ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

J. F. POMMARET

Étude interne des systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles

Annales de l'I. H. P., section A, tome 17, nº 2 (1972), p. 131-158
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1972__17_2_131_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XVII, nº 2, 1972, p. 131-158.

Section A :
Physique théorique.

Étude interne des systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles

par

J. F. POMMARET

ABSTRACT. — If $E \to X$ (or $F \to X$) is a vector bundle over the differentiable manifold X, with dim $X = n$, we shall also write E (or F) for the sheaf of germs of differentiable sections of E (or F).

T* is the cotangent bundle of X.

To every regular formally integrable involutive differential operator

$$E \xrightarrow{\mathcal{D}} F = F_0, \qquad \mathcal{D} = \Phi \circ j_q$$

we associate in an original way the following formally exact complex called :

Physical sequence :

$$P(\Theta): \quad 0 \to \Theta \to E \xrightarrow{\mathcal{D}} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{D}_n} F_n \to 0,$$

where $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$ are first order linear formally integrable involutive differential operators. This is a consequence of mixing together " old " works by Janet and " modern " studies by Spencer, and others. In the sense of formal exactness, P (Θ) will also be called " physical resolution " of Θ, the sheaf of solutions of the homogeneous équation $\mathcal{D}_u = 0$.

Remark. — The use of " fonctions majorantes " unables us to show that P (Θ) is exact in the analytic case.

We relate the " injectivity " of $\mathcal{D}$ to the " *caractère* " σ^n of $\mathcal{D}$, this number being related to the rank of the symbol $\sigma_\chi(\mathcal{D})$ for certain $\chi \in T^*$. We demonstrate the formula

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \dim F_p = \sigma^n(\mathcal{D}).$$

[*Application :* An elliptic operator is always injective $\sigma^n(\mathcal{D}) = \dim E$.]

Let us *forget* $\mathcal{D}$ and consider the sequence :

$$P(\Omega): \quad 0 \to \Omega \to F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} \ldots \xrightarrow{\mathcal{D}_n} F_n \to 0.$$

We relate the complex P (Ω) to the "sophisticated" Spencer's sequence for $\mathcal{D}$:

$$S_2(\Theta): \quad 0 \to \Theta \xrightarrow{j_q} C^0 \xrightarrow{D^0} C^1 \xrightarrow{D^1} \ldots \xrightarrow{D^{n-1}} C^n \to 0$$

in a *fundamental diagram.*

In a forthcoming work wew ill show how to use the resolutions P (Θ) and P (Ω) in the theory of deformation of Γ-structures.

A non linear complex will be associated to the linear resolution P (Θ).

It will give the link between the deformations of Γ-structures and deformations of algebraic structures.

A lot of examples will be taken in physics especially in general relativity.

It is a pleasure to express my deep sense of gratitude to Professor A. Lichnerowicz for all the personal interest he devoted to this work.

INTRODUCTION

Riquier (1893) et Cartan (1901) ont montré par deux voies différentes comment on peut préciser le degré de généralité de la solution d'un système quelconque d'équations aux dérivées partielles (système e. d. p.).

La méthode de Cartan reposant sur l'utilisation du calcul différentiel extérieur a été appliquée avec succès à la théorie des pseudogroupes continus. On en trouvera un exposé dans l'Ouvrage de Cartan récemment réédité : *Les systèmes différentiels extérieurs et leur application géométrique,* Paris (Hermann).

Le premier, il attribuait de façon intrinsèque à des systèmes de formes extérieurs des « *caractères* », ensemble de nombres entiers muni de relations d'inégalité, dont il reliait la propriété d'invariance par changement des variables utilisées à la notion d'involution.

Cependant si la méthode s'avère pratique dans le cas d'équations linéaires (bien qu'il faille introduire des caractères secondaires) et si l'intégration par la méthode du drapeau ne fait appel qu'au théorème de Cauchy-Kowalewsky dans le cas analytique, par contre il est difficile de préciser le rôle des variables indépendantes par rapport à celui des variables dépendantes; de plus, le concept de prolongement où les dérivations n'apparaissent que de façon implicite ressort peu clairement.

Le principe de Riquier repris et complété par Janet en 1920 puis exposé à nouveau sous une forme plus moderne par d'autres auteurs

(Thomas et Ritt) est tout différent. Il fournit un procédé « *opérationnel* » valable pour n'importe quel système e. d. p., *linéaire ou non.*

Introduisant la notion de « coupure » on considère l'ensemble infini formé par les équations données et toutes les équations que l'on peut obtenir par dérivations successives, comme un moyen de calculer certaines dérivées (dites *principales*) en fonction d'autres (dites *paramétriques*). Puisque l'on utilise seulement le théorème des fonctions implicites (déterminants fonctions des seules variables indépendantes dans le cas de systèmes linéaires) la méthode est applicable au cas analytique comme au cas différentiable; seules sont exigées certaines hypothèses de régularité.

Le problème était donc de déterminer quelles seraient les dérivées principales. Riquier et Janet l'ont résolu de la façon suivante : il faut d'abord attribuer aux dérivées des ensembles de nombres entiers appelés *cotes* de façon à les ordonner totalement.

On doit alors supposer que l'on peut « *résoudre en cascade* » toutes les équations du système donné par rapport aux dérivées les plus « *hautes* » de chacune d'elles (*système orthonome*). Les dérivées principales sont alors ces dérivées isolées dans chaque membre (une par équation) et leurs dérivées. La considération, pour chaque membre, de *variables multiplicatrices* et *non multiplicatrices* permet de n'obtenir chaque dérivée principale qu'une seule fois. Le système est dit *système passif* si deux calculs différents effectués pour une même dérivée principale donnent la même expression de cette dérivée en fonction des variables indépendantes et des dérivées paramétriques.

Si n est le nombre de ces variables indépendantes, à tout *système orthonome passif* Janet associe la construction d'une *chaîne de n systèmes*, orthonomes passifs, chacun exprimant les conditions de compatibilité du précédent.

La recherche des équations contenant des dérivées partielles jusqu'à l'ordre q et telles que par dérivations et substitutions (combinaisons linéaires à coefficients fonctions de x dans le cas de système linéaire) on ne puisse obtenir d'autres équations indépendantes des précédentes et où les dérivées n'apparaîtraient que jusqu'à l'ordre q (recherche d'un *système formellement intégrable* dans la terminologie actuelle), n'est pas liée au système de coordonnées utilisé.

En effet, seuls sont utilisés des prolongements dont on ne conserve que les équations d'un ordre $\leqq q$ convenable, toutes opérations compatibles avec les changements de coordonnées.

Il faut cependant remarquer que la forme orthonome ainsi obtenue pour le système e. d. p., de même que la notion de passivité, ne sont pas invariantes par changement de variables.

Les travaux de ces différents auteurs ont été ensuite laissés dans l'ombre.

