ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

J. FRONTEAU

L'entropie fine, la mécanique dissipative et la notion de masse au repos variable

Annales de l'I. H. P., section A, tome 18, nº 2 (1973), p. 99-119
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1973__18_2_99_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XVIII, n° 2, 1973, p. 99-120.

Section A :
Physique théorique.

L'entropie fine, la mécanique dissipative et la notion de masse au repos variable

par

J. FRONTEAU

U. E. R. de Sciences fondamentales et appliquées,
Université d'Orléans, 45045 Orléans-Cedex

RÉSUMÉ. — L'auteur tente une synthèse des différentes formes connues de Mécanique dissipative. En appliquant à ces diverses dynamiques la notion d'entropie fine qu'il a introduite il y a quelques années, il obtient un certain nombre de formules qui se trouvent être très proches des résultats correspondants établis en Thermodynamique relativiste et en Thermodynamique de la particule isolée.

ABSTRACT. — The author tries to make a synthesis between the various known forms of dissipative mechanics. By applying to these various dynamics the concept of a fine entropy, introduced by himself a few years ago, he obtains a certain number of formulae which prove to be very close to the corresponding results established in relativistic Thermodynamics and in the Thermodynamics of the single particle.

1. QUELQUES POINTS D'HISTOIRE ET DE VOCABULAIRE

En 1966, nous avons introduit la notion d'entropie d'un point matériel, que nous avons baptisée « entropie fine », et nous en avons déduit quelques premiers résultats ([18], [28]). Nous voudrions aujourd'hui les compléter, dans le domaine relativiste essentiellement, et faire certains rapprochements avec les travaux récents des spécialistes de Thermodynamique relativiste et de Thermodynamique de la particule isolée.

La notion d'entropie d'une particule est peut-être quelque peu difficile à accepter, et ce pour deux raisons essentielles que nous voudrions rapidement analyser.

D'une part, depuis Boltzmann, l'entropie est un concept statistique, et l'on n'imagine pas qu'il soit possible d'associer une « entropie » à un point matériel, au même titre qu'on lui associe une impulsion et une énergie cinétique. Sur ce premier point l'ensemble des physiciens semble d'accord, et en particulier Louis de Broglie, qui lie la notion d'entropie de la particule isolée à l'existence d'un « thermostat caché » ([11], [26]).

La seconde raison des objections faites à l'entropie fine est la suivante : cette « entropie » ne prend vraiment de l'intérêt que lorsqu'on sort du domaine traditionnel des forces hamiltoniennes pour s'intéresser aux forces « dissipatives », c'est-à-dire aux forces parallèles à la vitesse. Or de telles forces ne sont pas considérées habituellement en physique théorique contemporaine, les modèles conservatifs étant seuls jugés valables. Cependant — et c'est là que nous voulions en venir — il semble que divers efforts récents tendent à souligner l'intérêt des modèles dissipatifs.

Nous voudrions tout d'abord faire remarquer que ces efforts récents se rapprochent fort de la tentative de Helmholtz ([3], [4], [11]) en vue d'interpréter les principes de la Thermodynamique de façon purement mécaniste [1]. En effet, sans entrer dans le détail des hypothèses de Helmholtz, nous retiendrons le point de départ de son travail, qui nous semble fondamental. Helmholtz considère les équations de Lagrange et distingue les forces qui dérivent d'un potentiel — lequel figure dans le lagrangien — des forces Q_i qui n'en dérivent pas — lesquelles figurent au second membre. Avec les notations habituelles (qui sont très différentes de celles de Helmholtz), les équations de Lagrange deviennent ainsi :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i,$$

ce qui s'écrit encore, sous forme pseudo-hamiltonienne :

$$q'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad p'_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i.$$

Et Helmholtz définit l'apport de chaleur comme le travail des forces Q_i :

$$\delta Q = \sum_i Q_i \, \delta q_i.$$

Ainsi, pour Helmholtz, l'apport de chaleur est lié à l'existence de forces Q_i qu'on ne peut incorporer au lagrangien (forces que, pour cette

---

(1) Sans intervention *préalable* de concepts statistiques.

raison, nous avons parfois appelées forces « récalcitrantes » [12]). Or ces forces sont celles qui ne dérivent pas d'un potentiel; ce sont donc des forces dissipatives.

Mais, l'interprétation probabiliste de la Thermodynamique l'ayant emporté malgré Zermelo [2], il semble bien que le travail de Helmholtz aurait été définitivement oublié si Louis de Broglie ne l'avait exhumé il y a quelques années [11]. La notion de force « dissipative » n'avait cependant pas totalement disparu de l'esprit des physiciens, et certains travaux récents (2) l'ont réintroduite — ou ont contribué à la réintroduire — de façon explicite ([5], [9], [10], [13], [14], [16], [17], [18], [19], [21], [22], [23], [25], [28]).

Parallèlement aux travaux que nous venons de citer, certains auteurs (2) ont créé et développé la mécanique à masse au repos variable ([6], [8], [11], [20], [24], [26], [27], [29]) (à propos surtout des études de Thermodynamique relativiste). Or, nous voudrions souligner ici qu'il s'agit — là encore — d'une Mécanique dissipative. En effet, si l'on se borne pour l'instant à la formulation prérelativiste dont on trouvera plus loin l'extension covariante, la mécanique à masse au repos variable s'écrit :

$$\frac{d}{dt}(m_0 \vec{v}) = \vec{F},$$

c'est-à-dire

$$m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \vec{v}\,\frac{dm_0}{dt};$$

et le terme nouveau par rapport à la forme classique est un terme parallèle à la vitesse $\left(\vec{v}\,\frac{dm_0}{dt}\right)$. C'est donc un terme de force « dissipatif ».

— Tout récemment, en écrivant la forme covariante de la mécanique à masse au repos variable [29], O. Costa de Beauregard a introduit le mot « néoforce » pour distinguer le terme complémentaire du terme traditionnel qu'il nomme « paléoforce ».

L'important nous semble aujourd'hui de souligner la convergence des concepts introduits par les divers auteurs cités.

En conséquence, nous proposons le tableau ci-dessous comme base de discussion en vue de clarifier le concept de Mécanique dissipative :

Quatre concepts voisins à comparer :

— mécanique dissipative,
— mécanique non hamiltonienne,
— mécanique à masse au repos variable,
— néomécanique (mécanique des néoforces).

