x, \qquad [J_x, J_r] = 0.$$

On peut prendre par exemple comme générateurs :

$$J_t = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad J_x = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad J_r = t\frac{\partial}{\partial x}.$$

L'intérêt de ces manipulations réside dans le fait que les algèbres qui peuvent être contractées dans une algèbre donnée par le processus ci-dessus doivent être recherchées parmi les algèbres obtenues en déformant la dite algèbre, comme cela résulte des travaux de Gerstenhaber (1964) et d'autres.

Cette déformation sera introduite par l'intermédiaire d'une perturbation c_t ($c_0 = c$) de ses constantes de structure, c^i_{jk}, ensemble de nombres satisfaisant au relations

$$c^l_{ij}\, c^m_{lk} + c^l_{jk}\, c^m_{li} + c^l_{ki}\, c^m_{lj} = 0.$$

La contraction consiste à observer sur les constantes de structure l'effet d'un changement de base dépendant d'un paramètre t, singulier pour la valeur $t = 0$.

On sait que ces méthodes ont obtenu un certain succès en physique mathématique, mais il semble que l'intérêt qui leur est porté diminue aujourd'hui.

On remarque maintenant que l'idée d'une déformation d'un groupe de Lie par l'intermédiaire d'une perturbation de ses constantes de structure peut être envisagée grâce au troisième théorème (réciproque) de Lie.

Si l'on songe alors qu'un groupe de Lie est un cas particulier de pseudogroupe, c'est-à-dire de groupe de transformations $x \to y = f(x)$ solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles, une première idée consiste à généraliser les méthodes précédentes et, en particulier la notion de structure.

Remarque. — L'utilisation des pseudogroupes en physique est souvent liée à l'étude de la dérivée de Lie d'un tenseur ω par rapport à un champ de vecteurs ξ. En effet, si

$$\left\{\begin{array}{l}\mathcal{L}(\xi_1)\,\omega = 0\\ \mathcal{L}(\xi_2)\,\omega = 0\end{array}\right. \qquad \text{alors} \quad \mathcal{L}([\xi_1, \xi_2])\,\omega = 0.$$

et les transformations $x \to \exp(t\,\xi)\,x$ telles que $\mathcal{L}(\xi)\,\omega = 0$ forment donc un pseudogroupe.

Malheureusement, après les travaux de pionniers de Lie (1895), Engels, Medolaghi, seul Vessiot en France essayait d'étudier directement les équations de définition des transformations finies et infinitésimales d'un pseudogroupe, tout en conservant la même optique que ses prédécesseurs. Après un article, publié en 1903 dans les *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, ses idées tombèrent dans l'oubli.

On notera que ce travail, reposant sur une utilisation de la théorie des sytèmes e. d. p., telle qu'elle était développée à l'époque était donc fort imprécis.

Peu après, Cartan (1905) obtenait tout une série de résultats fondamentaux grâce à l'utilisation de sa théorie des systèmes différentiels extérieurs. Ces méthodes étaient généralisées par Guillemin et Sternberg (1966) dans le cadre de la théorie formelle des systèmes e. d. p. développée par Spencer, Quillen, Goldschmidt. On peut résumer brièvement ces travaux en disant qu'ils explicitent la première et la seconde suite de Spencer (complexes différentiels) grâce à l'introduction de formes extérieures généralisant les formes de Maurer-Cartan de la théorie des groupes de Lie.

Parallèlement, Spencer (à partir de 1957) élaborait une théorie des déformations des structures analytiques puis des Γ-structures (Γ = pseudogroupe continu transitif). Par analogie, une variété est dite munie d'une Γ-structure lorsque ses fonctions de transitions sont des transformations d'un même pseudogroupe Γ.

On peut alors formuler les trois remarques suivantes :

(1) Ces techniques de géométrie différentielle semblent présenter un caractère beaucoup plus général que les techniques algèbriques précédemment décrites. D'autre part, en relativité générale, le champ de gravitation étant interprété par une métrique développable en $\frac{1}{c}$, on cherche à décrire les lois phhsiques par des systèmes d'équations aux dérivées partielles dépendant de paramètres. On postule seulement la nécessité de retrouver les analogues de la physique classique pour $c \to \infty$.

Il est donc tentant de chercher à introduire les techniques précédentes en physique.

Pourtant on constate que la notion de Γ-variété, et donc de Γ-structure, n'a pas de signification physique, en ce sens que l'on ne la rencontre que très rarement dans des théories physiques. *Au contraire,* *la caractéristique de toute description d'un phénomène physique est, par abus de langage d'ailleurs, de ne pas dépendre du système de coordonnées employé (exemple : tensorialité, covariance).*

(2) Une critique beaucoup plus grave était celle du manque de simplicité; le lecteur physicien qui voudrait étudier ces travaux peut jeter un coup d'œil sur l'ouvrage de Spencer et Kumpera [4], *Lie équations*, I (Princeton University Press, 1972) qui représente la version la plus récente des théories de déformations de Γ-structures. Il s'apercevra tout de suite de la difficulté de traiter des exemples, même simples, avec de telles méthodes.

(3) Enfin, l'existence d'un lien entre la théorie des déformations de Γ-structures et la théorie des déformations de structures d'algèbres de Lie, bien qu'ayant été pressentie par de nombreux auteurs (Spencer, Gerstenhaber, Piper, 1967), n'a en fait jamais été trouvée.

Il fallait donc tout d'abord simplifier la théorie formelle des systèmes e. d. p., outil fondamental de toute recherche portant sur l'étude des pseudogroupes en général.

Nous avons été guidés en cela par deux idées maîtresses :

(1) La relativité générale, et par là même toute théorie unitaire, repose sur l'utilisation d'un certain nombre d'identités. Ce seront par exemple les identités de divergence provenant des identités de Bianchi. De plus, on sait que la détermination d'un tenseur quasilinéaire en les dérivées secondes des g_{ij} tel que..., a été effectuée par Cartan longtemps après que le dit tenseur ait été considéré par Einstein. Enfin, le développement limité en $\frac{1}{c}$, étranger à tout contexte de calcul tensoriel, permet de n'utiliser que des sytèmes e. d. p. linéaires, mais ceci pour des raisons purement physiques.

Il était donc important de trouver un formalisme où apparaissent *naturellement* les notions de courbure, d'identités de Bianchi, de développement en $\frac{1}{c}$, ..., ceci dans le cas particulier de la géométrie riemannienne.

(2) Les seuls travaux anciens dans lesquels des identités étaient introduites semblaient être ceux de Janet (1920) sur les systèmes e. d. p. Malheureusement les méthodes rencontrées dépendaient du système de coordonnées. Cependant quelques lignes sur la construction d'une *chaîne* de systèmes e. d. p., en nombre égal à celui des variables indépendantes, chacun d'eux représentant les conditions de compatibilité du précédent, faisait présager d'un certain lien avec les théories formelles modernes.

Ce lien était exposé dans une « thèse de 3e cycle » dont le titre était : *Étude interne des systèmes d'équations aux dérivées partielles* (Institut Henri Poincaré, février 1972). La partie théorique de cette thèse était publiée [3].

On montre comment il suffit de remplacer la notion de système orthonome passif par celle de système formellement intégrable et involutif, tout en conservant les méthodes de Janet, pour obtenir un procédé « opérationnel », permettant d'aborder tout système e. d. p. et ne dépendant pas du système de coordonnées.

Dans le cas de systèmes linéaires, la chaîne de systèmes devient un complexe différentiel de longueur finie que l'on appelle *suite physique* pour des raisons que cet article justifiera *a posteriori* (!), en accord avec la première des idées maîtresses.

Cette suite physique semble donc jouer un rôle prépondérant, à l'exclusion de la première et de la seconde suite de Spencer. On montre même comment elle peut être reliée à la seconde suite, par *oubli* de l'opérateur différentiel initial.

Ce processus semblant fondamental comme cet article le précisera, nous étions persuadés que l'utilisation de cette suite physique après oubli de l'opérateur initial, devait jouer un rôle clef dans l'étude des pseudogroupes.

Et pourtant, aucun des travaux modernes ne la fait apparaître directement.

Nous sommes sortis de cette impasse en reprenant l'article de Vessiot et en le modifiant d'une manière analogue à celle qui nous avait servi pour l'article de Janet.

Ceci nous conduisait à introduire un objet mathématique nouveau nommé *structure*. De même que dans notre premier travail nous étions conduit aux termes de *suite physique*, de même la notion de structure généralise en quelque sorte très largement la notion de structure riemannienne qui en devient ainsi un simple cas particulier comme ces pages le préciseront. Enfin l'utilisation de la suite physique permet d'introduire un concept de *déformation* différent de celui de Spencer qui se ramène à un cas particulier.

On peut d'abord noter la simplicité et l'homogénéité des techniques employées.

De plus, si l'on cherche ce que devient cette théorie dans le cas particulier d'un groupe de Lie, on s'aperçoit qu'elle redonne exactement la théorie des déformations de structure d'algèbre de Lie.

Les moyens utilisés, tels la considération d'invariants différentiels, sont donc fort éloignés de ceux de Cartan ou de Spencer. (*En fait, pour l'instant, nous n'avons pu trouver aucun lien direct avec ces deux théories.*) Par exemple, les n formes de Maurer-Cartan à n variables deviennent n^2 fonctions associées à n^2 invariants différentiels, la notation matricielle n'intervenant que pour des raisons de simplicité.

Nous avons ensuite cherché à généraliser les notions de variance et de contraction, telles qu'elles apparaissent dans le cadre du calcul tensoriel.

Étant donnée une application (régulière) $X \xrightarrow{f} Y$, nous montrons qu'à tout pseudogroupe Γ agissant sur Y ($\neq X$) on peut faire correspondre une structure au-dessus de X, dite *structure induite.* L'hypothèse d'involution est fondamentale dans la démonstration de ce fait. Nous introduisons pour cela des systèmes e. d. p. *automorphes,* c'est-à-dire invariants par l'action de Γ sur Y, l'espace de base X restant arbitraire.

Nous sommes alors amenés à considérer certains systèmes e. d. p. formellement intégrables et involutifs, liés à la donnée d'une structure au-dessus de X. De tels systèmes sont appelés *systèmes structurés.* Ils sont caractérisés par la commutativité d'un diagramme plan.

Dans l'exemple III nous montrons que les équations de la gravitation d'Einstein constituent un tel système.

En tant que structure mathématique, le tenseur $g_{ij}(x)$ n'intervient que par les $\frac{n(n+1)}{2}$ fonctions qui le représentent localement, la notation tensorielle n'étant conservée que pour des raisons de simplicité. Le pseudogroupe considéré, que l'on oublie par la suite (!!), est défini par les équations de Killing. Il se trouve que les linéarisations introduites naturellement dans le cadre de notre théorie générale sont justement celles qu'on rencontre en $\frac{1}{c}$ en relativité générale. L'existence de conditions de compatibilité (intégrabilité formelle) pour les équations de Killing introduit un espace à courbure riemannienne constante. (*La détermination de la constante caractérisant un tel espace est donc au fond tout à fait analogue à celle des constantes de structure d'un groupe de Lie, en ce sens qu'elles résultent d'un même processus mathématique.*) L'espace plat est seul déformable en un espace à courbure non nulle.

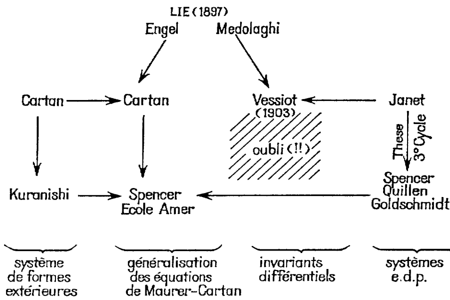
Nous justifions le nom de suite physique en faisant apparaître successivement dim X, le nombre de g_{ij}, le nombre de composantes du tenseur de Riemann-Christoffel, le nombre d'identités de Bianchi, etc., ce qui nous permet de calculer très rapidement les nombres précédents.

Le fait que les équations d'Einstein constituent un système structuré est important puisque cela nous permet d'interpréter le rôle de la constante cosmologique Λ par le biais de la commutativité d'un diagramme plan.

I. — THÉORIE DES DÉFORMATIONS

Généralités

L'histoire des recherches sur la théorie des pseudogroupes peut être résumée par le schéma suivant :



Le travail de Vessiot [2] a été oublié après sa publication en 1903. Au lieu de généraliser les équations de Maurer-Cartan, comme cela était fait par Cartan grâce à la théorie des sytèmes de formes différentielles extérieures qu'il avait aussi créée, Vessiot utilise les ressources de la théorie des invariants différentiels. Cependant, parce qu'il faisait reposer son travail sur la théorie des sytèmes e. d.p. qui était très peu connue à son époque, de nombreux résultats sont fort imprécis.

1. Équations d'un pseudogroupe

A. La première partie de notre programme a consisté à modifier la théorie de Janet de façon à l'accorder avec les travaux modernes sur l'étude formelle des systèmes e. d. p. La difficulté majeure était que cette théorie dépendait du système de coordonnées. Nous indiquons dans une thèse de 3e cycle récemment publiée [3] qu'il suffit de remplacer les mots *orthonome passif* par ceux de *formellement intégrable, involutif* pour sortir de ce mauvais pas.

Si $E \to X$ (ou $F \to X$) est un fibré vectoriel au-dessus de X, variété C^∞ avec $\dim X = n$, nous noterons aussi par E (ou F) le faisceau de germes de sections C^∞ au-dessus de X. Cette convention sera valable pour tous les fibrés introduits par la suite. En fait, le contexte indiquera toujours clairement lorsque des différentiations sont en jeu.

$T = T(X)$ sera le fibré tangent au-dessus de X.

Soit $E \xrightarrow{\mathcal{D}=\Phi\circ j_q} F = F_0$ un opérateur différentiel d'ordre q formellement intégrable et involutif, tel que la suite suivante soit exacte (équations libres) :

$$0 \to R_q \to J_q(E) \xrightarrow{\Phi} F \to 0.$$

Suivant Janet, nous construisons la *suite physique :*

$$P(\Theta) : \quad 0 \to \Theta \to E \xrightarrow{\mathcal{D}} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{D}_n} F_n \to 0,$$

où les F_p sont des fibrés vectoriels définis à un isomorphisme près.

Θ est le faisceau des germes de sections de $E \to X$, solutions des équations (Σ) : $\mathcal{D}\, u = 0$.

Θ sera appelé faisceau solution de $\mathcal{D}$.

$\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ sont des opérateurs différentiels du premier ordre, formellement intégrables et involutifs.

Comme le suggérait ce résultat, nous avons pu relier la *suite tronquée :*

$$P(\Omega): \quad 0 \to \Omega \to F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} \ldots \xrightarrow{\mathcal{D}_n} F_n \to 0,$$

obtenue en *oubliant* $\mathcal{D}$, avec la seconde suite de Spencer :

$$S_2(\Phi): \quad 0 \to \Theta \xrightarrow{j_q} C^0 \xrightarrow{D^1} C^1 \xrightarrow{D^2} \ldots \xrightarrow{D^n} C^n \to 0.$$

B. Notre seconde intention était de modifier la théorie de Vessiot en introduisant l'hypothèse d'involution selon les mêmes lignes que ci-dessus.

Soit Y une copie de X; considérons la variété fibrée $X \times Y \to X$. Nous utiliserons les coordonnées locales des jets et la notation multi-indicielle avec $|\mu| = \mu_1 + \ldots + \mu_n$. x sera la source et y le but pour toute application : $x \to y = f(x)$. En particulier :

$$X \ni x \xrightarrow{\Delta} (x, x) \in X \times Y.$$

Suivant en cela Lie [2], nous montrons que les équations finies d'un pseudogroupe (continu transitif) Γ peuvent être mises sous la forme

$$(\varepsilon) \qquad U^\tau(y, y^k_\mu) = \omega^\tau(x) \qquad \text{(forme de Lie)},$$

où $\omega^\tau(x)$ est la valeur de $U^\tau(y, y^k_\mu)$ pour $y = x$.

Les $U(y, y^k_\mu)$ sont les invariants différentiels d'un certain système complet $\overline{\mathcal{B}}$ que l'on construit en cherchant le q^0 prolongement d'un changement de but infinitésimal. La principale propriété des $U(y, y^k_\mu)$ est que, lors d'un changement de source $x \to x' = \varphi(x)$, ils se transforment entre eux suivant la loi

$$U(y, y'^l_\nu) = G(U(y, y^l_\nu), \partial_\nu \varphi^k), \qquad |\mu|, |\nu| \leq q.$$

Les transformations finies $u' = G(u, \varphi^k_\mu)$ sont celles d'un groupe de Lie $\mathfrak{G}$ lorsque l'on considère les φ^k_μ comme des paramètres (pas toujours essentiels). On montre aisément :

PROPOSITION. — *$\mathfrak{G}$ est transitif si et seulement si Γ est transitif.*

Aux transformations

$$u_\beta = G(u_\alpha, \partial_\nu \varphi^k_{\beta\alpha}), \qquad x_\beta = \varphi_{\beta\alpha}(x_\alpha),$$

où les $\varphi_{\beta\alpha}$ sont maintenant les fonctions de transition de X, on peut associer la fibration $\mathcal{U} \to X$.

Les équations finies (non linéaires) de Γ peuvent être représentées par la suite non linéaire :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] & X \times Y \arrow[r] \arrow[dr] & & \mathfrak{U} \arrow[dl] \\ & & & X \arrow[ul, bend left, "\Delta"] \arrow[ur, bend right, "\omega"'] & \end{tikzcd}$$

Si nous linéarisons les équations précédentes en prenant

$$y = x + t\,\xi\,(x) + \dots$$

nous obtenons les équations infinitésimales de Γ que l'on peut traduire par la suite linéaire :

$$0 \to \Theta \to T \xrightarrow{\mathcal{D}} F.$$

Suivant Vessiot, nous montrons que $U\,(y, y^k_\mu) = \omega\,(x)$ peut être écrit sous la forme

$$G^{-1}\,(\omega\,(y), y^i_\mu) = \omega\,(x) \qquad \text{ou} \qquad G\,(\omega\,(x), y^k_\mu) = \omega\,(y).$$

Alors, et cette remarque est très importante, si l'on appelle $L^{\tau\mu}_k\,(u)\,\dfrac{\partial}{\partial u^\tau}$ les générateurs infinitésimaux de $\mathfrak{G}$, les équations infinitésimales de Γ peuvent être écrites sous la forme

$$(\Sigma) \qquad \underset{1}{\Omega^\tau} \equiv -\,\xi^k_\mu\,L^{\tau\mu}_k\,(\omega\,(x)) + \xi^i\,\frac{\partial\omega^\tau\,(x)}{\partial x^i} = 0.$$

2. Conditions de compatibilité

La remarque précédente montre que les coefficients des équations de (Σ) sont des fonctions de x par l'intermédiaire des $\omega\,(x)$ pour les ξ^k_μ ($|\mu| \geqq 1$) et des $\dfrac{\partial\omega\,(x)}{\partial x^i}$ pour les ξ^i.

On peut montrer que, si la partie algébrique de la condition d'involution, est remplie par certain $\omega\,(x)$, elle le sera par tous. En particulier, si l'on remplace $\omega\,(x)$ par $\omega_t\,(x)$ avec $\omega_0\,(x) = \omega\,(x)$, si la condition algébrique d'involution est vérifiée pour $t = 0$, alors elle sera vraie pour toute valeur de t (assez petite).

En ce qui concerne l'intégrabilité formelle, il nous faut considérer le premier prolongement de (Σ). Nous supposons désormais, pour plus de simplicité, que Γ est transitif. Il nous suffit donc d'examiner seulement les coefficients des ξ^k_μ ($1 \leqq |\mu| \leqq q + 1$) écrits sous la forme d'une matrice :

$$\left.\overbrace{\begin{array}{|c|c|}\hline \mathrm{Inv}(u) & \left(u, \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) \\ \hline 0 & L(u) \\ \hline \end{array}}^{\dim J_{q+1}(T) - n}\right\}(n+1)\dim F_0$$

dans laquelle nous poserions $u = \omega\,(x)$.

Utilisant maintenant la théorie des sytèmes d'équations invariants par les transformations d'un groupe de Lie, on peut montrer que l'intégrabilité formelle de (Σ) implique certaines conditions de compatibilité pour les $\omega(x)$, que l'on écrira :

$$\begin{cases} \text{Première espèce :} \quad I_* \left(u, \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = 0; \\ \text{Seconde espèce :} \quad I_{**} \left(u, \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = c = \text{Cte} \end{cases}$$

et où il faudrait poser $u = \omega(x)$.

Le nombre total de ces conditions est égal à $\dim F_1$. Ce résultat, indépendant du système de coordonnées, est beaucoup plus précis que celui de Vessiot et résulte de l'introduction de l'hypothèse d'involution.

Les c sont des constantes, indépendantes du système de coordonnées par construction, et ainsi définies globalement sur X. Elles constitueront, avec les zéros, la structure du pseudogroupe.

Définition. — *Un pseudogroupe sans conditions de seconde espèce sera dit* amorphe.

Si on introduit la dérivée totale $\dfrac{d}{dx}$:

$$\begin{cases} I_* \left(U, y, y^k_\mu), \dfrac{d}{dx} U(y, y^k_\mu)\right) \equiv 0, \\ I_{**} \left(U(y, y^k_\mu), \dfrac{d}{dx} U(y, y^k_\mu)\right) \equiv c. \end{cases}$$

Si donc on pose

$$y = x + t\,\xi(x) + \ldots,$$

on doit alors écrire :

$$\omega_t(x) = \omega(x) + t\,\underset{1}{\Omega}(x) + \ldots,$$

avec les $\dim F_1$ conditions :

$$(\Sigma_1) \qquad \left.\frac{\partial I}{\partial u^\tau}\right|_{u=\omega(x)} \underset{1}{\Omega^\tau} + \left.\frac{\partial I}{\partial \dfrac{\partial u^\tau}{\partial x_j}}\right|_{u=\omega(x)} \frac{d\underset{1}{\Omega^\tau}}{dx^j} \equiv 0,$$

c'est-à-dire $\mathcal{D}_1 \underset{1}{\Omega} \equiv 0$ lorsque $\mathcal{D}\,\xi = \underset{1}{\Omega}$.

Si deux pseudogroupes Γ et Γ' sont semblables, c'est-à-dire s'il existe une transformation $x' = \varphi(x)$, $y' = \varphi(y)$ telle que $\Gamma' = \varphi \circ \Gamma \circ \varphi^{-1}$ on montre aisément qu'ils ont la même structure.

Nous avons donc ainsi une première généralisation de la structure d'un groupe de Lie, d'une façon toute différente de celle de Cartan.

De plus on peut montrer simplement que les identités de Jacobi peuvent être généralisées en les conditions bilinéaires :

$$(J) \qquad J(c) = 0.$$

Pour cela, nous nous servons seulement du fait que, (Σ) étant un système formellement intégrable et involutif, (Σ_1) est aussi un système formellement intégrable et involutif.

3. Pseudogroupe normalisateur

Imaginons que nous cherchions des sections $\mathcal{U} \overset{\omega_t}{\leftrightarrows} X$ voisines de la section initiale $\mathcal{U} \overset{\omega}{\leftrightarrows} X$. Le problème de la déformation, que l'on retrouvera plus tard, consiste à comparer le pseudogroupe Γ_t, *s'il existe,* avec le pseudogroupe Γ.

