

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

JAN TARSKI

Description fonctionnelle de certaines théories non relativistes de champs. II

Annales de l'I. H. P., section A, tome 17, n° 2 (1972), p. 171-194

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1972__17_2_171_0

© Gauthier-Villars, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Description fonctionnelle de certaines théories non relativistes de champs. II

par

Jan TARSKI (*)

Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Énergies,
Faculté des Sciences de Paris; et Faculté des Sciences d'Amiens

SOMMAIRE. — On continue l'étude précédente des théories non relativistes (et des théories euclidiennes) de champs. Les inégalités qui sont fondamentales pour ces théories sont établies. On donne quelques propriétés des intégrales fonctionnelles et des fonctionnelles génératrices correspondantes.

ABSTRACT. — A previous investigation of non-relativistic (and of Euclidean) field theories is continued. The inequalities which are basic for these theories are established. A few properties of the corresponding functional integrals and generating functionals are given.

1. INTRODUCTION

Cet article est la suite d'une étude, commencée dans [1], de certains modèles de champs quantifiés non relativistes. Les problèmes considérés ici concernent surtout les inégalités intervenant dans ces théories, les intégrales fonctionnelles et leurs mesures, et les fonctionnelles génératrices.

Ces problèmes nous semblent être intéressants, d'ailleurs, hors du contexte assez étroit de théories hamiltoniennes ou bien euclidiennes. Car, nos inégalités ainsi que la méthode de leur démonstration sont apparemment nouvelles. Et en ce qui concerne les intégrales fonctionnelles, elles sont caractérisées par des poids comme $e^{-P_n(\gamma)}$, P_n étant

(*) Adresse pendant 1972-1973 : II. Institut für Theoretische Physik, Universität Hamburg.

un polynôme de degré $2n$. On trouve de telles intégrales, mais heuristiques (et avec $n = 2$), dans plusieurs travaux de mécanique statistique, e. g. [2]. Les informations disponibles sur de telles intégrales sont en vérité très minces, mais nos résultats, bien que très modestes, donnent une contribution à leur approche.

Nous résumons maintenant les hypothèses et les ingrédients principaux qu'on a introduits dans [1] pour les modèles, en corrigeant en même temps quelques détails de cette référence. Or, une des théories considérées est définie, en effet, par une fonctionnelle $\Lambda \{ \varphi \}$, φ désignant le champ. Cette fonctionnelle donne directement l'état fondamental, qui est représenté par

$$(1.1) \quad \Psi_0 \sim (\text{Cte}) \exp (-\Lambda \{ \eta \}).$$

L'espace des fonctions η sera déterminé implicitement par les intégrales ci-dessous. Nous supposons pour Λ une expression,

$$(1.2 a) \quad \Lambda = \Lambda^{(0)} + L_1 + \dots + L_n \stackrel{\text{dt}}{=} \Lambda^{(0)} + \Lambda',$$

où $\Lambda^{(0)}$ est une forme quadratique, et où chaque L_j est construite de la manière suivante :

$$(1.2 b) \quad L_j \{ \eta \} = \int d^3 y [(\eta \star h_j)(y)]^{2n_j}, \quad h_j \in \mathcal{S}^{\otimes 3}.$$

L'indice supérieur $\otimes 3$ désigne le produit tensoriel.

Pour les solutions approximatives, on emploie des fonctionnelles avec un cut-off spatial. Soit χ_V la fonction caractéristique d'un volume fini V . On pose

$$(1.3) \quad \Lambda'_V \{ \eta \} = \Lambda' \{ \chi_V \eta \}.$$

On considère maintenant les fonctionnelles suivantes, données par les intégrales gaussiennes :

$$(1.4) \quad S_V \{ f \} = \frac{1}{N_V^2} \int \omega(\eta) e^{-2\Lambda^{(0)}\{\eta\}} e^{-2\Lambda'_V\{\eta\}} e^{i\langle \eta, f \rangle};$$

la normalisation $S_V \{ 0 \} = 1$ détermine N_V .

Un changement de variable, $\eta = B \xi$, où B est un opérateur de multiplication dans l'espace des impulsions :

$$(1.5 a, b) \quad (B \xi) \sim (p) = 2^{-1/2} (p^2 + m^2)^{-1/4} \tilde{\xi}(p), \quad \| B \| = (2m)^{-1/2},$$

nous permet d'écrire,

$$(1.6) \quad S_V \{ f \} = \frac{1}{N_V^2} \int d\mu^{(0)}(\xi) e^{-2\Lambda'_V(B\xi)} e^{i\langle B\xi, f \rangle}.$$

Ici $\mu^{(0)}$ est la mesure canonique gaussienne pour l'espace hilbertien $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^3, d^3 u)$, avec variance unité.

Or, dans [1] nous avons surtout employé pour l'intégration fonctionnelle la construction de Friedrichs et Shapiro ([3], [4]), ainsi que celle de Guelfand et Vilenkin [5]. Cette dernière construction montre que la mesure $\mu^{(0)}$ et d'autres que nous rencontrons sont dénombrablement additives, lorsqu'elles sont définies sur $(\mathcal{S}')^{\otimes 3}$. On a, de plus, noté dans [1] le fait suivant. Étant donné une fonctionnelle F sur \mathcal{X} , invariante pour l'intégrale de Friedrichs et Shapiro $I_{\mathcal{X}}^{\text{FS}}$, on peut étendre sa définition et obtenir une fonctionnelle f sur $(\mathcal{S}')^{\otimes 3}$, de sorte que

$$(1.7) \quad \int_{(\mathcal{S}')^{\otimes 3}} d\mu^{(0)} f = I_{\mathcal{X}}^{\text{FS}}(F).$$

Dans cet article on élargira cette base de l'intégration fonctionnelle par d'autres méthodes, en particulier par celles de [6]-[9], en tenant compte de la théorie de mesure standard [10].

Retournons aux fonctionnelles S_V . Leur équicontinuité est assurée par l'inégalité

$$(1.8) \quad |S_V\{f\} - S_V\{g\}| \leq I_{\mathcal{X}}^{\text{FS}}(e^{-2\Lambda_V(B)} |\langle B, f - g \rangle| N_V^{-2}) \\ \leq I_{\mathcal{X}}^{\text{FS}}(|\langle \cdot, B(f - g) \rangle|) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \|B(f - g)\|;$$

cf. le théorème 4 en section 3. Les arguments habituels, e. g. ceux qu'on trouve dans [11], établissent qu'il existe une sous-suite $\{S_{V_n}\}$ convergente vers une fonctionnelle S continue sur $\mathcal{S}^{\otimes 3}$, et dont les volumes V_n tendent vers \mathbb{R}^3 . Alors S est la transformée de Fourier, on dit aussi *la fonctionnelle caractéristique*, d'une mesure ν sur $(\mathcal{S}')^{\otimes 3}$ ([5], [9]). On note M l'ensemble des mesures ainsi construites, où Λ est donnée par (1.2) :

$$(1.9 a) \quad M = \left\{ \nu \text{ une mesure sur } (\mathcal{S}')^{\otimes 3} : \int d\nu(\gamma) e^{i\langle \gamma, f \rangle} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{V_n}\{f\} \right\}.$$

Nous avons montré dans (1) que S est, en outre, la fonctionnelle génératrice des valeurs moyennes de l'état fondamental, $\langle \varphi(f_1), \dots, \varphi(f_n) \rangle_0$, pour la théorie correspondante.

On a aussi étudié dans [1] la théorie euclidienne $(\varphi^4)_{1E}$ à une dimension, qui est tout à fait semblable par sa forme aux théories qu'on vient de décrire, bien qu'il y ait des différences de détail. En particulier, dans (1.2b) on a $\hbar = \delta$, donc $\hbar \notin \mathcal{S}$. Cependant, la plupart des conclusions suivantes (ainsi que les conclusions de [1]) s'appliquent à cette théorie-ci. Les exceptions, dans les sections 5 et 6, sont clairement marquées. [Par contre, on obtint dans [1] des résultats plus extensifs pour la théorie euclidienne que pour les théories définies par (1.2).]

Cette théorie-ci admet les constantes de couplage dans l'intervalle $[0, 4(m^2/3)^{3/2})$ (au moins). Il y a donc une famille de mesures corres-

pondantes ν , et nous la noterons M_E :

$$(1.9 b) \quad M_E = \left\{ \nu \text{ une mesure sur } \mathcal{S}' : \int d\nu(\gamma) e^{i\langle \gamma, f \rangle} = \lim_{L \rightarrow \infty} S_L \{ f \} \right\}.$$

En discutant une mesure $\nu \in M \cup M_E$, k désignera le nombre de dimensions spatiales, i. e. $k = 3$ ou 1 respectivement, et \mathcal{H} , l'espace hilbertien $L_2(\mathbb{R}^k) = L_2(\mathbb{R}^k, d^k u)$.

Dans les sections 2 et 3, nous démontrons les inégalités dont on a parlé. Les sections suivantes, 4 et 5, développent un peu de théorie d'intégration par rapport aux mesures ν . On considère, en particulier, la mesurabilité et l'intégrabilité, la convergence des mesures, et le comportement dans une translation. Dans la section 6, on étudie les fonctionnelles génératrices $S\{f\}$, en particulier les équations aux dérivées fonctionnelles qu'elles vérifient, et leur analyticité. Un détail de cette étude, qui concerne l'ordre de croissance à l'infini, est rejeté dans l'appendice A. En outre, on donne dans l'appendice B un exemple d'intégrale sur un espace autre que \mathcal{S}' . Il y a aussi un erratum à la référence [1], qui comprend les corrections indiquées ci-dessus et quelques autres précisions.