(2) La liste des références ne prétend pas être exhaustive.

2. LE THÉORÈME DE LIOUVILLE ET L'ENTROPIE FINE (rappels)

Très souvent, en physique, le théorème de Liouville n'est appliqué que sous une forme restreinte, puisqu'on ne considère que des systèmes mécaniques hamiltoniens. Rappelons donc ici la forme générale originelle du théorème. (Nous ne donnerons que l'énoncé, la démonstration pouvant être facilement trouvée par ailleurs [1], [15], [16], [21], [25].)

Soit un système différentiel quelconque, ramené au premier ordre :

$$\frac{dX}{dt} = \mathcal{F}(X, t), \qquad X = x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

Si l'on introduit le jacobien

$$J(t) = \frac{D[X(t)]}{D[X(t_i)]},$$

t_i étant l'instant initial, le théorème de Liouville s'énonce :

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{Log}\, J) = \mathrm{Div}_X\, \mathcal{F}.$$

Dans le cas où le système différentiel considéré décrit le mouvement d'une particule, nous avons proposé ([18], [28]) d'appeler entropie de la particule la quantité

$$S_f = k\, \mathrm{Log}\, J \qquad (k = \text{constante de Boltzmann}).$$

L'entropie fine S_f, de même que le jacobien J, sera donc une mesure de l'évolution temporelle des volumes ([13], [18], [21], [25], [28]) dans l'« espace des conditions initiales » $\mathbf{R}^n$ de point générique X. La fonction S_f dépendra évidemment du système différentiel considéré. Sans entrer dans le détail, nous rappellerons que, pour un système hamiltonien, $\mathbf{R}^n$ est l'espace des phases $\mathbf{R}_{(p,q)}$ et que, pour un tel système, $S_f \equiv 0$ puisque $\mathrm{Div}_{(p,q)}\, \mathcal{F} \equiv 0$. Enfin, il est facile de vérifier que l'entropie macroscopique $S = -k \int \rho\, \mathrm{Log}\, \rho\, dv$ se déduit ([18], [25], [28]) de la valeur moyenne de l'entropie fine définie ci-dessus, d'où la nécessité, selon S. Guiașu et l'auteur du présent article, d'introduire des forces non hamiltoniennes pour comprendre l'évolution de l'entropie macroscopique ([9], [13], [16], [18], [21], [25], [28]).

On rejoint là les critiques de Zermelo [2] contre les fondements hamiltoniens de l'interprétation statistique de la Thermodynamique, critiques renouvelées récemment par F. Fer ([14], [19]).

3. L'ENTROPIE FINE EN MÉCANIQUE COVARIANTE A MASSE PROPRE VARIABLE

3.1. La mécanique covariante à masse variable

Nous nous conformerons ici aux notations de A. Lichnerowicz [7] et nous utiliserons les coordonnées galiléennes réduites :

$$x^1 = x, \qquad x^2 = y, \qquad x^3 = z, \qquad x^4 = ct;$$
$$ds^2 = (dx^4)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2;$$
$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4).$$

Si nous choisissons l'équation suivante comme équation fondamentale de la dynamique du point à masse propre variable :

$$\frac{d}{ds}(\mathrm{M}_0\, c^2\, u^\alpha) = \Phi^\alpha, \tag{3.1}$$

M_0 étant la masse propre variable, et Φ^α représentant la résultante des quadriforces appliquées au point, il vient tout d'abord :

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{M}_0\, c^2 \frac{du^\alpha}{ds} + u^\alpha c^2 \frac{d\mathrm{M}_0}{ds} &= \Phi^\alpha, \\ \mathrm{M}_0\, c^2 \frac{du^\alpha}{ds} u_\alpha + u^\alpha u_\alpha c^2 \frac{d\mathrm{M}_0}{ds} &= \Phi^\alpha u_\alpha, \end{aligned}\right. \tag{3.2}$$

c'est-à-dire, puisque $u^\alpha u_\alpha = 1$,

$$\frac{d}{ds}(\mathrm{M}_0\, c^2) = \Phi^\alpha u_\alpha. \tag{3.3}$$

Étendons maintenant au cas covariant une méthode que nous avons déjà appliquée au cas prérelativiste et à la formulation relativiste non covariante [18], c'est-à-dire décomposons la quadriforce Φ^α en deux composantes, respectivement parallèle et orthogonale à u^α, la décomposition étant toujours possible puisque $u^\alpha u_\alpha = 1 \neq 0$. Ainsi :

$$\Phi^\alpha = \mathrm{A}\, u^\alpha + \mathrm{O}^\alpha \qquad (\mathrm{O}^\alpha u_\alpha \equiv 0 \text{ par définition}). \tag{3.4}$$

Remarquons tout de suite que c'est ce que fait O. Costa de Beauregard dans sa récente adaptation [29] d'une formulation plus ancienne [6]. Aux notations près, il écrit en effet :

$$\Phi^\alpha = \mathrm{F}^{\alpha\beta} u_\beta = \left(\mathrm{F}\,\delta^{\alpha\beta} + \mathrm{F}^{\overset{\alpha\beta}{\vee}}\right) u_\beta,$$

où F est un scalaire, $\delta^{\alpha\beta}$ le tenseur de Kronecker, et $\overset{\alpha\beta}{F^{\vee}}$ un tenseur antisymétrique. Il vient alors :

$$F\,\delta^{\alpha\beta}\,u_\beta = F\,u^\alpha \qquad \text{et} \qquad \overset{\alpha\beta}{F^{\vee}}\,u_\beta\,u_\alpha \equiv 0.$$

La « néoforce » de O. Costa de Beauregard est donc identique à la quadriforce « dissipative » $A\,u^\alpha$, et sa « paléoforce » est identique à la quadriforce « non dissipative » ou « hamiltonienne » O^α.