Les conditions finies d'existence seront :

$$\begin{cases} I_* \left(\omega_t(x), \dfrac{\partial \omega_t(x)}{\partial x}\right) = 0, \\ I_{**} \left(\omega_t(x), \dfrac{\partial \omega_t(x)}{\partial x}\right) = c_t \end{cases}$$

et si nous écrivons :

$$c_t = c + t \underset{1}{C} + \ldots,$$

nous devrons résoudre :

$$\mathcal{D}_1 \underset{1}{\Omega} = \underset{1}{C}.$$

Les F_p n'étant définis qu'à un isomorphisme près, le problème majeur en théorie des déformations sera de particulariser, d'une façon indépendante du système de coordonnées, la section de $F_1 \to X$ qui pourra s'écrire $\left(x, \underset{1}{C}\right)$ dans un système de coordonnées particulier.

L'idée clef consiste à résoudre ce problème en introduisant le pseudogroupe $\tilde{\Gamma}$ *normalisateur* de Γ dans Aut (X) et certains diagrammes plans et tridimensionnels.

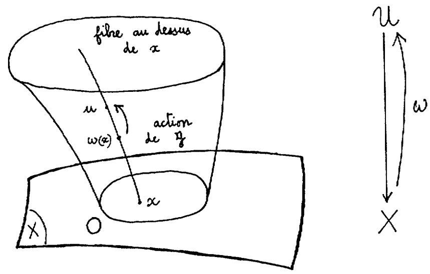
Utilisant les résultats de notre thèse de 3e cycle, nous mettrons (Σ) sous sa *forme résolue,* exprimant les *dérivées principales* en fonction des x et des *dérivées paramétriques.* Les coefficients sont maintenant 1 pour les dérivées principales et, pour les dérivées paramétriques, des fonctions des $\omega(x)$ et $\dfrac{\partial \omega(x)}{\partial x}$ parmi lesquelles nous prendrons le nombre maximal de fonctions libres. Ceci nous permettra de déterminer toutes les sections donnant le même pseudogroupe Γ, en résolvant le système non linéaire :

$$P\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = P\left(\omega(x), \frac{\partial \omega(x)}{\partial x}\right) = \pi(x).$$

On peut montrer que ce système est équivalent à un système de Pfaff fermé et que la solution générale en est :

$$u = g(\omega(x), a),$$

transformation finie d'un groupe de Lie $\mathfrak{g}$ qui commute avec toutes les transformations de $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{g}$ sont dits *réciproques*).



Posant

$$\mathrm{V}\,(y,\, y^l_\nu) \equiv \mathrm{P}\left(\mathrm{U}\,(y,\, y^k_\mu)\,\frac{d}{dx}\mathrm{V}\,(y,\, y^k_\mu)\right), \qquad |\,\nu\,| \leqq q+1,$$

on démontre enfin que le système non linéaire :

$$\mathrm{V}\,(y,\, y^l_\nu) = \pi\,(x)$$

donnent les équations finies, sous forme de Lie, du pseudogroupe $\tilde{\Gamma}$ *normalisateur* de Γ dans Aut (X).

On représentera cette construction par le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] \arrow[dd] & X \times Y \arrow[rr] \arrow[dd, equal] \arrow[dr, shift left, "\Delta"'] & & \mathfrak{U} \arrow[dd] \arrow[dl, shift left] \\
& & & X \arrow[ul, shift left] \arrow[ur, shift left, "\omega"'] \arrow[dl, shift left, "\Delta"] \arrow[dr, shift left, "\pi"] & \\
1 \arrow[r] & \tilde{\Gamma} \arrow[r] & X \times Y \arrow[rr] \arrow[ur, shift left] & & \mathfrak{V} \arrow[ul, shift left]
\end{tikzcd}$$

qui deviendra, en posant

$$\begin{cases} \omega_t\,(x) = \omega\,(x) + t\,\underset{1}{\Omega}\,(x) + \ldots, \\ \pi_t\,(x) = \pi\,(x) + t\,\underset{1}{\Pi}\,(x) + \ldots \end{cases}$$

et linéarisant :

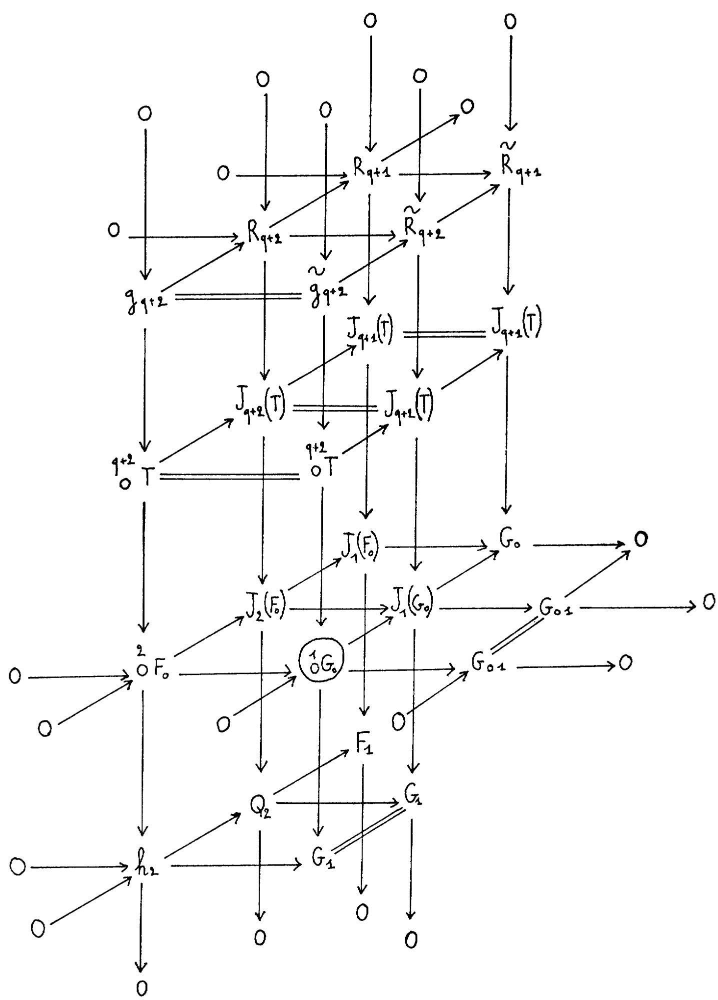
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Theta \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r, "\mathfrak{D}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\text{CELLULE INITIALE}"] & F_0 \arrow[d, "\theta_0"] \\
0 \arrow[r] & \Xi \arrow[r] & T \arrow[r, "\tilde{\mathfrak{D}}"] & G_0
\end{tikzcd}$$

Le fait que (Σ) soit formellement intégrable et involutif peut être exprimé au moyen de sa forme résolue et détermine ainsi certaines conditions de compatibilité pour les $\pi\,(x)$ qui ne jouent donc qu'un rôle d'intermédiaires. Prenant $\pi\,(x) = \mathrm{P}\left(u,\, \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ ceci se traduira par des relations sur les u, parmi lesquelles :

$$\left\{\begin{array}{c} I_*\left(u, \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \qquad \dfrac{d}{dx^i}\left(I_*\left(u, \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\right) = 0, \\ \dfrac{d}{dx^i}\left(I_{**}\left(u, \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\right) = 0, \end{array}\right.$$

système dont (I) est une conséquence directe.

DIAGRAMME TRONQUÉ :



4. Diagrammes

Utilisant la propriété trouvée pour θ_0, on peut montrer au moyen du diagramme tridimensionnel ci-joint que $\tilde{\mathcal{D}}$ est un opérateur différentiel d'ordre $q+1$, formellement intégrable et involutif.

On remarquera cependant que l'application

$$J_{q+1}(T) \xrightarrow{\tilde{\Phi}} G$$

n'est pas toujours surjective.

On complètera la cellule initiale par le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & & \mathcal{S}_0 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d] & \mathcal{S}_1 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d] & \mathcal{S}_2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \Theta \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r, "\mathcal{D}"] \arrow[d, equal] & F_0 \arrow[r, "\mathcal{D}_1"] \arrow[d, "\theta_0"] & F_1 \arrow[r, "\mathcal{D}_2"] \arrow[d, "\theta_1"] & F_2 \arrow[r] \arrow[d, "\theta_2"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \Xi \arrow[r] & T \arrow[r, "\tilde{\mathcal{D}}"] & G_0 \arrow[r, "\tilde{\mathcal{D}}_1"] & G_1 \arrow[r, "\tilde{\mathcal{D}}_2"] & G_2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

où $\mathcal{S}_p$ est le faisceau solution de chaque opérateur transverse $F_p \xrightarrow{\theta_p} G_p$.

Comme notre thèse de 3e cycle le suggérait déjà, l'idée clef consistera à *oublier la cellule initiale* pour obtenir le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \Upsilon \arrow[r] \arrow[d] & & \mathcal{S}_0 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d] & \mathcal{S}_1 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d] & \mathcal{S}_2 \arrow[r, "\partial_3"] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \Omega \arrow[r] \arrow[d] & & F_0 \arrow[r, "\mathcal{D}_1"] \arrow[d, "\theta_0"] & F_1 \arrow[r, "\mathcal{D}_2"] \arrow[d, "\theta_1"] & F_2 \arrow[r, "\mathcal{D}_3"] \arrow[d, "\theta_2"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \Pi \arrow[r] & & G_0 \arrow[r, "\tilde{\mathcal{D}}_1"] & G_1 \arrow[r, "\tilde{\mathcal{D}}_2"] & G_2 \arrow[r, "\tilde{\mathcal{D}}_3"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Υ est lié aux transformations de $\mathfrak{g}$ qui ne changent pas la structure de Γ.

$\mathcal{S}_0$ est lié aux paramètres infinitésimaux de $\mathfrak{g}$.

$\mathcal{S}_1$ est lié aux constantes $\underset{1}{C}$.

Ceci est pratiquement tout ce dont nous avons besoin pour exposer maintenant notre théorie des déformations.

5. Théorie des déformations

A. Généralités. (Pour ce qui suit, se reporter aux exemples I et II.)

Nous avons vu que $\bar{\omega}(x) = g(\omega(x), a)$ donnait le même pseudogroupe Γ que $\omega(x)$.

DÉFINITION. — *Si nous prenons* $\bar{\omega}(x)$ *au lieu de* $\omega(x)$ *pour décrire* Γ, *nous dirons que nous avons changé la* marque *de* Γ.

Ainsi un même pseudogroupe peut être obtenu sous différentes marques et chaque marque détermine une structure particulière.

Nous allons maintenant définir le *type* d'un pseudogroupe.

ANALOGIE. — Lorsque l'on choisit une voiture, on s'intéresse en général seulement à son type.

Ceci sera vrai pour nous aussi. Nous nous intéresserons aux pseudogroupes en regroupant sous le même type tous les pseudogroupes semblables à un pseudogroupe donné.

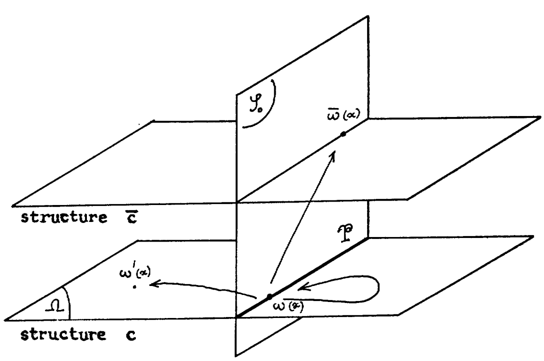
DÉFINITION. — *Une structure au-dessus de* X *sera une section* $\mathcal{U} \overset{\omega}{\leftrightarrows} X$ *satisfaisant aux conditions de compatibilité déjà formulées.*

Remarque. — Si l'on se donne un système e. d. p. dont les solutions sont les transformations d'un pseudogroupe Γ agissant sur X, nous avons montré comment construire $\mathcal{U} \to X$.

Réciproquement, à toute section $\mathcal{U} \overset{\omega}{\leftrightarrows} X$ satisfaisant à des conditions de compatibilité appropriées, on peut associer un système e. d.p. tel que le précédent. Ces systèmes peuvent décrire des pseudogroupes identiques, semblables, différents qui seront dits *généraux.*

Une structure ainsi définie et une Γ-structure sont donc très différentes, mais elles proviennent toutes deux d'un même pseudogroupe continu (transitif) Γ dit *spécial* (*cf.* exemples).

Si nous fixons la marque, tous les pseudogroupes d'un même type auront la même structure. Cette situation sera schématisée par le dessin ci-dessous :



Imaginons maintenant une section $\mathcal{U} \overset{\omega_t}{\leftrightarrows} X$, C^∞ en t, voisine de la section initiale $\mathcal{U} \overset{\omega}{\leftrightarrows} X$ et telle que $\omega_0(x) = \omega(x)$. Pour obtenir un pseudogroupe Γ_t on doit vérifier :

$$\begin{cases} \mathrm{I}_* \left(\omega_t(x), \dfrac{\partial \omega_t(x)}{\partial x}\right) = 0, \\ \mathrm{I}_{**} \left(\omega_t(x), \dfrac{\partial \omega_t(x)}{\partial x}\right) = c_t, \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \mathrm{I}_* \left(\omega(x), \dfrac{\partial \omega(x)}{\partial x}\right) = 0, \\ \mathrm{I}_{**} \left(\omega(x), \dfrac{\partial \omega(x)}{\partial x}\right) = c. \end{cases}$$

Il est cependant difficile d'étudier directement ces conditions finies sauf dans des cas particuliers.

Nous étudierons donc les conditions au premier ordre :

$$\mathcal{D}_1 \underset{1}{\Omega}(x) = \underset{1}{\mathrm{C}}.$$

Pour ce faire, définissons

$$\mathrm{B}_p(\Upsilon) = \mathrm{im}\, \mathcal{D}_p (\mathcal{S}_{p-1}), \qquad \mathrm{Z}_p(\Upsilon) = \ker \mathcal{D}_{p+1} \cap \mathcal{S}_p$$

$$\mathrm{H}_p(\Upsilon) = \frac{\mathrm{Z}_p(\Upsilon)}{\mathrm{B}_p(\Upsilon)}.$$

La condition précédente devient

$$\mathcal{D}_1 \underset{1}{\Omega} \in \mathrm{Z}_1(\Upsilon).$$

Remarque. — La définition de $\mathrm{Z}_1(\Upsilon)$ est celle du faisceau solution du système e. d. p. :

$$0 \to \mathrm{Z}_1(\Upsilon) \to \mathrm{F}_1 \begin{cases} \xrightarrow{\mathcal{D}_2} \mathrm{F}_2, \\ \xrightarrow[\theta_1]{} \mathrm{G}_1. \end{cases}$$

La partie 4 nous permet de montrer que ce système du premier ordre est formellement intégrable et involutif, de même que celui qui définit Υ.

En coordonnées locales, la condition $\underset{1}{\mathrm{C}} \in \mathrm{Z}_1(\Upsilon)$ est équivalente aux conditions linéaires :

$$\left.\frac{\partial \mathrm{J}(c)}{\partial c}\right|_c \underset{1}{\mathrm{C}} = 0.$$

La condition pour qu'un élément de $\mathcal{S}_0$ appartienne à Υ peut s'exprimer par des relations linéaires entre les paramètres infinitésimaux d'une transformation infinitésimale de $\mathfrak{g}$ exprimée sur la base formée par ses générateurs.

Maintenant, la condition $\underset{1}{\mathrm{C}} \in \mathrm{B}_1(\Upsilon)$ détermine les $\underset{1}{\mathrm{C}}$ comme combinaisons linéaires de ces mêmes paramètres.

On peut donc dire que la condition $\mathcal{D}_1 \underset{1}{\Omega} \in Z_1(\Upsilon)$ représente une condition algébrique *greffée* sur une condition de résolution provenant de $\mathcal{D}_1$.

Considérons maintenant deux cas particuliers :

1° *Déformations à la Spencer* : La condition $\mathcal{D}_1 \underset{1}{\Omega} = 0$ est nécessaire pour résoudre $\mathcal{D}\xi = \underset{1}{\Omega}$. Mais nous avons montré qu'un tel système doit être résolu pour savoir si deux pseudogroupes de même structure sont semblables.

Enfin nous savons que pour résoudre le problème d'équivalence locale il faut étudier l'exactitude en F_0 de $P(\Theta)$ ou, celle de $S_2(\Theta)$ en C^1 ([4], [5]).

2° Γ *est un groupe de Lie* (*cf.* exemple I) : La condition algébrique devient celle que l'on obtient en linéarisant les identités de Jacobi, alors que la condition d'exactitude est exprimée par le troisième théorème (réciproque) de Lie.

On retrouve la théorie des déformations d'algèbres de Lie.

Nous allons maintenant montrer que les conditions de rigidité et les obstructions à la déformation peuvent s'exprimer d'une façon analogue à celle du cas algébrique. Les méthodes sont cependant très différentes, bien que les résultats soient les mêmes.

B. Condition de rigidité

Définition. — *Une structure sera dite* rigide *si elle ne peut être déformée en une autres tructure d'un type différent.*

Remarque. — Comme on l'a vu, il revient au même de parler de pseudo-groupe.

Théorème. — *Une condition suffisante de rigidité est*

$$\text{C. S.} : \quad H_1(\Upsilon) = 0.$$

On notera le changement de graduation par rapport au cas algébrique.

C. Obstructions a la déformation

Nous utiliserons l'artifice suivant :

Considérons la suite physique $P(\Theta_t)$ avec t suffisamment petit. Alors $\dim F_p(t) = \dim F_p$ et différentiant

$$\mathcal{D}_{p+1}(t)\,\mathcal{D}_p(t) = 0,$$

on obtient

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{D}_{p+1}(t)\right)\Big|_{t=0} \circ \mathcal{D}_p + \mathcal{D}_{p+1} \circ \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{D}_p(t)\right)\Big|_{t=0} = 0.$$

Prenons $t + \tau$ au lieu de t et écrivons :

$$\omega_{t+\tau} = \omega_t + \tau\left(\underset{1}{\Omega} + t\underset{2}{\Omega} + \dots\right) \qquad c_{t+\tau} = c_t + \tau\left(\underset{1}{C} + t\underset{2}{C} + \dots\right).$$

Si ω_t est une déformation en t de ω, $\omega_{t+\tau}$ sera une déformation en τ de ω_t.

Définition. — *Un cocycle* $\underset{1}{C} \in Z^1(\Upsilon)$ *sera dit* (formellement) intégrable *s'il existe une déformation (formelle)* c_t *de* c, *telle que* $\left.\frac{dC_t}{dt}\right|_{t=0} = \underset{1}{C}$.

En coordonnées locales on a

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1(t)\left(\underset{1}{\Omega} + t\underset{2}{\Omega} + \dots\right) = \underset{1}{C} + t\underset{2}{C} + \dots, \\ \mathcal{D}_2(t)\left(\underset{1}{C} + t\underset{2}{C} + \dots\right) = 0, \end{cases}$$

mais

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1\underset{1}{\Omega} = \underset{1}{C} \\ \mathcal{D}_2\underset{1}{C} = 0. \end{cases}$$

Ainsi :

$$\mathcal{D}_1\underset{2}{\Omega} = -\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{D}_1(t)\right)\Big|_{t=0}\underset{1}{\Omega} + \underset{2}{C},$$

$$B_2(\Upsilon) \ni \mathcal{D}_2\underset{2}{C} = -\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{D}_2(t)\right)\Big|_{t=0}\underset{1}{C} \in Z_2(\Upsilon).$$

Observant les termes en t^ν $(\nu > 1)$, on obtient :

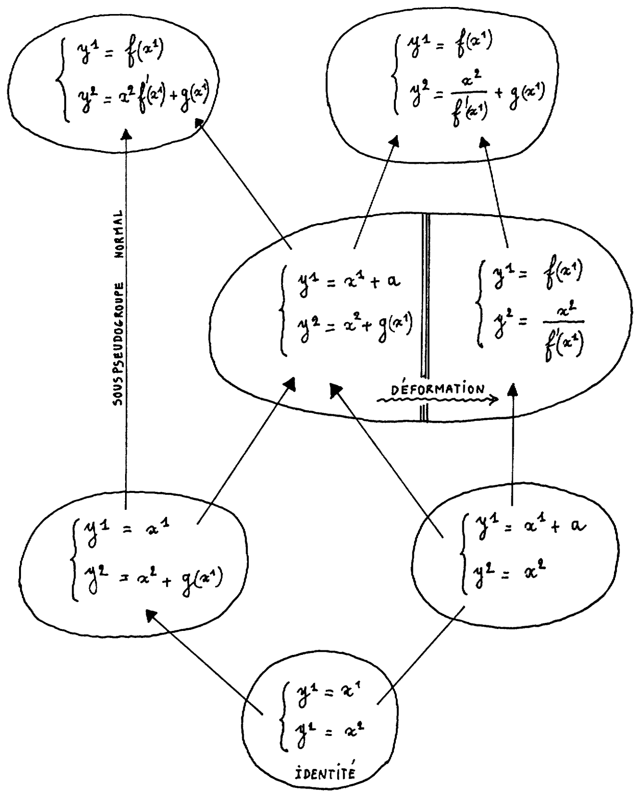
Théorème. — *Si* $H_2(\Upsilon) = 0$, *alors tout cocycle* $\in Z_1(\Upsilon)$ *est formellement intégrable.*

On notera le même changement de graduation que précédemment.

Exemple : un pseudogroupe *simple* (au sens de Lie) est rigide.

6. Pseudogroupes intransitifs, sous-pseudogroupes

Après avoir lu les pages précédentes, le lecteur averti pourra facilement traiter ces sujets en effectuant la recherche des équations finies et infinitésimales et des structures correspondantes, dans les cas suivants :



II. — SYSTÈMES STRUCTURÉS

(Pour tout ce qui suit on se reportera aux exemples II et III.)

Nous allons tout d'abord généraliser certaines des constructions précédentes, en particulier la *méthode diagonale* [3].

Pour cela nous construirons de façon explicite le fibré vectoriel :

$$F_0 \to X.$$

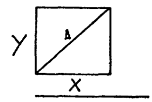
Dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[rr] \arrow[dr, shift left] & & \mathcal{U} \arrow[dl, shift left] \\ & X \arrow[ul, shift left, "f"] \arrow[ur, shift left, "\omega"'] & \end{tikzcd}$$

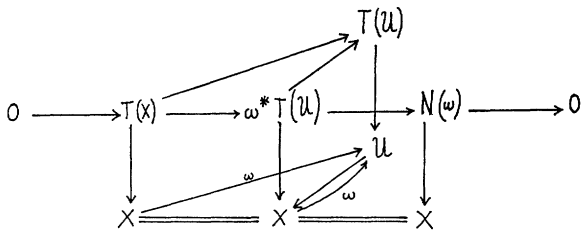
nous avons :

$$X \xrightarrow{\Delta} X \times Y,$$
$$x \to (x, x),$$

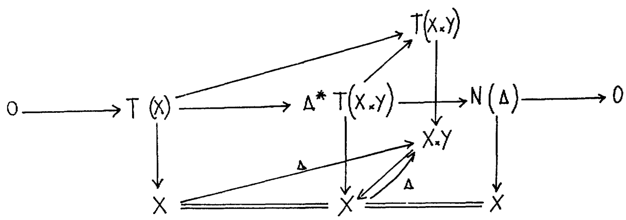
conformément au dessin :



On rappelle alors la construction classique des *fibrés normaux*, en définissant $N(\omega) \approx F_0 = F_0(X)$ par le diagramme commutatif :



On a de même le diagramme commutatif :



et, pour les différents fibrés introduits, en coordonnées locales :

Fibré	*Base*	*Fibre*
$T(X)$	x	$\xi(x)\dfrac{\partial}{\partial x}$
$\Delta^* T(X\times Y)$	$(x, x) \in \Delta$	$\xi(x)\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta(x)\dfrac{\partial}{\partial y}$
$T(X\times Y)$	(x, y)	$\xi(x, y)\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\dfrac{\partial}{\partial y}$.