L'auteur aimerait remercier le Professeur K. Symanzik pour maintes discussions, et pour avoir trouvé des erreurs dans une précédente tentative pour démontrer les inégalités. Il exprime sa reconnaissance au Laboratoire de Physique théorique et Hautes énergies pour son accueil.

2. SUR LES FONCTIONS DÉCROISSANTES

Nous commençons par un rappel d'un fait élémentaire. Soient $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites, convergentes quand $n \rightarrow \infty$. Alors

$$(2.1) \quad a_n \leq b_n \text{ pour } \forall n \quad \text{implique} \quad \lim a_n \leq \lim b_n.$$

Ce fait-ci, ainsi que la convergence splendide des intégrales qui nous sont pertinentes, nous permettront d'approcher une fonction donnée par des fonctions dérivables, ou peut-être par des fonctions-escalier. De la même manière, il nous suffira de considérer les cas où deux lignes, ou bien trois plans, se croisent en un point, etc. Nous ferons de telles approximations dans la suite, sans justification détaillée.

Les inégalités qu'on utilisait dans [1] se suggérèrent par le fait, que la valeur moyenne d'une fonction croissante sera plus petite (ou plus grande) si l'on ajoute un poids décroissant (ou croissant, resp.) en calculant la moyenne. Bien entendu, on peut remplacer ici *croissant* par *non décroissant*, etc. Or, considérons deux fonctions f et w sur \mathbb{R}^1 , et les

valeurs moyennes suivantes :

$$(2.2 \text{ a, b}) \quad \bar{f} = \frac{\int d\rho f}{\int d\rho}, \quad \bar{f}^{(w)} = \frac{\int d\rho e^{w\rho} f}{\int d\rho e^{w\rho}}.$$

On suppose la mesure ρ positive, et les intégrales bien définies.

LEMME 1. — Soient $f(u)$ et $w(u)$ deux fonctions sur \mathbb{R}^1 , non décroissantes quand $|u|$ croît, et paires [i. e. vérifiant $g(u) = g(-u)$]. Alors

$$(2.3) \quad \bar{f}^{(-w)} \leq \bar{f} \leq \bar{f}^{(w)}.$$

Démonstration. — On remplace w par λw dans (2.2 b), et, en suivant les remarques précédentes, on suppose $\bar{f}^{(\lambda w)}$ dérivable en λ pour $-1 - \varepsilon < \lambda < 1 + \varepsilon$. Alors

$$(2.4) \quad \frac{d}{d\lambda} \bar{f}^{(\lambda w)} = \frac{1}{2} \left(\int d\rho e^{\lambda w} \right)^{-2} \int d\rho (v_1) e^{\lambda w(v_1)} \int d\rho (v_2) e^{\lambda w(v_2)} \\ \times [f(v_1) - f(v_2)] [w(v_1) - w(v_2)].$$

Par hypothèse, les deux derniers facteurs ont toujours le même signe, ou peut-être un d'eux s'annule. Donc la dérivée est toujours non négative, d'où (2.3).

On peut noter, comme une remarque générale, que ce lemme-ci ressemble aux inégalités venant des réarrangements, cf. [12].

Nous n'avons pas trouvé de généralisation directe de ce lemme aux intégrales multiples. Nous pourrions l'utiliser, cependant, pour une intégrale donnée n -uple, si une intégrale intérieure ($n - 1$)-uple se réduit à un poids $e^{-w(v)}$ avec la propriété souhaitée de décroissance. Le lemme 3 ci-dessous assure un tel comportement dans certains cas, tandis que le lemme suivant décrit une observation préliminaire.

LEMME 2. — Soit Ω une figure géométrique bornée dans \mathbb{R}^n , et délimitée par des paires d'hyperplans ($\cong n$ paires), chaque paire étant symétrique par rapport à l'origine. Donc Ω , qui est un hyperparallélogramme généralisé, a la même symétrie. On choisit une famille Π d'hyperplans parallèles. Chaque $\pi \in \Pi$ définit une hyperaire A_π de l'intersection $\pi \cap \Omega$. Conclusion : Les A_π ne croissent pas quand les $\pi \in \Pi$ s'éloignent de l'origine.

Démonstration. — On note d'abord que Ω , étant une intersection des régions convexes, est convexe elle-même. Ensuite, l'ensemble qui comprend les sommets de Ω et l'origine est fini. On peut donc oublier les cas limites, et supposer que chaque $\pi \in \Pi$ comprend au plus un seul tel point. Soit $\pi_0 \in \Pi$ l'hyperplan qui passe par l'origine. Alors $A_{\pi_0} = A_\pi$

pour tous les π dans un voisinage de π_0 . Maintenant on va s'éloigner de l'origine dans un sens choisi. Soient $\pi_1, \pi_2, \dots \in \Pi$ les hyperplans successifs qui comprennent des sommets. On voit facilement, à cause de la convexité, que A_π doit nécessairement décroître après qu'on passe π_1 . La décroissance devient même plus rapide quand on passe π_2, π_3, \dots , et le lemme est démontré.

LEMME 3. — Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des fonctions linéaires sur \mathbb{R}^{n+1} ,

$$(2.5) \quad \alpha_j(c, u) = a_j c + b_{j1} u^1 + \dots + b_{jn} u^n$$

et soient g_0, \dots, g_n des fonctions (mesurables) d'une variable, paires, non négatives, et non croissantes quand on s'éloigne de zéro. Alors

$$(2.6 a) \quad \int_{\mathbb{R}^n} du^1 \dots du^n g_0(\alpha_0) \dots g_n(\alpha_n)$$

est une fonction paire, et non croissante comme fonction de $|c|$ (pourvu que l'intégrale existe). L'intégrale

$$(2.6 b) \quad \int_{\mathbb{R}^n} du^1 \dots du^n \exp\left[-\frac{1}{2} \sum (u^j)^2\right] g_1(\alpha_1) \dots g_m(\alpha_m),$$

où $m \leq n$, est aussi une fonction paire, et non croissante comme fonction de $|c|$.

On n'utilisera que (2.6 b).

Démonstration. — Nous pouvons approcher une fonction g_j par des sommes finies de fonctions de la forme $(\text{Cte}) \theta(k - |\alpha|)$ [où $\text{Cte} > 0$, et $\theta(v) = 1$ pour $v \geq 0$, $\theta(v) = 0$ autrement]. Donc, il suffit d'établir le lemme pour les fonctions

$$(2.7) \quad g_j(c, u) = \theta(k_j - |\alpha_j(c, u)|).$$

Ensuite, une transformation affine des u_k peut amener les formes linéaires au cas où les hyperplans

$$(2.8) \quad \alpha_1 = 0, \quad \dots, \quad \alpha_n = 0$$

se croisent à l'origine. (On omet ici les cas limites.) Le produit $g_1 \dots g_n$ des fonctions de (2.7) définit alors un hyperparallélogramme Ω , qui vérifie les hypothèses du lemme 2.

Pour étudier l'intégrale (2.6 b), on suppose les relations (2.8) et, de plus, une rotation peut amener le vieil origine au point $(ac, 0, 0, \dots, 0)$. On factorise ensuite l'exponentielle gaussienne, et il suffit alors de considérer une fonction θ au lieu d'un facteur exponentiel.

Dans chaque cas, (2.6 a) ou (2.6 b), il y a maintenant une fonction $\theta = \theta_c$ qui dépend de c , et le produit des autres fonctions θ définit un hyperparallélogramme (peut-être généralisé) Ω . Le lemme 2 montre que l'intersection de Ω avec la région où $\theta_c = 1$ décroît quand $|c|$ grandit. En outre, l'invariance des intégrales (2.6) quand $c \rightarrow -c$ est évidente, et le lemme est établi.

3. ESTIMATION DES INTÉGRALES FONCTIONNELLES

Nous considérons d'abord une intégrale telle que (1.6), mais où, au lieu de la dernière exponentielle, on admet $F(\langle \cdot, \zeta \rangle)$, ζ étant un vecteur fixé. Soit \mathcal{X}_1 le complément orthogonal de ζ dans \mathcal{X} [$L_2(\mathbb{R}^3)$ ou $L_2(\mathbb{R}^1)$], et pour $\xi \in \mathcal{X}$ posons

$$(3.1) \quad \xi = c\zeta + \beta, \quad \beta \in \mathcal{X}_1.$$

Alors

$$(3.2) \quad \begin{aligned} & \text{I}_{\mathcal{X}}^{\text{FS}} \left(F(\langle \cdot, \zeta \rangle) \frac{\exp(-2\Lambda'_V\{B.\})}{N_V^2} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dc e^{-(1/2)c^2} F(c) \\ & \quad \times \text{I}_{\mathcal{X}_1}^{\text{FS}} (\exp(-2\Lambda'_V\{cB\zeta + B.\}) N_V^{-2}). \end{aligned}$$

THÉORÈME 4. — Soit $F: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ une fonction paire, non décroissante comme fonction de valeur absolue de son argument, et dans $L_{1+\varepsilon}(\mathbb{R}^1)$, de $e^{-(1/2)c^2}$ avec $\varepsilon > 0$. Alors

$$(3.3) \quad \text{I}_{\mathcal{X}}^{\text{FS}} (F(\langle \cdot, \zeta \rangle) e^{-2\Lambda'_V\{B.\}} N_V^{-2}) \leq \text{I}_{\mathcal{X}}^{\text{FS}} (F(\langle \cdot, \zeta \rangle)).$$

(Pour la théorie euclidienne, on remplace V par L .)