Si nous conservons nos notations, et si nous reportons (3.3) et (3.4) dans (3.2), nous obtenons

$$M_0\,c^2\,\frac{du^\alpha}{ds} + u^\alpha\,A = A\,u^\alpha + O^\alpha,$$

c'est-à-dire

$$M_0\,c^2\,\frac{du^\alpha}{ds} = O^\alpha.$$

En résumé :

$$(3.5) \qquad \frac{d}{ds}(M_0\,c^2\,u^\alpha) = \Phi^\alpha = A\,u^\alpha + O^\alpha \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{ds}(M_0\,c^2) = A, \\ M_0\,c^2\,\dfrac{du^\alpha}{ds} = O^\alpha. \end{array} \right.$$

Aux notations près, c'est évidemment le résultat [29] de O. Costa de Beauregard.

Dans le cas général, M_0 et u^α varient toutes deux.

Dans le cas classique (mécanique conservative, ou « paléomécanique ») $A \equiv 0$, ce qui entraîne

$$M_0 = \text{Cte} \qquad \text{et} \qquad M_0\,c^2\,\frac{du^\alpha}{ds} = O^\alpha.$$

C'est le cas traditionnel du mouvement d'une particule chargée soumise à un champ électromagnétique. On rejoint là une remarque de G. Kalman [8] : le champ électromagnétique (champ vectoriel) joue un rôle tout particulier quant à la variation de la masse au repos puisque, en présence de ce champ, M_0 reste constante.

Dans le cas purement dissipatif (« néomécanique » pure), $O^\alpha \equiv 0$, ce qui entraîne

$$M_0 \text{ variable}, \qquad u^\alpha = \text{Cte}.$$

La quadrivitesse est conservée.

Le choix de l'équation covariante $\dfrac{d}{ds}(M_0\,c^2\,u^\alpha) = \Phi^\alpha$ peut paraître arbitraire. On peut se demander pourquoi on ne partirait pas plutôt de l'équation

$$M_0\,c^2\,\frac{du^\alpha}{ds} = \Phi^\alpha.$$

Une alternative similaire existe aussi dans la formulation non covariante ([20], [24], [26]). Montrons qu'en fait, ici, le problème ne se pose pas.

En effet, supposons qu'on postule

$$\mathrm{M}_0 c^2 \frac{du^\alpha}{ds} = \Phi^\alpha.$$

Puisque u^α est un vecteur unitaire, $u_\alpha \dfrac{du^\alpha}{ds}$ est nul; il en est donc de même pour $\Phi^\alpha u_\alpha$; par conséquent Φ^α, orthogonal à u^α, est identique au quadrivecteur O^α précédemment introduit, ou encore

$$\mathrm{M}_0 c^2 \frac{du^\alpha}{ds} = \mathrm{O}^\alpha.$$

Il vient alors identiquement :

$$\mathrm{M}_0 c^2 \frac{du^\alpha}{ds} + u^\alpha \frac{d}{ds}(\mathrm{M}_0 c^2) = u^\alpha \frac{d}{ds}(\mathrm{M}_0 c^2) + \mathrm{O}^\alpha,$$

$$\frac{d}{ds}(\mathrm{M}_0 c^2 u^\alpha) = u^\alpha \frac{d}{ds}(\mathrm{M}_0 c^2) + \mathrm{O}^\alpha.$$

On retrouve donc (3.5), la réciproque étant d'ailleurs vraie.

Nous retiendrons donc la relation d'équivalence suivante :

$$(3.6) \qquad \frac{d}{ds}(\mathrm{M}_0 c^2 u^\alpha) = \Phi^\alpha = \mathrm{A}\, u^\alpha + \mathrm{O}^\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{M}_0 c^2 \frac{du^\alpha}{ds} = \mathrm{O}^\alpha.$$

Ainsi, nous venons de démontrer qu'il n'existe qu'une seule forme de mécanique covariante à masse variable [*cf.* (3.6)] et que cette mécanique est identique à la version covariante de la Mécanique dissipative [*cf.* (3.5)].

3.2. L'entropie fine en mécanique covariante à masse variable

On peut *a priori* définir ici deux sortes d'entropie fine, l'une caractérisant l'évolution dans l'espace $\mathbf{R}_{(x^\alpha, u^\alpha)}$ de point générique (x^α, u^α), l'autre caractérisant l'évolution dans l'espace $\mathbf{R}_{(x^\alpha, p^\alpha)}$ de point générique (x^α, p^α), avec $p^\alpha = \mathrm{M}_0 c u^\alpha$. Nous ne chercherons pas à imposer un choix *a priori*. Nous constaterons seulement *a posteriori* que l'un des deux cas nous conduit à un résultat voisin d'une formule établie par Louis de Broglie d'une tout autre manière.

a. L'entropie fine dans $\mathbf{R}_{(x^\alpha, u^\alpha)}$

Partons de l'équation

$$\mathrm{M}_0 c^2 \frac{du^\alpha}{ds} = \mathrm{O}^\alpha,$$

ou, plus précisément, du système

$$\frac{dx^\alpha}{ds} = u^\alpha, \qquad \frac{du^\alpha}{ds} = \frac{O^\alpha}{M_0 c^2}.$$

L'espace des conditions initiales associé est l'espace $\mathbf{R}_{(x^\alpha, u^\alpha)}$.

Cet espace a huit dimensions, et son point générique contient les composantes de la quadrivitesse u^α (et non de la quadri-impulsion p^α). C'est ce que nous rappellerons par la suite en affectant diverses grandeurs du double indice (8) (u).

Posons donc :

$$J_{(8)(u)} = \frac{D[x^\alpha, u^\alpha]}{D[x^\alpha_{(i)}, u^\alpha_{(i)}]},$$

l'indice (i) caractérisant le point initial, et appliquons le théorème de Liouville au système différentiel, *en supposant que* $O^\alpha = \mathcal{F}^\alpha(x^\mu, s)$ *et que* $M_0 = f(s)$; $\mu, \alpha = 1, 2, 3, 4$.