L'injection $T(X) \rightarrow \Delta^* T(X\times Y)$ devient

$$\begin{cases} x \rightarrow (x, x) \in \Delta, \\ \xi(x)\dfrac{\partial}{\partial x} \rightarrow \xi(x)\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\right), \end{cases}$$

l'autre injection $\Delta^* T(X\times Y) \rightarrow T(X\times Y)$ est triviale. Le triangle supérieur du diagramme précédent est donc commutatif. De plus on remarquera $N(\Delta) \approx T(X)$ [exactement $J_0(T(X))$].

Ce qui précède est donc implicite lorsqu'on parle de linéarisation. En particulier, lorsque l'on cherche à déterminer les invariants différentiels, on remplace les variables (x, ξ) par (y, η). Les x jouent alors un simple rôle de paramètres. La détermination du groupe de Lie $\mathfrak{G}$ revient donc à examiner comment se transforment entre eux ces invariants différentiels, lors d'un changement de paramétrage. La seule propriété utilisée est $\left[\xi(x)\frac{\partial}{\partial x}, \eta(y)\frac{\partial}{\partial y}\right] = 0$.

Il revient au même de supposer que l'on se donne Σ (Y) au-dessus de Y, c'est-à-dire que l'on *relève* la structure considérée, au-dessus de Y.

Il suffit pour cela de changer légèrement les notations de la première partie, en introduisant la suite non linéaire :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \Gamma(Y) \arrow[r] & Y \times Y' \arrow[r] \arrow[dr, shift left] & \mathfrak{U}(Y) \\ & & & Y \arrow[ul, shift left, "\Delta_Y"] \arrow[u, "\omega_Y"'] \end{tikzcd}$$

à partir de laquelle on construit la suite physique :

$$P(\Theta(Y)) : \quad 0 \to \Theta(Y) \to T(Y) \xrightarrow{\mathscr{D}(Y)} F_0(Y) \xrightarrow{\mathscr{D}_1(Y)} F_1(Y) \xrightarrow{\mathscr{D}_2(Y)} \dots \xrightarrow{\mathscr{D}_n(Y)} F_n(Y) \to 0.$$

Les coordonnées de T (Y) étant (y, η), on peut utiliser encore les méthodes de la première partie, en imaginant désormais

$$\dim X = n \neq m = \dim Y.$$

En particulier on peut étudier les prolongements jusqu'à l'ordre q de la transformation infinitésimale $0\frac{\partial}{\partial x} + \eta(y)\frac{\partial}{\partial y}$ lorsque $\eta(y)\frac{\partial}{\partial y}$ est une transformation infinitésimale de Γ (Y). Un système libre maximal d'invariants différentiels, *s'il existe*, sera par exemple $U(y, y_p^k)$.

Considérons maintenant une application (régulière) $x \to y = f(x)$ que l'on étendra à l'application :

$$\begin{cases} X \xrightarrow{f} X \times Y \\ x \to (x, f(x)) \end{cases}$$

et qui permettra de déterminer la valeur des invariants différentiels pour $y = f(x)$. On s'intéressera au système e. d. p. :

$$\text{(A)} \qquad U(y, y_\mu^k) = \omega(x).$$

DÉFINITION. — *On appelle* système automorphe *vis-à-vis de* Γ (Y), *un système e. d. p. tel que si* $y = f(x)$ *est une solution, alors* $y = \psi(f(x))$ *est aussi solution, lorsque* $y \to y' = \psi(y)$ *est une transformation d'un pseudogroupe* Γ (Y).

Il est facile de voir que le système (A) est automorphe vis-à-vis de Γ (Y) dont les équations finies $\mathcal{E}$ (Y) sous forme de Lie sont $U_Y(y', y'^k_\mu) = \omega_Y(y)$. Nous allons montrer que ce système (A) est aussi formellement intégrable et involutif, lorsque les $\omega(x)$ vérifient certaines conditions de compatibilité (S).

A cet effet, rebaptisons les variables indépendantes $y^1, \ldots, y^{m-n}$, y^{m-n+1}, y^m en $y^1, \ldots, y^{m-n}$, $x^1, \ldots, x^n$ dans les équations finies $\mathcal{E}$ (Y). D'après leur construction, les $U(y' \, y'^k_\mu)$ peuvent être considérés comme des invariants différentiels de Γ (Y), ne contenant que des dérivés de classe $\geqq (m-n)$. Les variables non multiplicatrices sont alors à choisir parmi les $x^1, \ldots, x^n$. Ce sous-système est donc involutif à son tour, d'après la *propriété source* de l'involution. Il sera formellement intégrable si les $\omega(x)$ vérifient les conditions de compatibilité relatives aux $\omega_Y(f(x))$ particuliers auxquels ils sont égaux dans ce système de coordonnées. L'hypothèse d'involution garantit ensuite cette propriété dans n'importe quel système de coordonnées. On remarquera, en conséquence, que $U(y, y^k_\mu)$ dépend de y par l'intermédiaire des $\omega_Y(y)$.

Puisque $\left[\xi(x)\dfrac{\partial}{\partial x}, \eta(y)\dfrac{\partial}{\partial y}\right] = 0$ les $U(y, y^k_\mu)$ se transforment entre eux sous l'effet d'une transformation $x \to x' = \varphi(x)$, ce qui permet de construire, comme dans la première partie $\mathfrak{U} \to X$ à partir du groupe de Lie $\mathfrak{G}$. De cette façon, le système (S) est invariant par le premier prolongement des transformations infinitésimales :

$$L(X) = \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^i_\mu L^{\tau\mu}_{X_i}(u)\frac{\partial}{\partial u^\tau}.$$

Plus généralement les transformations :

$$U(u_Y, f^k_\mu) = u_X$$

permettent ensuite, par linéarisation, de construire l'application intravariante

$$F_0(Y) \xrightarrow{f_0^*} F_0(X).$$

Par un changement de coordonnées locales convenable on se placera dans la situation où l'application $x \to y = f(x)$ est telle que $y^1 = 0, \ldots, y^{m-n} = 0, y^{m-n+1} = x^1, \ldots, y^m = x^n$ et on utilisera le fait que

$$\frac{\partial^{|\mu|} y^k}{\partial x^{\mu_1} \ldots \partial x^{\mu_n}} = \frac{\partial y^k}{\partial x'^j}\,\frac{\partial^{|\mu|} x'^j}{\partial x^{\mu_1} \ldots \partial x^{\mu_n}} + \ldots$$

pour étudier la *partie d'ordre q* de (A).

Dans $\mathcal{E}$ (Y) ou Σ (Y) l'hypothèse d'involution permet de déterminer de façon intrinsèque le nombre maximal de dérivées principales d'ordre q, de classe $m, m-1, \ldots, m-n+1, m-n, \ldots$ que l'on peut calculer en fonction des y et des dérivées paramétriques. On peut rassembler ces dérivées en commençant par y'^m puis y'^{m-1}, ... On obtient alors la partie d'ordre q de $\Sigma \equiv \Sigma$ (X) en ne conservant qu'une sous-matrice de la matrice relative à la partie d'ordre q de Σ (Y). D'après la *propriété but* de l'involution, $\Sigma \equiv \Sigma$ (X) satisfait aussi à la condition algébrique d'involution et on peut alors utiliser les constructions de la première partie pour déterminer les conditions de compatibilité I $=$ I (X). Pour ce faire on sera conduit à chercher le *nombre maximal* d'équations invariantes par le premier prolongement de la transformation infinitésimale $\xi^i(x)\dfrac{\partial}{\partial x^i} + \xi^i_\mu \mathrm{L}^{\tau\mu}_{\mathrm{X}\,i}(u)\dfrac{\partial}{\partial u^\tau}$. Parmi celles-ci se trouvent en particulier celles qui constituent le système (S) et donc (S) $\subseteq$ (I).

Certaines conditions (*cf.* exemple II) doivent être imposées aux $\omega_{\mathrm{Y}}(y)$ pour que, lorsque les conditions de compatibilité pour les $\omega_{\mathrm{Y}}(y)$ sont vérifiées, on ait (S) $\equiv$ (I). Dans ce cas :

DÉFINITION. — *De telles structures sont dites* covariantes.

Remarque. — Alors qu'au cours de la première partie on pouvait intervertir le rôle de x et y, dans la seconde partie cela devient impossible mais la propriété fondamentale d'involution, nous permet de ne pas faire intervenir le système de coordonnées. *Cette relation, originale, entre involution et covariance nous parait être la clef de toute application à la physique mathématique.*

Nota : Une telle définition sera modifiée ultérieurement.

Par analogie avec la théorie des formes différentielles extérieures on peut traduire la propriété de covariance par la commutativité d'un diagramme plan.

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la structure donnée soit covariante est que l'on ait le carré commutatif :*

$$\begin{tikzcd} F_0(Y) \arrow[r, "\mathfrak{A}(Y)"] \arrow[d, "f_0^*"] & F_1(Y) \arrow[d, "f_1^*"] \\ F_0(X) \arrow[r, "\mathfrak{A}(X)"] & F_1(X) \end{tikzcd}$$

Nous résumons ci-dessous ce qui précède :

STRUCTURE AU-DESSUS DE Y :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \Gamma(Y) \arrow[r] & Y \times Y' \arrow[r] \arrow[dr, shift left] & \mathcal{U}(Y) \arrow[dl, shift left] \\ & & & Y \arrow[ul, shift left, "\Delta_Y"] \arrow[u, shift left, "\omega_Y"'] \end{tikzcd}$$

ω_{Y} doit vérifier les conditions de compatibilité I (Y).

Système automorphe (A) :

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[rr] \arrow[dr, shift left] & & \mathcal{U} \arrow[dl, shift left] \\ & X \arrow[ul, shift left, "f"] \arrow[ur, shift left, "\omega"'] & \end{tikzcd}$$

ω doit vérifier les conditions de compatibilité $(S) \subseteq (I)$.

Structure au-dessus de X :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \Gamma(X) \arrow[r] & X \times X' \arrow[rr] \arrow[dr, shift left] & & \mathcal{U}(X) \arrow[dl, shift left] \\ & & & X \arrow[ul, shift left, "\Delta_X"] \arrow[ur, shift left, "\omega_X"'] & \end{tikzcd}$$

$\mathcal{U} \equiv \mathcal{U}(X)$ et ω_X doit vérifier les conditions de compatibilité $(I) = I(X)$.

Remarque. — Les diagrammes précédents existent aussi lorsque $n \geq m$.

On vient de voir que le système automorphe ainsi construit induisait une structure au-dessus de X, à partir d'une structure donnée au-dessus de Y. On peut donc encore, suivant un procédé déjà rencontré, oublier ce système, pour ne plus considérer qu'une structure au-dessus de X, comme dans la première partie. Le système (S) est alors un système formellement intégrable, involutif et invariant par le premier prolongement $L^{(1)}$ de la transformation infinitésimale :

$$L = \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^k_\mu L^{\tau\mu}_k(u)\frac{\partial}{\partial u^\tau}.$$

Définition. — *De tels systèmes e. d. p. sont dits* systèmes structurés.

Remarque. — On a rencontré plus haut l'association :

Système automorphe (A) $\rightarrow$ Système structuré (S).

Nous ne savons pas si l'existence d'un système structuré est conditionnée par une telle association.

Exemple : La solution générale des équations d'Einstein dans le vide n'est pas connue.

Le système (I) des conditions de compatibilité est, par construction, un système structuré maximal. (S) est donc un sous-système du système (I).

Remarque. — La section $\mathcal{U}(X) \overset{\omega_X}{\leftrightarrows} X$ qui intervient dans la construction de $F_0(X)$ doit satisfaire aux conditions de compatibilité déterminées dans l'étude de $\mathcal{E}$ (X) alors que dans la section $\mathcal{U} \overset{\omega}{\leftrightarrows} X$ précédemment rencontrée, ne devait satisfaire qu'à certaines de ces conditions constituant (S).

Par linéarisation, en tenant compte de la remarque précédente, cette propriété se transforme en l'existence d'un carré puis d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
F_0 \arrow[r, "\mathcal{D}_1"] \arrow[d, equal] & F_1 \arrow[r, "\mathcal{D}_2"] \arrow[d] & F_2 \arrow[r, "\mathcal{D}_3"] \arrow[d] & \cdots \\
F_0 \arrow[r, "\mathcal{G}_1"] & M_1 \arrow[r, dash, "\mathcal{G}_2"] \arrow[d] & M_2 \arrow[r, "\mathcal{G}_3"] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

(*cf.* exemple III où la première cellule traduit la construction des équations d'Einstein et la seconde la construction de la divergence à partir des identités de Bianchi.)

Un tel diagramme caractérise donc un système structuré.

Nous allons donner quelques précisions sur de tels systèmes (dans le cas simple où Γ est transitif) en utilisant la théorie classique des systèmes d'équations invariants par un groupe de Lie.

Le système (S) comprend tout d'abord un sous système (S_*) formé des équations $S_*\left(u, \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$ fixant le rang de la matrice :

$$\overbrace{\begin{array}{|c|c|}\hline \mathrm{Inv}(u) & \left(u, \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) \\ \hline 0 & L(u) \\ \hline \end{array}}^{\dim J_{q+1}(T) - n} \left.\vphantom{\begin{array}{c} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ L \end{array}}\right\} (n+1) \dim F_0$$

Le rang de la sous-matrice L (u) est égal à dim F_0. Le rang maximal de la sous-matrice Inv (u) est déterminé par le fait que la condition algébrique d'involution ne doit entraîner aucune relation entre les u seulement. Or le nombre maximal d'équations invariantes est égal à

$$(n + 1) \dim F_0 - (\dim F_0 + rg \,\mathrm{Inv}\,(u)) = n \dim F_0 - rg \,\mathrm{Inv}\,(u);$$

il est donc plus petit que dim F_1 et on retrouve dim $S_1 \leqq$ dim F_1. Posant $(S) = (S_*, S_{**})$, on écrira symboliquement $(S_*) \subseteq (I_*)$. Il faudra ensuite ajouter aux équations précédentes des équations formées en égalant à zéro des fonctions libres des invariants du système complet obtenu à partir de $L^{(1)}$ en tenant compte de (S_*). La présence des vecteurs $\mathrm{Inv}\,(u) \dfrac{\partial}{\partial \dfrac{\partial u}{\partial x}}$ permettra, comme dans la première partie, d'écrire ces équations sous la forme $S_{**}\left(u, \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = c$ quasi linéaire en $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, avec $(S_{**}) \subseteq (I_{**})$.

Nous ne savons pas, pour l'instant, donner des conditions nécessaires ou suffisantes pour que de tels systèmes soient involutifs.

Par contre, nous allons indiquer une conséquence importante de cette propriété, qui généralisera le processus de contraction tensorielle (*cf.* exemple II).

Imaginons une structure covariante au-dessus de Y et un système structuré S (Y).

D'après cette structure au-dessus de Y on induit une structure au-dessus de X en considérant, parmi les invariants $U_Y(y', y'^k_\mu)$, certains invariants où les dérivations sont effectuées seulement par rapport à $y'^{m-n+1} = x^1, \ldots, y'^m = x^n$ et que l'on notera $U(y, y^k_\mu)$ en supprimant la ponctuation des variables dépendantes.

Symboliquement on sait que $I(X) \subseteq I(Y)$ et $S(Y) \subseteq I(Y)$.

Prenons $S(X) = I(X) \cap S(Y)$ pour satisfaire à $S(X) \subseteq I(X)$. Nous allons montrer que S (X), ainsi construit, est bien un système e. d. p. formellement intégrable et involutif.

Tout d'abord la condition algébrique d'involution est remplie puisque S (X) est ainsi construit à partir de S (Y) involutif de la même manière que I (X) à partir de I (Y) involutif.

Imaginons maintenant que par dérivations par rapport à $x^1, \ldots, x^n$ $(y'^{m-n+1}, \ldots, y'^m)$ et éliminations, on puisse déduire, à partir des équations S (X), d'autres équations du premier ordre $\not\subset S(X)$. Puisque $S(X) \subseteq I(X)$ formellement intégrable, ces équations $\subseteq I(X)$. De même, puisque $S(X) \subseteq S(Y)$ formellement intégrable, ces équations $\subseteq S(Y)$. Elles appartiennent donc à $I(X) \cap S(Y) = S(X)$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

C. Q. F. D.

Nous montrerons dans un prochain travail que la théorie de Gallois classique est un cas particulier de la théorie d'intégration des systèmes automorphes.

EXEMPLE I : GROUPE DE LIE

Première partie

Nous savons, d'après les théorèmes fondamentaux de Lie, que les axiomes de la structure de groupe permettrent d'écrire les équations finies du groupe sous la forme de Lie :

$$(\mathcal{E}) \qquad \omega_h^k(y)\frac{\partial y^h}{\partial x^l} = \omega_l^k(x).$$

Les équations infinitésimales générales correspondantes sont alors :

$$(\Sigma) \qquad \underset{1}{\Omega_l^k} \equiv \omega_h^k(x)\frac{\partial \xi^h}{\partial x^l} + \xi^i\frac{\partial \omega_l^k(x)}{\partial x^i} = 0.$$

Posant $\alpha_h^k(x)\,\omega_l^h(x) = \delta_l^k$ leur forme résolue devient

$$(\Sigma) \qquad \mathrm{F}_{0\,l}^h \equiv \frac{\partial \xi^h}{\partial x^l} + \alpha_m^h(x)\frac{\partial \omega_l^m(x)}{\partial x^i}\xi^i = 0.$$

Il n'y a que des conditions de compatibilité de seconde expèce :

$$(\mathrm{I}) \qquad \alpha_k^{k'}(x)\,\alpha_l^{l'}(x)\left(\frac{\partial \omega_{k'}^h(x)}{\partial x^{l'}} - \frac{\partial \omega_{l'}^h(x)}{\partial x^{k'}}\right) = c_{kl}^h.$$

Posant $w^k = \omega_l^k(x)\,dx^l$ elles sont équivalentes aux équations de Maurer-Cartan bien connues :

$$dw^h + \frac{1}{2}c_{kl}^h\, w^k \wedge w^l = 0.$$

Nous obtenons ensuite les identités de Jacobi entre les constantes de structure :

$$(\mathrm{J}) \qquad c_{hk}^i\, c_{il}^j + c_{kl}^i\, c_{ih}^j + c_{lh}^i\, c_{ik}^j = 0.$$

Alors que, suivant Cartan, on considère en général les $\omega_l^k(x)$ comme n 1-formes différentielles, dans notre théorie nous considérons n^2 fonctions de x, exprimant en coordonnées locales une section particulière d'un certain fibré au-dessus de X.

L'écriture avec un indice en haut et un en bas est seulement plus simple.

On construit la suite physique :

$$\mathrm{P}(\Theta): \quad 0 \to \Theta \to \mathrm{T} \to \mathrm{F}_0 \to \mathrm{F}_1 \to \ldots \to \mathrm{F}_{n-1} \to 0,$$

avec

$$\dim F_p = n \frac{n\,!}{(n-p-1)\,!\,(p+1)\,!}.$$

Remarque. — On peut (ce n'est pas évident !) démontrer l'exactitude de P (Θ).

Le système

$$P\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = P\left(\omega(x), \frac{\partial \omega(x)}{\partial x}\right) = \pi(x)$$

devient ici :

$$\alpha^h_m(x) \frac{\partial \omega^m_l(x)}{\partial x^i} = \pi^h_{li}(x).$$

Les conditions de compatibilité pour les π sont :

$$\frac{\partial \pi^h_{li}}{\partial x^m} - \frac{\partial \pi^h_{mi}}{\partial x^l} + \pi^j_{li}\,\pi^h_{mj} - \pi^j_{mi}\,\pi^h_{lj} = 0,$$
$$\frac{\partial \pi^h_{il}}{\partial x^m} - \frac{\partial \pi^h_{im}}{\partial x^l} + \pi^j_{il}\,\pi^h_{jm} - \pi^j_{im}\,\pi^h_{jl} = 0.$$

On détermine le groupe de Lie $\mathfrak{g}$ de la façon suivante

$$\overline{\alpha}^k_h(x) \frac{\partial \overline{\omega}^h_l(x)}{\partial x^i} = \alpha^k_h(x) \frac{\partial \omega^h_l(x)}{\partial x^i} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\alpha}^k_h\, d(\overline{\omega}^h_l) = \alpha^k_h\, d(\omega^h_l),$$
$$\omega^h_l\, d(\alpha^k_h) + \overline{\alpha}^k_h\, d(\overline{\omega}^h_l) = 0,$$
$$\overline{\omega}^h_k\, \omega^m_l\, d(\alpha^k_m) + d(\overline{\omega}^h_l) = 0,$$
$$\overline{\omega}^h_k\, d(\alpha^k_m) + \alpha^l_m\, d(\overline{\omega}^h_l) = 0,$$
$$d(\overline{\omega}^h_k\, \alpha^k_m) = 0.$$

Sa transformation finie la plus générale est donc :

$$\overline{\omega}^m_k(x) = a^m_k\, \omega^k_h(x)$$

et l'on conclut aisément à l'identité de notre théorie de déformation et de la théorie des déformations d'algèbres de Lie.

Seconde partie

Le système e. d. p. du premier ordre définissant Υ est automorphe, de groupe (de Lie) $\tilde{\Gamma}/\Gamma \subseteq \mathfrak{g}$. D'après la remarque précédente, la suite P (Υ) correspondante est donc exacte. Les suites P (Θ) et P (Ξ) ont donc même cohomologie, sauf peut-être en F_0 et G_0, ce qui justifie, *a posteriori*, l'oubli de la cellule initiale.

Cas particulier. — Considérons un pseudogroupe contenant toutes les translations. Il est donc transitif, et $\xi =$ Cte doit être solution des équations infinitésimales (Σ) de la page 13. Mais alors il faut $\dfrac{\partial \omega^\tau (x)}{\partial x_i} = 0$ soit $\omega (x) = \mathrm{Cte}$. Maintenant, puisque les F_p ne sont définis qu'à un isomorphisme près, $\mathcal{D}$, et par suite $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$, peuvent être considérés comme des opérateurs différentiels à coefficients constants. Les suites P (Θ) et P (Ξ) sont donc exactes et le problème d'équivalence locale peut être complètement résolu pour une telle structure [5].

EXEMPLE II

Pour ne pas alourdir l'exposition de cet exemple, nous donnons seulement, très brièvement, les expressions propres à cet exemple, en regard de la dénomination qui leur correspond dans la théorie générale. Nous détaillons par contre certains calculs plus spécieux.