Ce n'est qu'au cours des 10 dernières années qu'a été construite une théorie plus élaborée des systèmes e. d. p. Ce sont les travaux de l'école américaine, principalement Spencer, Goldschmidt, Quillen, Kuranishi, et de B. Malgrange en France.

C'est grâce à cet outil que s'est développée la théorie des *déformations de structures de pseudogroupes continus transitifs* (Γ-structures). Il suffisait en effet de considérer le cas particulier des équations infinitésimales du pseudogroupe.

Pour utiliser ces méthodes de déformation en physique, il s'agissait donc tout d'abord de « *simplifier* » les théories précédentes, fort abstraites, afin de pouvoir aborder concrètement des exemples (nous montrerons prochainement quel vaste champ d'application est constitué par la Relativité générale).

Nous avons pu satisfaire à ces exigences en reprenant les travaux de Janet — notion de variables non multiplicatrices et construction d'une chaîne de n systèmes comme dans les suites de Spencer — ainsi que les définitions d'involution de Cartan à l'aide des caractères.

Une proposition importante dans la pratique, consiste à montrer l'identité, dans le cas d'un système involutif, entre les variables multiplicatrices déterminées par le procédé de Janet et celles qui résultent de la propriété d'involution. Ceci nous amène à remplacer la notion de SYSTÈME ORTHONOME PASSIF, seule considérée par Janet, par celle de SYSTÈME INVOLUTIF FORMELLEMENT INTÉGRABLE, plus précise et indépendante du système de coordonnées (contrairement à la précédente).

Nous résolvons ainsi le problème d'invariance par changement du système de coordonnées, problème auquel s'étaient heurtés vainement les auteurs précédents.

Des méthodes analogues à celles de Janet, appliquées à ces derniers systèmes, permettent de construire une « *chaîne* » de n systèmes e. d. p. $(\Sigma_1), (\Sigma_2), \ldots, (\Sigma_n)$. Chacun de ces systèmes est du premier ordre, involutif, formellement intégrable et composée d'un nombre d'équations indépendantes qui peut être déterminé à partir des « *caractères* » $(\sigma^1, \ldots, \sigma^n)$ de (Σ). Ces caractères jouent un rôle analogue à celui des caractères de Cartan dans la théorie des systèmes de formes extérieures mais ils sont beaucoup plus maniables dans la pratique. Chaque système (Σ_{p+1}) représente en quelque sorte le *nombre minimal* de conditions de compatibilité de (Σ_p). (Σ_n) est un système de Cauchy-Kowalewski, donc sans conditions de compatibilité.

Ces manipulations de systèmes e. d. p. (variables multiplicatrices, cotes, étude de l'intégrabilité formelle, caractères, vérification de la propriété d'involution, utilisation du tableau $\mathfrak{T}$ défini ci-dessous), bien que simples et essentielles dans la pratique, sont longues à exposer.

Nous nous limiterons donc dans cet article à un exposé du formalisme général relatif à des systèmes e. d. p. linéaires homogènes, formalisme que nous illustrerons par un exemple concret.

Dans la mesure du possible l'exposé de la théorie se suffira à lui-même, cependant nous renvoyons le lecteur non averti à la référence [25] qui nous semble la plus accessible.

$E \to X$ (ou $F \to X$) étant un fibré vectoriel au-dessus de X, variété C^∞ avec $\dim X = n$, on désigne aussi par E (ou F) le faisceau des germes de sections C^∞ de E (ou F). Le contexte indiquera clairement si des différentiations sont en jeu.

A tout opérateur différentiel $\mathcal{D}$ linéaire, formellement intégrable et involutif $\mathcal{D} = \Phi \circ j_q$,

$$E \xrightarrow{\mathcal{D}} F = F_0, \qquad \text{avec} \quad J_q(E) \xrightarrow{\Phi} F_0 \to 0 \quad \text{exacte}$$

nous associons de façon originale le complexe formellement exact :

$$P(\Theta): \quad 0 \to \Theta \to E \xrightarrow{\mathcal{D}} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{D}_n} F_n \to 0,$$

où $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$ sont des opérateurs du premier ordre, linéaires, formellement intégrables et involutifs.

$P(\Theta)$ est une résolution de Θ le *faisceau solution* de l'équation homogène $\mathcal{D} u = 0$, *du point de vue de l'exactitude formelle.*

$P(\Theta)$ sera désormais appelée « *Suite physique associée à* $\mathcal{D}$ » ou « *Résolution physique de* Θ », pour des raisons qui seront données dans un travail ultérieur.

A tout $\mathcal{D}$ satisfaisant aux conditions précédentes ($\mathcal{D}$ est toujours supposé suffisamment régulier !) on associe d'autre part de façon intrinsèque un tableau $\mathfrak{T}$ de $n \times \dim F_0$ cases qui présente quelque analogie avec le tableau d'Young de la physique quantique. Ce tableau $\mathfrak{T}$ permet aisément le calcul de la dimension des différents fibrés vectoriels $F_p \to X$ ($p = 0, 1, \dots, n$) (par $\dim F_p$ on sous-entend : dimension de la fibre de F_p). Le tableau $\mathfrak{T}$ décrira les propriétés dites « *internes* » du système e. d. p. (Σ) associé à $\mathcal{D}$.

Pour interpréter maintenant les travaux de Janet grâce au formalisme précédemment développé, il restait à montrer que

$$\dim F_p = \text{nombre d'équations indépendantes de } (\Sigma_p).$$

Ceci devient possible par l'emploi des variables multiplicatrices et du tableau $\mathfrak{T}$.

Soit Ω le faisceau solution de $\mathcal{D}_1$ et $P(\Omega)$ la résolution physique de Ω :

$$P(\Omega): \quad 0 \to \Omega \to F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{D}_n} F_n \to 0.$$

Cette suite possède la propriété remarquable de n'être composée que d'opérateurs différentiels du premier ordre :

$$\mathcal{D}_p = \psi_p \circ j_1, \qquad \text{avec} \quad J_1(F_{p-1}) \xrightarrow{\psi_p} F_p \to 0 \quad \text{exacte.}$$

La construction de cette suite avait été seulement esquissée par Janet, en quelques lignes et d'une façon qui dépendait du système de coordonnées employé. C'est grâce au formalisme moderne que l'hypothèse d'involution peut être vraiment comprise et utilisée dans la construction de $P(\Omega)$. Les n caractères attribués à $\mathcal{D}$, permettent tout de suite de déterminer les dim F_p par l'intermédiaire du tableau $\mathfrak{T}$.

Si l'on observe que la suite physique $P(\Omega)$ associée à $\mathcal{D}_1$ ($\mathcal{D}_1$ déterminé par $\mathcal{D}$) possède le même nombre de « termes » que la suite sophistiquée de Spencer :

$$S_2(\Theta): \quad 0 \to \Theta \xrightarrow{j_q} C^0 \xrightarrow{D^1} C^1 \xrightarrow{D^2} \dots \xrightarrow{D^n} C^n \to 0.$$

On pouvait espérer relier entre elles ces deux suites.