Il vient

$$\frac{d}{ds} \operatorname{Log} J_{(8)(u)} = \sum_\alpha \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(u^\alpha) + \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\frac{O^\alpha}{M_0 c^2}\right) \right\}.$$

Puisque x^α et u^α sont des variables indépendantes, on obtient simplement :

$$\frac{d}{ds} \operatorname{Log} J_{(8)(u)} = 0.$$

Si l'on se souvient maintenant de la définition de l'entropie fine (*cf.* § 2) :

$$S_f^{(8)(u)} = k \operatorname{Log} J_{(8)(u)},$$

on obtient

$$dS_f^{(8)(u)} = 0.$$

b. L'entropie fine dans $\mathbf{R}_{(x^\alpha, p^\alpha)}$

Partons maintenant de l'équation fondamentale écrite sous la forme (3.5). Il vient tout d'abord :

$$\frac{dx^\alpha}{ds} = u^\alpha, \qquad \frac{d}{ds}(M_0 c^2 u^\alpha) = \Phi^\alpha = A u^\alpha + O^\alpha,$$

et, en introduisant la quadri-impulsion :

$$p^\alpha = M_0 c u^\alpha, \qquad u^\alpha = \frac{p^\alpha}{M_0 c},$$

on obtient

$$\frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{1}{M_0 c} p^\alpha, \qquad \frac{dp^\alpha}{ds} = \frac{1}{c}\left(\frac{A}{M_0 c} p^\alpha + O^\alpha\right).$$

L'espace des conditions initiales de ce système est l'espace $\mathbf{R}_{(x^\alpha, p^\alpha)}$ de point générique (x^α, p^α). Posons maintenant

$$J_{(8)(p)} = \frac{D[x^\alpha, p^\alpha]}{D[x^\alpha_{(i)}, p^\alpha_{(i)}]},$$

l'indice (i) caractérisant le point initial, et appliquons le théorème de Liouville au système différentiel, *en supposant que* O^α *est seulement fonction des* x^α *et de* s, *et que* A *est seulement fonction de* s, *ce qui entraîne* $M_0 = f(s)$. Il vient alors :

$$\frac{d}{ds}\operatorname{Log} J_{(8)(p)} = \sum_\alpha \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\frac{1}{M_0 c} p^\alpha\right] + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial p^\alpha}\left[\frac{A}{M_0 c} p^\alpha + O^\alpha\right] \right\}.$$

Les variables x^α et p^α sont indépendantes. Il reste donc :

$$\frac{d}{ds}\operatorname{Log} J_{(8)(p)} = 4\frac{A}{M_0 c^2}.$$

Or, $A = \frac{d}{ds}(M_0 c^2)$, d'où

$$\frac{d}{ds}\operatorname{Log} J_{(8)(p)} = \frac{4}{M_0 c^2}\frac{d}{ds}(M_0 c^2) = 4\frac{\frac{dM_0}{ds}}{M_0},$$

et, en introduisant l'entropie fine $S_f^{(8)(p)} = k \operatorname{Log} J_{(8)(p)}$,

$$dS_f^{(8)(p)} = 4k\frac{dM_0}{M_0}.$$

On remarquera que ce résultat est voisin de celui de Louis de Broglie ([11], [26]). Chez Louis de Broglie, le facteur 4 est absent; en d'autres termes, si l'on raisonne dans le cadre du formalisme exposé ci-dessus, Louis de Broglie utilise l'entropie de chacun des quatre degrés de liberté x^α.

Pour le reste, chez Louis de Broglie, c'est la masse au repos traditionnelle m_0 qui figure au dénominateur; notre résultat se ramène donc au sien lorsqu'on s'écarte peu de la masse au repos traditionnelle.

En résumé, nous avons montré jusqu'à présent qu'il existe une Mécanique dissipative covariante susceptible de décrire la variation de la masse des particules, et que l'entropie fine — très voisine de l'entropie de la particule isolée selon Louis de Broglie — est une grandeur fondamentale de cette mécanique. Il nous semble que l'existence de ce formalisme covariant renforce la suggestion que nous avions faite il y a quelques années [18], selon laquelle les modèles dissipatifs (et l'entropie fine qui est liée à ces modèles) mériteraient peut-être d'être introduits en physique moderne, par exemple dans le cas où — en théorie des champs — les particules viennent se placer hors de leur « couche de masse », dans des états intermédiaires « virtuels ».

Par ailleurs, il n'est peut-être pas inutile de rappeler ici que les modèles dissipatifs ne semblent pas dénués d'intérêt en mécanique quantique prérelativiste [30].

4. L'ENTROPIE FINE EN MÉCANIQUE RELATIVISTE NON COVARIANTE A MASSE PROPRE VARIABLE

Nous avons déjà parlé plus haut de l'alternative qui se présente à propos de l'introduction des masses propres variables en Thermodynamique relativiste ([20], [24], [27]). Rappelons qu'il s'agit de choisir entre les deux formes suivantes de mécanique :

$$(4.1) \qquad M_0 \frac{d}{dt}(\gamma v^j) = F^j$$

$$(4.2) \qquad \frac{d}{dt}(M_0 \gamma v^j) = F^j$$

$$\left(j = 1, 2, 3; \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right).$$

Contrairement à ce qui se passe pour la formulation covariante, les équations précédentes définissent bien deux mécaniques différentes puisque — sauf pour le mouvement uniforme — on n'a pas dans $\mathbf{R}^3$ l'équivalent de la relation $u^\alpha u_\alpha = 1$ qui a cours dans l'espace de Minkowski et qui assure l'identité des deux formes covariantes possibles (*cf.* § 3).

On comprend donc que, en l'absence d'exigences expérimentales, le choix entre (4.1) et (4.2) constitue un problème très difficile. Pour ce qui nous concerne, nous nous contenterons de calculer les entropies fines des deux mécaniques en question et de considérer le résultat comme une information supplémentaire à joindre au dossier des masses propres variables.

4.1. **La mécanique de H. Arzeliès** ([20], [27])

Il s'agit de (4.1) :

$$M_0 \frac{d}{dt}(\gamma v^j) = F^j,$$

F^j étant la résultante des forces traditionnelles appliquées au point, $F^j = F^j(x^l, t)$; $j, l = 1, 2, 3$. En l'absence de forces appliquées, la vitesse est constante, et non l'impulsion. C'est le postulat fondamental de H. Arzeliès.