Première partie

1. Équations d'un pseudogroupe :

Pseudogroupe spécial Γ :

$$y^1 = f(x^1), \qquad y^2 = x^2 f'(x^1), \qquad y^3 = x^3 + x^2 \frac{f''(x^1)}{f'(x^1)}.$$

Équations finies spéciales (forme résolue) :

$$(\mathcal{E}) \left\{ \begin{array}{r|c|l|l|ccc|} \mathcal{F}^8 \equiv & \dfrac{\partial y^3}{\partial x^3} & - 1 & = 0 & x^1 & x^2 & x^3 \\ \mathcal{F}^7 \equiv & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^3} & & = 0 & x^1 & x^2 & x^3 \\ \mathcal{F}^6 \equiv & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^3} & & = 0 & x^1 & x^2 & x^3 \\ \mathcal{F}^5 \equiv & \dfrac{\partial y^3}{\partial x^2} & - \dfrac{y^3 - x^3}{x^2} & = 0 & x^1 & x^2 & \bullet \\ \mathcal{F}^4 \equiv & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^2} & - \dfrac{y^2}{x^2} & = 0 & x^1 & x^2 & \bullet \\ \mathcal{F}^3 \equiv & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^2} & & = 0 & x^1 & x^2 & \bullet \\ \mathcal{F}^2 \equiv & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^1} & - (y^3 - x^3) \dfrac{y^2}{x^2} & = 0 & x^1 & \bullet & \bullet \\ \mathcal{F}^1 \equiv & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & - \dfrac{y^2}{x^2} & = 0 & x^1 & \bullet & \bullet \end{array} \right. \mathcal{X}$$

Vérification de l'intégrabilité formelle et de l'involution :

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial \mathcal{F}^5}{\partial x^3} - \dfrac{\partial \mathcal{F}^8}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x^2}\mathcal{F}^8 & = 0, \\[2mm]
\dfrac{\partial \mathcal{F}^4}{\partial x^3} - \dfrac{\partial \mathcal{F}^7}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x^2}\mathcal{F}^7 & = 0, \\[2mm]
\dfrac{\partial \mathcal{F}^3}{\partial x^3} - \dfrac{\partial \mathcal{F}^6}{\partial x^2} & = 0, \\[2mm]
\dfrac{\partial \mathcal{F}^2}{\partial x^3} - \dfrac{\partial \mathcal{F}^7}{\partial x^1} + \dfrac{y^2}{x^2}\mathcal{F}^8 + \dfrac{y^3 - x^3}{x^2}\mathcal{F}^7 & = 0, \\[2mm]
\dfrac{\partial \mathcal{F}^1}{\partial x^3} - \dfrac{\partial \mathcal{F}^6}{\partial x^1} + \dfrac{1}{x^2}\mathcal{F}^7 & = 0, \\[2mm]
\dfrac{\partial \mathcal{F}^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial \mathcal{F}^4}{\partial x^1} + \dfrac{y^2}{x^2}\mathcal{F}^5 + \dfrac{y^3 - x^3}{x^2}\mathcal{F}^4 - \dfrac{1}{x^2}\mathcal{F}^2 & = 0, \\[2mm]
\dfrac{\partial \mathcal{F}^1}{\partial x^2} - \dfrac{\partial \mathcal{F}^3}{\partial x^1} + \dfrac{1}{x^2}\mathcal{F}^4 & = 0.
\end{array}
\right.
$$

Linéarisation : on pose

$$y = x + t\,\xi(x) + \dots.$$

Équations infinitésimales spéciales :

$$
(\Sigma)\left\{
\begin{array}{lllll|ccc|}
F^8_0 \equiv & \dfrac{\partial \xi^3}{\partial x^3} & & = 0 & & x^1 & x^2 & x^3 \\[2mm]
F^7_0 \equiv & \dfrac{\partial \xi^2}{\partial x^3} & & = 0 & & x^1 & x^2 & x^3 \\[2mm]
F^6_0 \equiv & \dfrac{\partial \xi^1}{\partial x^3} & & = 0 & & x^1 & x^2 & x^3 \\[2mm]
F^5_0 \equiv & \dfrac{\partial \xi^3}{\partial x^2} & - \dfrac{\xi^3}{x_2} & = 0 & & x^1 & x^2 & \bullet \\[2mm]
F^4_0 \equiv & \dfrac{\partial \xi^2}{\partial x^2} & - \dfrac{\xi^2}{x^2} & = 0 & & x^1 & x^2 & \bullet \\[2mm]
F^3_0 \equiv & \dfrac{\partial \xi^1}{\partial x^2} & & = 0 & & x^1 & x^2 & \bullet \\[2mm]
F^2_0 \equiv & \dfrac{\partial \xi^2}{\partial x^1} & - \xi^3 & = 0 & & x^1 & \bullet & \bullet \\[2mm]
F^1_0 \equiv & \dfrac{\partial \xi^1}{\partial x^1} & - \dfrac{\xi^2}{x^2} & = 0 & & x^1 & \bullet & \bullet
\end{array}
\right. \quad \mathfrak{X}
$$

Suite physique :

$$P(\Theta) \quad : 0 \to \Theta \to T \xrightarrow{\mathcal{D}} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} F_2 \to 0.$$

dimensions : $(3) = (8) - (7) + (2)$

Vérification de l'intégrabilité formelle et de l'involution :

$$
(\Sigma_1)\left\{
\begin{array}{lll}
F^7_1 \equiv \boxed{\dfrac{\partial F^5_0}{\partial x^3}} - \dfrac{\partial F^8_0}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x^2} F^8_0 & = 0 & x^1 \quad x^2 \quad x^3 \\
F^6_1 \equiv \boxed{\dfrac{\partial F^4_0}{\partial x^3}} - \dfrac{\partial F^7_0}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x^2} F^7_0 & = 0 & x^1 \quad x^2 \quad x^3 \\
F^5_1 \equiv \boxed{\dfrac{\partial F^3_0}{\partial x^3}} - \dfrac{\partial F^6_0}{\partial x^2} & = 0 & x^1 \quad x^2 \quad x^3 \\
F^4_1 \equiv \boxed{\dfrac{\partial F^2_0}{\partial x^3}} - \dfrac{\partial F^7_0}{\partial x^1} + F^8_0 & = 0 & x^1 \quad x^2 \quad x^3 \\
F^3_1 \equiv \boxed{\dfrac{\partial F^1_0}{\partial x^3}} - \dfrac{\partial F^6_0}{\partial x^1} + \dfrac{1}{x^2} F^7_0 & = 0 & x^1 \quad x^2 \quad x^3 \\
F^2_1 \equiv \boxed{\dfrac{\partial F^2_0}{\partial x^2}} - \dfrac{\partial F^4_0}{\partial x^1} + F^5_0 - \dfrac{1}{x^2} F^2_0 & = 0 & x^1 \quad x^2 \quad \bullet \\
F^1_1 \equiv \boxed{\dfrac{\partial F^1_0}{\partial x^2}} - \dfrac{\partial F^3_0}{\partial x^1} + \dfrac{1}{x^2} F^4_0 & = 0 & x^1 \quad x^2 \quad \bullet
\end{array}
\right.
$$

Vérification de l'intégrabilité formelle et de l'involution :

$$
(\Sigma_2)\left\{
\begin{array}{lll}
F^2_2 \equiv \boxed{\dfrac{\partial F^2_1}{\partial x^3}} - \dfrac{\partial F^4_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F^6_1}{\partial x^1} - F^7_1 + \dfrac{1}{x^2} F^4_1 & = 0 & x^1 \quad x^2 \quad x^3 \\
F^1_2 \equiv \boxed{\dfrac{\partial F^1_1}{\partial x^3}} - \dfrac{\partial F^3_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F^5_1}{\partial x^1} - \dfrac{1}{x^2} F^6_1 & = 0 & x^1 \quad x^2 \quad x^3
\end{array}
\right. .
$$

Premier prolongement de la transformation infinitésimale du but :

$$
\eta^1(y)\frac{\partial}{\partial y^1} + \eta^2(y)\frac{\partial}{\partial y^2} + \eta^3(y)\frac{\partial}{\partial y^3} + \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial y^1} y^1_1 + \frac{\partial \eta^1}{\partial y^2} y^2_1 + \frac{\partial \eta^1}{\partial y^3} y^3_1\right)\frac{\partial}{\partial y^1_1},
$$

$$
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
$$

$$
\left(\frac{\partial \eta^3}{\partial y^1} y^1_3 + \frac{\partial \eta^3}{\partial y^2} y^2_3 + \frac{\partial \eta^3}{\partial y^3} y^3_3\right)\frac{\partial}{\partial y^3_3}.
$$

Cas où elle est une transformation infinitésimale de Γ :

$$
\eta^1(y)\frac{\partial}{\partial y^1} + \eta^2(y)\left(\frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{1}{y_2}\left(y^1_1\frac{\partial}{\partial y^1_1} + y^1_2\frac{\partial}{\partial y^1_2} + y^1_3\frac{\partial}{\partial y^1_3}\right.\right.
$$

$$
\left.\left. + y^2_1\frac{\partial}{\partial y^2_1} + y^2_2\frac{\partial}{\partial y^2_2} + y^2_3\frac{\partial}{\partial y^2_3}\right)\right)
$$

$$+\eta^3(y)\left(\frac{\partial}{\partial y^3}+\frac{1}{y^2}\left(y_1^2\frac{\partial}{\partial y_1^3}+y_2^2\frac{\partial}{\partial y_2^3}+y_3^2\frac{\partial}{\partial y_3^3}\right)\right.$$
$$\left.+y_1^1\frac{\partial}{\partial y_1^2}+y_2^1\frac{\partial}{\partial y_2^2}+y_3^1\frac{\partial}{\partial y_3^2}\right),$$
$$+\frac{\partial\eta^3(y)}{\partial y^1}\left(y_1^1\frac{\partial}{\partial y_1^3}+y_2^1\frac{\partial}{\partial y_2^3}+y_3^1\frac{\partial}{\partial y_3^3}\right).$$

Détermination des vecteurs $\overline{\mathcal{B}}$:

$$\overline{\mathcal{B}}_1\equiv\frac{\partial}{\partial y^1},$$
$$\overline{\mathcal{B}}_2\equiv\frac{\partial}{\partial y^2}+\frac{1}{y^2}\left(y_1^1\frac{\partial}{\partial y_1^1}+y_2^1\frac{\partial}{\partial y_2^1}+y_3^1\frac{\partial}{\partial y_3^1}+y_1^2\frac{\partial}{\partial y_1^2}+y_2^2\frac{\partial}{\partial y_2^2}+y_3^2\frac{\partial}{\partial y_3^2}\right),$$
$$\overline{\mathcal{B}}_3\equiv\frac{\partial}{\partial y^3}+\frac{1}{y^2}\left(y_1^2\frac{\partial}{\partial y_1^3}+y_2^2\frac{\partial}{\partial y_2^3}+y_3^2\frac{\partial}{\partial y_3^3}\right)+y_1^1\frac{\partial}{\partial y_1^2}+y_2^1\frac{\partial}{\partial y_2^2}+y_3^1\frac{\partial}{\partial y_3^2},$$
$$\overline{\mathcal{B}}_4\equiv y_1^1\frac{\partial}{\partial y_1^3}+y_2^1\frac{\partial}{\partial y_2^3}+y_3^1\frac{\partial}{\partial y_3^3}.$$

Recherche des $3+9-4=8$ invariants différentiels libres :

$$\mathrm{U}^1=\frac{1}{y^2}y_1^1,\qquad \mathrm{U}^2=\frac{1}{y^2}y_2^1,\qquad \mathrm{U}^3=\frac{1}{y^2}y_3^1,$$
$$\mathrm{U}^4=\frac{1}{y^2}(y_1^2-y^3y_1^1),\qquad \mathrm{U}^5=\frac{1}{y^2}(y_2^2-y^3y_2^1),\qquad \mathrm{U}^6=\frac{1}{y^2}(y_3^2-y^3y_3^1),$$
$$\mathrm{U}^7=\frac{1}{y^2}\left(\frac{\mathrm{D}(y^1,y^3)}{\mathrm{D}(x^2,x^3)}-\frac{y^3}{y^2}\frac{\mathrm{D}(y^1,y^2)}{\mathrm{D}(x^2,x^3)}\right),$$
$$\mathrm{U}^8=\frac{1}{y^2}\left(\frac{\mathrm{D}(y^1,y^3)}{\mathrm{D}(x^3,x^1)}-\frac{y^3}{y^2}\frac{\mathrm{D}(y^1,y^2)}{\mathrm{D}(x^3,x^1)}\right).$$

Pour des raisons de symétrie des calculs, on introduira

$$\mathrm{U}^9=\frac{1}{y^2}\left(\frac{\mathrm{D}(y^1,y^3)}{\mathrm{D}(x^1,x^2)}-\frac{y^3}{y^2}\frac{\mathrm{D}(y^1,y^2)}{\mathrm{D}(x^1,x^2)}\right).$$

Les neuf invariants différentiels ci-dessus sont liés par la relation

$$\mathrm{U}^1\mathrm{U}^7+\mathrm{U}^2\mathrm{U}^8+\mathrm{U}^3\mathrm{U}^9=0.$$

Remarque. — La situation est la même que dans le cas complexe analytique où l'on a $\mathrm{J}^2=-\mathrm{I}$.

Équations finies spéciales (forme de Lie) :

$$
(\mathcal{E}) \left\{
\begin{array}{ll}
U^1 \equiv \dfrac{1}{y^2} y^1_1 & = \dfrac{1}{x^2}, \\
U^2 \equiv \dfrac{1}{y^2} y^1_2 & = 0, \\
U^3 \equiv \dfrac{1}{y^2} y^1_3 & = 0, \\
U^4 \equiv \dfrac{1}{y^2} (y^2_1 - y^3 y^1_1) & = -\dfrac{x^3}{x^2}, \\
U^5 \equiv \dfrac{1}{y^2} (y^2_2 - y^3 y^1_2) & = \dfrac{1}{x^2}, \\
U^6 \equiv \dfrac{1}{y^2} (y^2_3 - y^3 y^1_3) & = 0, \\
U^7 \equiv \dfrac{1}{y^2} \left(\dfrac{D(y^1, y^3)}{D(x^2, x^3)} - \dfrac{y^3}{y^2} \dfrac{D(y^1, y^2)}{D(x^2, x^3)} \right) & = 0, \\
U^8 \equiv \dfrac{1}{y^2} \left(\dfrac{D(y^1, y^3)}{D(x^3, x^1)} - \dfrac{y^3}{y^2} \dfrac{D(y^1, y^2)}{D(x^3, x^1)} \right) & = -\dfrac{1}{x^2}, \\
U^9 \equiv \dfrac{1}{y^2} \left(\dfrac{D(y^1, y^3)}{D(x^1, x^2)} - \dfrac{y^3}{y^2} \dfrac{D(y^1, y^2)}{D(x^1, x^2)} \right) & = -\dfrac{x^3}{(x^2)^2}.
\end{array}
\right.
$$

Groupe de Lie $\mathfrak{G}$ (fonctions de transitions de $\mathcal{U} \to X$) :

$$
\begin{aligned}
u^1 &= u'^1 \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^1} + u'^2 \frac{\partial \varphi^2}{\partial \varphi^1} + u'^3 \frac{\partial \varphi^3}{\partial x^1}, \\
u^2 &= u'^1 \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^2} + u'^2 \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2} + u'^3 \frac{\partial \varphi^3}{\partial x^2}, \\
u^3 &= u'^1 \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^3} + u'^2 \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^3} + u'^3 \frac{\partial \varphi^3}{\partial x^3}, \\
u^4 &= u'^4 \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^1} + u'^5 \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^1} + u'^6 \frac{\partial \varphi^3}{\partial x^1}, \\
u^5 &= u'^4 \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^2} + u'^5 \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2} + u'^6 \frac{\partial \varphi^3}{\partial x^2}, \\
u^6 &= u'^4 \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^3} + u'^5 \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^3} + u'^6 \frac{\partial \varphi^3}{\partial x^3}, \\
u^7 &= u'^7 \frac{D(\varphi^2, \varphi^3)}{D(x^2, x^3)} + u'^8 \frac{D(\varphi^3, \varphi^1)}{D(x^2, x^3)} + u'^9 \frac{D(\varphi^1, \varphi^2)}{D(x^2, x^3)}, \\
u^8 &= u'^7 \frac{D(\varphi^2, \varphi^3)}{D(x^3, x^1)} + u'^8 \frac{D(\varphi^3, \varphi^1)}{D(x^3, x^1)} + u'^9 \frac{D(\varphi^1, \varphi^2)}{D(x^3, x^1)}, \\
u^9 &= u'^7 \frac{D(\varphi^2, \varphi^3)}{D(x^1, x^2)} + u'^8 \frac{D(\varphi^3, \varphi^1)}{D(x^1, x^2)} + u'^9 \frac{D(\varphi^1, \varphi^2)}{D(x^1, x^2)}.
\end{aligned}
$$

On vérifie :

$$
(u^1 u^7 + u^2 u^8 + u^3 u^9) = (u'^1 u'^7 + u'^2 u'^8 + u'^3 u'^9) \frac{D(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)}{D(x^1, x^2, x^3)}
$$

(équation invariante $u^1 u^7 + u^2 u^8 + u^3 u^8 = 0$)

ceci lorsque :

$$x' = \varphi(x).$$

ÉQUATIONS FINIES GÉNÉRALES : Elles sont obtenues directement à partir des équations finies de $\mathfrak{G}$ données plus haut. Nous ne les écrirons donc pas. Par linéarisation, on obtient :

ÉQUATIONS INFINITÉSIMALES GÉNÉRALES :

$$
(\Sigma)\left\{
\begin{aligned}
\underset{1}{\Omega}^1 &\equiv \omega^1(x)\frac{\partial\xi^1}{\partial x^1} + \omega^2(x)\frac{\partial\xi^2}{\partial x^1} + \omega^3(x)\frac{\partial\xi^3}{\partial x^1} + \xi^i\frac{\partial\omega^1(x)}{\partial x^i} = 0,\\
\underset{1}{\Omega}^2 &\equiv \omega^1(x)\frac{\partial\xi^1}{\partial x^2} + \omega^2(x)\frac{\partial\xi^2}{\partial x^2} + \omega^3(x)\frac{\partial\xi^3}{\partial x^2} + \xi^i\frac{\partial\omega^2(x)}{\partial x^i} = 0,\\
\underset{1}{\Omega}^3 &\equiv \omega^1(x)\frac{\partial\xi^1}{\partial x^3} + \omega^2(x)\frac{\partial\xi^2}{\partial x^3} + \omega^3(x)\frac{\partial\xi^3}{\partial x^3} + \xi^i\frac{\partial\omega^3(x)}{\partial x^i} = 0,\\
\underset{1}{\Omega}^4 &\equiv \omega^4(x)\frac{\partial\xi^1}{\partial x^1} + \omega^5(x)\frac{\partial\xi^2}{\partial x^1} + \omega^6(x)\frac{\partial\xi^3}{\partial x^1} + \xi^i\frac{\partial\omega^4(x)}{\partial x^i} = 0,\\
\underset{1}{\Omega}^5 &\equiv \omega^4(x)\frac{\partial\xi^1}{\partial x^2} + \omega^5(x)\frac{\partial\xi^2}{\partial x^2} + \omega^6(x)\frac{\partial\xi^3}{\partial x^2} + \xi^i\frac{\partial\omega^5(x)}{\partial x^i} = 0,\\
\underset{1}{\Omega}^6 &\equiv \omega^4(x)\frac{\partial\xi^1}{\partial x^3} + \omega^5(x)\frac{\partial\xi^2}{\partial x^3} + \omega^6(x)\frac{\partial\xi^3}{\partial x^3} + \xi^i\frac{\partial\omega^6(x)}{\partial\omega^i} = 0,\\
\underset{1}{\Omega}^7 &\equiv \omega^7(x)\left(\frac{\partial\xi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\xi^3}{\partial x^3}\right) - \omega^8(x)\frac{\partial\xi^1}{\partial x^2}\\
&\qquad - \omega^9(x)\frac{\partial\xi^1}{\partial x^3} + \xi^i\frac{\partial\omega^7(x)}{\partial x^i} = 0,\\
\underset{1}{\Omega}^8 &\equiv -\omega^7(x)\frac{\partial\xi^2}{\partial x^1} + \omega^8(x)\left(\frac{\partial\xi^3}{\partial x^3} + \frac{\partial\xi^1}{\partial x^1}\right)\\
&\qquad - \omega^9(x)\frac{\partial\xi^2}{\partial x^3} + \xi^i\frac{\partial\omega^8(x)}{\partial x^i} = 0,\\
\underset{1}{\Omega}^9 &\equiv -\omega^7(x)\frac{\partial\xi^3}{\partial x^1} - \omega^8(x)\frac{\partial\xi^3}{\partial x^2}\\
&\qquad + \omega^9(x)\left(\frac{\partial\xi^1}{\partial x^1} + \frac{\partial\xi^2}{\partial x^2}\right) + \xi^i\frac{\partial\omega^9(x)}{\partial x^i} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Remarque. — Ces équations sont liées par une relation linéaire car on suppose toujours :

$$\omega^1(x)\,\omega^7(x) + \omega^2(x)\,\omega^8(x) + \omega^3(x)\,\omega^9(x) \equiv 0.$$

On vérifie :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\underset{1}{\Omega}^1}{\partial x^2} - \frac{\partial\underset{1}{\Omega}^2}{\partial x^1} \equiv \left(\frac{\partial\omega^1}{\partial x^2} - \frac{\partial\omega^2}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial\xi^1}{\partial x^1} + \frac{\partial\xi^2}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial\omega^3}{\partial x^1} - \frac{\partial\omega^1}{\partial x^3}\right)\frac{\partial\xi^3}{\partial x^2}\\
- \left(\frac{\partial\omega^2}{\partial x^3} - \frac{\partial\omega^3}{\partial x^2}\right)\frac{\partial\xi^3}{\partial x^1} + \xi^i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\omega^1}{\partial x^2} - \frac{\partial\omega^2}{\partial x^1}\right) = 0,
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial \underset{1}{\Omega}{}^4}{\partial x^2} - \frac{\partial \underset{1}{\Omega}{}^5}{\partial x^1} \equiv \left(\frac{\partial \omega^4}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega^5}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial \omega^6}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega^4}{\partial x^3}\right)\frac{\partial \xi^3}{\partial x^2}$$

$$- \left(\frac{\partial \omega^5}{\partial x^3} - \frac{\partial \omega^6}{\partial x^2}\right)\frac{\partial \xi^3}{\partial x^1} + \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \omega^4}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega^5}{\partial x^1}\right) = 0,$$

$$\left(\underbrace{\omega^1 \omega^5 - \omega^2 \omega^4}_{1}\right) \equiv \omega^5 \underset{1}{\Omega}{}^1 + \omega^1 \underset{1}{\Omega}{}^5 - \omega^4 \underset{1}{\Omega}{}^2 - \omega^2 \underset{1}{\Omega}{}^4$$

$$\equiv (\omega^1 \omega^5 - \omega^2 \omega^4)\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2}\right) - (\omega^3 \omega^4 - \omega^1 \omega^6)\frac{\partial \xi^3}{\partial x^2}$$

$$- (\omega^2 \omega^6 - \omega^3 \omega^5)\frac{\partial \xi^3}{\partial x^1} + \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}(\omega^1 \omega^5 - \omega^2 \omega^4) = 0,$$

$$\underset{1}{\Omega}{}^9 \equiv \omega^9 \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2}\right) - \omega^8 \frac{\partial \xi^3}{\partial x^2} - \omega^7 \frac{\partial \xi^3}{\partial x^i} + \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\omega^9 = 0.$$

2. Conditions de compatibilité

Nous allons chercher les conditions de compatibilité pour les ω directement sur les $\underset{1}{\Omega} = 0$, sans passer par la forme résolue de ces équations.