C'est ce qui sera fait dans le DIAGRAMME FONDAMENTAL.

EXEMPLE. — Une fonction inconnue $u(x, y)$, on note $p_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dots$

$$\begin{cases} p_{y^2} + p_{x^2} = 0, \\ p_{xy} + x\,p_x + y\,p_y = 0. \end{cases}$$

Ce système est formellement intégrable mais non involutif.

Les deux équations sont indépendantes.

Il faut prolonger une fois ce système pour le rendre involutif:

TABLEAU $\mathfrak{T}$

$$(\Sigma)\ \left\{\begin{array}{ll|l|l|cc} F_0^6 \equiv & p_{y^3} & - x p_{x^2} + y^2 p_y + (xy-1) p_x & = 0 & x & y \\ F_0^5 \equiv & p_{xy^2} & - y\,p_{x^2} - (xy-1) p_y - x^2 p_x & = 0 & x & \bullet \\ F_0^4 \equiv & p_{x^2y} & + x\,p_{x^2} - y^2 p_y - (xy-1) p_x & = 0 & x & \bullet \\ F_0^3 \equiv & p_{x^3} & + y\,p_{x^2} + (xy-1) p_y + x^2 p_x & = 0 & x & \bullet \\ F_0^2 \equiv & p_{y^2} & + p_{x^2} & = 0 & \bullet & \bullet \\ F_0^1 \equiv & p_{xy} & + x\,p_x + y\,p_y & = 0 & \bullet & \bullet \end{array}\right.$$

Cotes :

x	y	F_0^1	F_0^2	F_0^3	F_0^4	F_0^5	F_0^6
1	1	2	2	3	3	3	3
0	1	1	2	0	1	2	3
0	0	6	5	4	3	2	1

Caractères :

$$\sigma^x = 3, \qquad \sigma^y = 1.$$

Remarque : $g_{3+r} = 0$, $\forall\ r \geq 0$ mais seule intervient ici l'hypothèse d'involution.

On vérifie :

$$(\Sigma_1) \left\{ \begin{array}{lllr|cc|} F_1^7 \equiv & \boxed{\dfrac{\partial F_0^5}{\partial y}} & - \dfrac{\partial F_0^6}{\partial y} + y\, F_0^4 - x\, F_0^3 + (xy - 1)\, F_0^2 + (x^2 + y^2)\, F_0^1 & = 0 & x & y \\ F_1^6 \equiv & \boxed{\dfrac{\partial F_0^4}{\partial y}} & - \dfrac{\partial F_0^5}{\partial x} - x\, F_0^4 - y\, F_0^3 + y^2\, F_0^2 & = 0 & x & y \\ F_1^5 \equiv & \boxed{\dfrac{\partial F_0^3}{\partial y}} & - \dfrac{\partial F_0^4}{\partial x} - y\, F_0^4 + x\, F_0^3 - (xy - 1)\, F_0^2 - (x^2 + y^2)\, F_0^1 & = 0 & x & y \\ F_1^4 \equiv & \boxed{\dfrac{\partial F_0^2}{\partial y}} & - F_0^6 - F_0^4 & = 0 & x & y \\ F_1^3 \equiv & \boxed{\dfrac{\partial F_0^1}{\partial y}} & - F_0^5 - y\, F_0^2 - x\, F_0^1 & = 0 & x & y \\ F_1^2 \equiv & \boxed{\dfrac{\partial F_0^2}{\partial x}} & - F_0^5 - F_0^3 & = 0 & x & \bullet \\ F_1^1 \equiv & \boxed{\dfrac{\partial F_0^1}{\partial x}} & - F_0^4 - y\, F_0^1 & = 0 & x & \bullet \\ \hline & & & & x & y \end{array} \right.$$

Ce système est du premier ordre, involutif et formellement intégrable. Ses caractères sont : $\sigma^x = 2 < \sigma^y = 5$. On vérifie :

$$(\Sigma_2) \left\{ \begin{array}{lllr|cc|} F_2^2 \equiv & \boxed{\dfrac{\partial F_1^2}{\partial y}} & - \dfrac{\partial F_1^4}{\partial x} + F_1^7 + F_1^5 & = 0 & x & y \\ F_2^1 \equiv & \boxed{\dfrac{\partial F_1^1}{\partial y}} & - \dfrac{\partial F_1^3}{\partial x} + F_1^6 + y\, F_1^5 - y\, F_1^2 - x\, F_1^1 & = 0 & x & y \\ \hline & & & & x & y \end{array} \right.$$

(Σ_2) est un système de Cauchy-Kowalewski. $\sigma^x = 0 < \sigma^y = 2$. D'où

$$P(\Theta) : \quad 0 \to \Theta \to E \to F_0 \to F_1 \to F_2 \to 0$$

E, F_0, F_1, F_2 : fibrés triviaux;

$$\dim E = 1, \qquad \dim F_0 = 6, \qquad \dim F_1 = 7, \qquad \dim F_2 = 2.$$

On observe :

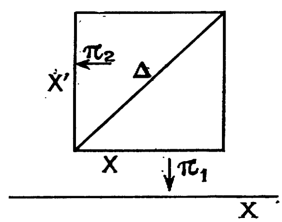
$$6 - 7 + 2 = \sigma^y(\varpi) = \dim E = 1.$$

I. — **RAPPELS** ([3], [4], [11], [17], [25])

Soient : X variété C^∞ de dimension n, X' autre copie de X.

On considère :

$$\begin{matrix} X \times X' \\ (x, x') \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \text{ projection sur le premier facteur (vertical),} \\ \pi_2 \text{ projection sur le deuxième facteur (horizontal);} \end{array} \right.$$



$\Delta \to X \times X'$, injection dans $X \times X'$ de la diagonale (x, x).
$\mathcal{O}_{X \times X'}$ étant le faisceau de germes de fonctions C^∞ sur $X \times X'$, soit $\mathcal{J}$ le sous-faisceau s'annulant sur Δ.

DÉFINITION :

$$J_q = \mathcal{O}_{X \times X'} / (\mathcal{J})^{q+1}$$

(faisceau des germes de sections de l'espace fibré des jets d'ordre q de section de $\mathcal{O}_X$).