Comme pour la formulation covariante, on peut considérer deux entropies fines différentes.

a. L'entropie fine dans $\mathbf{R}_{(x^j u^j)}$

En suivant les notations de A. Lichnerowicz [7], on sait que

$$u^j = \frac{\gamma v^j}{c}.$$

L'équation (4.1) s'écrit alors :

$$\frac{dx^j}{dt} = \frac{c}{\gamma} u^j, \qquad \frac{du^j}{dt} = \frac{F^j}{M_0 c}, \qquad \text{avec} \quad \gamma = \sqrt{1 + u^2}, \qquad u^2 = \sum_j (u^j)^2.$$

L'espace des conditions initiales de ce système du premier ordre est l'espace $\mathbf{R}_{(x^j, u^j)}$. Posons

$$J_{(6)(u)} = \frac{D[x^j, u^j]}{D[x^j_{(i)}, u^j_{(i)}]},$$

l'indice (i) caractérisant toujours le point initial; le théorème de Liouville s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Log} J_{(6)(u)} = \sum_j \left\{ \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{c}{\gamma} u^j \right) + \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\frac{F^j}{M_0 c} \right) \right\}.$$

Les x^j et u^j sont indépendants. *Si l'on suppose d'autre part que* $F^j = F^j(x^l, t)$, $M_0 = f(t)$, il vient

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Log} J_{(6)(u)} = 0,$$

d'où

$$dS_f^{(6)(u)} = 0.$$

b. L'entropie fine dans $\mathbf{R}_{(x^j, p^j)}$

Écrivons maintenant (4.1) sous la forme d'un autre système du premier ordre. Il vient

$$\frac{dx^j}{dt} = v^j, \qquad M_0 \frac{d}{dt}(\gamma v^j) = F^j,$$

ou encore

$$\frac{dx^j}{dt} = v^j, \qquad \frac{d}{dt}(M_0 \gamma v^j) = F^j + \frac{M_0}{M_0} \gamma v^j \frac{dM_0}{dt},$$

et enfin, avec $p^j = M_0 \gamma v^j$, $\gamma = \sqrt{1 + \frac{p^2}{M_0^2 c^2}}$, $p^2 = \sum_j (p^j)^2$,

$$\frac{dx^j}{dt} = \frac{1}{M_0 \gamma} p^j, \qquad \frac{dp^j}{dt} = F^j + p^j \frac{\frac{dM_0}{dt}}{M_0}.$$

Remarquons tout d'abord que, sous cette forme, du fait de la présence du terme parallèle à p^j, la mécanique en question apparaît bien comme une mécanique dissipative. L'espace des conditions initiales du système est l'espace $\mathbf{R}_{(x^j, p^j)}$ de point générique (x^j, p^j).

Si nous posons ici :

$$J_{(6)(p)} = \frac{D[x^j, p^j]}{D[x^j_{(i)}, p^j_{(i)}]},$$

et si nous appliquons le théorème de Liouville *en supposant comme précédemment que* F^j *ne dépend pas des* p^j, *et que* M_0 *ne dépend que du temps,* il vient

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Log} J_{(6)(p)} = \sum_j \left\{ \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{1}{M_0 \gamma} p^j \right) + \frac{\partial}{\partial p^j} \left(F^j + p^j \frac{\frac{dM_0}{dt}}{M_0} \right) \right\}.$$

Les variables x^j et p^j sont indépendantes, d'où

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Log} J_{(6)(p)} = 3 \frac{\frac{dM_0}{dt}}{M_0},$$

et, en introduisant l'entropie fine définie dans $\mathbf{R}_{(x^j, p^j)}$,

$$S_f^{(6)(p)} = k \operatorname{Log} J_{(6)(p)},$$

$$dS_f^{(6)(p)} = 3k \frac{dM_0}{M_0}.$$

Nous commenterons plus loin ce résultat.

4.2. **La mécanique de A. Guessous** [24]

Il s'agit de (4.2) :

$$\frac{d}{dt}(M_0 \gamma v^j) = F^j.$$

En l'absence de forces appliquées, c'est l'impulsion — et non la vitesse — qui reste constante. Ceci est le postulat fondamental de A. Guessous.

Nous définirons encore deux entropies fines :

a. L'entropie fine dans $\mathbf{R}_{(x^j,\, p^j)}$

(4.2) peut s'écrire :

$$\frac{dx^j}{dt} = v^j, \qquad M_0 \frac{d}{dt}(\gamma\, v^j) = F^j - \gamma\, v^j \frac{dM_0}{dt},$$

ou encore, avec $u^j = \frac{\gamma\, v^j}{c}$, $\gamma = \sqrt{1 + u^2}$, $u^2 = \sum_j (u^j)^2$,

$$\frac{dx^j}{dt} = \frac{c}{\gamma} u^j, \qquad \frac{du^j}{dt} = \frac{F^j}{M_0\, c} - u^j \frac{\frac{dM_0}{dt}}{M_0}.$$

Il vient alors, *si l'on suppose toujours que* $F^j = F^j\,(x^l, t)$ *et que* $M_0 = f\,(t)$,

$$dS_f^{(6)(u)} = -\,3\,k\,\frac{dM_0}{M_0}.$$

b. L'entropie fine dans $\mathbf{R}_{(x^j,\, p^j)}$

(4.2) s'écrit également :

$$\frac{dx^j}{dt} = \frac{1}{M_0\,\gamma} p^j, \qquad \frac{dp^j}{dt} = F^j \qquad \left(\gamma = \sqrt{1 + \frac{p^2}{M_0^2\, c^2}}\right).$$

Avec les *mêmes hypothèses que précédemment*, on trouve cette fois :

$$dS_f^{(6)(p)} = 0.$$

4.3. Résumé comparatif

Regroupons sous forme d'un tableau à double entrée les divers résultats établis aux paragraphes 3 et 4.