Démonstration. — L'invariance de la fonctionnelle $F e^{-2\Lambda'_V}$ (pour I^{FS}) découle des conclusions générales de ([4], sect. 3 et 4). Donc, l'intégrale dans le premier membre de (3.3) existe. On peut ainsi l'approcher par des intégrales de dimension finie. En outre, on emploie la forme explicite (1.2) de Λ'_V , où l'on approche l'intégrale par rapport à y , par une somme de Riemann. Ces deux approximations réduisent l'intégrale sur \mathcal{X}_1 à la suivante :

$$(3.4) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{N_V^2 (2\pi)^{m/2}} \int du^1 \dots du^m \\ & \quad \times \exp \left[-\frac{1}{2} \sum (u^i)^2 \right] \exp(-\alpha_1^{2m_1} - \dots - \alpha_q^{2m_q}), \end{aligned}$$

où chaque α_j est une forme, linéaire en c et en variables u^k .

Nous sommes donc amenés au point où la décroissance en $|c|$ est assurée par le lemme 3. (Si $q > m$, on peut trivialement augmenter le nombre des variables u^k .) Un passage à la limite $q \rightarrow \infty$ dans (3.4) donne maintenant une approximation telle qu'on en rencontre dans la construction de Friedrichs et Shapiro, et par la limite $m \rightarrow \infty$ on retrouve l'intégrale sur \mathcal{A}_1 . Bien entendu, la décroissance en $|c|$ se conserve dans les passages aux limites. On peut donc écrire l'intégrale sur \mathcal{A}_1 comme $e^{-w(c)}$, et $I_{\mathcal{A}_1}^{\text{FS}}(F)$ correspond à $w = 0$. Une application du lemme 1 conduit alors au théorème.

L'extension de ce théorème à l'intégrale par rapport aux mesures ν dépend du fait suivant (e. g. [13], p. 45 f.) : Soient ρ_n ($n = 1, 2, \dots$) et ρ des mesures finies sur \mathbb{R}^k , vérifiant

$$(3.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int d\rho_n(u) e^{ius} = \int d\rho(u) e^{ius}, \quad \forall s \in \mathbb{R}^k.$$

Alors $\rho_n \rightarrow \rho$ étroitement, i. e.

$$(3.6) \quad \int d\rho_n f \rightarrow \int d\rho f$$

pour $\forall f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^1$ continue et bornée. Si f n'est pas bornée mais si elle est continue et dans $L_{1+\varepsilon}(\rho_n)$, $\forall n$, avec $\varepsilon > 0$ et avec $\sup_n \|f\|_{1+\varepsilon}^{\rho_n} < \infty$, alors (3.6) reste valable [13]. On discutera ce point plus en détail en section 5. Or, la convergence $S_n \{f\} \rightarrow S \{f\}$ implique une relation comme (3.5), d'où la conclusion suivante :

COROLLAIRE 5. — *Sous les hypothèses du théorème, et pour $\nu \in \mathbb{M} \cup \mathbb{M}_E$,*

$$(3.7) \quad \int d\nu(\eta) F(\langle \eta, \zeta \rangle) \leq I_{\mathcal{A}}^{\text{FS}}(F(\langle \cdot, B \zeta \rangle)).$$

Pour un produit des fonctions F telles que la précédente, on peut utiliser l'inégalité de Hölder.

COROLLAIRE 6. — *Si chaque F_j ($j = 1, \dots, n$) vérifie les hypothèses du théorème et, de plus, les conditions $F_j \in L_{n+\varepsilon}(\mathbb{R}^1, dc e^{-(1/2)c^2})$ et $F_j \geq 0$, alors*

$$(3.8) \quad \int d\nu(\eta) \prod_j F_j(\langle \eta, \zeta_j \rangle) \leq \prod_j [I_{\mathcal{A}}^{\text{FS}}(F_j(\langle \cdot, B \zeta_j \rangle))]^{1/n}.$$

En outre, pour $f_j \in \mathcal{A}$ ($j = 1, \dots, n$), on a

$$(3.9 a) \quad \int d\nu(\eta) \prod_j |\langle \eta, f_j \rangle| \leq \prod_j [I_{\mathcal{A}}^{\text{FS}}(|\langle \cdot, B f_j \rangle|^n)]^{1/n}$$

$$(3.9 b) \quad = \pi^{-1/2} 2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \prod_j \|B f_j\|,$$

et, avec c_n dépendant de n seulement,

$$(3.9 c) \quad \int d\nu(\eta) \prod_j |\langle \eta, f_j \rangle| \leq c_n \mathbf{I}_{\mathcal{H}}^{\text{FS}} \left(\prod_j |\langle \cdot, B f_j \rangle| \right).$$

Le théorème et les corollaires établissent maintenant les inégalités (4.5), (5.1 b) et (5.3 a) de [1]. La forme précise du deuxième membre de (3.9 c) [qui résulte de (3.9 b) et de la compacité de la sphère S^{n-1}] ne fut pas utilisée dans [1].

Comme on nota dans [1], les estimations pour les autres couplages seront en général moins simples; cf. [11] pour la théorie φ^4 avec cut-off. Nous allons donner ici un autre exemple où les inégalités précédentes ne semblent pas être valables.

Supposons que Λ ait un terme de la forme $L_1 L_2$. Alors les approximations qu'on fait en démontrant le théorème 4 donneraient un intégrand avec des facteurs $\exp(-\alpha_1^{2\nu_1} \alpha_2^{2\nu_2})$, qui peuvent contredire le lemme 3. Car, si nous prenons un tel facteur pour intégrand, avec un nombre $n = n_1 = n_2$ très grand, et avec

$$(3.10) \quad \alpha_1 = c + u, \quad \alpha_2 = c - u, \quad (\alpha_1 \alpha_2)^2 = (c^2 - u^2)^2,$$

l'intégrand est alors approximativement un pour la dernière quantité < 1 , et approximativement zéro autrement. Donc, pour $c = 0$,

$$(3.11 a) \quad \int_{-\infty}^{\infty} du \exp(-u^{2n}) \approx \int_{-1}^{+1} du = 2,$$

tandis que, pour $c = 1$,

$$(3.11 b) \quad \int_{-\infty}^{\infty} du \exp[-(1 - u^2)^{2n}] \approx \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} du = 2\sqrt{2}.$$

4. MESURABILITÉ ET INTÉGRABILITÉ DES FONCTIONNELLES

Dans l'étude des fonctionnelles, les fonctionnelles polynomiales sont fondamentales. Nous nous rappelons donc le résultat suivant pour l'intégrale canonique sur un espace hilbertien $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^k, \rho)$. Pour les références, voir [3], [14], [15].

THÉORÈME 7. — *On considère une fonctionnelle polynomiale de degré $2n$ sur $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^k, \rho)$,*

$$(4.1 a) \quad P\{\eta\} = \int d\rho(u_1) \dots d\rho(u_{2n}) \eta(u_1) \dots \eta(u_{2n}) \Upsilon(u_1, \dots, u_{2n}).$$

Le noyau γ , qu'on suppose symétrique, définit un opérateur Γ sur les n -tenseurs symétriques de $\mathcal{K}^{\otimes n}$, de sorte que

$$(4.1 \text{ b}) \quad \mathbf{P} \{ \eta \} = \langle \eta^{\otimes n}, \Gamma \eta^{\otimes n} \rangle.$$

(a) Si Γ est à trace, alors \mathbf{P} est invariante dans le sens de Friedrichs et Shapiro. Pour l'intégrale de FS avec la variance v , on a

$$(4.2) \quad \mathbf{I}_{\mathcal{K}}^{\text{FS}}(\mathbf{P}) = v^n \cdot 1 \cdot 3 \dots (2n - 1) \operatorname{tr} \Gamma.$$

(b) Si Γ est à trace, alors

$$(4.3) \quad \operatorname{tr} \Gamma = \int d\rho(u_1) \dots d\rho(u_n) \gamma(u_1, \dots, u_n, u_1, \dots, u_n).$$

(c) Supposons que $\Gamma \geq 0$, i. e.

$$(4.4) \quad \int \left[\prod_{j=1}^n d\rho(u_{2j-1}) d\rho(u_{2j}) \eta_j(u_{2j-1}) \eta_j(u_{2j}) \right] \gamma(u_1, \dots, u_{2n}) \geq 0$$

pour $\forall \eta_1, \dots, \eta_n \in \mathcal{K}$. Alors Γ est à trace si et seulement si l'intégrale dans (4.3) est $< \infty$.