Nous obtenons tout d'abord la condition de première espèce :

$$\det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \omega^2}{\partial x^3} - \dfrac{\partial \omega^3}{\partial x^2} & \dfrac{\partial \omega^3}{\partial x^1} - \dfrac{\partial \omega^1}{\partial x^3} & \dfrac{\partial \omega^1}{\partial x^2} - \dfrac{\partial \omega^2}{\partial x^1} \\ \omega^2 \omega^6 - \omega^3 \omega^5 & \omega^3 \omega^4 - \omega^1 \omega^6 & \omega^1 \omega^5 - \omega^2 \omega^4 \\ \omega^7 & \omega^8 & \omega^9 \end{bmatrix} = 0,$$

à laquelle on ajoutera :

$$\det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \omega^5}{\partial x^3} - \dfrac{\partial \omega^6}{\partial x^2} & \dfrac{\partial \omega^6}{\partial x^1} - \dfrac{\partial \omega^4}{\partial x^3} & \dfrac{\partial \omega^4}{\partial x^2} - \dfrac{\partial \omega^5}{\partial x^1} \\ \omega^2 \omega^6 - \omega^3 \omega^5 & \omega^3 \omega^4 - \omega^1 \omega^6 & \omega^1 \omega^5 - \omega^2 \omega^4 \\ \omega^7 & \omega^8 & \omega^9 \end{bmatrix} = 0.$$

Nous simplifierons ces relations en remarquant :

$$\det \begin{bmatrix} \omega^2 \omega^6 - \omega^3 \omega^5 & \omega^3 \omega^4 - \omega^1 \omega^6 \\ \omega^7 & \omega^8 \end{bmatrix} = - \omega^3 (\omega^4 \omega^7 + \omega^5 \omega^8 + \omega^6 \omega^9).$$

On étudiera plus loin le cas :

$$\omega^4 \omega^7 + \omega^5 \omega^8 + \omega^6 \omega^9 = 0.$$

(1) On suppose désormais :

$$\omega^4 \omega^7 + \omega^5 \omega^8 + \omega^6 \omega^9 \neq 0.$$

Les conditions précédentes se transforment donc en

$$\omega^1\left(\frac{\partial\omega^2}{\partial x^3}-\frac{\partial\omega^3}{\partial x^2}\right)+\omega^2\left(\frac{\partial\omega^3}{\partial x^1}-\frac{\partial\omega^1}{\partial x^3}\right)+\omega^3\left(\frac{\partial\omega^1}{\partial x^2}-\frac{\partial\omega^2}{\partial x^1}\right)=0,$$

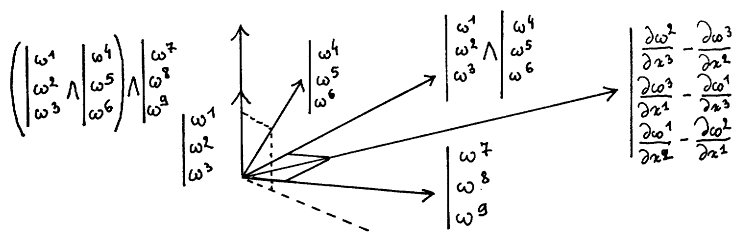
$$\omega^1\left(\frac{\partial\omega^5}{\partial x^3}-\frac{\partial\omega^6}{\partial x^2}\right)+\omega^2\left(\frac{\partial\omega^6}{\partial x^1}-\frac{\partial\omega^4}{\partial x^3}\right)+\omega^3\left(\frac{\partial\omega^4}{\partial x^2}-\frac{\partial\omega^5}{\partial x^1}\right)=0.$$

Il faut maintenant éliminer les termes en ξ^i. On doit donc annuler les déterminants obtenus à partir des précédents en dérivant seulement une colonne. Dérivant les déterminants précédents suivant une règle connue, nous allons montrer que les (2 fois 2) = 4 conditions nouvelles sont en fait des conditions de compatibilité de seconde espèce.

Soit tout d'abord :

$$\det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x^i}\left(\dfrac{\partial\omega^2}{\partial x^3}-\dfrac{\partial\omega^3}{\partial x^2}\right) & \dfrac{\partial\omega^3}{\partial x^1}-\dfrac{\partial\omega^1}{\partial x^3} & \dfrac{\partial\omega^1}{\partial x^2}-\dfrac{\partial\omega^2}{\partial x^1}\\ \dfrac{\partial}{\partial x^i}(\omega^2\,\omega^6-\omega^3\,\omega^5) & \omega^3\,\omega^4-\omega^1\,\omega^6 & \omega^1\,\omega^5-\omega^2\,\omega^4\\ \dfrac{\partial}{\partial x^i}\,\omega^7 & \omega^8 & \omega^9\end{bmatrix}=0.$$

Mais, d'après la figure :



On a

$$\left|\begin{matrix}\dfrac{\partial\omega^2}{\partial x^3}-\dfrac{\partial\omega^3}{\partial x^2}\\[2mm] \dfrac{\partial\omega^3}{\partial x^1}-\dfrac{\partial\omega^1}{\partial x^3}\\[2mm] \dfrac{\partial\omega^1}{\partial x^2}-\dfrac{\partial\omega^2}{\partial x^1}\end{matrix}\right. = c^1(x)\left|\begin{matrix}\omega^2\,\omega^6-\omega^2\,\omega^5\\[2mm] \omega^3\,\omega^4-\omega^1\,\omega^6\\[2mm] \omega^1\,\omega^5-\omega^2\,\omega^4\end{matrix}\right. + c^2(x)\left|\begin{matrix}\omega^7\\[2mm] \omega^8\\[2mm] \omega^9\end{matrix}\right.$$

Et donc :

$$(\omega^2\,\omega^6-\omega^3\,\omega^5)\frac{\partial c^1}{\partial x^i}+\omega^7\frac{\partial c^2}{\partial x^i}=0,$$

$$(\omega^3\,\omega^4-\omega^1\,\omega^6)\frac{\partial c^1}{\partial x^i}+\omega^8\frac{\partial c^2}{\partial x^i}=0,$$

$$(\omega^1\,\omega^5-\omega^2\,\omega^4)\frac{\partial c^1}{\partial x^i}+\omega^9\frac{\partial c^2}{\partial x^i}=0.$$

On vérifie que deux seulement de ces relations sont libres. On en déduit :

$$c^1(x) = c^1 = \text{Cte} \qquad \text{et} \qquad c^2(x) = c^2 = \text{Cte}$$

et les deux fois :

1 condition de première espèce + 2 conditions de seconde espèce,

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\omega^2}{\partial x^3} - \frac{\partial\omega^3}{\partial x^2} &= c^1\,(\omega^2\,\omega^6 - \omega^3\,\omega^5) + c^2\,\omega^7,\\
\frac{\partial\omega^3}{\partial x^1} - \frac{\partial\omega^1}{\partial x^3} &= c^1\,(\omega^3\,\omega^4 - \omega^1\,\omega^6) + c^2\,\omega^8,\\
\frac{\partial\omega^1}{\partial x^2} - \frac{\partial\omega^2}{\partial x^1} &= c^1\,(\omega^1\,\omega^5 - \omega^2\,\omega^4) + c^2\,\omega^9,\\
\frac{\partial\omega^5}{\partial x^3} - \frac{\partial\omega^6}{\partial x^2} &= c'^1\,(\omega^2\,\omega^6 - \omega^3\,\omega^5) + c'^2\,\omega^7,\\
\frac{\partial\omega^6}{\partial x^1} - \frac{\partial\omega^4}{\partial x^3} &= c'^1\,(\omega^3\,\omega^4 - \omega^1\,\omega^6) + c'^2\,\omega^8,\\
\frac{\partial\omega^4}{\partial x^2} - \frac{\partial\omega^5}{\partial x^1} &= c'^1\,(\omega^1\,\omega^5 - \omega^2\,\omega^4) + c'^2\,\omega^9.
\end{aligned}\right.$$

En tenant compte de

$$\omega^1\,\omega^7 + \omega^2\,\omega^8 + \omega^3\,\omega^9 = 0.$$

Il ne reste plus à déterminer que $7 - 6 = 1$ condition. Formons pour cela :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\underset{1}{\Omega^7}}{\partial x^1} + \frac{\partial\underset{1}{\Omega^8}}{\partial x^2} - \frac{\partial\underset{1}{\Omega^9}}{\partial x^3}\\
&\quad\equiv \left(\frac{\partial\omega^7}{\partial x^1} + \frac{\partial\omega^8}{\partial x^2} + \frac{\partial\omega^9}{\partial x^3}\right)\left(\frac{\partial\xi^1}{\partial x^1} + \frac{\partial\xi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\xi^3}{\partial x^3}\right)\\
&\qquad\qquad + \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial\omega^7}{\partial x^i} + \frac{\partial\omega^8}{\partial x^2} + \frac{\partial\omega^9}{\partial x^3}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Mais on sait que

$$\begin{aligned}
&\left(\underbrace{\omega^4\,\omega^7 + \omega^5\,\omega^8 + \omega^6\,\omega^9}_{1}\right)\\
&\quad\equiv (\omega^4\,\omega^7 + \omega^5\,\omega^8 + \omega^6\,\omega^9)\left(\frac{\partial\xi^1}{\partial x^2} + \frac{\partial\xi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\xi^3}{\partial x^3}\right)\\
&\qquad\qquad + \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}(\omega^4\,\omega^7 + \omega^5\,\omega^8 + \omega^6\,\omega^9) = 0.
\end{aligned}$$

On trouve donc la condition de seconde espèce :

$$\frac{\dfrac{\partial\omega^7}{\partial x^1} + \dfrac{\partial\omega^8}{\partial x^2} + \dfrac{\partial\omega^9}{\partial x^3}}{\omega^4\,\omega^7 + \omega^5\,\omega^8 + \omega^6\,\omega^9} = c^3.$$

Soit, au total :

$$7 \text{ conditions (I)} \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ conditions de première espèce,} \\ 5 \text{ conditions de seconde espèce.} \end{array} \right.$$

Nous allons maintenant montrer que les constantes ne sont pas quelconques mais qu'il existe entre elles deux relations ($\mathcal{J}$) bilinéaires. (On rappelle $\dim F_1 = 7$, $\dim F_2 = 2$.)

Il suffit pour cela, conformément à la théorie générale, d'exprimer que les systèmes e. d. p. précédents, involutifs puisque ($\mathcal{E}$) et (Σ) le sont, sont aussi formellement intégrables.

Exemple :

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\partial \omega^2}{\partial x^3} - \frac{\partial \omega^3}{\partial x^2}\right) + \ldots \equiv 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(\omega^2\,\omega^6 - \omega^3\,\omega^5) + \ldots \equiv \frac{\partial \omega^2}{\partial x^1}\omega^6 + \omega^2\frac{\partial \omega^6}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega^3}{\partial x^1}\omega^5 - \omega^3\frac{\partial \omega^5}{\partial x^1} + \ldots$$

$$\equiv -\,\omega^6\left(\frac{\partial \omega^1}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega^2}{\partial x^1}\right) + \ldots$$

$$+\,\omega^2\left(\frac{\partial \omega^6}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega^1}{\partial x^3}\right) + \ldots;$$

$$0 \equiv (\omega^4\,\omega^7 + \omega^5\,\omega^8 + \omega^6\,\omega^9)\,(-\,c^1\,c^2 + c^2\,c^3),$$

d'où

$$(\mathrm{J}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} c^2\,(-\,c^1 + c^3) = 0, \\ -\,c'^1\,c^2 + c'^2\,c^3 = 0. \end{array} \right.$$

Application : Pseudogroupe Γ spécial :

$$\begin{array}{lll} 0 = c^1.0 & + c^2.0, & \\ 0 = c^1.0 & + c^2 - \dfrac{1}{x^2}, & \\ -\dfrac{1}{(x^2)^2} = c^1\left(\dfrac{1}{(x^2)^2} - 0\right) & + c^2 - \dfrac{x^3}{(x^2)^2}, & \\ 0 = c'^1.0 & + c'^2.0, & \\ \dfrac{1}{x^2} = c'^1.0 & + c'^2 - \dfrac{1}{x^2} & \dfrac{0 + \dfrac{1}{(x^2)^2} - \dfrac{1}{(x^2)^2}}{-\dfrac{1}{(x^2)_2}} = c^3; \\ \dfrac{x^3}{(x^2)^2} = c'^1\dfrac{1}{(x^2)^2} & + c^2 - \dfrac{x^3}{(x^2)^2}, & \end{array}$$

$$c^1 = -\,1, \qquad c^2 = 0, \qquad c'^1 = 0, \qquad c'^2 = -\,1, \qquad c^3 = 0;$$

on vérifie

$$0\,(+\,1 \quad +\,0) = 0 \qquad \text{et} \qquad 0.0 + (-\,1).0 = 0.$$

(2) Considérons maintenant le cas

$$\omega^4\,\omega^7 + \omega^5\,\omega^8 + \omega^6\,\omega^9 = 0.$$

Nous avons donc :

$$\begin{vmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \omega^4 \\ \omega^5 \\ \omega^6 \end{vmatrix} = \omega^0 (x) \begin{vmatrix} \omega^7 \\ \omega^8 \\ \omega^9 \end{vmatrix}$$

et en particulier l'équation

$$\underset{1}{\Omega^0} \equiv \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \omega^0 (x) = 0.$$

Le pseudogroupe ainsi obtenu est intransitif.

Les conditions de compatiblité s'obtiennent alors en exprimant que les termes en ξ^i obtenus par élimination des dérivées d'ordre $\geqq 1$ peuvent disparaître en tenant compte des équations d'ordre 0.

Les conditions de compatibilité sont donc :

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\omega^2}{\partial x^3} - \frac{\partial\omega^3}{\partial x^2} = c^1 \ (\omega^0 (x))\, \omega^7, \\
&\frac{\partial\omega^3}{\partial x^1} - \frac{\partial\omega^1}{\partial x^3} = c^1 \ (\omega^0 (x))\, \omega^8, \\
&\frac{\partial\omega^1}{\partial x^2} - \frac{\partial\omega^2}{\partial x^1} = c^1 \ (\omega^0 (x))\, \omega^9, \\
&\frac{\partial\omega^5}{\partial x^3} - \frac{\partial\omega^6}{\partial x^2} = c'^1 (\omega^0 (x))\, \omega^7, \\
&\frac{\partial\omega^6}{\partial x^1} - \frac{\partial\omega^4}{\partial x_3} = c'^1 (\omega^0 (x))\, \omega^8, \\
&\frac{\partial\omega^4}{\partial x^2} - \frac{\partial\omega^5}{\partial x^1} = c'^1 (\omega^0 (x))\, \omega^9, \\
&\frac{\partial\omega^7}{\partial x^1} + \frac{\partial\omega^8}{\partial x^2} + \frac{\partial\omega^9}{\partial x^3} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Mais il ne faut pas oublier les conditions de compatibilité qui permettent de joindre les équations :

$$\frac{\partial \underset{1}{\Omega^0}}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial\xi^i}{\partial x_j} \frac{\partial\omega^0}{\partial x^i} + \xi^i \frac{\partial \dfrac{\partial\omega^0}{\partial x_j}}{\partial x^i} = 0$$

aux autres équations du système généralisé (Σ) :

$$\left.\begin{aligned}
\underset{1}{\Omega^j} &\equiv \omega^1 \frac{\partial\xi^1}{\partial x^j} + \omega^2 \frac{\partial\xi^2}{\partial x^j} + \omega^3 \frac{\partial\xi^3}{\partial x^j} + \xi^i \frac{\partial\omega^j}{\partial x^i} \\
\underset{1}{\Omega^{3+j}} &\equiv \omega^4 \frac{\partial\xi^1}{\partial x^j} + \omega^5 \frac{\partial\xi^2}{\partial x^j} + \omega^6 \frac{\partial\xi^3}{\partial x^j} + \xi^i \frac{\partial\omega^{3+j}}{\partial x^i}
\end{aligned}\right\} \quad (j = 1, 2, 3,).$$

On forme

$$\det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \omega^0}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \omega^0}{\partial x^2} & \dfrac{\partial \omega^3}{\partial x^3} \\ \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega^4 & \omega^5 & \omega^6 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \omega^0}{\partial x^1} \\ \dfrac{\partial \omega^0}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial \omega^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} = c^2(x) \begin{vmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{vmatrix} + c'^2(x) \begin{vmatrix} \omega^4 \\ \omega^5 \\ \omega^6 \end{vmatrix}$$

et les équations telles que

$$\det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \omega^0}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \omega^0}{\partial x^2} & \xi^i \dfrac{\partial \dfrac{\partial \omega^0}{\partial x^j}}{\partial x^i} \\ \omega^1 & \omega^2 & \xi^i \dfrac{\partial \omega^j}{\partial x^i} \\ \omega^4 & \omega^5 & \xi^i \dfrac{\partial \omega^{3+j}}{\partial x^i} \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{lorsque} \quad \xi^i \frac{\partial \omega^0}{\partial x^i} = 0.$$

Par suite :

$$\xi^i \frac{\partial c^2(x)}{\partial x^i} = 0, \qquad \xi^i \frac{\partial c'^2(x)}{\partial x^i} = 0 \qquad \text{lorsque} \quad \xi^i \frac{\partial \omega^0}{\partial x^i} = 0$$

et donc :

$$c^2(x) \equiv c^2(\omega^0(x), \qquad c'^2(x) \equiv c'^2(\omega^0(x)).$$

Ainsi trois conditions

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \omega^0}{\partial x^1} &= c^2(\omega^0(x))\, \omega^1 + c'^2(\omega^3(x))\, \omega^4, \\ \frac{\partial \omega^0}{\partial x^2} &= c^2(\omega^0(x))\, \omega^2 + c'^2(\omega^0(x))\, \omega^5, \\ \frac{\partial \omega^0}{\partial x^3} &= c^2(\omega^0(x))\, \omega^3 + c'^2(\omega^0(x))\, \omega^5. \end{aligned} \right.$$

Nous obtiendrons une condition sur les $c(\omega^0(x))$ en exprimant que le système (I) des conditions de compatibilité est formellement intégrable et involutif :

$$0 = c^1 c^2 + c'^1 c'^2 + \left(\frac{\partial c^2}{\partial \omega^0} c'^2 - \frac{\partial c'^2}{\partial \omega^0} c^2 \right) \omega^0.$$

3. **Normalisateur**

Nous allons déterminer le groupe de Lie $\mathfrak{g}$ dont les transformations finies $u \to \bar{u}$ laisseront inchangé (Σ). On commence pour cela par mettre (Σ) sous forme résolue, en prenant ξ^i et $\dfrac{\partial \xi^3}{\partial x^1}$ comme dérivées paramétriques.

Tout d'abord :

$$\frac{\partial\xi^1}{\partial x^1} - \frac{\omega^2\,\omega^6 - \omega^3\,\omega^5}{\omega^1\,\omega^5 - \omega^2\,\omega^4}\,\frac{\partial\xi^3}{\partial x^1} + \ldots = 0,$$

$$\frac{\partial\xi^2}{\partial x^1} - \frac{\omega^1\,\omega^6 - \omega^3\,\omega^4}{\omega^1\,\omega^5 - \omega^2\,\omega^4}\,\frac{\partial\xi^3}{\partial x^1} + \ldots = 0.$$

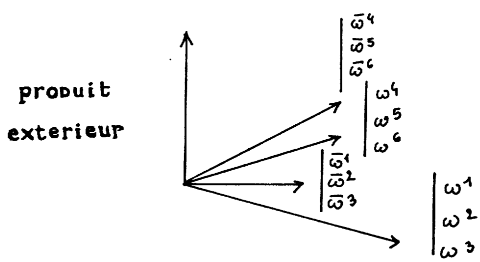
On devra donc avoir :

$$\frac{\overline{\omega}^2\,\overline{\omega}^6 - \overline{\omega}^3\,\overline{\omega}^5}{\overline{\omega}^1\,\overline{\omega}^5 - \overline{\omega}^2\,\overline{\omega}^4} = \frac{\omega^2\,\omega^6 - \omega^3\,\omega^5}{\omega^1\,\omega^5 - \omega^2\,\omega^4}$$

et donc

$$\frac{\overline{\omega}^2\,\overline{\omega}^6 - \overline{\omega}^3\,\overline{\omega}^5}{\omega^2\,\omega^6 - \omega^3\,\omega^5} = \frac{\overline{\omega}^1\,\overline{\omega}^6 - \overline{\omega}^3\,\overline{\omega}^4}{\omega^1\,\omega^6 - \omega^3\,\omega^4} = \frac{\overline{\omega}^1\,\overline{\omega}^5 - \overline{\omega}^2\,\overline{\omega}^4}{\omega^1\,\omega^5 - \omega^2\,\omega^4}$$

par suite le cas de figure :



et ainsi :

$$\left|\begin{matrix}\overline{\omega}^1\\ \overline{\omega}^2\\ \overline{\omega}^3\end{matrix}\right. = a^1(x)\left|\begin{matrix}\omega^1\\ \omega^2\\ \omega^3\end{matrix}\right. + a'^1(x)\left|\begin{matrix}\omega^4\\ \omega^5\\ \omega^6\end{matrix}\right.$$

$$\left|\begin{matrix}\overline{\omega}^4\\ \overline{\omega}^5\\ \overline{\omega}^6\end{matrix}\right. = a^2(x)\left|\begin{matrix}\omega^1\\ \omega^2\\ \omega^3\end{matrix}\right. + a'^2\left|\begin{matrix}\omega^4\\ \omega^5\\ \omega^6\end{matrix}\right.$$

Maintenant :

$$\left[-\,\omega^9\,(\omega^3\,\omega^4 - \omega^1\,\omega^6) + \omega^8\,(\omega^1\,\omega^5 - \omega^2\,\omega^4)\right]\frac{\partial\xi^3}{\partial x^2}$$
$$+\left[-\,\omega^9\,(\omega^2\,\omega^6 - \omega^3\,\omega^5) + \omega^2\,(\omega^1\,\omega^5 - \omega^2\,\omega^4)\right]\frac{\partial\xi^3}{\partial x^1} + \ldots,$$

$$\left[\omega^1\,(\omega^6\,\omega^9 + \omega^5\,\omega^8) - \omega^4\,(\omega^2\,\omega^8 + \omega^3\,\omega^9)\right]\frac{\partial\xi^3}{\partial x^2}$$
$$-\left[\omega^2\,(\omega^6\,\omega^9 + \omega^4\,\omega^7) - \omega^5\,(\omega^1\,\omega^7 + \omega^3\,\omega^9)\right]\frac{\partial\xi^3}{\partial x^1} + \ldots,$$

$$\omega^1\,(\omega^4\,\omega^7 + \omega^5\,\omega^8 + \omega^6\,\omega^9)\,\frac{\partial\xi^3}{\partial x^2} - \omega^2\,(\omega^4\,\omega^7 + \omega^5\,\omega^8 + \omega^6\,\omega^9)x\,\frac{\partial\xi^3}{\partial x^1} + \ldots,$$

$$\omega^4\,\omega^7 + \omega^5\,\omega^8 + \omega^6\,\omega^9 \neq 0 \qquad \text{donc}\quad \frac{\partial\xi^3}{\partial x^2} - \frac{\omega^2}{\omega^1}\,\frac{\partial\xi^1}{\partial x^1} + \ldots = 0,$$

de même :

$$[\omega^9(\omega^3\omega^4-\omega^1\omega^6)-\omega^8(\omega^1\omega^5-\omega^2\omega^4)]\left(\frac{\partial\xi^1}{\partial x^1}+\frac{\partial\xi^2}{\partial x^2}\right)$$
$$+[-\omega^7(\omega^3\omega^4-\omega^1\omega^6)+\omega^8(\omega^2\omega^6-\omega^3\omega^5)]\frac{\partial\xi^3}{\partial x^1}$$
$$-\omega^1(\omega^4\omega^7+\omega^5\omega^8+\omega^6\omega^9)\left(\frac{\partial\xi^1}{\partial x^1}+\frac{\partial\xi^2}{\partial x^2}\right)$$
$$-\omega^3(\omega^4\omega^7+\omega^5\omega^8+\omega^6\omega^9)\frac{\partial\xi^3}{\partial x^1}+\ldots,$$
$$\frac{\partial\xi^1}{\partial x^1}+\frac{\partial\xi^2}{\partial x^2}+\frac{\omega^3}{\omega^1}\frac{\partial\xi^3}{\partial x^1}+\ldots=0.$$