On adopte la notation :

$$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n), \qquad |\mu| = \mu_1 + \ldots + \mu_n, \qquad \mu\,! = \mu_1\,! \ldots \mu_2\,!.$$

Identifiant

$$x \to \{ u_\mu(x) \}, \qquad |\mu| \leq q,$$

avec

$$(x, x') \to \sum_{|\mu| \leq q} u_\mu(x) \frac{(x' - x)^\mu}{\mu\,!},$$

on définit

$$\left\{ \begin{array}{l} i_q : \mathcal{O}_X \to J_q : \quad u(x) \to u(x) ; \\ j_q : \mathcal{O}_X \to J_q : \quad u(x) \to u(x') \bmod (x' - x)^{q+1}. \end{array} \right.$$

Soit

$$u(x) \to j_q(u)(x, x') = \sum_{|\mu| \leq q} \frac{\partial^{|\mu|} u}{(\partial x)^\mu}(x) \frac{(x' - x)^\mu}{\mu\,!}.$$

On sous-entend

$$u = (u^k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m = \dim E).$$

i_q et j_q déterminent deux structures de $\mathcal{O}_X$-modules :

$$u_\mu(x) \in J_q \begin{cases} \text{gauche : } & f(x).u_\mu(x) & \text{(produit ordinaire par une fonction).} \\ \text{droite : } & u_\mu(x).j_q(f)(x) & \text{(au sens de la composition des jets).} \end{cases}$$

Étendant ces définitions, si $E \to X$ est un espace fibré sur X (m = dimension de la fibre) :

$$J_q(E) = J_q \otimes_{\mathcal{O}_X} E \qquad \text{(structure droite)}$$
$$= \pi_2^*(E)/\left(\mathcal{J}^{q11} \otimes_{\mathcal{O}_{X\times X'}} \pi_2^*(E)\right).$$

Remarques. — 1. Le faisceau des germes de sections différentiables de E sera noté aussi E; cette interprétation n'intervenant que lorsque des différentiations entrent en jeu, le contexte indiquera clairement lorsqu'il faut l'adopter.

2. On peut introduire des dérivations sur $X \times X'$ par rapport à x (D de la première suite de Spencer) et x' (opérateur δ).

Soit $F \to X$ un autre fibré vectoriel (dim F = dimension de la fibre de F).

Un opérateur différentiel $E \xrightarrow{\mathcal{D}} F$ d'ordre q est défini en coordonnées locales par

$$u^k(x) \to \sum_{|\mu| \leq q} A_k^{l\mu}(x) \frac{\partial^{|\mu|} u^k}{(\partial x)^\mu}(x).$$

On associe à $\mathcal{D}$ le morphisme unique $\Phi = J_q(E) \to F$ tel que

$$\mathcal{D} = \Phi \circ j_q,$$

$E \xrightarrow{j_r.\mathcal{D}} J_r(F)$ est un opérateur différentiel d'ordre $q + r$, on écrit

$$j_r.\mathcal{D} = p_r(\Phi) \circ j_{q+r} \qquad (r^{\text{ième}} \textit{ prolongement}).$$

Exemple :

$$E \xrightarrow{j_q} J_q(E), \quad J_{q+r}(E) \xrightarrow{p_r(\mathrm{id}_q)} J_r(J_q(E)) : \quad p_r(\mathrm{id}_q).j_{q+r} = j_r.j_q.$$

Définissant

$$R_{q+r} = \ker p_r(\Phi)$$

et $T^* \to X$ fibré cotangent.

On obtient alors le diagramme commutatif suivant, où les applications en pointillés sont induites par les applications en traits pleins.

$\sigma_r(\Phi)$ est le symbole de $p_r(\Phi)$: c'est la restriction de $p_r(\Phi)$ à $\left(\overset{q+r}{\bigcirc} T^*\right) \otimes E$, sous-fibré de $J_{q+r}(R)$ et $(q+r)^{\text{ième}}$ produit symétrique de T^*.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d, dashed] & & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r, dashed] & g_{q+r+1} \arrow[rr, dashed] \arrow[d, dashed] & & \left(\overset{q+r+1}{\bigcirc} T^*\right) \otimes E \arrow[rr, dashed, "\sigma_{r+1}(\Phi)"] \arrow[d] & & \left(\overset{r+1}{\bigcirc} T^*\right) \otimes F \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & R_{q+r+1} \arrow[rr] \arrow[d, dashed] & & J_{q+r+1}(E) \arrow[rr, "p_{r+1}(\Phi)"] \arrow[d, "\pi"] & & J_{r+1}(F) \arrow[d, "\pi"] \\
0 \arrow[r] & R_{q+r} \arrow[rr] & & J_{q+r}(E) \arrow[rr, "p_r(\Phi)"] \arrow[d] & & J_r(F) \arrow[d] \\
 & & & 0 & & 0
\end{tikzcd}$$

On notera aussi

$$0 \to \Theta \to E \overset{\mathcal{D}}{\to} F,$$

Θ, faisceau des germes de sections solutions de $\mathcal{D}\, u = 0$, plus simplement *faisceau solution* de $\mathcal{D}$.

(Σ) est équivalent à l'équation $\mathcal{D}\, u = 0$:

$$(\Sigma) \equiv \left\{ A_k^{l\mu}(x) \frac{\partial^{|\mu|} u^k}{(\partial x)^\mu}(x) = 0 \right\}.$$

Définition de l'intégrabilité formelle :

$$\begin{array}{l} \mathcal{D} \text{ formellement} \\ \quad \text{intégrable} \quad \Leftrightarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{l} (1)\ p_r(\Phi) \text{ de rang constant } \forall\, r \geq 0 \ (\textit{régularité}) \\ \qquad (R_{q+r} \text{ fibré vectoriel, } \forall\, r \geq 0), \\ (2)\ R_{q+r+1} \to R_{q+r} \to 0 \ \text{ suite exacte, } \forall\, r \geq 0 \\ \qquad \text{(condition nécessaire pour l'existence de} \\ \qquad \text{solutions formelles).} \end{array} \right.$$

Remarque. — On peut avoir $R_{q+1} \to R_q$ surjectif sans avoir $R_{q+r+1} \to q_{q+r}$ surjectif.

Exemple :

$$R_2 \left\{ \begin{array}{l} p_{33} = x_2\, p_{11}, \\ p_{22} = 0. \end{array} \right.$$

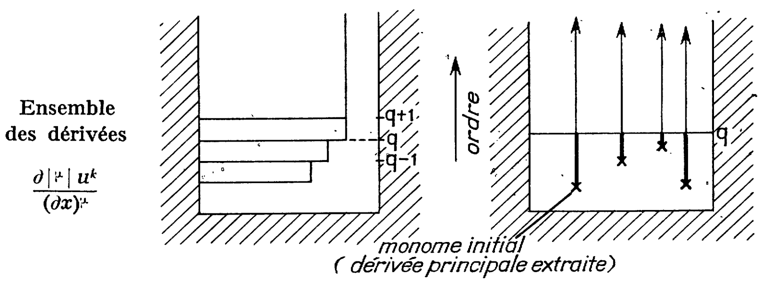
Les prolongements successifs ne peuvent apporter de relations supplémentaires entre les dérivées d'ordre 2 de la fonction inconnue considérée.