Or, une mesure $\nu \in \mathbf{M} \cup \mathbf{M}_E$ sur $(\mathcal{S}')^{\otimes k}$ est construite par extension des mesures cylindriques. (La notion de mesure cylindrique est, essentiellement, la même que celle de *distribution faible* [6]-[8], et que celle de *promesure* [9].) Pour une telle mesure, les fonctionnelles cylindriques qui sont mesurables comme fonctions sur \mathbb{R}^n , sont nécessairement mesurables sur $(\mathcal{S}')^{\otimes k}$. Ceci s'applique en particulier à

$$(4.5) \quad \int du_1 \dots du_q \eta(u_1) \dots \eta(u_q) \sum_{j=1}^n \gamma_{j1}(u_1) \dots \gamma_{jq}(u_q),$$

où $u_j \in \mathbb{R}^k$, et où l'on suppose $\gamma_{ji} \in \mathcal{S}^{\otimes k}$. Les fonctionnelles qui sont partout (ou p. p.) limites de fonctionnelles mesurables sont elles-mêmes mesurables ([10], p. 176). De telles limites mènent e. g. à

$$(4.6) \quad \mathbf{P}_q \{ \eta \} = \int du_1 \dots du_q \eta(u_1) \dots \eta(u_q) \gamma_q(u_1, \dots, u_q),$$

où $\gamma_q \in \mathcal{S}^{\otimes kq}$. (On montra en détail par ailleurs [16], que $\gamma_2 \in \mathcal{S}^{\otimes 2}$ définit un opérateur à trace sur $L_2(\mathbb{R}^1)$).

Prenons maintenant $k = 1$, et considérons, plus généralement, les sommes infinies,

$$(4.7) \quad \mathbf{F} \{ \eta \} = \sum_{q=0}^{\infty} \mathbf{P}_q \{ \eta \}.$$

Une condition suffisante pour la convergence de cette série pour $\forall \eta \in \mathcal{S}'$ est la suivante. La suite $(\gamma_0, \gamma_1, \dots)$ doit être un élément de l'espace \mathfrak{S} de [17], et de plus, les normes $\|\gamma_n\|_r$ de [17] doivent vérifier la relation $\|\gamma_n\|_r e^{cn} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, pour $\forall r, \forall c$. On note \mathfrak{S}_1 le sous-espace de \mathfrak{S} correspondant.

LEMME 8. — Soient

$$\gamma_j \in \mathcal{S}^{\otimes j}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \text{et} \quad \gamma_0 \in \mathbb{R}_1.$$

Si $(\gamma_0, \gamma_1, \dots) \in \mathfrak{S}_1$, alors la fonctionnelle F définie par (4.6) et (4.7) est mesurable pour une mesure sur \mathcal{S}' , construite par extension d'une mesure cylindrique.

Une conclusion semblable est valable pour les mesures sur $(\mathcal{S}')^{\otimes k}$.

On considère ensuite les mesures $\nu \in \mathbb{M} \cup \mathbb{M}_E$. Le fait suivant est élémentaire et utile.

LEMME 9. — Si $\nu \in \mathbb{M} \cup \mathbb{M}_E$, et si P_q est donnée par (4.6), alors $P_q \in L_1((\mathcal{S}')^{\otimes k}, \nu)$.

Démonstration. — Nous donnons les détails pour $\nu \in \mathbb{M}$, mais le cas $\nu \in \mathbb{M}_E$ est analogue. On développe γ_q en série des fonctions de Hermite (où $u_j \in \mathbb{R}^1$),

$$(4.8) \quad \gamma_q(u_1, \dots, u_{3q}) = \sum a_{n_1 \dots n_{3q}} \bar{h}_{n_1}(u_1) \dots \bar{h}_{n_{3q}}(u_{3q}).$$

Le corollaire 6 nous dit que

$$(4.9) \quad \int d\nu(\eta) |P_q\{\eta\}| \leq \pi^{-1/2} 2^{q/2} \Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right) (2m)^{-q/2} \sum |a_{n_1 \dots n_{3q}}|,$$

parce que $\|B \bar{h}_{i_1} \bar{h}_{i_2} \bar{h}_{i_3}\| \leq (2m)^{-1/2}$. La convergence de la dernière série, voir e. g. [18], donne le lemme.

Nous abordons maintenant les propriétés de ν , qui dépendent du fait que les S_{V_n} sont continues sur \mathcal{H} , et pas seulement sur $\mathcal{S}^{\otimes k}$. Cette continuité sur \mathcal{H} permet une réduction importante de l'espace d'intégration.

Soit \mathcal{K} un espace hilbertien, et $A : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ un opérateur de Hilbert-Schmidt, symétrique et strictement positif. On note par $\mathcal{K}^{(\pm 1)}$ les espaces hilbertiens déterminés par les normes respectives,

$$(4.10 \ a, \ b) \quad \|\xi\|^{(1)} \stackrel{\text{df}}{=} \|A^{-1}\xi\|, \quad \|\xi\|^{(-1)} \stackrel{\text{df}}{=} \|A\xi\|.$$

I. e., $\mathcal{K}^{(1)} = D(A^{-1})$ et $\mathcal{K}^{(-1)}$ est son dual. Le résultat suivant découle maintenant directement de cette définition, et des conclusions de ([8], p. 23 et suiv. et 6).

LEMME 10. — (a) Soient \mathcal{K} et A comme ci-dessus, λ une mesure cylindrique sur \mathcal{K} , T sa fonctionnelle caractéristique, et

$$(4.11) \quad T^A\{f\} \stackrel{\text{df}}{=} T\{Af\}.$$

Alors, T^A est la fonctionnelle caractéristique d'une mesure $\lambda \circ A^{-1}$ (dénombrablement additive) sur \mathcal{X} .

(b) La mesure cylindrique λ s'étend à une mesure λ sur $\mathcal{X}^{(-1)}$, de sorte que

$$(4.12) \quad \int_{\mathcal{X}^{(-1)}} d\lambda(\eta) f\{A\eta\} = \int_{\mathcal{X}} d(\lambda \circ A^{-1})(\eta) f\{\eta\}$$

(où l'existence d'une intégrale implique celle de l'autre et leur égalité).

(c) Chaque fonctionnelle g sur $\mathcal{X}^{(-1)}$, continue pour la topologie forte, est mesurable pour λ , et de la forme

$$(4.13) \quad g\{A^{-1}\eta\} = f\{\eta\}, \quad \eta \in \mathcal{X},$$

où f est une fonctionnelle sur \mathcal{X} , continue pour la topologie forte.

Or, on se rappelle que l'opérateur

$$(4.14) \quad A_0 \stackrel{\text{df}}{=} 2^k \prod_{j=1}^k \left[(u^j)^2 + 1 - \frac{d^2}{d(u^j)^2} \right]^{-1}$$

agit sur les fonctions de Hermite de la manière suivante,

$$(4.15) \quad A_0 \bar{h}_{n_1}(\cdot) \dots \bar{h}_{n_k}(\cdot) = \left[\prod_{j=1}^k (n_j + 1)^{-1} \right] \bar{h}_{n_1}(\cdot) \dots \bar{h}_{n_k}(\cdot),$$

où \bar{h}_{n_j} est une fonction de u^j . Donc, A_0 est de Hilbert-Schmidt sur $\mathcal{X} = \mathbb{L}_2(\mathbb{R}^k)$. En outre, le choix $A = A_0$ donne $\mathcal{X}^{(-1)} \subset (\mathcal{S}')^{\otimes k}$.

LEMME 11. — Soient $\nu \in M \cup M_E$, S la fonctionnelle caractéristique de ν , \mathcal{X} l'espace hilbertien correspondant, et A_0 l'opérateur de (4.14). Alors :

(a) S est la fonctionnelle caractéristique d'une mesure cylindrique $\nu_{\mathcal{X}}$ sur \mathcal{X} .

(b) La restriction de ν à $\mathcal{X}^{(-1)}$ coïncide avec l'extension de $\nu_{\mathcal{X}}$ au même espace.

La partie (a) découle de (1.8) et de [19]; cf. aussi ([8], p. 7). La partie (b) dépend du fait que ν elle-même est déterminée par $\nu_{\mathcal{X}}$. Or, le lemme 10 implique maintenant que

$$(4.16 \text{ a, b}) \quad \nu(\mathcal{X}^{(-1)}) = 1 \quad \text{et} \quad \nu((\mathcal{S}')^{\otimes k} \setminus \mathcal{X}^{(-1)}) = 0.$$

Ces équations peuvent s'exprimer ainsi :

COROLLAIRE 12. — La mesure ν est concentrée sur $\mathcal{X}^{(-1)}$.

Les lemmes et corollaires précédents suggèrent la construction d'une théorie d'intégration directement par rapport à $\nu_{\mathcal{X}}$, sans choisir d'extension à une mesure particulière. Une telle étude pour la mesure cylindrique

canonique $\mu_{\mathcal{H}}^{(0)}$ est développée dans [6]-[8]. Or, le lemme 1.1 de [7] s'adapte sous la forme suivante à $\nu_{\mathcal{H}}$:

LEMME 13. — Soient $\nu \in M \cup M_E$, $\nu_{\mathcal{H}}$ la mesure cylindrique sur \mathcal{H} correspondante, et A_1 un opérateur sur \mathcal{H} ayant une image de dimension finie. Alors

$$(4.17) \quad \int d\nu_{\mathcal{H}}(\eta) \|A_1 \eta\|^2 \leq \int d\mu_{\mathcal{H}}^{(0)}(\xi) \|A_1 B \xi\|^2 = \text{tr } BA_1^* A_1 B.$$

Démonstration. — On décompose $\|A_1 B \xi\|^2$ en utilisant les vecteurs propres de $BA_1^* A_1 B$, et pour chaque terme, la majoration (3.3) est valable. La dernière égalité vient de (4.2).