Calculant le coefficient de ξ^i on doit considérer :

$$\frac{\xi^i\left[(\omega^1\omega^5-\omega^2\omega^4)\dfrac{\partial}{\partial x^i}\omega^9-\omega^9\dfrac{\partial}{\partial x^i}(\omega^1\omega^5-\omega^2\omega^4)\right]}{\omega^1(\omega^4\omega^7+\omega^5\omega^8+\omega^6\omega^9)},$$
$$\frac{\xi^i\left[[(\omega^3\omega^4-\omega^1\omega^6)\dfrac{\partial}{\partial x^i}\omega^9-\omega^8\dfrac{\partial}{\partial x^i}(\omega^1\omega^5-\omega^2\omega^5)\right]}{\omega^1(\omega^4\omega^7+\omega^5\omega^8+\omega^6\omega^9)},$$

mais on sait que

$$\frac{\partial\xi^1}{\partial x^1}+\frac{\partial\xi^2}{\partial x^2}+\frac{\partial\xi^3}{\partial x^3}+\xi^i\frac{\dfrac{\partial}{\partial x^i}(\omega^4\omega^7+\omega^5\omega^8+\omega^6\omega^9)}{\omega^4\omega^7+\omega^5\omega^8+\omega^6\omega^9}=0,$$

donc :

$$\bar\omega^4\bar\omega^7+\bar\omega^5\bar\omega^8+\bar\omega^6\bar\omega^9=a^3(\omega^4\omega^7+\omega^5\omega^8+\omega^6\omega^9).$$

On montre ensuite en considérant les coefficients des ξ^i dans les expressions de $\dfrac{\partial\xi^1}{\partial x^1}$ et $\dfrac{\partial\xi^2}{\partial x^1}$ que

$$a'^1=0,\qquad a^2=\text{Cte},\qquad a'^2=\text{Cte}.$$

Par suite :

$$\frac{(\bar\omega^1\bar\omega^5-\bar\omega^2\bar\omega^4)\dfrac{\partial}{\partial x^i}\bar\omega^9-\bar\omega^9\dfrac{\partial}{\partial x^i}(\bar\omega^1\bar\omega^5-\bar\omega^9\bar\omega^4)}{\bar\omega^1(\bar\omega^4\bar\omega^7+\bar\omega^5\bar\omega^8+\bar\omega^6\bar\omega^9)}$$
$$=\frac{(\omega^1\omega^5-\omega^2\omega^4)\dfrac{\partial}{\partial x^i}\omega^9-\omega^9\dfrac{\partial}{\partial x^i}(\omega^1\omega^5-\omega^2\omega^4)}{\omega^1(\omega^4\omega^7+\omega^5\omega^8\omega^6+\omega^9)}$$

devient, en remarquant :

$$\begin{aligned}\bar\omega^1\bar\omega^5-\bar\omega^2\bar\omega^4&=a^1\omega^1(a^1\omega^2+a'^2\omega^5)-a^1\omega^2(a^2\omega^1+a'^2\omega^2)\\&=a^1a'^2(\omega^1\omega^5-\omega^2\omega^4)\end{aligned}$$

soit

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\overline{\omega}^9 - \dfrac{a^3}{a'^2}\,\omega^9}{(\omega^1\,\omega^5 - \omega^2\,\omega^4)}\right) \simeq 0,$$

$$\overline{\omega}^9 = \frac{a^3}{a'^2}\,\omega^9 + a'^3\,(\omega^1\,\omega^5 - \omega^2\,\omega^4).$$

On aura finalement les transformations finies de $\mathfrak{g}$:

$$\left|\begin{matrix}\overline{u}^1\\ \overline{u}^2\\ \overline{u}^3\end{matrix}\right. = a^1 \left|\begin{matrix}u^1\\ u^2\\ u^3\end{matrix}\right. \left|\begin{matrix}\overline{u}^4\\ \overline{u}^5\\ \overline{u}^6\end{matrix}\right. = a^2 \left|\begin{matrix}u^1\\ u^2\\ u^3\end{matrix}\right. + a'^2 \left|\begin{matrix}u^4\\ u^5\\ u^6\end{matrix}\right.$$

$$\left|\begin{matrix}\overline{u}^7\\ \overline{u}^8\\ \overline{u}^9\end{matrix}\right. = a^3 \left|\begin{matrix}u^7\\ u^8\\ u^9\end{matrix}\right. + a'^3 \left|\begin{matrix}u^2\,u^6 - u^3\,u^5\\ u^3\,u^4 - u^1\,u^6\\ u^1\,u^5 - u^2\,u^4\end{matrix}\right.$$

Les générateurs des transformations infinitésimales de $\mathfrak{g}$ sont :

$$\left\{\begin{array}{c}
u^1\dfrac{\partial}{\partial u^1} + u^2\dfrac{\partial}{\partial u^2} + u^3\dfrac{\partial}{\partial u^3},\\
u^1\dfrac{\partial}{\partial u^4} + u^2\dfrac{\partial}{\partial u^5} + u^3\dfrac{\partial}{\partial u^6},\\
u^7\dfrac{\partial}{\partial u^7} + u^8\dfrac{\partial}{\partial u^8} + u^9\dfrac{\partial}{\partial u^9},\\
u^4\dfrac{\partial}{\partial u^4} + u^5\dfrac{\partial}{\partial u^5} + u^6\dfrac{\partial}{\partial u^6},\\
(u^2\,u^6 - u^3\,u^5)\dfrac{\partial}{\partial u^7} + (u^3\,u^4 - u^1\,u^6)\dfrac{\partial}{\partial u^8} + (u^1\,u^5 - u^2\,u^4)\dfrac{\partial}{\partial u^9}.
\end{array}\right.$$

5. Théorie des déformations

A. Généralités

Il nous faut maintenant étudier l'effet d'un *changement de marque* sur les constantes de structure.

On aura par exemple :

$$\begin{aligned}
&a^1\,[(c^1\,(\omega^2\,\omega^6 - \omega^3\,\omega^5) + c^2\,\omega^7]\\
&\quad = \overline{c}^1\,[(a^1\,\omega^2\,(a^2\,\omega^3 + a'^2\,\omega^6) - a^1\,\omega^3\,(a^2\,\omega^2 + a'^2\,\omega^5)]\\
&\qquad + \overline{c}^2\,[a^3\,\omega^7 + a'^3\,(\omega^2\,\omega^6 - \omega^3\,\omega^5)]\\
&a^1\,c^1\,(\omega^2\,\omega^6 - \omega^3\,\omega^5) + a^1\,c^2\,\omega^7\\
&\qquad = \overline{c}^1\,(a^1\,a'^2 + \overline{c}^2\,a'^3)\,(\omega^2\,\omega^6 - \omega^3\,\omega^5) + \overline{c}^2\,a^3\,\omega^7;
\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\bar{c}^1 = \dfrac{c^1}{a'^2} - \dfrac{a'^3}{a^3\, a'^2}\, c^2, \\
\bar{c}^2 = \dfrac{a^1}{a^3}\, c^2, \\
\bar{c}'^1 = \dfrac{a^2}{a^1\, a'^2}\, c^1 + \dfrac{1}{a^1}\, c'^1 - \dfrac{a^2\, a'^3}{a^1\, a^3\, a'^2}\, c^2 - \dfrac{a'^3}{a^1\, a^3}\, c'^2, \\
\bar{c}'^2 = \dfrac{a^2}{a^3}\, c^2 + \dfrac{a'^2}{a^3}\, c'^2, \\
\bar{c}^3 = \dfrac{1}{a'^2}\, c^3 - \dfrac{a'^3}{a^3\, a'^2}\, c^2.
\end{array}\right.$$

B. CONDITION DE RIGIDITÉ

Nous allons maintenant étudier $B^1(\Upsilon)$, $Z^1(\Upsilon)$ et $H^1(\Upsilon)$. Pour cela nous allons linéariser au voisinage de la transformation identique de

$$\mathfrak{g}\,(a^1 = 1 + t\,\lambda^1\, t \ldots,\ a^2 = t\,\lambda^2 + \ldots,\ a'^2 = 1 + t\,\lambda'^2 + \ldots,$$
$$a^3 = 1 + t\,\lambda^3 + \ldots,\ a'^3 = t\,\lambda'^3 + \ldots) :$$

$$B_1(\Upsilon)\left\{\begin{array}{l}
\underset{1}{C^1} = -\lambda'^2\, c^1 - \lambda'^3\, c^2, \\
\underset{1}{C^2} = (\lambda^1 - \lambda^3)\, c^2, \\
\underset{1}{C'^1} = \lambda^2\, c^1 - \lambda^1\, c'^1 - \lambda'^3\, c'^2, \\
\underset{1}{C'^2} = \lambda^2\, c^2 + (\lambda'^2 - \lambda^3)\, c'^2, \\
\underset{1}{C^3} = -\lambda'^2\, c^3 - \lambda'^3\, c^2.
\end{array}\right.$$

Utilisant les identités de Jacobi généralisées :

$$Z_1(\Upsilon)\left\{\begin{array}{l}
(-c^1 + c^3)\,\underset{1}{C^2} + c^2\left(-\underset{1}{C^1} + \underset{1}{C^3}\right) = 0, \\
-c^2\,\underset{1}{C'^1} - c'^1\,\underset{1}{C^2} + c^3\,\underset{1}{C'^2} + c'^2\,\underset{1}{C^3} = 0.
\end{array}\right.$$

Vérifions l'inclusion

$$B_1(\Upsilon) \subseteq Z_1(\Upsilon).$$

Du point de vue fini :

$$\left\{\begin{array}{l}
\bar{c}^2\,(-\bar{c}^1 + \bar{c}^3) = \dfrac{a^1}{a^3\, a'^2}\,[c^2\,(-c^1 + c^3)], \\
[-\bar{c}'^1\,\bar{c}^2 + \bar{c}'^2\,\bar{c}^3] = \dfrac{a^2}{a'^2\, a^3}\,[c^2\,(-c^1 + c^3)] + \dfrac{1}{a^3}\,(-c'^1\, c^2 + c'^2\, c^3).
\end{array}\right.$$

Du point du vue infinitésimal :

$$c^2(-c^1+c^3)(\lambda^1-\lambda^3)+c^2(\lambda'^2 c^1+\lambda'^3 c^2-\lambda'^2 c^2-\lambda'^3 c^2)$$
$$=[c^2(-c^1+c^3)](\lambda^1-\lambda^3-\lambda'^2)=0,$$
$$-\lambda^2 c^1 c^2+\lambda^1 c'^1 c^2+\lambda'^3 c^2 c^{2\prime}-(\lambda^1-\lambda^3)c'^1 c^2$$
$$+\lambda^2 c^2 c^3+(\lambda'^2-\lambda^3)c'^2 c^3-\lambda'^2 c'^2 c^3-\lambda'^3 c^2 c'^2$$
$$=\lambda^2[c^2(-c^1+c^3)]-\lambda^3(-c'^1 c^2+c'^2 c^3)=0.$$

C. Q. F. D.

APPLICATION. — Détermination de $B_1(\Upsilon)$ et $Z_1(\Upsilon)$ dans le cas particulier du pseudogroupe Γ spécial :

$$c^1=-1,\qquad c^2=0,\qquad c'^1=0,\qquad c'^2=-1,\qquad c^3=0;$$

$$B(\Upsilon)\left\{\begin{aligned} &\underset{1}{C^1}=\lambda'^2,\\ &\underset{1}{C^2}=0,\\ &\underset{1}{C'^1}=-\lambda^2+\lambda'^3\\ &\underset{1}{C'^2}=-\lambda'^2+\lambda^3,\\ &\underset{1}{C^3}=0;\end{aligned}\right.\qquad \dim B_1(\Upsilon)=3;$$

$$Z_1(\Upsilon)\left\{\begin{aligned} &\underset{1}{C^2}=0,\\ -&\underset{1}{C^3}=0,\end{aligned}\right.\qquad \dim Z_1(\Upsilon)=3\qquad\text{et}\qquad \dim H_1(\Upsilon)=0.$$

Cette structure particulière est donc rigide.

Détermination de Υ :

$$\lambda'^2=0,\qquad \lambda^2=\lambda'^3,\qquad \lambda'^2=\lambda^3;$$

$$3\text{ générateurs}\left\{\begin{aligned} &u^1\frac{\partial}{\partial u^1}+u^2\frac{\partial}{\partial u^2}+u^3\frac{\partial}{\partial u^3},\\ &u^1\frac{\partial}{\partial u^4}+u^2\frac{\partial}{\partial u^5}+u^3\frac{\partial}{\partial u^6}\\ &\qquad+(u^2u^6-u^3u^5)\frac{\partial}{\partial u^7}+\ldots+(u^1u^5-u^2u^4)\frac{\partial}{\partial u^9},\\ &u^4\frac{\partial}{\partial u^4}+u^5\frac{\partial}{\partial u^5}+u^6\frac{\partial}{\partial u^6}+u^7\frac{\partial}{\partial u^7}+u^8\frac{\partial}{\partial u^8}+u^9\frac{\partial}{\partial u^9}.\end{aligned}\right.$$

C. OBSTRUCTION A LA DÉFORMATION

Puisque $\dim F_2=2$, $\dim F_3=0$, le calcul de $\dim H_2(\Upsilon)$ est équivalent à celui du rang de la matrice définissant $Z^1(\Upsilon)$, soit :

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} -c^2 & 0 & -c^1+c^3 & 0 & c^2\\ 0 & -c^2 & -c'^1 & c^3 & c'^2\end{array}\right]$$

(1) $\qquad c^2\neq 0:\quad \dim H_2(\Upsilon)=0;$

(2) $\qquad c^2=0:\quad c'^2c^3=0.$

Nous allons rechercher une structure qui ne soit pas rigide mais qui ne soit pas (formellement) déformable.

Nous cherchons donc une structure telle que $H^1(\Upsilon) \neq 0$, $H_2(\Upsilon) = 0$. La matrice précédente devient

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -c^1 + c^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c'^1 & c^3 & c'^2 \end{bmatrix}$$

En particulier, si $c^1 = c^3$ (point singulier) :

$$B_1(\Upsilon) \begin{cases} \underset{1}{C}^1 = -\lambda'^2 c^1, \\ \underset{1}{C}'^1 = \lambda^2 c^1 - \lambda^1 c'^1 - \lambda'^3 c'^2, \\ \underset{1}{C}^2 = 0, \\ \underset{1}{C}'^2 = (\lambda'^2 - \lambda^3) c'^2, \\ \underset{1}{C}^3 = -\lambda'^2 c^3, \end{cases} \qquad \dim B_1(\Upsilon) \leqq 3;$$

$$Z_1(\Upsilon) \left\{ -c'^1 \underset{1}{C}^2 + c^3 \underset{1}{C}'^2 + c'^2 \underset{1}{C}^3 = 0, \right. \qquad \begin{array}{l} \dim Z_1(\Upsilon) \geqq 4, \\ \dim H^1(\Upsilon) \geqq 1. \end{array}$$

On peut imaginer de prendre :

$$\left.\begin{array}{lll} \omega^1 = 1, & \omega^2 = 0, & \omega^3 = ? \\ \omega^4 = x^2, & \omega^5 = 0, & \omega^6 = ? \\ \omega^7 = 0, & \omega^8 = 0, & \omega^9 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \omega^6 \neq 0$$

à condition de satisfaire aux conditions de compatibilité (I) :

$$\begin{aligned} 0 - \frac{\partial \omega^3}{\partial x^2} &= c^1 (0 - 0) + 0.0, \\ \frac{\partial \omega^3}{\partial x^1} - 0 &= c^1 (\omega^3 x^2 - \omega^6) + 0.0, \\ 0 &= c^1 (0 - 0) + 0.1, \\ 0 - \frac{\partial \omega^6}{\partial x^2} &= c'^1 (0 - 0) + c'^2.0, \\ \frac{\partial \omega^6}{\partial x^1} - 0 &= c'^1 (\omega^3 x^2 - \omega^6) + c'^2.0, \\ 1 &= c'^1 (0 - 0) + c'^2.1 \qquad \Rightarrow \quad c'^2 = 1, \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{0}{\omega^6} = c^3 \\ \omega^6 \neq 0 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \quad c^1 = c^3 = 0$$

Puisque l'on doit prendre

$$\omega^3 = 0,$$

il reste à satisfaire

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega^6}{\partial x^2} = 0, \\ \dfrac{\partial \omega^6}{\partial x^1} = - c'^1 \, \omega^6, \end{cases}$$

ce qui conduit, par exemple, à prendre

$$\omega^6 = 1 \quad \Rightarrow \quad c'^1 = 0.$$

Le système (Σ) devient alors (8 équations libres) :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \xi^3}{\partial x^3} &&= 0 \\ &\frac{\partial \xi^2}{\partial x^3} &&= 0 \\ &\frac{\partial \xi^1}{\partial x^3} &&= 0 \\ &\frac{\partial \xi^3}{\partial x^2} &&= 0 \\ &\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} &&= 0 \\ &\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} &&= 0 \\ &\frac{\partial \xi^3}{\partial x^1} + \xi^2 &&= 0 \\ &\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} &&= 0 \end{aligned}\right. \qquad \begin{gathered}\text{ou} \\ \text{par échange} \\ \text{de } x^2 \text{ et } x^3\end{gathered} \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \xi^3}{\partial x^3} &&= 0 \\ &\frac{\partial \xi^2}{\partial x^3} &&= 0 \\ &\frac{\partial \xi^1}{\partial x^3} &&= 0 \\ &\frac{\partial \xi^3}{\partial x^2} &&= 0 \\ &\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} &&= 0 \\ &\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} &&= 0 \\ &\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} + \xi^3 &&= 0 \\ &\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} &&= 0 \end{aligned}\right.$$

Les transformations infinitésimales du pseudogroupe correspondant :

$$b \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi(x^1) \frac{\partial}{\partial x^2} - \xi'(x^1) \frac{\partial}{\partial x^3}.$$

Ses transformations finies sont :

$$y^1 = x^1 + a, \qquad y^2 = x^2 + f(x^1), \qquad y^3 = x^3 - f'(x^1).$$

Les constantes de structure sont alors :

$$c^1 = 0, \qquad c^2 = 0, \qquad c'^1 = 0, \qquad c'^2 = 1, \qquad c^3 = 0.$$

Mais dans ce cas :

$$B_1(\Upsilon) \begin{cases} \underset{1}{C}^1 = 0, \\ \underset{1}{C}^2 = 0, \\ \underset{1}{C}'^1 = - \lambda'^3, \\ \underset{1}{C}'^2 = (\lambda'^2 - \lambda'^3), \\ \underset{1}{C}^3 = 0, \end{cases} \qquad \dim B_1(\Upsilon) = 2;$$

$$Z_1(\Upsilon) \left\{ \underset{1}{C}^3 = 0, \right. \qquad \dim Z_1(\Upsilon) = 4$$

et par suite :

$$\dim H_1(\Upsilon) = 2 \qquad \text{et} \qquad \dim H_2(\Upsilon) = 1.$$

Nous allons vérifier directement l'existence d'obstructions à la déformation en posant :

$$c_t = c + t \underset{1}{C} + t^2 \underset{2}{C} + \ldots,$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left(t \underset{1}{C}^2 + t^2 \underset{2}{C}^2 + \ldots\right)\left(-\left(t \underset{1}{C}^1 + t^2 \underset{2}{C}^1 + \ldots\right) + \left(t \underset{1}{C}^3 + t^2 \underset{2}{C}^3 + \ldots\right)\right) = 0, \\ -\left(t \underset{1}{C}'^1 + t^2 \underset{2}{C}'^1 + \ldots\right)\left(t \underset{1}{C}^2 + t^2 \underset{2}{C}^2 + \ldots\right) \\ \qquad\qquad + \left(1 + t \underset{1}{C}'^2 + t^2 \underset{2}{C}'^2 + \ldots\right)\left(t \underset{1}{C}^3 + t^2 \underset{2}{C}^3 + \ldots\right) = 0; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 0.t + t^2\left(- \underset{1}{C}^2 \underset{1}{C}^1 + \underset{1}{C}^2 \underset{1}{C}^3\right) + \ldots = 0, \\ t\, C^3 + t^2\left(- \underset{1}{C}'^1 \underset{1}{C}^2 + \underset{1}{C}'^2 \underset{1}{C}^3 + \underset{2}{C}^3\right) + \ldots = 0. \end{array}\right.$$

Au premier ordre $\underset{1}{C}^3 = 0$ puis au second ordre :

$$\underset{1}{C}^2 \underset{1}{C}^1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \underset{1}{C}'^1 \underset{1}{C}^2 = \underset{2}{C}^3.$$

Tout cocylce $\in Z_1(\Upsilon)$ n'est pas forcément intégrable.

C. Q. F. D.

Seconde partie

Équations de Γ *relevées* au-dessus de Y :

$$\Sigma(Y)\left\{\begin{array}{l|c|l|ccc|} F_0^8(Y) \equiv & \dfrac{\partial\eta^3}{\partial y^3} & = 0 & y^1 & y^2 & y^3 \\ F_0^7(Y) \equiv & \dfrac{\partial\eta^2}{\partial y^3} & = 0 & y^1 & y^2 & y^3 \\ F_0^6(Y) \equiv & \dfrac{\partial\eta^1}{\partial y^3} & = 0 & y^1 & y^2 & y^3 \\ F_0^5(Y) \equiv & \dfrac{\partial\eta^3}{\partial y^2} & - \dfrac{\eta^3}{y^2} = 0 & y^1 & y^2 & \bullet \\ F_0^4(Y) \equiv & \dfrac{\partial\eta^2}{\partial y^2} & - \dfrac{\eta^2}{y^2} = 0 & y^1 & y^2 & \bullet \\ F_0^3(Y) \equiv & \dfrac{\partial\eta^1}{\partial y^2} & = 0 & y^1 & y^2 & \bullet \\ F_0^2(Y) \equiv & \dfrac{\partial\eta^2}{\partial y^1} & - \eta^3 = 0 & y^1 & \bullet & \bullet \\ F_0^1(Y) \equiv & \dfrac{\partial\eta^1}{\partial y^1} & - \dfrac{\eta^2}{y^2} = 0 & y^1 & \bullet & \bullet \end{array}\right.$$

Premier prolongement de la transformation infinitésimale

$$\eta^1(y)\frac{\partial}{\partial y^1} + \eta^2(y)\frac{\partial}{\partial y^2} + \eta^3(y)\frac{\partial}{\partial y^3} + \left(\frac{\partial\eta^1}{\partial y^1}y_1^1 + \frac{\partial\eta^1}{\partial y^2}y_1^2 + \frac{\partial\eta^1}{\partial y^3}y_1^3\right)\frac{\partial}{\partial y_1^1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\left(\frac{\partial\eta^3}{\partial y^1}y_2^1 + \frac{\partial\eta^3}{\partial y^2}y_2^2 + \frac{\partial\eta^3}{\partial y^3}y_2^3\right)\frac{\partial}{\partial y_2^3}.$$

Cas où elle est une transformation infinitésimale de Γ :

$$\eta^1(y)\frac{\partial}{\partial y^1} + \eta^2\left(\frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{1}{y^2}\left(y_1^1\frac{\partial}{\partial y_1^1} + y_2^1\frac{\partial}{\partial y_2^1} + y_1^2\frac{\partial}{\partial y_1^2} + y_2^2\frac{\partial}{\partial y_2^2}\right)\right)$$
$$\eta^3\left(\frac{\partial}{\partial y^3} + \frac{1}{y^2}\left(y_1^2\frac{\partial}{\partial y_1^3} + y_2^2\frac{\partial}{\partial y_2^3}\right) + y_1^1\frac{\partial}{\partial y_1^2} + y_2^1\frac{\partial}{\partial y_2^2}\right)$$
$$\frac{\partial\eta^3}{\partial y^1}\left(y_1^1\frac{\partial}{\partial y_1^3} + y_2^1\frac{\partial}{\partial y_2^3}\right).$$

Détermination des vecteurs $\overline{\mathcal{B}}$:

$$\overline{\mathcal{B}}_1 \to \frac{\partial}{\partial y^1},$$
$$\overline{\mathcal{B}}_2 \to \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{1}{y^2}\left(y_1^1\frac{\partial}{\partial y_1^1} + y_2^1\frac{\partial}{\partial y_2^1} + y_1^2\frac{\partial}{\partial y_1^2} + y_2^2\frac{\partial}{\partial y_2^2}\right),$$
$$\overline{\mathcal{B}}_3 \to \frac{\partial}{\partial y^3} + \frac{1}{y^2}\left(y_1^2\frac{\partial}{\partial y_1^3} + y_2^2\frac{\partial}{\partial y_2^3}\right) + y_1^1\frac{\partial}{\partial y_1^2} + y_2^1\frac{\partial}{\partial y_2^2},$$
$$\overline{\mathcal{B}}_4 \to y_1^1\frac{\partial}{\partial y_1^3} + y_2^1\frac{\partial}{\partial y_2^3}.$$

On vérifiera qu'ils forment un système complet. On peut donc trouver au maximum $6 + 3 - 4 = 5$ invariants différentiels libres :

$$U^1 = \frac{1}{y^2}y_1^1, \qquad U^2 = \frac{1}{y^2}y_2^1, \qquad U^3 = \frac{1}{y^2}(y_u^2 - y^3 y_1^1),$$
$$U^4 = \frac{1}{y^2}(y_2^2 - y^3 y_2^1), \qquad U^5 = \frac{1}{y^2}\left(\frac{D(y^1, y^3)}{D(x^1, x^2)} - \frac{y^3}{y^2}\frac{D(y^1, y^2)}{D(x^1, x^2)}\right).$$

Les équations du *système automorphe* (A) sont alors :

$$(A)\begin{cases} (U_Y^1 \equiv)\, U^1 \equiv \dfrac{1}{y^2}y_1^1 & = \omega^1, \\ (U_Y^2 \equiv)\, U^2 \equiv \dfrac{1}{y^2}y_2^1 & = \omega^2, \\ (U_Y^4 \equiv)\, U^3 \equiv \dfrac{1}{y^2}(y_1^2 - y^3 y_1^1) & = \omega^3, \\ (U_Y^5 \equiv)\, U^4 \equiv \dfrac{1}{y^2}(y_2^2 - y^3 y_2^1) & = \omega^4, \\ (U_Y^3 \equiv)\, U^5 \equiv \dfrac{1}{y^2}\left(\dfrac{D(y^1, y^3)}{D(x^1, x^2)} - \dfrac{y^3}{y^2}\dfrac{D(y^1, y^2)}{D(x^1, x^2)}\right) & = \omega^5, \end{cases}$$

La connaissance de l'application $X \xrightarrow{f} Y$ nous permet donc de connaître les $\omega(x)$ en exprimant que $y = f(x)$ est solution de ces équations.