	Type de mécanique		
Espace considéré	$\frac{d}{ds}(M_0\, c^2\, u) = \Phi^\alpha$	$M_0 \frac{d}{dt}(\gamma\, v^j) = F^j$	$\frac{d}{dt}(M_0\, \gamma\, v^j) = F^j$
$\mathbf{R}_{(x,\,u)}$............ (8 ou 6 dimensions suivant le cas)	$dS_f = 0$	$dS_f = 0$	$dS_f = -3\,k \frac{dM_0}{M_0}$
$\mathbf{R}_{(x,\,p)}$............	$dS_f = 4\,k \frac{dM_0}{M_0}$	$dS_f = 3\,k \frac{dM_0}{M_0}$	$dS_f = 0$

Nous nous permettrons deux commentaires :

a. En se basant sur l'entropie fine, c'est la mécanique de H. Arzeliès, et non celle de A. Guessous, qui apparaît comme la restriction à $\mathbf{R}^3$ de la mécanique covariante à masse propre variable.

b. Aucune des trois mécaniques ci-dessus ne fait apparaître une variation d'entropie fine de la forme $\frac{dQ}{T}$, où T serait proportionnelle à la pseudoénergie cinétique (ou à l'énergie cinétique). On peut donc se proposer de rechercher un modèle différent qui conduirait à un résultat de cette forme. Ce sera l'objet du prochain paragraphe.

5. L'ENTROPIE FINE EN MÉCANIQUE DISSIPATIVE NON COVARIANTE

5.1. La Mécanique dissipative relativiste non covariante

Au paragraphe 3, nous avons montré qu'il n'existait qu'une seule mécanique covariante à masse variable, et que cette mécanique était identique à la forme covariante de la Mécanique dissipative.

Cette identité n'est plus vraie en formulation non covariante. On a déjà remarqué, en effet, que les deux formes de mécanique à masse propre variable étaient alors des dynamiques différentes; nous allons constater maintenant qu'il existe de plus une mécanique dissipative non covariante différente des deux précédentes, à savoir :

$$\frac{dp^j}{dt} = f^j = \mathrm{A}\, p^j + \mathrm{B}^k \wedge p^l \qquad (j, k, l = 1, 2, 3), \tag{5.1}$$

où $p^j = m_0 \gamma v^j$, m_0 *étant la masse au repos traditionnelle* ($m_0 = \mathrm{Cte}$).

Avant de calculer son entropie fine, soulignons que la mécanique en question semble assez proche des exigences expérimentales et d'un concept courant en Thermodynamique, à savoir que, lorsqu'on chauffe un gaz, ce n'est pas la masse au repos mais l'énergie cinétique de chaque molécule qui varie. Cette considération n'exclut d'ailleurs pas la possibilité d'utiliser une mécanique à masse propre variable pour le gaz pris dans son ensemble.

On remarquera encore que les espaces $\mathbf{R}_{(x^j, u^j)}$ et $\mathbf{R}_{(x^j, p^j)}$ sont confondus, puisque $m_0 = \mathrm{Cte}$.

De (5.1) on déduit la variation de l'énergie du point matériel considéré :

$$d\mathrm{E} = f^j v_j\, dt = (\mathrm{A}\, p^j + \mathrm{B}^k \wedge p^l) \frac{p_j\, dt}{m_0 \gamma} = \frac{\mathrm{A}\, p^2}{m_0 \gamma} dt,$$

d'où

$$\mathrm{A} = \frac{m_0 \gamma}{p^2} \frac{d\mathrm{E}}{dt}.$$

Écrivons maintenant l'équation (5.1) sous forme d'un système du premier ordre :

$$\frac{dx^j}{dt} = \frac{1}{m_0 \gamma} p^j, \qquad \frac{dp^j}{dt} = \mathrm{A}\, p^j + \mathrm{B}^k \wedge p^l \qquad \left(\gamma = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}}\right)$$

et appliquons le théorème de Liouville à ce système dont l'espace des conditions initiales est $\mathbf{R}_{(x^j, p^j)}$. *On supposera que* A *et* B^k *sont des grandeurs qui ne dépendent pas des* p^j. Il vient donc :

$$\mathrm{J}_{(6)} = \frac{\mathrm{D}\,[x^j, p^j]}{\mathrm{D}\,[x^j_{(i)}, p^j_{(i)}]}$$

et

$$\frac{d}{dt} \mathrm{Log}\, \mathrm{J}_{(6)} = \sum_j \left\{ \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{1}{m_0 \gamma} p^j\right) + \frac{\partial}{\partial p^j} (\mathrm{A}\, p^j + \mathrm{B}^k \wedge p^l) \right\},$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt} \mathrm{Log}\, \mathrm{J}_{(6)} = 3\, \mathrm{A}.$$

Introduisons maintenant l'entropie fine et la valeur de A calculée plus haut. Il vient

$$\frac{d\mathrm{S}_f^{(6)}}{dt} = k \frac{d}{dt} \mathrm{Log}\, \mathrm{J}_{(6)} = 3\, k\, \mathrm{A} = 3\, k \frac{m_0 \gamma}{p^2} \frac{d\mathrm{E}}{dt},$$

$$\frac{d\mathrm{S}_f^{(6)}}{dt} = \frac{3\, k}{m_0 \gamma v^2} \frac{d\mathrm{E}}{dt}.$$

En désignant par $\mathrm{E}^*_{\mathrm{cin}}$ la pseudo-énergie cinétique du point,

$$\mathrm{E}^*_{\mathrm{cin}} = \frac{1}{2} m_0 v^2 \gamma,$$

le résultat précédent devient

$$\frac{d\mathrm{S}_f^{(6)}}{dt} = \frac{3}{2} \frac{k}{\mathrm{E}^*_{\mathrm{cin}}} \frac{d\mathrm{E}}{dt}.$$

Enfin, si l'on associe au point matériel une « température » T telle que

$$\mathrm{E}^*_{\mathrm{cin}} = \frac{3}{2} k \mathrm{T},$$

on parvient à la forme suivante :

$$d\mathrm{S}_f^{(6)} = \frac{d\mathrm{E}}{\mathrm{T}}.$$

Dès qu'on imagine d'interpréter les apports de chaleur à l'aide d'un modèle dissipatif ([18], [28]), dE devient l'apport de chaleur (puisqu'il est dû au terme dissipatif A p^j) et la forme précédente prend un aspect bien connu, à savoir :

$$dS_f^{(6)} = \frac{dQ}{T}.$$

Cependant, ici, chacune des grandeurs dQ, T et $dS_f^{(6)}$ est une grandeur « fine », c'est-à-dire une grandeur associée à chacun des points matériels. On remarquera que le résultat précédent, qui généralise un résultat antérieur [28], était déjà contenu implicitement ([3]) dans deux formules d'un travail encore plus ancien [18].