Mais

$$R_3 \begin{cases} p_{333} = x_2\, p_{113} \\ p_{233} = x_2\, p_{112} + p_{11} \\ p_{223} = 0 \\ p_{222} = 0 \\ p_{133} = 0 \\ p_{122} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad R_4 \underbrace{\begin{cases} p_{2233} = x_2\, p_{1122} + 2\, p_{112} \\ p_{2233} = 0 \\ p_{1122} = 0 \end{cases}}_{p_{112} = 0}$$

$R_3 \to R_2$ surjectif, $R_4 \to R_3$ non surjectif.

Si $\mathcal{D}$ est formellement intégrable, on construit donc une solution formelle de (Σ) : $\{\, \mathcal{D} u = 0 \,\}$ par « *étages successifs* » d'ordre q, $q + 1$, ...



Construction par « étages » successifs Construction par « fils »

Au contraire dans la théorie de Janet, on détermine chaque « *fil* » séparément après l'avoir isolé.

On comprend donc sur ces dessins la notion de « *préparation* ». (On conserve toutes les équations d'ordre $\leq q$ correspondant aux parties surlignées.)

La « *partie d'ordre q* » associée à $\sigma(\Phi)$ s'interprète grâce au diagramme exact commutatif :

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & g_q \arrow[r] & (S^q T^*) \otimes E \arrow[r, "\sigma(\Phi)"] \arrow[d, "\varepsilon"] & F \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & R_q \arrow[r] \arrow[u] & J_q(E) \arrow[r, "\Phi"] & F \end{tikzcd}$$

$\sigma_r(\Phi)$ est donc déterminé seulement par $\sigma_0(\Phi) = \sigma(\Phi)$.

g_q est défini par $\left\{ A_k^{l\mu}(x)\, u_\mu^k(x) = 0 \;\middle|\; |\mu| = q \right\}$.

La condition algébrique d'involution s'observe sur la première ligne du diagramme précédent.

Enfin on sait ([4], [5], [11]) que si $\mathcal{D}$ est suffisamment régulier, on peut construire un opérateur différentiel qui aura les mêmes solutions formelles que $\mathcal{D}$ tout en étant formellement intégrable. Il suffit alors de prolonger cet opérateur un nombre fini de fois pour satisfaire à la condition algébrique d'involution. On supposera donc désormais :

Hypothèses faites sur $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = \Phi \circ j_q &: \ \text{suffisamment régulier,} \\ g_{q+r} &: \ \text{involutif, } \forall\, r \geqq 0, \\ \mathcal{D} &: \ \text{formellement intégrable.} \end{aligned}$$

Pratiquement :

— La première hypothèse permet de calculer les dérivées principales en fonction des x et des dérivées paramétriques.

— Lorsque la condition d'involution est satisfaite, la dernière hypothèse consiste en ce que, par combinaisons linéaires des équations du système (Σ) prolongé une fois, on ne peut obtenir une équation d'ordre q qui ne soit une conséquence directe des équations de (Σ).

— Seuls de tels systèmes e. d. p. peuvent être traités avec profit par des méthodes analogues à celles de Janet.

Nous allons maintenant montrer comment les résultats obtenus de cette façon s'insèrent dans le cadre d'une théorie formelle.

II. — CONDITIONS DE COMPATIBILITÉ ([3], [4], [25])

Les hypothèses faites sur $\mathcal{D}$ permettent de construire le diagramme tridimensionnel ci-joint, avec des notations que l'on va préciser.

L'opérateur D a déjà été introduit par dérivation par rapport à x puis passage du quotient (§ I).

Son expression, facilement calculable en coordonnées locales, se traduit par

$$\varepsilon . \mathrm{D} = j_1 . \pi - p_1(\mathrm{id}_{q+r})$$

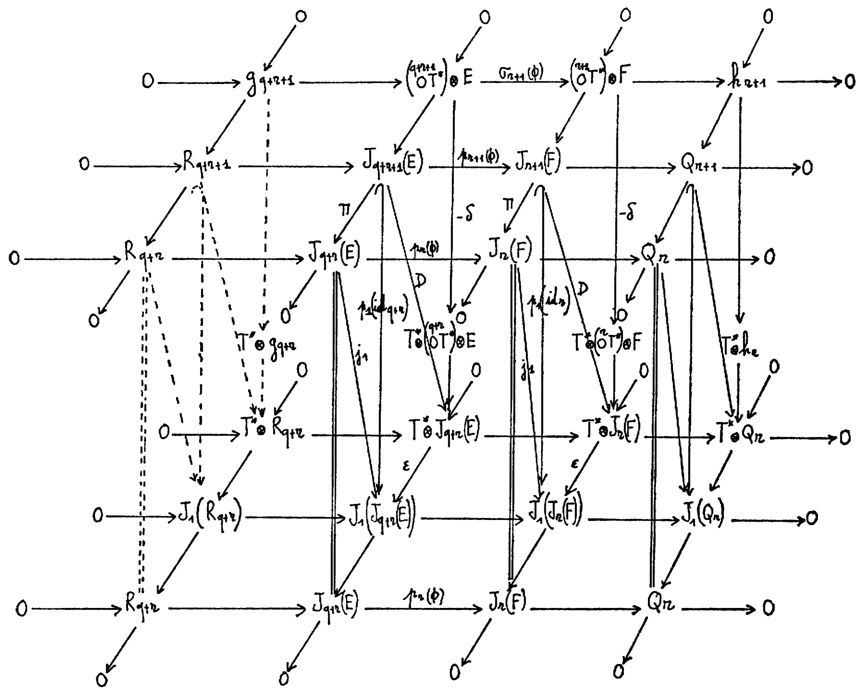
dans le diagramme commutatif suivant où $\hookrightarrow$ est l'injection : $p_1(\mathrm{id}_{q+r})$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \left(\overset{q+r+1}{0}\, T^*\right)\otimes E \arrow[r] \arrow[d, dashed] & J_{q+r+1}(E) \arrow[r, "\pi"] \arrow[dl, "\mathrm{D}"'] \arrow[d, hook] & J_{q+r}(E) \arrow[r] \arrow[dl, "j_1"'] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & T^*\otimes J_{q+r}(E) \arrow[r, "\varepsilon"] & J_1(J_{q+r}(E)) \arrow[r] & J_{q+r}(E) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

L'application $-\delta$ est induite à partir de D dans le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \left(\overset{q+r+1}{\bigcirc} T^*\right) \otimes E \arrow[r] \arrow[d, dashed, "-\delta"] & J_{q+r+1}(E) \arrow[r] \arrow[d, "D"] & J_{q+r}(E) \arrow[r] \arrow[d, "D"] & 0 \\
0 \arrow[r] & T^* \otimes \left(\overset{q+r}{\bigcirc} T^*\right) \otimes E \arrow[r] & T^* \otimes J_{q+r}(E) \arrow[r] & T^* \otimes J_{q+r-1}(E) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On associe des opérations identiques à chaque facette du diagramme tridimensionnel.