Ce lemme nous permet de répéter les arguments que Gross [7] a utilisés pour l'étude de la mesure cylindrique $\mu_{\mathcal{H}}^{(0)}$. On trouve :

ASSERTION 14. — Les théorèmes 1 et 2 de [7] restent valables pour l'intégration par rapport à la mesure cylindrique $\nu_{\mathcal{H}}$ correspondant à $\nu \in M \cup M_E$.

5. CONVERGENCE DES MESURES ET QUELQUES CONSÉQUENCES

Nous traitons dans cette section des mesures de probabilité. On suppose que ces mesures, non négatives et normalisées à l'unité, sont sur un espace \mathcal{B}' de Banach, réel, séparé, et dual à \mathcal{B} , et qu'elles sont définies sur les ensembles ouverts pour la topologie forte. Or, les mesures $\nu \in M \cup M_E$ ainsi que les μ_n (correspondant aux S_{V_n}) sont de ce genre, si nous prenons leurs restrictions aux espaces $\mathcal{B}^{\mathcal{L}^{(-1)}}$, cf. le corollaire 12.

Pour de telles mesures de probabilité, on dit que $\lambda_n \rightarrow \lambda$ étroitement, si

$$(5.1) \quad \int d\lambda_n F \rightarrow \int d\lambda F$$

pour $\forall F : \mathcal{B}' \rightarrow \mathbb{R}^1$, bornée et continue (pour la topologie forte). Supposons maintenant que les λ_n et λ ont les fonctionnelles caractéristiques T_n et T , respectivement, et que $T_n \{f\} \rightarrow T \{f\}$ pour $\forall f \in \mathcal{B}$. Alors, contrairement au cas de dimension finie (cf. la section 3), il n'est pas nécessairement vrai que $\lambda_n \rightarrow \lambda$ étroitement. Un contre-exemple simple se trouve dans ([8], p. 22). On a, cependant, le résultat suivant (adapté de *loc. cit.*, théorème 2).

THÉORÈME 15. — On considère des mesures λ_n ($n = 1, 2, \dots$) et λ de probabilité sur un espace hilbertien \mathcal{H} , ayant les fonctionnelles caractéristiques respectives T_n, T . Soit A un opérateur positif, symétrique, et de Hilbert-Schmidt sur \mathcal{H} . Alors, la définition des T_n et T s'étend par conti-

nuité à l'espace $\mathcal{K}^{(-1)}$ défini par (4.10 b). La relation suivante (où $\mu^{(0)}$ est canonique pour \mathcal{K}) :

$$(5.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{K}^{(-1)}} d\mu^{(0)}(f) |T_n\{f\} - T\{f\}| = 0,$$

est nécessaire et suffisante pour la convergence étroite $\lambda_n \rightarrow \lambda$ sur \mathcal{K} .

Si $T_n\{f\} \rightarrow T\{f\}$ pour $\forall f \in \mathcal{K}^{(-1)}$ (i. e. pas seulement pour $\forall f \in \mathcal{K}$), alors le théorème de la convergence bornée et le fait que $|T_n\{f\}| \leq 1$ donnent (5.2) directement. En général, on n'a pas de telle convergence sur $\mathcal{K}^{(-1)}$, mais on peut obtenir une convergence des intégrales plus restreinte.

En effet, il suffit que les λ_n, λ soient des mesures cylindriques. Alors $\lambda_n \circ A^{-1}, \lambda \circ A^{-1}$ sont des mesures de probabilité, dont les fonctionnelles caractéristiques vérifient

$$(5.3) \quad T_n^A\{f\} \rightarrow T^A\{f\}, \quad \forall f \in \mathcal{K}^{(-1)},$$

donc ces mesures convergent étroitement. Les équations (4.12-13) mènent alors à une relation de convergence pour les λ_n , quand on les étend aux mesures sur $\mathcal{K}^{(-1)}$.

COROLLAIRE 16. — *On fait les hypothèses du théorème, mais les λ_n, λ peuvent être des mesures cylindriques (sans être des mesures de probabilité). On suppose que $T_n \rightarrow T$ sur \mathcal{K} . Alors*

$$(5.4) \quad \lambda_n \circ A^{-1} \rightarrow \lambda \circ A^{-1} \quad \text{étroitement sur } \mathcal{K}.$$

D'ailleurs, les mesures λ_n, λ sur $\mathcal{K}^{(-1)}$, construites par extension, sont telles que

$$(5.5) \quad \lambda_n \rightarrow \lambda \quad \text{étroitement sur } \mathcal{K}^{(-1)}.$$

La relation (5.5) s'applique en particulier au cas suivant,

$$(5.6) \quad \lambda = \nu \in M \cup M_E, \quad \lambda_n = \mu_n, \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}, \quad A = A_0.$$

Nous allons maintenant regarder quelques conséquences de la convergence étroite. La relation (5.1) est bien entendu fondamentale, et le premier problème est celui de l'étendre aux fonctionnelles qui sont continues mais non bornées. La définition ainsi que le théorème suivants sont adaptés de ([13], p. 31-33).

DÉFINITION 17. — *Soient $\{\lambda_n\}$ une suite de mesures de probabilité sur \mathcal{B}' , et $F: \mathcal{B}' \rightarrow \mathbb{R}^1$ une fonction continue presque partout (pour chaque λ_n). On dit que F est uniformément intégrable par rapport à cette suite, si*

$$(5.7) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \sup_n \int_{|F| \geq a} d\lambda_n |F| = 0,$$

où $a \rightarrow \infty$ en prenant des valeurs telles que $F = a$ définisse des points de continuité des mesures λ_n .

THÉORÈME 18. — On suppose la convergence étroite $\lambda_n \rightarrow \lambda$ des mesures de probabilité sur \mathfrak{B}' , et $F : \mathfrak{B}' \rightarrow \mathbb{R}^1$ continue.

(a) On a toujours

$$(5.8) \quad \int d\lambda |F| \leq \liminf_n \int d\lambda_n |F|.$$

(b) Si F est uniformément intégrable (par rapport à $\{\lambda_n\}$), alors

$$(5.9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int d\lambda_n F = \int d\lambda F.$$

(c) Si l'égalité (5.9) est satisfaite et $F \geq 0$, alors F est uniformément intégrable.

(d) S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$(5.10) \quad \sup_n \int d\lambda_n |F|^{1+\varepsilon} < \infty,$$

alors F est uniformément intégrable.

Ce théorème peut être appliqué aux mesures μ_n, ν et à une fonctionnelle polynomiale (réelle) P avec un noyau dans $\mathfrak{S}^{\otimes kq}$. Car, P^2 a alors un noyau $\beta \in \mathfrak{S}^{\otimes 2kq}$, et en le développant en série et intégrant, on obtient

$$(5.11 a) \quad \beta(u_1, \dots, u_{2kq}) = \sum a_{n_1, \dots, n_{2kq}} \bar{h}_{n_1}(u_1) \dots \bar{h}_{n_{2kq}}(u_{2kq}),$$

$$(5.11 b) \quad \int d\mu_n P^2 \leq \pi^{-1/2} 2^q \Gamma\left(q + \frac{1}{2}\right) (2m)^{-q} \sum |a_{n_1, \dots, n_{2kq}}|,$$

cf. (4.9). Donc (5.10) est vérifiée, avec $\varepsilon = 1$.

En outre, l'opérateur A_0 agit de la manière bijective et continue sur les espaces de Schwartz,

$$(5.12 a, b) \quad A_0 : \mathfrak{S}^{\otimes k} \rightarrow \mathfrak{S}^{\otimes k}, \quad A_0 : (\mathfrak{S}')^{\otimes k} \rightarrow (\mathfrak{S}')^{\otimes k},$$

d'où la continuité de P sur $\mathfrak{D}^{(-1)}$ [cf. (55)].

COROLLAIRE 19. — Une fonctionnelle polynomiale P avec le noyau dans $\mathfrak{S}^{\otimes kq}$ est uniformément intégrable par rapport à $\{\mu_n\}$, et $\int d\mu_n P \rightarrow \int d\nu P$.