Les $\omega(x)$ doivent satisfaire aux conditions de compatibilité (système structuré) :

$$(S) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \omega^1}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega^2}{\partial x^1} + \omega^1 \omega^4 - \omega^2 \omega^3 = 0, \\ & \frac{\partial \omega^3}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega^4}{\partial x^1} + \omega^5 \qquad\qquad = 0. \end{aligned} \right.$$

Mais l'intérêt de ces manipulations réside surtout dans le fait que l'on a maintenant induit une structure au-dessus de X. On détermine pour cela son groupe de Lie $\mathfrak{G}(X)$:

$$\mathfrak{G}(X) \left\{ \begin{aligned} u_X^1 &= u_X'^1 \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^1} + u_X'^2 \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^1}, \\ u_X^2 &= u_X'^1 \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^2} + u_X'^2 \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2}, \\ u_X^3 &= u_X'^3 \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^1} + u_X'^4 \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^1}, \\ u_X^4 &= u_X'^4 \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^2} + u_X'^4 \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2}, \\ u_X^5 &= u_X'^5 \frac{D(\varphi^1, \varphi^2)}{D(x^1, x^2)}. \end{aligned} \right.$$

On associera à ces transformations finies les équations finies générales $\mathcal{E}(X)$ puis les équations infinitésimales générales $\Sigma(X)$ suivantes :

$$\Sigma(X) \left\{ \begin{aligned} \underset{1}{\Omega}{}_X^1 &\equiv \omega_X^1(x) \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} + \omega_X^2(x) \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} + \xi^i \frac{\partial \omega_X^1(x)}{\partial x^i} = 0, \\ \underset{1}{\Omega}{}_X^2 &\equiv \omega_X^1(x) \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} + \omega_X^2(x) \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} + \xi^i \frac{\partial \omega_X^2(x)}{\partial x^i} = 0, \\ \underset{1}{\Omega}{}_X^3 &\equiv \omega_X^3(x) \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} + \omega_X^4(x) \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} + \xi^i \frac{\partial \omega_X^3(x)}{\partial x^i} = 0, \\ \underset{1}{\Omega}{}_X^4 &\equiv \omega_X^3(x) \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} + \omega_X^4(x) \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} + \xi^i \frac{\partial \omega_X^4(x)}{\partial x^i} = 0, \\ \underset{1}{\Omega}{}_X^5 &\equiv \omega_X^5(x) \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \quad + \xi^i \frac{\partial \omega_X^5(x)}{\partial x^i} = 0. \end{aligned} \right.$$

Le pseudogroupe correspondant, agissant sur X, sera intransitif : Posons

$$\omega_X^0 = \frac{\omega_X^1 \omega_X^4 - \omega_X^2 \omega_X^3}{\omega_X^5}.$$

Puisque l'on a

$$(\omega_X^1\,\omega_X^4 - \omega_X^2\,\omega_X^3)\left(\frac{\partial\xi^1}{\partial x^1} + \frac{\partial\xi^2}{\partial x^2}\right) + \xi^i\frac{\partial\,(\omega_X^1\,\omega_X^4 - \omega_X^2\,\omega_X^3)}{\partial x^i} = 0,$$

on en déduira :

$$\underset{1}{\Omega}{}_X^0 \equiv \xi^i\frac{\partial\omega_X^0\,(x)}{\partial x^i} = 0.$$

Cherchons alors les conditions de compatibilité I (X) :

Tout d'abord :

$$\frac{\partial\underset{1}{\Omega}{}_X^1}{\partial x^2} - \frac{\partial\underset{1}{\Omega}{}_X^2}{\partial x^1} \equiv \left(\frac{\partial\omega^1}{\partial x^2} - \frac{\partial\omega^2}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial\xi^1}{\partial x^1} + \frac{\partial\xi^2}{\partial x^2}\right) + \xi^i\frac{\partial\left(\dfrac{\partial\omega^1}{\partial x^2} - \dfrac{\partial\omega^2}{\partial x^1}\right)}{\partial x^i} = 0.$$

Mais il faut aussi tenir compte des équations :

$$\frac{\partial\omega_X^0}{\partial x^1}\frac{\partial\xi^1}{\partial x^1} + \frac{\partial\omega_X^0}{\partial x^2}\frac{\partial\xi^2}{\partial x^1} + \xi^i\frac{\partial\dfrac{\partial\omega_X^0}{\partial x^1}}{\partial x^i},$$

$$\frac{\partial\omega_X^0}{\partial x^1}\frac{\partial\xi^1}{\partial x^2} + \frac{\partial\omega_X^0}{\partial x^2}\frac{\partial\xi^2}{\partial x^2} + \xi^i\frac{\partial\dfrac{\partial\omega_X^0}{\partial x^2}}{\partial x^i};$$

d'où

$$\det\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\omega^0}{\partial x^1} & \dfrac{\partial\omega^0}{\partial x^2} & \xi^i\dfrac{\partial\dfrac{\partial\omega^0}{\partial x^1}}{\partial x^i} \\ \omega^1 & \omega^2 & \xi^i\dfrac{\partial\omega^1}{\partial x^i} \\ \omega^3 & \omega^4 & \xi^i\dfrac{\partial\omega^3}{\partial x^i} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{lorsque} \quad \xi^i\frac{\partial\omega_X^0}{\partial x^i} = 0.$$

On obtient finalement :

$$\mathrm{I}\,(\mathrm{X})\begin{cases} \dfrac{\partial\omega_X^1}{\partial x^2} - \dfrac{\partial\omega_X^2}{\partial x^1} = c_X^1\,(\omega^0)\,\omega_X^5, \\ \dfrac{\partial\omega_X^3}{\partial x^2} - \dfrac{\partial\omega_X^4}{\partial x^1} = c_X'^1\,(\omega^3)\,\omega_X^5, \\ \dfrac{\partial\omega_X^0}{\partial x^1} = c_X^2\,(\omega^0)\,\omega^1 + c_X'^2\,(\omega^0)\,\omega^3, \\ \dfrac{\partial\omega_X^0}{\partial x^2} = c_X^2\,(\omega^0)\,\omega^2 + c_X'^2\,(\omega^0)\,\omega^4. \end{cases}$$

Où les constantes (!) de structure doivent satisfaire aux identités de Jacobi généralisées :

$$c_X^1\, c_X^2 + c_X'^1\, c_X'^2 + \left(c_X'^2 \frac{\partial c_X^2}{\partial \omega^0} - c_X^2 \frac{\partial c_X'^2}{\partial \omega^0}\right) \omega^0 = 0.$$

Maintenant on remarquera que l'on peut écrire plus généralement :

$$(\mathrm{A}) \begin{cases} \omega_Y^1(y) \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} + \omega_Y^2(y) \dfrac{\partial y^2}{\partial x^1} + \omega_Y^3 \dfrac{\partial y^3}{\partial x^1} = \omega^1, \\ \omega_Y^1(y) \dfrac{\partial y^1}{\partial x^2} + \omega_Y^2(y) \dfrac{\partial y^2}{\partial x^2} + \omega_Y^3 \dfrac{\partial y^3}{\partial x^2} = \omega^2, \\ \omega_Y^4(y) \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} + \omega_Y^5(y) \dfrac{\partial y^2}{\partial x^1} + \omega_Y^6(y) \dfrac{\partial y^3}{\partial x^1} = \omega^3, \\ \omega_Y^4(y) \dfrac{\partial y^1}{\partial x^2} + \omega_Y^5(y) \dfrac{\partial y^2}{\partial x^2} + \omega_Y^6(y) \dfrac{\partial y^3}{\partial x^2} = \omega^4, \\ \omega_Y^7(y) \dfrac{\mathrm{D}(y^2, y^3)}{\mathrm{D}(x^1, x^2)} + \omega_Y^8(y) \dfrac{\mathrm{D}(y^3, y^1)}{\mathrm{D}(x^1, x^2)} + \omega_Y^9(y) \dfrac{\mathrm{D}(y^1, y^2)}{\mathrm{D}(x^1, x^2)} = \omega^5. \end{cases}$$

Utilisant les conditions de compatibilité pour les $\omega_Y(y)$ on détermine facilement le *système structuré* (S) dont les $\omega(x)$ doivent être solutions, lorsque $\omega_Y^4\,\omega_Y^7 + \omega_Y^5\,\omega_Y^8 + \omega_Y^6\,\omega_Y^9 \neq 0$:

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} \dfrac{\partial \omega^1}{\partial x^2} - \dfrac{\partial \omega^2}{\partial x^1} = c_Y^1(\omega^1 \omega^4 - \omega^2 \omega^3) + c_Y^2\, \omega^5, \\ \dfrac{\partial \omega^3}{\partial x^2} - \dfrac{\partial \omega^4}{\partial x^1} = c_Y'^1(\omega^1 \omega^4 - \omega^2 \omega^3) + c_Y'^2\, \omega^5. \end{cases}$$

Cependant, pour que la structure soit covariante, on doit avoir aussi des égalités telles que

$$\omega^4 \frac{\partial \omega^0}{\partial x^1} - \omega^3 \frac{\partial \omega^0}{\partial x^2} = (\omega^1 \omega^4 - \omega^2 \omega^3)\, c^2(\omega^0).$$

Le membre de gauche s'écrira, en utilisant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega^0}{\partial x^1} = \Bigg[& \frac{\mathrm{D}(y^2, y^3)}{\mathrm{D}(x^1, x^2)} \frac{\partial}{\partial x^1} (\omega_Y^2\, \omega_Y^6 - \omega_Y^3\, \omega_Y^5) \\ & + (\omega_Y^2\, \omega_Y^6 - \omega_Y^3\, \omega_Y^5) \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\mathrm{D}(y^2, y^3)}{\mathrm{D}(x^1, x^2)} + \dots \Bigg] \left[\omega_Y^7 \frac{\mathrm{D}(y^2, y^3)}{\mathrm{D}(x^1, x^2)} + \dots \right] \\ & - \left[(\omega_Y^2\, \omega_Y^6 - \omega_Y^3\, \omega_Y^5) \frac{\mathrm{D}(y^2, y^3)}{\mathrm{D}(x^1, x^2)} + \dots \right] \\ & \times \left[\frac{\mathrm{D}(y^2, y^3)}{\mathrm{D}(x^1, x^2)} \frac{\partial \omega_Y^7}{\partial x^1} + \omega_Y^7 \frac{\partial \dfrac{\mathrm{D}(y^2, y^3)}{\mathrm{D}(x^1, x^2)}}{\partial x} + \dots \right] \end{aligned}$$

en développant et examinant les termes comportant des dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^i \partial x^j}$:

$$(\omega_Y^4 \omega_Y^7 + \omega_Y^5 \omega_Y^8 + \omega_Y^6 \omega_Y^9)$$
$$\times \left[\left(- \omega^3 \frac{D(y^3, y^1)}{D(x^1, x^2)} + \omega^2 \frac{D(y^1, y^2)}{D(x^1, x^2)} \right) \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{D(y^2, y^3)}{D(x^1, x^2)} + \ldots \right].$$

Or le membre de droite ne comporte pas de telles dérivées. On doit donc avoir :

$$\omega_Y^4 \omega_Y^7 + \omega_Y^5 \omega_Y^8 + \omega_Y^6 \omega_Y^9 = 0.$$

Ce cas ayant déjà été traité, le système structuré est alors :

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \omega^1}{\partial x^2} - \dfrac{\partial \omega^2}{\partial x^1} = c_Y^1 (\omega_Y^0)\, \omega^5, \\[2ex] \dfrac{\partial \omega^3}{\partial x^2} - \dfrac{\partial \omega^4}{\partial x^2} = c_Y'^1 (\omega_Y^0)\, \omega^5, \\[2ex] \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \omega^0}{\partial x^2} \\[1ex] \dfrac{\partial \omega^0}{\partial x^2} \end{array} \right. = c_Y^2 (\omega_Y^0) \left| \begin{array}{l} \omega^1 \\[2ex] \omega^2 \end{array} \right. + c_Y'^2 (\omega_Y^0) \left| \begin{array}{l} \omega^3 \\[2ex] \omega^4 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Mais on a

$$\omega_Y^0 (f(x) = \omega^0 (x) \qquad \text{et donc} \quad c_Y = c_X.$$

Cette nouvelle structure spéciale est donc covariante puisque l'on a alors

$$(\mathrm{S}) \equiv \mathrm{I}(\mathrm{X}).$$

La relation $\omega_Y^4 \omega_Y^7 + \omega_Y^5 \omega_Y^8 + \omega_Y^6 \omega_Y^9 = 0$ caractérisera donc les structures covariantes.

SYSTÈME STRUCTURÉ

Après avoir lu la seconde partie, le lecteur vérifiera sans peine que le système suivant est un système structuré :

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial \omega^2}{\partial x^3} - \dfrac{\partial \omega^3}{\partial x^2} = c^1 (\omega^2 \omega^6 - \omega^3 \omega^5) + c^2 \omega^7, \\[2ex] \dfrac{\partial \omega^3}{\partial x^1} - \dfrac{\partial \omega^1}{\partial x^3} = c^1 (\omega^3 \omega^4 - \omega^1 \omega^6) + c^2 \omega^8, \\[2ex] \dfrac{\partial \omega^1}{\partial x^2} - \dfrac{\partial \omega^2}{\partial x^1} = c^1 (\omega^1 \omega^5 - \omega^2 \omega^4) + c^2 \omega^9, \\[2ex] \omega^1 \left(\dfrac{\partial \omega^5}{\partial x^3} - \dfrac{\partial \omega^6}{\partial x^2} \right) + \omega^2 \left(\dfrac{\partial \omega^6}{\partial x^1} - \dfrac{\partial \omega^4}{\partial x^3} \right) + \omega^3 \left(\dfrac{\partial \omega^4}{\partial x^2} - \dfrac{\partial \omega^5}{\partial x^1} \right) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial \omega^7}{\partial x^1} + \dfrac{\partial \omega^8}{\partial x^2} + \dfrac{\partial \omega^9}{\partial x^3} = c^3 (\omega^4 \omega^7 + \omega^5 \omega^8 + \omega^6 \omega^9). \end{array} \right.$$

EXEMPLE III : RELATIVITÉ GÉNÉRALE

A la première partie de la théorie générale correspond la création et l'étude d'un espace de Riemann à partir de l'espace de Minkowski de la relativité restreinte.

A la seconde partie correspond la recherche des équations du champ, dans le contexte riemannien de la relativité générale.

Le développement de notre théorie générale est donc en fait analogue au cheminement suivi par Einstein de 1904 à 1915.

Dans tout ce quit suit, nous adoptons les notations suivantes, de façon à montrer que l'utilisation d'indices tensoriels est une simple commodité d'écriture :

$\omega_{ij}(x)$	au lieu de	$g_{ij}(x)$,
$\gamma^i_{jk}(x)$	»	$\Gamma^i_{jk}(x)$,
$\rho^i{}_{jkl}(x)$	»	$R^i{}_{jkl}(x)$ (courbure),
$\chi^i{}_{jkl}(x)$	»	$C^i{}_{jkl}(x)$ (courbure conforme),
c	»	K (constante de courbure).

Les développements limités aux différents ordres du paramètre t seront interprétés par les majuscules correspondantes :

Exemple :

$$\omega_{ij}(x, t) = \omega_{ij}(x) + t \underset{1}{\Omega}_{ij}(x) + t^2 \underset{2}{\Omega}_{ij}(x) + \dots$$

Première partie

Pseudogroupe spécial Γ :

Transformations laissant invariante la métrique de l'espace de Minkowski de la relativité restreinte :

Équations finies spéciales :

$$\eta_{kl} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} = \eta_{ij}.$$

Équations infinitésimales spéciales :

$$\eta_{il} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^j} + \eta_{jl} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} = 0.$$

Ce dernier système est évidemment formellement intégrable, mais il faut le prolonger une fois pour le rendre involutif, en obtenant les équations

$$\frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^j \, \partial x^k} = 0.$$

Γ est donc en fait un groupe de Lie dont le nombre de paramètres est

$$\dim R_2 = \dim R_1 = n\,(n+1) - \frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

C'est donc le groupe de Lorentz inhomogène.

Utilisant les méthodes de la théorie générale, on obtiendra :

ÉQUATIONS FINIES GÉNÉRALES :

$$(\mathcal{E}) \qquad \omega_{kl}\,(y)\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial y^l}{\partial x^j} = \omega_{ij}\,(x) \qquad \text{(forme de Lie).}$$

ÉQUATIONS INFINITÉSIMALES GÉNÉRALES :

$$(\Sigma) \qquad \underset{1}{\Omega}_{ij} \equiv \omega_{ik}\,(x)\frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} + \omega_{jk}\,(x)\frac{\partial \xi^k}{\partial x_i} + \xi^r \frac{\partial \omega_{ij}\,(x)}{\partial x^r} = 0$$

soit

$$\mathcal{L}\,(\xi)\,\omega_{ij} = 0 \qquad \text{(équations de Killing).}$$

Pour déterminer les conditions de compatibilité pour les $\omega_{ij}\,(x)$, il faut rendre ce dernier système involutif. Pour ce faire, on définit les symboles de Christoffel :

$$\gamma^i_{jk}\,(x) = \frac{1}{2}\omega^{il}\,(x)\,(\partial_j\,\omega_{kl}\,(x) + \partial_k\,\omega_{jl}\,(x) - \partial_l\,\omega_{jk}\,(x)),$$

avec $\omega^{il}\,(x)\,\omega_{lj}\,(x) = \delta^i_j$ et on considère, au lieu de (Σ) :

$$p_1\,(\Sigma)\quad \left\{\begin{aligned} \Omega_{ij} &\equiv \omega_{ik}\,(x)\frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} + \omega_{jk}\,(x)\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} + \xi^r\frac{\partial \omega_{ij}\,(x)}{\partial x^r} = 0, \\ \Gamma^i_{jk} &\equiv \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^j\,\partial x^k} + \gamma^i_{rk}\,(x)\frac{\partial \xi^r}{\partial x^j} + \gamma^i_{jr}\,(x)\frac{\partial \xi^r}{\partial x^k} \\ &\qquad - \gamma^r_{jk}\,(x)\frac{\partial \xi^i}{\partial x^r} + \xi^r\frac{\partial \gamma^i_{jk}\,(x)}{\partial x^r} = 0. \end{aligned}\right.$$

Remarque. — $\underset{1}{\Omega}_{ij}$ et $\underset{1}{\Gamma}^i_{jk}$ sont des tenseurs.

Nous allons chercher directement sur ces équations les conditions de compatibilité de première et de seconde espèce. Définissons d'abord la courbure :

$$\rho^i{}_{jkl}\,(x) = \frac{\partial \gamma^i_{jk}\,(x)}{\partial x^l} - \frac{\partial \gamma^i_{jl}\,(x)}{\partial x^k} + \gamma^r_{jk}\,(x)\,\gamma^i_{rl}\,(x) - \gamma^r_{jl}\,(x)\,\gamma_{rk}\,(x)$$

Linéarisant, nous trouvons :

$$\underset{1}{R}^{i}{}_{jkl} \equiv \frac{\partial \xi^r}{\partial x^s}(\delta_l^s\, \rho^i{}_{jkr}(x) + \delta_j^s\, \rho^i{}_{rkl}(x) + \delta_k^s\, \rho^i{}_{jrl}(x) - \delta_r^i\, \rho^s{}_{jkl}(x)) + \xi^r \frac{\partial \rho^i{}_{jkl}(x)}{\partial x^r} = 0.$$

$p_1(\Sigma)$ est formellement intégrable lorsque $\underset{1}{R}^{i}{}_{jkl}$ est une combinaison linéaire des $\underset{1}{\Omega}_{ij}$:

Définissons :

$$\rho_{ijkl}(x) = \omega_{im}(x)\, \rho^m{}_{jkl}(x),$$

on vérifie :

$$\rho_{ijkl} = \rho_{klij}.$$

Linéarisant, on obtient

$$\underset{1}{R}_{ijkl} \equiv \frac{\partial \xi^r}{\partial x^s}(\delta_l^s\, \rho_{rkji}(x) + \delta_j^s\, \rho_{rilk}(x) + \delta_k^s\, \rho_{rlij}(x) + \delta_i^s\, \rho_{rjkl}(x)) + \xi^r \frac{\partial \rho_{ijkl}(x)}{\partial x^r} = 0.$$

Posons $\xi_m = \omega_{mr}(x)\, \xi^r$ on remarque :

$$\underset{1}{\Omega}_{ij} \equiv \frac{\partial \xi_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x^i} + 2\, \gamma_{ij}^r\, \xi_r = 0,$$

$$\underset{1}{R}_{ijkl} \equiv \frac{\partial \xi_r}{\partial x^s}(\delta_l^s\, \rho^r{}_{kji} + \delta_j^s\, \rho^r{}_{ilk} + \delta_k^s\, \rho^r{}_{lij} + \delta_i^s\, \rho^r{}_{jkl}) + \ldots = 0.$$

Les conditions de première espèce sont donc :

$$\delta_l^s\, \rho^r{}_{kji} + \delta_j^s\, \rho^r{}_{ilk} + \delta_k^s\, \rho^r{}_{lij} + \delta_i^s\, \rho^r{}_{jkl} - \delta_l^r\, \rho^s{}_{kji} - \delta_j^r\, \rho^s{}_{ilk} - \delta_k^r\, \rho^s{}_{lij} - \delta_i^r\, \rho^s{}_{jkl} = 0.$$

Contractons en s et i avec $\rho_{jk}(x) = \rho_{kj}(x) = \rho^i{}_{jki}(x)$; on obtient

$$(\rho^r{}_{kjl} + \rho^r{}_{jlk} + \rho^r{}_{lkj}) + n\, \rho^r{}_{jkl} - \delta_l^r\, \rho_{kj} + \delta_k^r\, \rho_{lj} - \rho^r{}_{jkl} = 0,$$

$$\rho^r{}_{jkl} = \frac{1}{n-1}(\delta_l^r\, \rho_{jk} - \delta_k^r\, \rho_{jl}).$$

Mais on a aussi :

$$\underset{1}{R}_{ij} \equiv \rho_{ir}(x)\frac{\partial \xi^r}{\partial x^j} + \rho_{jr}(x)\frac{\partial \xi^r}{\partial x^i} + \xi^r \frac{\partial \rho_{ij}(x)}{\partial x^r} = 0,$$

ce qui nécessite :

$$\rho_{ij}(x) = (n-1)\, c\, \omega_{ij}(x),$$

où c est une constante.