On étend ensuite

$$\delta : \quad \Lambda^p \, T^* \otimes r_l \to \Lambda^{p+1} \, T^* \otimes r_{l-1}$$

grâce à

$$\delta\,(\omega \otimes u) = (-1)^p \, \omega \wedge \delta u,$$

r_l pouvant être ici g_{q+r}, h_r, $\left(\overset{q+r}{\bigcirc} T^*\right) \otimes E$ ou $\left(\overset{r}{\bigcirc} T^*\right) \otimes F$.

$\delta \otimes \mathrm{id}$ étant notée aussi δ, on sait que la suite

$$\delta(\mathrm{E}) : 0 \to \left(\overset{r+n}{\bigcirc} \mathrm{T}^*\right) \otimes \mathrm{E} \xrightarrow{\delta} \mathrm{T}^* \otimes \left(\overset{r+n-1}{\bigcirc} \mathrm{T}^*\right) \otimes \mathrm{E} \xrightarrow{\delta} \dots$$
$$\to \Lambda^n \mathrm{T}^* \otimes \left(\overset{r}{\bigcirc} \mathrm{T}^*\right) \otimes \mathrm{E} \to 0$$

est exacte.

Φ étant régulier, g_{q+r} et h_r sont des fibrés vectoriels, g_{q+r} étant déterminé par g_q, $\forall\, r \geqq 0$.

On construit les suites :

$$0 \to g_{q+r+1} \to \mathrm{T}^* \otimes g_{q+r} \to \Lambda^q \mathrm{T}^* \otimes g_{q+r-1} \to \dots \to \Lambda^q \mathrm{T}^* \otimes g_{q+r-n+1} \to 0,$$
$$0 \to h_{r+1} \to \mathrm{T}^* \otimes h_r \to \Lambda^q \mathrm{T}^* \otimes h_{r-1} \to \dots \to \Lambda^q \mathrm{T}^* \otimes h_{r-n+1} \to 0.$$

On notera la cohomologie en $\Lambda^p \mathrm{T}^* \otimes g_{q+r}$, par $\mathrm{H}^{p,q+r}$.

Généralisant la définition « pratique » de l'involution donnée par Janet, on peut se ramener à une condition équivalente ([24], [25], lemma 7.5), ce qui permet de remplacer l'hypothèse d'involution par

$$\mathrm{H}^{p,q+r} = 0, \qquad \forall\, p \geqq 0, \quad r \geqq 0.$$

Prenons $\mathrm{F}_1 = \mathrm{Q}_1$ et étudions la suite

$$(1) \qquad \mathrm{J}_{q+r+1}(\mathrm{E}) \xrightarrow{p_{r+1}(\Phi)} \mathrm{J}_{r+1}(\mathrm{F}_0) \xrightarrow{p_r(\psi_1)} \mathrm{J}_r(\mathrm{F}_1),$$

avec

$$0 \to \mathrm{R}_{q+1} \to \mathrm{J}_{q+1}(\mathrm{E}) \xrightarrow{p_1(\Phi)} \mathrm{J}_1(\mathrm{F}_0) \xrightarrow{\psi_1} \mathrm{F}_1 = \mathrm{Q}_1 \to 0,$$

par définition

$$0 \to \mathrm{R}_{q+r+1} \to \mathrm{J}_{q+r+1}(\mathrm{E}) \xrightarrow{p_{r+1}(\Phi)} \mathrm{J}_{r+1}(\mathrm{F}) \to \mathrm{Q}_{r+1} \to 0$$

est une suite exacte.

Pour que (1) soit exacte, il suffit de montrer que la suite

$$0 \to \mathrm{Q}_{r+1} \xrightarrow{p_r(\mathrm{id}_1)} \mathrm{J}_r(\mathrm{Q}_1)$$

est exacte, $\forall\, r \geqq 0$ puisque cette suite est déterminée par le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{J}_{q+r+1}(\mathrm{E}) \arrow[r] \arrow[d, "p_r(\mathrm{id}_{q+1})"] & \mathrm{J}_{r+1}(\mathrm{F}_0) \arrow[r] \arrow[d, "p_r(\mathrm{id}_1)"] \arrow[dr, "p_r(\psi_1)"] & \mathrm{Q}_{r+1} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
\mathrm{J}_r(\mathrm{J}_{q+1}(\mathrm{E})) \arrow[r] & \mathrm{J}_r(\mathrm{J}_1(\mathrm{F}_0)) \arrow[r, dash] & \mathrm{J}_r(\mathrm{Q}_1) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Cependant lorsque $r = 0$ on a trivialement $0 \to Q_1 = Q_1$ exacte. Il reste donc le cas $r \geqq 1$.

Mais on a montré que, si $s \in h_{r+1}$,

$$-\varepsilon\,\partial s = \varepsilon\,D\,s = (j_1\,\pi - p_1\,(\mathrm{id}_r))\,s,$$

or $\pi\,s = 0$, car

$$0 \to h_{r+1} \to Q_{r+1} \to Q_r \to 0$$

est une suite exacte; donc

$$\varepsilon\,\partial s = p_1\,(\mathrm{id}_r)\,s.$$

De plus, la composition

$$Q_{r+1} \xrightarrow{p_1(\mathrm{id}_r)} J_1\,(Q_r) \to Q_r$$

est en fait

$$Q_{r+1} \xrightarrow{\pi} Q_r,$$

donc

$$\ker p_1\,(\mathrm{id}_r) \subseteq h_{r+1},$$

choisissons

$$z \in \ker p_1\,(\mathrm{id}_r), \qquad \varepsilon\,\partial z = p_1\,(\mathrm{id}_r)\,.$$

ε étant injectif

$$z \in \ker p_1\,(\mathrm{id}_r) \;\Rightarrow\; \partial z = 0,$$

par suite :

$$\ker p_1\,(\mathrm{id}_r) = \{\, z \mid z \in h_{r+1};\ \partial z = 0 \,\},$$

avec

$$\partial : \quad h_{r+1} \to T^* \otimes h_r.$$

Pour que la suite $0 \to Q_{r+1} \to J_1\,(Q_r)$ soit exacte il suffit donc de montrer que la suite

$$0 \to h_{r+1} \to T^* \otimes h_r \quad \text{est exacte}, \qquad \forall\, r \geqq 1.$$