L'autre conséquence du théorème 18 que nous présentons concerne le comportement d'une mesure $\nu \in \mathfrak{M}$ dans une translation $\eta \rightarrow \eta + \zeta$. Il est commode (mais peut-être pas nécessaire) de faire les hypothèses suivantes. Chaque volume borné $V \subset \mathbb{R}^3$ doit être compris dans tous les V_m avec m suffisamment grand, i. e.

$$(5.13 a) \quad \exists N_0(V) \text{ tel que } V_m \supseteq V \text{ pour } \forall m \geq N_0(V),$$

et, de plus,

$$(5.13 \text{ b}) \quad h_1, \dots, h_n, \zeta \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3),$$

où les fonctions h_j sont celles de (1.2 b). Ces conditions impliquent qu'il existe N tel que

$$(5.14) \quad \Lambda'_{v_m} \{ \eta + \zeta \} - \Lambda'_{v_m} \{ \eta \} = \Lambda' \{ \eta + \zeta \} - \Lambda' \{ \eta \}$$

pour $\forall m \geq N, \forall \eta \in \mathcal{S}^{\otimes 3}$. On pose alors

$$(5.15) \quad G_\zeta \{ \eta \} \stackrel{\text{df}}{=} \exp [- \Lambda \{ \eta + \zeta \} + \Lambda \{ \eta \}].$$

La définition des fonctionnelles G_ζ et $G_\zeta \{ B. \}$ s'étend par continuité à $(\mathcal{S}')^{\otimes 3}$, et *a fortiori* à $\mathcal{X}^{(-1)}$. On note que dans le cas de la théorie euclidienne $(\varphi^i)_{i \in \mathbb{E}}$, la continuité (presque partout) de ces fonctionnelles n'est pas évidente. Cependant, pour cette théorie-ci, le théorème suivant ainsi que ses corollaires en section 6 restent des conjectures raisonnables.

THÉORÈME 20. — *On suppose $\nu \in \mathbb{M}$, ainsi que les hypothèses (5.13 a, b). (La théorie euclidienne n'est pas admise.) Soit F une fonctionnelle bornée et continue sur $\mathcal{X}^{(-1)}$. Alors*

$$(5.16 \text{ a}) \quad \int d\nu(\eta) F \{ \eta \} = \int d\nu(\eta) G_\zeta \{ \eta \} F \{ \eta + \zeta \}.$$

Autrement dit,

$$(5.16 \text{ b}) \quad \frac{d\nu(\eta + \zeta)}{d\nu(\eta)} = G_\zeta \{ \eta \}.$$

Démonstration. — On commence avec le comportement connu dans une translation pour les mesures approximatives μ_n [4], qui sont équivalentes aux mesures gaussiennes. I. e., pour $n \geq N$, on a

$$(5.17 \text{ a, b}) \quad \int d\mu_n(\eta) G_\zeta \{ \eta \} F \{ \eta + \zeta \} = \int d\mu_n F \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int d\nu F.$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire, et supposons que $F \geq 0$. On va montrer que

$$(5.18) \quad \int d\nu(\eta) G_\zeta \{ \eta \} F \{ \eta + \zeta \} > \int d\nu F - \varepsilon.$$

Le théorème alors découlera des relations (5.17-18) et de (5.8).

La mesure ν étant intérieurement régulière ([9], p. 46; [13], p. 10), il existe un ensemble compact $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}^{(-1)}$ vérifiant

$$(5.19) \quad \nu(\mathcal{X}) > 1 - (\varepsilon / \sup F).$$

Soit $F_0 : \mathcal{X}^{(-1)} \rightarrow [0, 1]$ continue et telle que $F_0 = 1$ sur \mathcal{X} , et telle que $F_0 \rightarrow 0$ suffisamment rapidement hors de \mathcal{X} pour que $G_\zeta F_0$ soit

bornée. On pose

$$(5.20 \text{ a, b}) \quad \mathfrak{X}^{(-1)} \setminus \mathfrak{X} = \mathfrak{X}'; \quad \nu(\mathfrak{X}') < \varepsilon / \sup F.$$

Or, les relations (5.17) montrent que (5.16 a) est vérifiée quand $G_\zeta F$ est bornée. On peut donc employer (5.16 a) avec F remplacée par FF_0 . Il en résulte

$$(5.21) \quad \int d\nu(\eta) G_\zeta \{ \eta \} F \{ \eta + \zeta \} \\ \geq \int d\nu(\eta) G_\zeta \{ \eta \} F \{ \eta + \zeta \} F_0 \{ \eta + \zeta \} \\ = \int d\nu FF_0 \geq \int_{\mathfrak{X}} d\nu F = \int d\nu F - \int_{\mathfrak{X}'} d\nu F > \int d\nu F - \varepsilon,$$

C. Q. F. D.

6. RETOUR AUX FONCTIONNELLES GÉNÉRATRICES

Nous avons beaucoup utilisé les fonctionnelles caractéristiques, ou les fonctionnelles génératrices, S , dans ce papier. Mais maintenant ces fonctionnelles seront le sujet d'étude, plutôt que d'être des quantités auxiliaires.

Dans [1], on nota quelques propriétés de ces fonctionnelles, en particulier leur analyticité (à laquelle nous reviendrons bientôt), et leur emploi pour exprimer des valeurs moyennes des opérateurs. On montra aussi comment les expressions considérées peuvent être établies par intégration par parties. Or, cette règle de manipulation est comprise dans les corollaires qui suivent, et qui sont des conséquences directes du théorème 20. (Donc, ils ne sont pas établis pour la théorie euclidienne.)

COROLLAIRE 21. — *Sous les hypothèses du théorème 20, et pour $f \in \mathfrak{H}^{(1)}$, $g \in \mathfrak{S}^{\otimes 3}$,*

$$(6.1) \quad \int d\nu(\eta) e^{\Lambda(\eta)} \int d^3 u g(u) \frac{\delta}{\delta \eta(u)} (e^{-\Lambda(\eta)} e^{i\langle f, \eta \rangle}) = 0.$$

Les restrictions sur f et g sont plus fortes que nécessaires.

Démonstration. — On dérive par rapport à $\zeta(u)$ dans (5.16 a). Le lemme 9 ainsi que la discussion de ([10], p. 196), permettent l'échange de l'ordre des opérations. Alors $\left(\frac{\delta}{\delta \zeta} \right)_{\zeta=0}$ peut être remplacée par $\frac{\delta}{\delta \eta}$, donnant (6.1).

Cette formule-ci peut être transformée comme suit :

$$(6.2) \quad \int d^3 u g(u) \left[- \frac{\delta \Lambda \{ \zeta \}}{\delta \zeta(u)} \Big|_{\zeta=\delta_{\mu} \delta_f} + i f(u) \right] S \{ f \} = 0,$$

l'échange de l'ordre des opérations étant valable pour les mêmes raisons que précédemment.

COROLLAIRE 22. — *Sous les hypothèses du théorème 20, la fonctionnelle génératrice S vérifie l'équation (6.2) (avec $f \in \mathcal{H}^{(1)}$, $g \in \mathcal{S}^{\otimes 3}$).*

Nous allons regarder ensuite l'analyticité de S. On a déjà remarqué, voir le lemme 3 de [1], que S est continue sur l'espace complexe \mathcal{H}_c , et qu'elle a un développement de Volterra, convergent pour $\forall f \in \mathcal{H}_c$. La conclusion suivante est un peu plus forte.

LEMME 23. — *La fonctionnelle S, correspondant à une mesure $\nu \in M \cup M_E$ et définie sur \mathcal{H}_c , est analytique.*

Démonstration. — On se rappelle (e. g. [20], p. 22-23) qu'il suffit d'établir (i) l'analyticité de $S\{f + zg\}$ en z au voisinage de $z = 0$, où $f, g \in \mathcal{H}_c$, et (ii) que la fonctionnelle S est localement bornée. Or, l'analyticité en z découle de l'inégalité (3.8) [cf. aussi (3.9 b)] :

$$\begin{aligned} (6.3) \quad & \sum \frac{1}{n!} \left| \frac{d^n}{dz^n} S\{f + zg\} \right|_{z=0} \\ & \leq \sum \frac{1}{n!} [I_{\mathcal{H}_c}^{\text{FS}}(e^{2|\langle \cdot, Bf \rangle})]^{1/2} [I_{\mathcal{H}_c}^{\text{FS}}(|\langle \cdot, Bg \rangle|^{2n})]^{1/2} \\ & = [I_{\mathcal{H}_c}^{\text{FS}}(e^{2|\langle \cdot, Bf \rangle})]^{1/2} \pi^{-1/4} \sum \frac{1}{n!} 2^{n/2} \|Bg\|^n \left[\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

La dernière somme peut être majorée par remplacement de $1/2$ par 1 dans l'argument de Γ , ce qui donne

$$(6.4) \quad \sum (n!)^{-1} (2^{1/2} \|Bg\|)^n (n!)^{1/2} = \sum \left[\frac{(2 \|Bg\|^2)^n}{n!} \right]^{1/2}.$$

Le « test du quotient » montre la convergence de la série pour $\forall \|Bg\| < \infty$. L'existence d'une borne locale découle du corollaire 5, et achève la démonstration :

$$\begin{aligned} (6.5) \quad & |S\{f_1 + if_2\}| \leq \int d\nu e^{|\langle \nu, f_2 \rangle|} \\ & \leq I_{\mathcal{H}_c}^{\text{FS}}(e^{|\langle \cdot, Bf_2 \rangle|}) \leq 2 I_{\mathcal{H}_c}^{\text{FS}}(e^{\langle \cdot, Bf_2 \rangle}) = 2 \exp\left(\frac{\|Bf_2\|^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Ce lemme implique en particulier la continuité de S en $f \in \mathcal{H}_c$ (*loc. cit.*). Bien entendu, cette continuité peut être établie indépendamment par des arguments semblables. Ce lemme nous permet, plus généralement, d'appliquer la théorie des fonctionnelles analytiques, e. g. telle qu'on la trouve dans [20]. Cependant, nous n'avons pas noté de conséquences non triviales de cette théorie qui seraient pertinentes à notre étude.