Les conditions de compatibilité pour les $\omega_{ij}(x)$ définissent donc un espace à courbure constante :

$$\text{(I)} \qquad \rho^i{}_{jkl}(x) = c\,(\delta^i_l\,\omega_{jk}(x) - \delta^i_k\,\omega_{jl}(x)).$$

Dans (I), la courbure $\rho^i{}_{jkl}(x)$ est exprimée au moyen des $\omega_{ij}(x)$ et de leurs dérivées premières et secondes. Il n'y a qu'une condition de seconde espèce. Nous allons déterminer le nombre total des conditions de compatibilité, en utilisant le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & g_3 \arrow[r] \arrow[d] & \overset{3}{\bigcirc} T \arrow[r] \arrow[d] & \overset{2}{\bigcirc} F_0 \arrow[r] \arrow[d] & F_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & R_3 \arrow[r] \arrow[d] & J_3(T) \arrow[r] \arrow[d] & J_2(F_0) \arrow[r] \arrow[d] & F_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & R_2 \arrow[r] \arrow[d] & J_2(T) \arrow[r] \arrow[d] & J_1(F_0) \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
 & 0 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

$$\dim R_3 = \dim R_2 = \frac{n\,(n+1)}{2} \qquad \text{donc} \quad \dim g_3 = 0$$

et

$$\begin{aligned}
\dim F_1 &= \dim \overset{2}{\bigcirc} F_0 - \dim \overset{3}{\bigcirc} T \\
&= \frac{(n+1)\,!}{2\,!\,(n-1)\,!}\,\frac{n\,(n+1)}{2} - \frac{(n+2)\,!}{3\,!\,(n-1)\,!}\,n = \frac{n^2\,(n^2-1)}{12}.
\end{aligned}$$

NORMALISATEUR :

On considère la forme résolue de (Σ) :

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} + \omega^{il}\,\omega_{km}\,\frac{\partial \xi^m}{\partial x^l} + \left(\omega^{il}\,\frac{\partial \omega_{kl}}{\partial x^j}\right)\xi^j = 0,$$

$\mathfrak{g}$, groupe de Lie, puisque Γ et donc $\mathfrak{G}$ sont transitifs, sera déterminé par

$$\frac{\bar\omega_{ij}}{\bar\omega_{km}} = \frac{\omega_{ij}}{\omega_{km}}, \qquad \bar\omega^{il}\,\frac{\partial \bar\omega_{kl}}{\partial x^j} = \omega^{il}\,\frac{\partial \omega_{kl}}{\partial x^j},$$

$$\frac{\partial \bar\omega_{km}}{\partial x^j} = \bar\omega_{im}\,\omega^{il}\,\frac{\partial \omega_{kl}}{\partial x^j} = -\,\bar\omega_{im}\,\omega_{kl}\,\frac{\partial \omega^{il}}{\partial x^j},$$

$$\omega^{kl}\,\frac{\partial \bar\omega_{km}}{\partial x^j} + \bar\omega_{km}\,\frac{\partial \omega^{kl}}{\partial x^j} = 0,$$

$$\bar\omega_{km}(x) = a(x)\,\omega_{km}(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial x^j}(\omega^{kl}\,\bar\omega_{km}) = 0.$$

La transformation finie générale de $\mathfrak{g}$ est donc ·

$$\bar{\omega}_{ij}(x) = a\,\omega_{ij}(x).$$

On vérifie alors

$$\bar{\gamma}^i_{jk}(x) = \gamma^i_{jk}(x),$$

ce qui a pour conséquence :

$$\bar{c} = \frac{1}{a}c$$

où, du point de vue infinitésimal :

$$\underset{1}{C} = -\lambda c$$

L'espace plat $c = 0$ est donc seul déformable.

Nous allons montrer maintenant le rôle fondamental joué par la suite physique, à l'exclusion de toute autre suite.

En effet, si nous ne nous contentions que de (Σ) pour déterminer $(\tilde{\Sigma})$, il faudrait écrire que $(\tilde{\Sigma})$ est le système

$$\frac{\underset{1}{\Omega}_{ij}}{\omega_{ij}} - \frac{\underset{1}{\Omega}_{kl}}{\omega_{kl}} = 0, \qquad \underset{1}{\Gamma}^i_{jk} = 0.$$

Or on sait que :

$$\underset{1}{R}^i{}_{jkl} \equiv c\left(\delta^i_l\,\underset{1}{\Omega}_{jk} - \delta^i_k\,\underset{1}{\Omega}_{jl}\right).$$

Par suite, $\tilde{R}_3 \to \tilde{R}_2$ n'est surjectif que pour $c = 0$.

Il faut donc utiliser $p_1(\Sigma)$ pour construire :

$$(\tilde{\Sigma}) \qquad \frac{\underset{1}{\Omega}_{ij}}{\omega_{ij}} - \frac{\underset{1}{\Omega}_{kl}}{\omega_{kl}} = 0, \qquad \underset{1}{\Gamma}^i_{jk} = 0, \qquad \frac{\partial \underset{1}{\Gamma}^i_{jk}}{\partial x^l} = 0.$$

Utilisant la dérivation covariante classique et le fait que $\underset{1}{\Gamma}^i_{jk}$ est un tenseur, on a

$$\left\{\begin{array}{l} \underset{1}{\Gamma}^i_{jk} = 0 \\ \dfrac{\partial \underset{1}{\Gamma}^i_{jk}}{\partial x^l} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \xi_{i|jk} = -\xi_r\,\rho^r{}_{kij}, \\ \xi_{i|jkl} = -\xi_{r|l}\,\rho^r{}_{kij}; \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} \xi_{i|jklm} - \xi_{i|jkml} &= (-\xi_{r|lm} + \xi_{r|ml})\,\rho^r{}_{kij} \\ &= \xi_s\,\rho^s{}_{rml}\,\rho^r{}_{kij}, \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned} \xi_{i|jklm} - \xi_{i|jkml} &= (\xi_{i|jk})_{|lm} - (\xi_{i|jk})_{|ml} \\ &= \xi_{s|jk}\,\rho^s{}_{ilm} + \xi_{i|sk}\,\rho^s{}_{jlm} + \xi_{i|js}\,\rho^s{}_{klm} \\ &= -\xi_r\left[\rho^r{}_{ksj}\,\rho^s{}_{ilm} + \rho^r{}_{kis}\,\rho^s{}_{jlm} + \rho^r{}_{sij}\,\rho^s{}_{klm}\right], \end{aligned}$$

$(\hat{\Sigma})$ est donc formellement intégrable et involutif $\forall\, c$, si :

$$\rho^s{}_{krj}\,\rho^r{}_{ilm} + \rho^s{}_{kir}\,\rho^r{}_{jlm} + \rho^s{}_{rij}\,\rho^r{}_{klm} + \rho^s{}_{rml}\,\rho^r{}_{kij} = 0,$$

lorsque

$$\rho^i{}_{jkl} = c\,(\delta^i_l\,\omega_{jk} - \delta^i_k\,\omega_{jl}).$$

— Le cas $c = 0$ est trivial.

— Nous laissons le lecteur vérifier l'égalité pour $c \neq 0$.

On traduirait aisément les résultats précédents par des diagrammes commutatifs, conformément à la théorie générale.

Sous-pseudogroupe :

Considérons :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\xi_1)\,\omega_{ij} = \psi_1(x)\,\omega_{ij}, \\ \mathcal{L}(\xi_2)\,\omega_{ij} = \psi_2(x)\,\omega_{ij}. \end{cases}$$

Alors :

$$\mathcal{L}([\xi_1, \xi_2])\,\omega_{ij} = \left(\xi_1^r(x)\,\frac{\partial\psi_2(x)}{\partial x^r} - \xi_2^r(x)\,\frac{\partial\psi_1(x)}{\partial x^r}\right)\omega_{ij}.$$

Le pseudogroupe des transformations conformes est donc un surpseudogroupe défini par les équations $(\hat{\Sigma}) \subset (\Sigma)$:

$$(\hat{\Sigma}) \qquad \frac{\underset{1}{\Omega}_{ij}}{\omega_{ij}} - \frac{\underset{1}{\Omega}_{kl}}{\omega_{kl}} = 0.$$

On sait que l'étude de l'intégrabilité formelle de ce système fait apparaitre les conditions de compatibilité de première espèce :

$$\chi^i{}_{jkl} = \rho^i{}_{jkl} + \frac{1}{n-2}(\delta^i_k\,\rho_{jl} - \delta^i_l\,\rho_{jk} + \omega_{jl}\,\rho^i{}_k - \omega_{jk}\,\rho^i{}_l)$$
$$+ \frac{\rho}{(n-1)(n-2)}(\delta^i_l\,\omega_{jk} - \delta^i_k\,\omega_{jl}) = 0.$$

On vérifierait aisément qu'elles sont automatiquement remplies dans le cas d'un espace à courbure constante, comme cela était prévisible d'après la théorie générale.

Le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \overset{3}{\circ}T \arrow[r] \arrow[d] & \overset{2}{\circ}\hat{F}_0 \arrow[r] \arrow[d] & \hat{h}_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \hat{R}_3 \arrow[r] \arrow[d] & J_3(T) \arrow[r] \arrow[d] & J_2(\hat{F}_0) \arrow[r] \arrow[d] & \hat{Q}_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \hat{R}_2 \arrow[r] \arrow[d] & J_2(T) \arrow[r] \arrow[d] & J_1(\hat{F}_0) \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
 & 0 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

permet alors de calculer (ce qui n'est pas évident autrement) :

$$\begin{aligned}
&\dim \hat{\mathrm{Q}}_2 = \dim \hat{h}_2 = \dim \overset{2}{\bigcirc} \hat{\mathrm{F}}_0 - \dim \overset{3}{\bigcirc} \mathrm{T} \\
&\dim \mathrm{F}_1 = \qquad\qquad\;\; \dim \overset{2}{\bigcirc} \mathrm{F}_0 - \dim \overset{3}{\bigcirc} \mathrm{T} \\
&\dim \hat{\mathrm{Q}}_2 - \dim \mathrm{F}_1 = \dim \overset{2}{\bigcirc} \hat{\mathrm{F}}_0 - \dim \overset{2}{\bigcirc} \mathrm{F}_0 = \frac{-n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

soit

$$\dim \hat{\mathrm{Q}}_2 = \frac{n(n+1)(n+2)(n-3)}{12}.$$

Nous terminerons cette première partie en calculant explicitement les opérateurs différentiels $\mathcal{D}_p$ des suites physiques rencontrées, de façon à utiliser ces résultats dans la seconde partie. Pour plus de simplicité, les développements limités seront calculés pour $\omega_{ij}(x) = \delta^i_j$ $(i, j = 1, \ldots, 4)$ et on supprimera l'indice inférieur.

ÉQUATIONS DE KILLING :

$$(\Sigma) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\Omega_{44} \equiv \mathrm{F}_0^{10} \equiv \dfrac{\partial \xi^4}{\partial x^4} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{1}{2}\Omega_{11} \equiv \mathrm{F}_0^{1} \;\equiv \dfrac{\partial \xi^1}{\partial x^1} = 0 \end{array} \right. \boxed{\begin{array}{cccc} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^1 & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}} \;\mathfrak{X}.$$

On vérifie que ce système (Σ) correspondant à $\mathcal{D}$ est formellement intégrable mais non involutif. Le premier prolongement $p_1(\Sigma)$ introduit les équations $\dfrac{\partial^1 \xi^i}{\partial x^j\, \partial x^k} = 0$ et permet de considérer un système du second ordre, formellement intégrable et involutif.

Un calcul simple mais fastidieux conduit aux 20 composantes de la courbure linéarisée, correspondant à $\mathcal{D}_1$:

$$(\Sigma_1) \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{F}_1^{20} \equiv \boxed{\Omega_{33,44}} - 2\,\Omega_{34,34} + \Omega_{44,33} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{F}_1^{1} \;\equiv \boxed{\Omega_{11,22}} - 2\,\Omega_{12,12} + \Omega_{22,11} = 0 \end{array} \right. \boxed{\begin{array}{cccc} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^1 & x^2 & \bullet & \bullet \end{array}}$$

Un autre calcul analogue permet de déterminer les 20 identités de Bianchi linéarisées, correspondant à $\mathcal{D}_1$:

$$(\Sigma_2) \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{F}_2^{20} \equiv \boxed{\mathrm{F}^{14}_{1,4}} - \mathrm{F}^{19}_{1,3} + \mathrm{F}^{20}_{1,2} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{F}_2^{1} \;\equiv \boxed{\mathrm{F}^{1}_{1,3}} - \mathrm{F}^{2}_{1,2} + \mathrm{F}^{3}_{1,1} = 0 \end{array} \right. \boxed{\begin{array}{cccc} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^1 & x^2 & x^3 & \bullet \end{array}}$$

Le lecteur obtiendra sans peine les 6 identités correspondant à $\mathcal{O}_3$:

$$(\Sigma_3)\left\{\begin{array}{l|c|l|cccc|}
\cline{2-2}\cline{4-7}
F^6_3 \equiv & F^6_{2,4} & - F^{12}_{2,3} + F^{19}_{2,2} - F^{20}_{2,1} = 0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
F^1_3 \equiv & F^1_{2,4} & - F^7_{2,3} + F^8_{2,2} - F^9_{2,1} + F^5_{2,1} = 0 & x^1 & x^2 & x_3 & x^4 \\
\cline{2-2}\cline{4-7}
\end{array}\right.$$

Seconde partie

Par analogie avec l'équation de Poisson, la recherche des équations du champ devient équivalente à celle d'un tenseur différentiel S_{ij} des $\omega_{ij}(x)$:

1° du second ordre;

2° linéaire par rapport aux dérivées secondes des $\omega_{ij}(x)$;

3° dont la divergence doit s'annuler.

On sait alors qu'un tel tenseur existe et qu'il est unique :

$$S_{ij} = \rho_{ij} - \frac{1}{2}\rho\omega_{ij} + \Lambda\omega_{ij}.$$

Les équations du champ sont alors :

$$S_{ij} = \chi\, T_{ij},$$

en introduisant comme second membre le tenseur d'impulsion-énergie de la matière.

La présence de la constante cosmologique Λ reste assez mystérieuse. En fait, dans la plupart des applications, on linéarise ces équations au voisinage de $\omega_{ij}(x) = \eta_{ij}$ tout en prenant $\Lambda = 0$.

Ce processus, effectué pour les besoins de la cause physique, n'a autrement aucune signification dans le contexte tensoriel.

Remarque. — S'il n'y as pas de second membre ($T_{ij} = 0$), alors $\rho = \dfrac{2n}{n-2}\Lambda$.

Nous allons montrer que les conditions ci-dessus sont caractéristiques d'un système structuré (S).

Les équations du champ sont alors obtenues directement sous la forme linéarisée :

$$\mathfrak{S}_1\, F_0 = M_1,$$

avec la condition de compatibilité :

$$\mathfrak{S}_2\, M_1 = 0.$$

Il nous suffit pour cela, d'après la théorie générale, de montrer que (S), c'est-à-dire ($S_{ij} = 0$), est un système e. d. p. formellement intégrable et involutif. On sait qu'il suffit de vérifier cette propriété sur $\mathfrak{S}_1$ pour un choix particulier des $\omega_{ij}(x)$ satisfaisant à (I). En particulier, on prendra $\omega_{ij}(x) = \delta^i_j$, imposant $\Lambda = 0$.

Puisque le système (S) est équivalent au système $\left[\rho_{ij} = \dfrac{2}{n-2}\Lambda\omega_{ij}\right]$, le système ($\mathfrak{S}_1\, F_0 = 0$) est donc équivalent au système $\left(\underset{1}{R}_{ij} = 0\right)$, ou encore au système sous forme résolue :

$$\left\{\begin{array}{l|c|c|cccc|}
\cline{2-2}\cline{4-7}
F_1^{20} - F_1^{1} \equiv M_1^{10} \equiv & \Omega_{33,44} & + \ldots = 0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
F_1^{7} + F_1^{9} + F_1^{1} \equiv M_1^{1} \equiv & \Omega_{11,33} & + \ldots = 0 & x^1 & x^2 & x^3 & \bullet \\
\cline{2-2}\cline{4-7}
\end{array}\right.$$

On vérifie les quatre identités (correspondant à la divergence) :

$$\left\{\begin{array}{l|c|l}
\cline{2-2}
M_2^4 \equiv & M^4_{1,4} & - M^9_{1,3} + M^{10}_{1,2} + M^5_{1,2} + M^1_{1,2} - M^6_{1,1} = 0, \\
\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
M_2^1 \equiv & M^1_{1,4} & - M^2_{1,3} + M^4_{1,2} + M^3_{1,1} \qquad\qquad = 0. \\
\cline{2-2}
\end{array}\right.$$

avec

$$F_2^{20} - F_2^{10} - F_2^{2} \equiv M_2^{4}.$$

Le système structuré (S) doit donc être conséquence de (I). On en déduit :

$$\Lambda = \frac{(n-1)(n-2)}{2}\,c.$$

La constante cosmologique Λ s'introduit donc naturellement dans les calculs et traduit seulement la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
10 & 20 & 20 & 6 \\
F_0 \arrow[r, "\mathcal{D}_1"] \arrow[d, equal] & F_1 \arrow[r, "\mathcal{D}_2"] \arrow[d] & F_2 \arrow[r, "\mathcal{D}_3"] \arrow[d] & F_3 \arrow[d] \\
F_0 \arrow[r, "\mathcal{S}_1"] & M_1 \arrow[r, "\mathcal{S}_2"] \arrow[d, "10"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "4"] & 0 \\
10 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Nous savons passer, en oubliant $\mathcal{O}$, d'une suite physique P (Θ), à sa suite tronquée P (Ω), qui est aussi une autre suite physique.

Problème. — Supposons donnée une suite physique; est-il possible de l'insérer dans une autre suite physique, plus longue ?

Comme nous ne savons pas répondre en général, nous allons essayer de restreindre le problème.

Ainsi, lorsqu'on se donne un système automorphe (A), de pseudogroupe Γ, on peut déterminer $\mathcal{U} \rightarrow X$, puis ($\mathcal{E}$) suivi de (I), et on sait que (S), en tant que sous-système de (I), est un système structuré.

Un tel processus généralise la contraction utilisée en calcul tensoriel pour obtenir les 10 équations d'Einstein dans le vide, à partir des 20 conditions de courbure constante. Il sera aussi appelé *contraction*, bien que le point de vue considéré soit très différent.

Problème. — A chaque système automorphe correspond un système structuré; la réciproque est-elle vraie ?

Exemple. — Est-il possible de déterminer la solution la plus générale des équations d'Einstein dans le vide, en utilisant seulement certaines fonctions des x^i et leurs dérivées à différents ordres ?

En conclusion, il semble que la matière apparaisse dans une suite physique au *niveau* F_1 (comme les constantes de structure), alors que le champ, introduit par les $\omega(x)$ de la structure, apparaît, *linéarisé*, au *niveau* F_0, le premier fibré E jouant le rôle d'un potentiel.

Nous pensons qu'il y a plus qu'une simple analogie entre les méthodes présentées dans ce travail et celles des théories unitaires. En particulier, il faut toujours passer par des équations finies, que l'on contracte en un système structuré, sans savoir s'il traduit les conditions de compatibilités d'un certain système automorphe.

EXEMPLE IV : STRUCTURE ANALYTIQUE COMPLEXE

Équations finies spéciales (Cauchy-Riemann) :

$$(\mathcal{E}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial y^{\bar\mu}}{\partial x^{\bar\nu}} - \dfrac{\partial y^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial y^{\mu}}{\partial x^{\bar\nu}} + \dfrac{\partial y^{\bar\mu}}{\partial x^{\nu}} = 0 \end{array} \right. \qquad \bar\mu = m + \mu = m+1, \quad \ldots, \quad 2m = n.$$

Équations infinitésimales spéciales :

$$(\Sigma) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\dfrac{\partial \xi^{\bar\mu}}{\partial x^{\bar\nu}}} - \dfrac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = 0, \\[2ex] \boxed{\dfrac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\bar\nu}}} + \dfrac{\partial \xi^{\bar\mu}}{\partial x^{\nu}} = 0, \end{array} \right.$$

$$P(\Theta) \qquad 0 \rightarrow \Theta \rightarrow T \xrightarrow{\mathcal{D}} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} \ldots \xrightarrow{\mathcal{D}_{m-1}} F_{m-1} \rightarrow 0.$$

Remarque. — Suite de Dolbeaut linéaire en coordonnées réelles avec

$$\dim F_{p-1} = 2\, m \frac{(m)\,!}{(m-p)\,!\, p\,!}.$$

Équations finies générales (forme de Lie) :

$$(\mathcal{E}) \qquad \omega_l^k(y) \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} = \omega_j^i(x), \qquad \text{avec} \quad \omega_k^i(x)\, \omega_j^k(x) = -\,\delta_j^i.$$

Équations infinitésimales générales ($2\, m^2$) :

$$(\Sigma) \qquad \underset{1}{\Omega}{}_j^i \equiv \omega_l^i(x) \frac{\partial \xi^l}{\partial x^j} - \omega_j^m(x) \frac{\partial \xi^i}{\partial x^m} + \xi^r \frac{\partial \pi_j^i(x)}{\partial x^r} = 0.$$

Conditions de compatibilité (première espèce seulement, torsion nulle) :

$$(\mathrm{I}) \qquad \omega_j^r(x)\left(\frac{\partial \omega_r^i(x)}{\partial x^k} - \frac{\partial \omega_k^i(x)}{\partial x^r}\right) - \omega_k^r(x)\left(\frac{\partial \omega_r^i(x)}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_j^i(x)}{\partial x^r}\right) = 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

LIE (S.) :

[1] *Leipziger Berichte*, 1891, 1895.

VESSIOT (E.) :

[2] *Sur la théorie des groupes continus* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 3e série, t. 20, 1903, p. 411-451).

POMMARET (J. F.) :

[3] *Étude interne des systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles* (*Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. XVII, n° 2, 1972, p. 131-158).

SPENCER (D. C.) et KUMPERA (A.) :

[4] *Lie equations I-Study* 73 (Princeton University Press, 1972).

GUILLEMIN (V. W.) et STERNBERG (S.) :

[5] *The Lewy counterexample and the local equivalence problem for* G-*structures* (*J. Differential Geometry*, t. 1, 1967, p. 127-131).

(*Manuscrit reçu le* 19 *décembre* 1972.)