Ceci permettant de montrer que la suite

$$0 \to Q_{r+1} \to J_r\,(Q_1) \quad \text{est exacte}, \qquad \forall\, r \geqq 0,$$

grâce à la composition d'injections :

$$\begin{tikzcd}
Q_{r+1} \arrow[r, hook] \arrow[drr] & J_1(Q_r) \arrow[r, hook] & \text{------} \arrow[r, hook] & J_1{}^r(Q_1) \\
 & & J_r(Q_1) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Mais on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & g_{q+r+1} \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & \left(\overset{q+r+1}{\circ} T^*\right)\otimes E \arrow[r, "\sigma_{r+1}(\Phi)"] \arrow[d] & \left(\overset{r+1}{\circ} T^*\right)\otimes F \arrow[r] \arrow[d] & h_{r+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & T^*\otimes g_{q+r} \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & T^*\otimes\left(\overset{q+r}{\circ} T^*\right)\otimes E \arrow[r] \arrow[d] & T^*\otimes\left(\overset{r}{\circ} T^*\right)\otimes F \arrow[r] \arrow[d] & T^*\otimes h_r \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Lambda^2T^*\otimes g_{q+r-1} \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & \Lambda^2T^*\otimes\left(\overset{q+r-1}{\circ} T^*\right)\otimes E \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda^2T^*\otimes\left(\overset{r-1}{\circ} T^*\right)\otimes F & & \\
0 \arrow[r] & \Lambda^3T^*\otimes g_{q+r-2} \arrow[r] & \Lambda^3T^*\otimes\left(\overset{q+r-2}{\circ} T^*\right)\otimes E & & &
\end{tikzcd}$$

avec

$$H^{2,q+r-1} = 0 \qquad \text{car} \qquad r \geq 1.$$

C. Q. F. D.

Remarquant alors que la méthode de Janet revient à étudier $F_1 = \operatorname{coker} p_1(\Phi)$, on a donc associé à tout opérateur différentiel $\mathcal{D}$, linéaire, formellement intégrable et involutif, un opérateur différentiel linéaire $\mathcal{D}_1 = \psi \circ j_1$ tel que le complexe

$$0 \to \Theta \to E \to F_0 \to F_1$$

soit formellement exact.

Considérons alors le diagramme commutatif et exact : $\forall\, r \geq 0$.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & g_{q+r+1} \arrow[r] \arrow[d] & \left(\overset{q+r+1}{\circ} T^*\right)\otimes E \arrow[r, "\sigma_{r+1}(\Phi)"] \arrow[d] & g_{r+1}(\Omega) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & R_{q+r+1} \arrow[r] \arrow[d] & J_{q+r+1}(E) \arrow[r, "p_{r+1}(\Phi)"] \arrow[d] & R_{r+1}(\Omega) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & R_{q+r} \arrow[r] \arrow[d] & J_{q+r}(E) \arrow[r, "p_r(\Phi)"] \arrow[d] & R_r(\Omega) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{D}_1$ est donc formellement intégrable. De plus, l'exactitude de $\delta(E)$ et de la première ligne du diagramme précédent permet d'écrire :

$$H^{p,q+r} = 0, \quad \forall\, p, r \geq 0 \quad \Rightarrow \quad H^{p,1+r}(\Omega) = 0, \quad \forall\, p, r \geq 0.$$

On peut donc construire successivement $\mathcal{D}_1 = \psi_1 \circ j_1$, $\mathcal{D}_2 = \psi_2 \circ j_2, \ldots$; cependant cette méthode ne donne aucune information sur la longueur du complexe ainsi construit, alors que, d'après Janet, le complexe $P(\Theta)$ devrait être formellement exact :

Nous allons utiliser pour démontrer ce fait un formalisme analogue à celui développé par Spencer pour l'étude de sa suite « sophistiquée » $S_2(\Theta)$:

$$P(\Theta): \quad 0 \to \Theta \to E \overset{\mathcal{D}}{\to} F_0 \overset{\mathcal{D}_1}{\to} F_1 \overset{\mathcal{D}_2}{\to} \ldots \overset{\mathcal{D}_n}{\to} F_n \to 0.$$

III. — CONSTRUCTION GLOBALE DE $P(\Omega)$

On considère l'opérateur

$$D: \quad \Lambda^p T^* \otimes J_{q+r+1}(E) \to \Lambda^{p+1} T^* \otimes J_{q+r}(E),$$

obtenu à partir de

$$D: \quad J_{q+r+1}(E) \to T^* \otimes J_{q+r}(E)$$

par

$$D(\omega \otimes u) = d\omega \otimes \pi\, u + (-1)^p\, \omega \wedge D\, u.$$

Cette définition ne dépend pas en effet de la décomposition choisie car,

$$\begin{aligned} D(f\omega \otimes u) &= d(f\omega) \otimes \pi\, u + (-1)^p f\omega \wedge Du \\ &= df \wedge \omega \otimes \pi\, u + f\, d\omega \otimes \pi\, u + (-1)^p f\omega \wedge D\, u \\ &= d\omega \otimes \pi(fu) + (-1)^p\, \omega \wedge (df \otimes \pi\, u + f\, D\, u) \\ &= D(\omega \otimes fu) \end{aligned}$$

et ceci

$$\forall\, f \in \mathcal{O}_X, \quad \omega \in \Lambda^p T^*, \quad u \in J_{q+r+1}(E).$$

On peut définir

$$D: \quad \Lambda^p T^* \otimes R_{q+r+1} \to \Lambda^{p+1} T^* \otimes R_{q+r},$$

grâce au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Lambda^p T^* \otimes R_{q+r+1} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "D"] & \Lambda^p T^* \otimes J_{q+r+1}(E) \arrow[r, "id \otimes p_{r+1}(\Phi)"] \arrow[d, "D"] & \Lambda^p T^* \otimes J_{r+1}(F_0) \arrow[r] \arrow[d, "D"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Lambda^{p+1} T^* \otimes R_{q+r} \arrow[r] & \Lambda^{p+1} T^* \otimes J_{q+r}(E) \arrow[r, "id \otimes p_r(\Phi)"'] & \Lambda^{p+1} T^* \otimes J_r(F_0) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

La commutativité du diagramme précédent résulte aisément du fait que D est une dérivation :

$$D(\omega \wedge s) = d\omega \wedge s + (-1)^{\text{degré}\,\omega}\, \omega \wedge Ds;$$
$$\forall\ \omega \in \Lambda T^*, \quad s \in \Lambda^p T^* \otimes J_{q+r+1}(E)$$

et que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} J_{q+r+1}(E) & \xrightarrow{D} & T^*\otimes J_{q+r}(E) & \xrightarrow{\varepsilon} & J_1(J_{q+r}(E)) \\ \big\downarrow{\scriptstyle p_{r+1}(\phi)} & & \big\downarrow{\scriptstyle id\otimes p_r(\phi)} & & \big\downarrow{\scriptstyle J_1(p_r(\phi))} \\ J_{r+1}(F_0) & \xrightarrow{D} & T^*\otimes J_r(F_0) & \xrightarrow{\varepsilon} & J_1(J_r(F_0)) \end{array}$$

Car

$$\varepsilon D = j_1 \circ \pi - p_1(\mathrm{id}_{q+r}) \quad \text{dans la 1}^{\text{re}} \text{ ligne,}$$
$$\varepsilon D = j_1 \circ \pi - p_1(\mathrm{id}_r) \quad \text{dans la 2}^{\text{e}} \text{ ligne.}$$