Le dernier problème que nous abordons est celui de l'ordre des fonctions entières $S\{zf\}$, où $f \in \mathcal{H}_c$ est fixée. Pour une théorie euclidienne modifiée

avec le couplage $g \varphi^4$, la valeur $4/3$ fut trouvée pour cet ordre [21]. Les arguments de cette référence ne sont pas si faciles à justifier pour nos exemples. Donc, dans l'appendice A, nous donnons des raisons heuristiques pour la conjecture que cet ordre est égal à $\frac{2n}{2n-1}$, si l'exposant maximal dans (1.2 b) est $2n$. A ceci, nous ajoutons une conclusion définitive et facile.

LEMME 24. — Pour la fonctionnelle S correspondant à $\nu \in M \cup M_E$, l'ordre de $S\{zf\}$, avec $f \in \mathcal{H}_c$ fixée, est au plus 2.

Démonstration. — On emploie une estimation analogue à (6.5), ainsi que (3.8) :

$$(6.6) \quad |S\{z(f_1 + if_2)\}| \leq [I_{\mathcal{H}_c}^{\text{FS}}(e^{2|z\langle \cdot, Bf_1 \rangle})]^{1/2} [I_{\mathcal{H}_c}^{\text{FS}}(e^{2|z\langle \cdot, Bf_2 \rangle})]^{1/2} \\ \leq 2 \exp [z^2 (\|Bf_1\|^2 + \|Bf_2\|^2)].$$

APPENDICE A

Ordre de croissance de $S\{zf\}$

Nous voudrions donner ici des arguments pour la conjecture de la section 6, à savoir que

$$(A.1) \quad \text{ordre}(S\{zf\}) = \frac{2n}{2n-1},$$

si l'exposant maximal de (1.2 b) est égal à $2n$. La discussion suivante est une adaptation directe de celle de [21].

Pour trouver une borne inférieure pour S , on emploie l'inégalité (lemme A.6 de [21]) :

$$(A.2) \quad \int d\lambda e^F \geq \exp \int d\lambda F, \quad \text{si} \quad \int d\lambda = 1,$$

et si F est réelle. Or, l'équation (5.16 a) donne (formellement), pour f et z réels,

$$(A.3) \quad S\{i^{-1}zf\} = \int d\nu(\eta) G_\zeta\{\eta\} \exp(z\langle f, \eta \rangle + z\langle f, \zeta \rangle) \\ \geq \exp \int d\nu(\eta) [-\Lambda\{\eta + \zeta\} \\ + \Lambda\{\eta\} + z\langle f, \eta \rangle + z\langle f, \zeta \rangle] \\ = \exp(z\langle f, \zeta \rangle - \Lambda'\{\zeta\} + \dots),$$

où les termes négligés sont indépendants de f , et de l'ordre $2n-2$ ou moins en ζ . (On note que les termes impairs en η ne contribuent pas

à la dernière intégrale.) Le choix

$$(A.4) \quad \zeta = (\varepsilon z f)^{\frac{1}{2n-1}}$$

donne

$$(A.5 a) \quad S \{ i^{-1} z f \} \geq \exp \left(c_{f, \varepsilon} \frac{2n}{z^{2n-1}} + \dots \right),$$

où

$$(A.5 b) \quad c_{f, \varepsilon} = \varepsilon^{\frac{1}{2n-1}} \int d^3 u f^{\frac{2n}{2n-1}}(u) - \varepsilon^{\frac{2n}{2n-1}} \int d^3 u \left[(h \star f^{\frac{1}{2n-1}})(u) \right]^{2n}.$$

On a supposé un seul terme avec $n_j = n$ (la valeur maximale), mais ceci n'est pas essentiel. On voit que ε suffisamment petit donnera $c_{f, \varepsilon} > 0$, d'où la borne inférieure.

Pour l'étude de la borne supérieure, on suppose que f peut s'écrire comme

$$(A.6) \quad f = g_1 (g_2 \star g_3), \quad g_k \in \mathcal{S}^{\otimes 3},$$

et l'on emploie l'inégalité de Hölder, ainsi que la notation $g^r(u) = g(-u)$. Alors

$$(A.7) \quad \begin{aligned} & |z \langle g_1 (g_2 \star g_3), \eta \rangle| \\ &= |z \langle g_3, g_2^r \star g_1 \eta \rangle| \\ &\leq \int d^3 u [(g_2^r \star g_1 \eta)(u)]^{2n} \\ &\quad + z^{\frac{2n}{2n-1}} \int d^3 v (2n-1) \left[\frac{g_3(v)}{2n} \right]^{\frac{2n}{2n-1}}, \end{aligned}$$

et, en notant C_{g_3} l'intégrale par rapport à v ,

$$(A.8) \quad S \{ i^{-1} f z \} \leq \exp \left(\frac{2n}{z^{2n-1}} C_{g_3} \right) \int d\nu(\eta) \exp \int d^3 u [(g_2^r \star g_1 \eta)(u)]^{2n}.$$

La convergence de la dernière intégrale fonctionnelle n'est pas évidente. Cependant, à cause de la présence des facteurs $e^{-P_{2n}(\eta)}$ dans la construction de ν , la convergence est une conjecture assez raisonnable.

Les relations heuristiques (A.5) et (A.8) sont maintenant la base pour (A.1).

APPENDICE B

Exemple d'un autre espace d'intégration

Dans cet article, nous avons mentionné des espaces différents, qu'on peut employer pour les définitions des mesures, ou pour l'intégration. Il nous semble donc approprié d'inclure aussi un exemple où, contrairement aux cas précédents, l'espace naturel d'intégration n'est pas un sous-espace de $(\mathcal{S}')^{\otimes k}$.

Cet exemple découle de l'étude du groupe $SU(1, 1)$. Dans ses représentations, on rencontre des espaces des fonctions analytiques, et certains « éléments matriciels » généralisés appartiennent aux espaces duaux correspondants, mais pas à \mathcal{S}' [22]. (L'auteur remercie le Docteur J.-P. Antoine d'avoir noté la pertinence de ce fait pour l'intégration fonctionnelle.) Nous n'essayerons pas de donner d'interprétation physique à notre exemple. Cependant, le groupe $SU(1, 1)$ a été introduit dans plusieurs modèles de théorie quantique, voir e. g. [23].

Nous référons maintenant à [22]. Le groupe $SU(1, 1)$ a trois générateurs indépendants, J_0 (elliptique) et J_1, J_2 (hyperboliques), vérifiant

$$(B.1) \quad [J_0, J_1] = i J_2, \quad [J_0, J_2] = -i J_1, \quad [J_1, J_2] = -i J_0.$$

On considère une représentation de la série continue principale, où

$$(B.3) \quad J_0^2 - J_1^2 - J_2^2 = j(j+1), \quad j = is - \frac{1}{2}, \quad s > 0.$$

On suppose la quantité j , ou s , donnée une fois pour toutes. Le spectre de J_0 prend les valeurs

$$(B.3) \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Par ailleurs, on pose

$$(B.4) \quad K_+ = J_0 + J_1.$$

L'espace hilbertien est engendré par les vecteurs propres normalisés v_m de J_0 :

$$(B.5) \quad \mathcal{K} = \left\{ x = \sum x_m v_m : \sum |x_m|^2 < \infty \right\}.$$

On introduit (Z étant l'ensemble des entiers positifs)

$$(B.6 a) \quad \mathcal{S}_{\mathcal{K}} = \left\{ x \in \mathcal{K} : \lim_{|m| \rightarrow \infty} m^n x_m = 0, \forall n \in Z \right\},$$

$$(B.6 b) \quad \mathcal{S}'_{\mathcal{K}} = \left\{ x' = \sum x'_m v_m : \exists N \in Z \text{ tel que } \lim_{|m| \rightarrow \infty} \frac{x'_m}{m^N} = 0 \right\}.$$

L'espace $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$ est un espace nucléaire complet, dense dans \mathcal{K} , et $\mathcal{S}'_{\mathcal{K}}$ est son dual.

Le spectre de J_2 est la ligne droite, avec la multiplicité de deux, et l'on a les vecteurs propres généralisés $v^{\lambda, \pm} \in \mathcal{S}'_{\mathcal{K}}$. Les fonctions $\langle v^{\lambda, \pm}, v_m \rangle$ sont analytiques pour $\lambda \in \mathbb{R}^1$, et elles s'étendent aux fonctions méromorphes en λ . Plus généralement, on pose

$$(B.7) \quad \mathcal{N}^{\pm} = \{ \varphi^{\pm}(\lambda) = \langle v^{\lambda, \pm}, \varphi \rangle : \varphi \in \mathcal{S}_{\mathcal{K}} \}.$$

Les fonctions $\varphi^\pm(\lambda)$ sont mésomorphes de même, et l'on a des applications naturelles,

$$(B.8) \quad \mathcal{N}^- \leftrightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{J}\mathcal{C}} \leftrightarrow \mathcal{N}^+, \quad (\mathcal{N}^-)' \leftrightarrow \mathcal{S}'_{\mathcal{J}\mathcal{C}} \leftrightarrow (\mathcal{N}^+)'.$$

Les vecteurs généralisés $v^{\lambda, \pm}$ vérifient la relation

$$(B.9) \quad \langle v^{\lambda_1, \pm}, v^{\lambda, \pm} \rangle = \delta(\lambda_1 - \lambda).$$

Cependant, les $v^{\lambda, \pm}$ peuvent facilement conduire aux quantités hors de \mathcal{S}' , à savoir,

$$(B.10) \quad \langle v^{\lambda, \pm}, K_+ v^{\lambda, \pm} \rangle \in (\mathcal{N}^\pm)' \quad \text{mais} \notin \mathcal{S}'.$$

Or, si l'on veut intégrer e. g. une fonctionnelle de la forme

$$(B.11) \quad F\{\xi\} = \int d\lambda \xi(\lambda) \langle v^{\lambda, \pm}, K_+^n \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}_{\mathcal{J}\mathcal{C}}$$

(et avec n arbitraire), on doit choisir $(\mathcal{N}^\pm)'$ comme l'espace d'intégration.