5.2. La Mécanique dissipative prérelativiste

Pour que l'exposé d'ensemble présenté aujourd'hui soit complet, nous rappellerons maintenant les résultats relatifs à la Mécanique dissipative prérelativiste, quoiqu'ils aient déjà été publiés ([18], [28]). Ces résultats se déduisent d'ailleurs directement du cas traité ci-dessus. m_0 étant la masse classique (m_0 = Cte), la Mécanique dissipative prérelativiste s'écrit :

$$\frac{dp^j}{dt} = f^j = A\, p^j + B^k \wedge p^l,$$

où, maintenant, $p^j = m_0\, v^j$.

En associant à chaque particule une « température » T définie par l'énergie cinétique

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m_0\, v^2 = \frac{3}{2} k\, T,$$

il vient encore

$$dS_f^{(6)} = \frac{dQ}{T},$$

en posant $dQ = f^j\, v_j\, dt$.

On remarquera que ce résultat est celui de Helmholtz ([3], [4], [11]). En effet :

$$dQ = f^j\, v_j\, dt = \frac{dp^j}{dt} v_j\, dt = dE_{cin},$$

d'où

$$\frac{dQ}{E_{cin}} = \frac{dE_{cin}}{E_{cin}} = 2\frac{dp}{p},$$

ce qui est bien le résultat de Helmholtz.

([3]) Il suffit en effet de faire $n = 1$ dans les formules de la page 20 de [18], et d'utiliser le résultat de la page 22 concernant le passage de l'espace $\mathbf{R}_{(x,x')}$ à l'espace $\mathbf{R}_{(x,p_x)}$

6. L'ENTROPIE FINE ET L'ACTION DE MAUPERTUIS

Louis de Broglie a établi une relation de proportionnalité entre l'entropie et l'action maupertuisienne d'un système périodique [11]. Nous nous proposons maintenant de voir à quel résultat nous conduit, dans ce domaine, la notion d'entropie fine.

L'action de Maupertuis est définie par une intégrale de la forme

$$A = \int \sum_k p_k \, dq_k,$$

la somme $\sum_k$ portant sur tous les degrés de liberté q_k du système considéré, les p_k étant les moments conjugués. Dans le cas d'un système périodique, l'intégrale est étendue à une période du mouvement, ce que nous noterons

$$A = \oint \sum_k p_k \, dq_k.$$

Si nous considérons un point matériel unique, il reste trois degrés de liberté. Si maintenant nous ne considérons qu'un seul degré de liberté (¹), il reste seulement :

$$A = \oint p \, dq.$$

Le mouvement considéré étant périodique, la trajectoire décrite dans le plan $\mathbf{R}_{(q,\,p)}$ de point générique (q, p) est une trajectoire fermée, et A est l'aire de la surface (S) limitée par cette trajectoire :

$$A = \int_{(S)} dq \, dp.$$

Dire qu'on peut considérer un degré de liberté indépendamment des autres, c'est dire que l'évolution temporelle est de la forme

$$q = f_1(t, q_{(i)}, p_{(i)}), \qquad p = f_2(t, q_{(i)}, p_{(i)}),$$

l'indice (i) caractérisant toujours le point initial.

En interprétant la solution comme la définition d'un changement de variables, on peut écrire :

$$A = \int_{(S)} dq \, dp = \int_{(S_{(i)})} \frac{D[q, p]}{D[q_{(i)}, p_{(i)}]} dq_{(i)} \, dp_{(i)} = \int_{(S_{(i)})} J_{(2)} \, dq_{(i)} \, dp_{(i)},$$

(¹) Nous avons déjà introduit cette restriction au paragraphe 3 afin d'identifier un de nos résultats au résultat correspondant de Louis de Broglie.

avec

$$J_{(2)} = \frac{D[q, p]}{D[q_{(i)}, p_{(i)}]}.$$

Si le mouvement est strictement périodique, nous avons $(S_{(i)}) \equiv (S)$ et $J_{(2)} = 1$. Mais on peut imaginer que le système soit d'abord périodique, pour une durée au moins égale à une période initiale, ce qui permet de calculer :

$$A_{(i)} = \int_{(S_{(i)})} dq_{(i)}\, dp_{(i)},$$

et qu'il devienne ensuite dissipatif, pour atteindre un nouvel état périodique auquel correspondra l'aire

$$A = \int_{(S)} dq\, dp.$$

Si, dans ces conditions, le jacobien $J_{(2)}$ du régime dissipatif transitoire dépend seulement du temps [5], on peut le faire passer devant le signe $\int$, et il vient

$$A = J_{(2)} A_{(i)},$$

d'où

$$\operatorname{Log} J_{(2)} = \operatorname{Log} A - \operatorname{Log} A_{(i)} = \operatorname{Log} A - \mathrm{Cte},$$

d'où encore, en introduisant l'entropie fine du mouvement considéré

$$dS_f^{(2)} = k\, d \operatorname{Log} J_{(2)} = k \frac{dA}{A},$$

$$\frac{dS_f^{(2)}}{k} = \frac{dA}{A}.$$

Si maintenant [6] l'on reste au voisinage de l'aire initiale $A_{(i)}$, on peut faire l'approximation :

$$A \simeq A_{(i)} = \mathrm{Cte},$$

d'où

$$\frac{dS_f^{(2)}}{k} = \frac{dA}{A_{(i)}};$$

---

[5] C'est le cas pour un terme dissipatif de la forme A p, où A est une constante ou une fonction du temps.

[6] Le même type d'hypothèse a déjà été nécessaire au paragraphe 3 pour identifier nos résultats à ceux de Louis de Broglie.

c'est le résultat de Louis de Broglie, écrit sous forme différentielle et pour un mouvement unidimensionnel.

On remarquera évidemment que Louis de Broglie introduit de plus une hypothèse quantique, l'aire $A_{(i)}$ étant choisie égale au quantum d'action $A_{(i)} = h$, d'où finalement

$$\frac{dS_f^{(2)}}{k} = \frac{dA}{h}.$$

7. CONCLUSION GÉNÉRALE

Nous avons rappelé ou démontré que :

1° Il existe une dynamique covariante qui décrit la variation des masses propres comme un processus continu, et cette mécanique à masse propre variable est la version covariante de la Mécanique dissipative. Dans cette description, la variation d'entropie fine est proportionnelle à $\frac{dM_0}{M_0}$.