ERRATUM A L'ARTICLE [1]

On donne ici les changements qui doivent être faits dans [1]. Ces changements se rapportent surtout à la page 134 de [1], et ils sont en accord avec les sections 1-3 du présent papier. L'effet principal de ces modifications est celui de limiter la forme des termes d'interaction, et donc, de limiter la classe de théories. Nous notons que la validité des conclusions qui concernent la théorie euclidienne n'est pas altérée.

La page 134 doit être remplacée par le texte suivant :
des structures précises de H_1 et H_{101} (i. e. leurs domaines, contre-terms, etc.).

Nous supposons ainsi que

$$(2.6 a, b) \quad \Lambda = \Lambda^{(0)} + L_1 + \dots + L_r \equiv \Lambda^{(0)} + \Lambda',$$

où $\Lambda^{(0)}$ donne l'énergie cinétique. Quant aux L_i , il est naturel de les supposer comme les fonctionnelles monômes,

$$(2.6 c) \quad \int d^3 u_1 \dots d^3 u_p \lambda_i(u_1 - u_2, \dots, u_{p-1} - u_p) \varphi(u_1) \dots \varphi(u_p).$$

Ici $\lambda_i \in \mathcal{S}$ comme fonction des différences, et λ_i est symétrique comme fonction de u_1, \dots, u_p . (L'invariance par rotation ne pose aucun problème, et nous l'ignorons.) On peut envisager aussi les produits comme $L_k L_{k+1}$ dans Λ' , mais leur présence pourrait donner une théorie

sans la propriété de clustering. Il est naturel, aussi, à se limiter aux Λ' vérifiant

$$(2.7) \quad \Lambda' \{ \eta \} \geq 0 \quad \text{pour } \eta \in \mathcal{S}.$$

Cette condition n'est pas valable pour plusieurs couplages intéressants, et nous la commenterons dans la section 4.

Or, nous supposons pour chaque L_j une forme plus précise,

$$(2.8) \quad L_j \{ \varphi \} = \int d^3 u [(\varphi \star h_j)(u)]^{2n_j} \quad \text{où } h_j \in \mathcal{S}.$$

Cette forme-ci vérifie (2.7), et elle est un cas particulier de (2.6 c). Le noyau λ_j correspondant, que nous écrivons ici comme une fonction symétrique $\bar{\lambda}_j(u_1, \dots, u_{2n})$, vérifie de plus

$$(2.9) \quad \int d^3 u_1 \dots d^3 u_{2n} [\tau_1(u_1) \tau_1(u_2)] \dots \\ \times [\tau_n(u_{2n-1}) \tau_n(u_{2n})] \bar{\lambda}(u_1, \dots, u_{2n}) \geq 0,$$

pour $\forall \tau_1, \dots, \tau_n \in \mathcal{S}$. Cette dernière condition est plus forte que $\Lambda' \geq 0$.

Quant à $\Lambda^{(0)}$, observons que

$$(2.10 a) \quad \Lambda^{(0)} \{ \varphi \} = \frac{1}{2} \int d^3 v_1 d^3 v_2 \frac{\lambda^{(0)}(v_1 - v_2)}{(2\pi)^{3/2}} \varphi(v_1) \varphi(v_2)$$

donne la contribution suivante à H_1 , selon (2.5),

$$H_1^{(0)} \{ \varphi \} = \frac{1}{2} \int d^3 p \tilde{\lambda}^{(0)}(p) \lambda^{(0)}(-p) \tilde{\varphi}(p) \tilde{\varphi}(-p) + (\text{ren.}).$$

Suite de l'erratum :

Page 133, la relation (2.4) : remplacer = par \sim .

Page 135, l'équation (2.11 a) : ajouter le facteur $(2\pi)^{-3/2}$ à l'intégrale.

Page 138, l'équation (3.8) : remplacer $\Lambda' \{ B(\chi_V \xi) \}$ par $\Lambda' \{ \chi_V B \xi \}$.

Page 138, trois lignes après l'équation (3.8) : fermer le crochet : ... à trace.] et supprimer la phrase suivante.

Page 140, ligne 17 : remplacer : la condition $\Lambda' \geq 0$ fournit... par : la condition $\Lambda' \geq 0$ et la forme (2.8) fournissent....

Page 141, ligne 11 : remplacer : S_n par μ_n . par : S_{V_N} par μ_N .

Page 141, l'équation (5.1 b) : remplacer $d\mu^{(0)} | F |$ par $d\mu^{(0)} | F \{ B. \} |$.

Page 142, deux lignes qui précèdent le lemme 3 : remplacer par : semblables à celles-ci, ainsi que par l'inégalité de Hölder, et la continuité dans f découle d'une manière analogue. Nous résumons.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. TARSKI, *Ann. Inst. H. Poincaré*, Sect. A, t. 11, 1969, p. 131.
- [2] A. CASHER, D. LURIÉ et M. REVZEN, *J. Math. Phys.*, t. 9, 1968, p. 1312.
- [3] K. O. FRIEDRICHS, H. N. SHAPIRO et coll., *Integration of functionals* (Courant Institute, New York University, notes de conférences, 1967).
- [4] J. TARSKI, Conférences à l'école d'hiver de Karpacz, dans *Acta Universitatis Wratislaviensis*, Wrocław, n° 88, 1968; t. 1, p. 42 et suiv.
- [5] I. M. GUELFAND et N. Y. VILENKIN, *Les distributions*, t. 4 (Dunod, Paris, 1967), surtout le chapitre 4.
- [6] I. E. SEGAL, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 81, 1956, p. 106.
- [7] L. GROSS, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 94, 1960, p. 404.
- [8] L. GROSS, *Harmonic analysis on Hilbert space*, Memoir Amer. Math. Soc. n° 46, 1963.
- [9] N. BOURBAKI, *Éléments de mathématique*; fasc. XXXV : *Intégration*, chap. IX (Hermann, Paris, 1969).
- [10] N. BOURBAKI, *Éléments de mathématique*; fasc. XIII : *Intégration*, chap. IV (Hermann, Paris, 1965, 2^e édition).
- [11] A. M. JAFFE et R. T. POWERS, *Commun. math. Phys.*, t. 7, 1968, p. 218; A. JAFFE, dans *Proceedings of the conference on functional integration and constructive quantum field theory*, édité par I. Segal; M. I. T., avril 1966, p. 50 et suiv.
- [12] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD et G. PÓLYA, *Inequalities* (Cambridge University Press, Cambridge, 1952, 2^e édition), le chapitre X.
- [13] P. BILLINGSLEY, *Convergence of probability measures* (John Wiley and Sons, Inc., New York, 1968).
- [14] L. GROSS, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 105, 1962, p. 372.
- [15] J. VON NEUMANN, *Mathematical foundations of quantum mechanics* (Princeton University Press, Princeton, N. J., 1955), p. 178 et suiv.
- [16] G. LOUPIAS et S. MIRACLE-SOLE, *Commun. math. Phys.*, t. 2, 1966, p. 31, et *Ann. Inst. H. Poincaré*, Sect. A, t. 6, 1967, p. 39.
- [17] P. KRISTENSEN, L. MEJLBO et E. THUE POULSEN, *Commun. math. Phys.*, t. 1, 1965, p. 175; E. THUE POULSEN, dans *Theory of distributions* (Proc. Internat. Summer Inst. in Lisbon, 1964), p. 135 et suiv.
- [18] B. SIMON, *J. Math. Phys.*, t. 12, 1971, p. 140.
- [19] R. K. GETTOOR, *Pacific J. Math.*, t. 7, 1957, p. 885.
- [20] *Séminaire Pierre Lelong (Analyse)*, Année 1969, Springer-Verlag, Berlin, 1967, *Lectures notes in mathematics*, n° 116; en particulier P. NOVERRAZ, exposé n° 2.
- [21] K. SYMANZIK, New York University Report IMM-NYU 327, 1964.
- [22] G. LINDBLAD et B. NAGEL, *Ann. Inst. H. Poincaré*, Sect. A, t. 13, 1970, p. 27.
- [23] D. SHALE et W. F. STINESPRING, *J. Functional Analysis*, t. 1, 1967, p. 492; D. SHALE, dans *Proceedings of the conference...* (réf. [11]), p. 88.

(Manuscrit reçu le 5 juin 1972.)