2° En formulation non covariante, le problème se diversifie :

a. Il existe deux mécaniques différentes à masse propre variable et, pour les deux, il existe une entropie fine proportionnelle à $\frac{dM_0}{M_0}$.

b. Une autre dynamique, version non covariante de la Mécanique dissipative, conduit à une entropie fine de la forme $\frac{dQ}{T}$, où T est proportionnelle à la pseudo-énergie cinétique. On ne peut s'empêcher de faire là un rapprochement avec les résultats classiques de la Thermodynamique relativiste.

3° L'entropie fine fournit aussi une relation entre l'entropie et l'action. Cette relation est voisine de celle obtenue par Louis de Broglie; c'est d'ailleurs également le cas pour la forme $k\frac{dM_0}{M_0}$ du dS covariant.

Nous avons ainsi retrouvé divers résultats établis par d'autres auteurs dans divers domaines de la Thermodynamique relativiste et de la Thermodynamique de la particule isolée. A notre avis, cette possibilité de synthèse est un argument important en faveur du concept, difficilement accepté jusqu'ici, d'« entropie fine », ou « entropie du point matériel ».

REMERCIEMENTS

M. P. Kessler a bien voulu relire le manuscrit du présent article et y apporter de minutieuses corrections. L'auteur le remercie de cette précieuse forme d'encouragement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Liouville, *Note sur la théorie de la variation des constantes arbitraires* (*J. Math. pures et appl.*, t. 3, 1838, p. 342).

[2] E. Zermelo, *Ueber einen Satz der Dynamik und die mechanische Wärmetheorie* [*Wiedermann Ann.* (*Ann. der Physik*), Bd 57, 1896, p. 485].

[3] H. von Helmholtz, *Vorlesungen über theoretische Physik* (Band VI : *Theorie der Wärme*), Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1903.

[4] H. Poincaré, *Thermodynamique*, Gauthier-Villars, Paris, 1908.

[5] P. Caldirola, *Forze non conservative nella meccanica quantistica* (*Nuovo Cimento*, vol. 18, 1941, p. 393).

[6] O. Costa de Beauregard, *La théorie de la relativité restreinte*, Masson, Paris, 1949.

[7] A. Lichnerowicz, *Éléments de calcul tensoriel*, Armand Colin, Paris, 1950.

[8] G. Kalman, *Lagrangian formalism in relativistic dynamics* (*Phys. Rev.*, vol. 123, 1961, p. 384).

[9] S. Guiaşu, *Evoluţia densităţii de probabilitate în spaţiul fazelor, pentru sistemele mecanice neconservative* (*C. R. Acad. Sc. Roumanie*, vol. 12, 1962, p. 1087).

[10] R. J. Duffin, *Pseudo-hamiltonian mechanics* (*Arch. Rational Mech. Anal.*, vol. 9, 1962, p. 309).

[11] L. de Broglie, *La thermodynamique de la particule isolée*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.

[12] J. Fronteau, *Une méthode d'étude des faisceaux secondaires de haute énergie, dans le vide et en milieu diffuseur*, C. E. R. N., 64-11, 1964.

[13] S. Guiaşu, *Sur la mécanique statistique pour les systèmes non conservatifs* [*Rend. Accad. Naz. Lincei* (Rome), vol. 39, 1965, p. 447].

[14] F. Fer, *Incompatibilité de la dynamique hamiltonienne et des théorèmes d'irréversibilité en mécanique statistique classique* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 260, 1965, p. 3873).

[15] J. Fronteau, *Le théorème de Liouville et le problème général de la stabilité*, C. E. R. N., 65-38, 1965.

[16] S. Guiaşu, *La mécanique statistique non conservative* (*Rev. roum. Math. pures et appl.*, t. 11, 1966, p. 541).

[17] P. Caldirola, *Statistical mechanics of non conservative systems* (*Nuovo Cimento*, vol. 46 B, 1966, p. 172).

[18] J. Fronteau, *L'entropie et la physique moderne*, C. E. R. N., MPS/Int., MU/EP, 66-5, 1966.

[19] F. Fer, *Impossibilité de définir une entropie par une fonction de point ou similaire, pour un système hamiltonien en transformation quelconque* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 265, série B, 1967, p. 205).

[20] H. Arzeliès, *Thermodynamique relativiste et quantique*, Gauthier-Villars, Paris, 1968.

[21] S. Guiaşu, *Aplicaţii ale teoriei informaţiei. Sisteme dinamice. Sisteme cibernetice*, Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucarest, 1968.

[22] P. Roman et R. M. Santilli, *A Lie-admissible model for dissipative plasmas* (*Lettere al Nuovo Cimento*, vol. 2, 1969, p. 449).

[23] S. Guiaşu, *Sur la mécanique statistique non conservative. Le cas des forces de friction* (*Rev. roum. Math. pures et appl.*, t. 14, 1969, p. 199).

[24] A. Guessous, *Thermodynamique relativiste*, Gauthier-Villars, Paris, 1970.

[25] O. ONICESCU et S. GUIAŞU, *Mécanique statistique. Principes mathématiques* (Monograph n° 1, International Centre for Mechanical Sciences, Udine), Springer, Vienne et New York, 1971.
[26] L. DE BROGLIE et J. L. ANDRADE E SILVA, *La réinterprétation de la Mécanique ondulatoire* (tome I), Gauthier-Villars, Paris, 1971.
[27] H. ARZELIÈS, *Fluides relativistes. Principes généraux; équations fondamentales*. Masson, Paris, 1971.
[28] J. FRONTEAU, *Apports de chaleur et mécanique dissipative* (*Nuovo Cimento*, vol. 2 B, 1971, p. 107).
[29] O. COSTA DE BEAUREGARD, Intéressantes questions soulevées par H. ARZELIÈS dans *Fluides relativistes* (*Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. 16, 1972, p. 103).
[30] J. FRONTEAU et R. JACQUIER, *Vers un modèle non-hamiltonien de l'oscillateur harmonique* (*Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. 16, 1972, p. 119).

(*Manuscrit reçu le* 10 *octobre* 1972.)