De plus,

$$D^2(\omega \wedge s) = D(d\omega \wedge \pi s + (-1)^p \omega \wedge Ds)$$
$$= \pi\pi\, s + (-1)^{p+1} \pi\, s + (-1)^p + \omega \wedge D^2 s$$

mais si $s \in J_{q+r+1}(E)|_x$ on peut trouver $u \in \Gamma(U, E)$ tel que

$$j_{q+r+1}(u)(x) = s$$

et

$$D\, j_{q+r+1}(s) = j_1 \circ j_{q+r}(s) - j_1 \circ j_{q+r}(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad D^2 \equiv 0.$$

On peut donc considérer le complexe, exact en R_{q+n+r}, *première suite de Spencer :*

$$S_1(\Theta): \quad 0 \to \Theta \xrightarrow{j_{q+n+r}} R_{q+n+r} \xrightarrow{D} T^* \otimes R_{q+n+r-1} \xrightarrow{D} \dots \xrightarrow{D} \Lambda^n T^* \otimes R_{q+r} \to 0.$$

Soit dans le cas de l'opérateur trivial, $0 \to E = E \to 0$:

$$S_1(E): \quad 0 \to E \xrightarrow{j_{n+r}} J_{n+r}(E)$$
$$\xrightarrow{D} T^* \otimes J_{n+r-1}(E) \xrightarrow{D} \dots \xrightarrow{D} \Lambda^n T^* \otimes J_r(E) \to 0.$$

Utilisant les hypothèses d'involution et le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & g_{q+n+r+1} \arrow[r, "-\delta"] \arrow[d] & T^*\otimes g_{q+n+r} \arrow[r, "-\delta"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "-\delta"] & \overset{n}{\wedge} T^*\otimes g_{q+r+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Theta \arrow[r, "j_{q+n+r+1}"] \arrow[d, equal] & R_{q+n+r+1} \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\pi"] & T^*\otimes R_{q+n+r} \arrow[r, "D"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "D"] & \overset{n}{\wedge} T^*\otimes R_{q+r+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Theta \arrow[r, "j_{q+n+r}"] \arrow[d] & R_{q+n+r} \arrow[r, "D"] \arrow[d] & T^*\otimes R_{q+n+r-1} \arrow[r, "D"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "D"] & \overset{n}{\wedge} T^*\otimes R_{q+r} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

dont la première ligne et les colonne sont exactes, on obtient

La cohomologie de S_1 (Θ) ne dépend pas de $r \geqq 0$.

Remarque. — On peut montrer par récurrence que S_1 (E) est exacte. Pour ce qui précède on pourra se rapporter à [3], [4], [17] et [25]:

Revenons maintenant à $\mathcal{D}_1$.

Une hypothèse naturelle faite par Janet et que nous n'avons pas utilisée jusqu'à présent, consiste à supposer que le système (Σ) est constitué par des équations indépendantes.

Grâce au diagramme exact commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & g_{q+1} \arrow[r] \arrow[d] & \left(\overset{q+1}{\bigcirc} T^*\right)\otimes E \arrow[r, "\sigma_1(\Phi)"] \arrow[d] & T^*\otimes F_0 \arrow[r, "\sigma(\Psi)"] \arrow[d, "\varepsilon"] & F_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & R_{q+1} \arrow[r] \arrow[d] & J_{q+1}(E) \arrow[r, "p_1(\Phi)"] \arrow[d] & J_1(F_0) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\pi"] & F_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & R_q \arrow[r] \arrow[d] & J_q(E) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & F_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
 & 0 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

l'exactitude de la suite

$$0 \to R_q \to J_q\,(E) \xrightarrow{\Phi} F_0 \to 0$$

est condition nécessaire et suffisante d'existence du diagramme exact commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & g_1(\Omega) \arrow[r] \arrow[d] & T^* \otimes F_0 \arrow[r, "\sigma(\psi)"] \arrow[d, "\varepsilon"] & F_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & R_1(\Omega) \arrow[r] \arrow[d] & J_1(F_0) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"] & F_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_0 \arrow[r, equal] \arrow[d] & F_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

Remarque. — $R_1(\Omega) \to F_0$ surjectif indique seulement qu'il n'y a pas de relations linéaires entre les équations de (Σ) supposées indépendantes.

On remarque :

$$F_1 \approx T^* \otimes F_0/g_1(\Omega) = T^* \otimes F_0/\delta g_1(\Omega).$$

Posons alors :

$$F_p = \Lambda^p T^* \otimes F_0/\delta(\Lambda^{p-1} T^* \otimes g_1(\Omega))$$

et considérons le « *diagramme de construction* » exact commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Lambda^{p-1} T^* \otimes g_1(\Omega) \arrow[r] \arrow[dd, "-\delta"] & \Lambda^{p-1} T^* \otimes R_1(\Omega) \arrow[r, "\pi"] \arrow[dd, "D"] & \Lambda^{p-1} T^* \otimes F_0 \arrow[rr] \arrow[dr, "\varpi"] \arrow[dd, "D'"'] & & 0 \\
 & & & & F_{p-1} \arrow[r] \arrow[dl] & 0 \\
0 \arrow[r] & \delta(\Lambda^{p-1} T^* \otimes g_1(\Omega)) \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda^p T^* \otimes F_0 \arrow[r, "\varpi"] & F_p \arrow[rr] & & 0 \\
 & 0 & & & &
\end{tikzcd}
$$

Tout d'abord la formule d'Euler utilisée sur la suite exacte :

$$
\begin{aligned}
&0 \to \ker \delta \to \Lambda^{p-2} T^* \otimes g_2(\Omega) \\
&\xrightarrow{\delta} \Lambda^{p-1} T^* \otimes g_1(\Omega) \xrightarrow{\delta} \Lambda^p T^* \otimes F_0 \xrightarrow{\varpi} F_p \to 0
\end{aligned}
$$

montre que les F_p sont des fibrés vectoriels ($\dim \ker \delta + \dim F_p = \mathrm{Cte}$).

Soit

$$\tau \in \Lambda^{p-1} T^* \otimes g_1(\Omega) \qquad \text{et} \qquad \sigma = -\delta\tau, \qquad \varepsilon\tau \in \Lambda^{p-1} T^* \otimes R_1(\Omega).$$

Prenons $\rho \in \Lambda^{p-1} T^* \otimes R_2(\Omega) \mid \pi\rho = \varepsilon\tau$, ce qui est possible puisque $R_2(\Omega) \to R_1(\Omega) \to 0$ est exacte :

$$\begin{aligned} \varepsilon\tau = \pi\rho \quad &\Rightarrow \quad D'\varepsilon\sigma = - D'\varepsilon\delta\tau \\ &= D' D\varepsilon\tau = D' D\pi\rho = D'\pi D\rho = \varpi D^2\rho = 0. \end{aligned}$$

Par suite, $\exists\, \mathcal{D}_p : F_{p-1} \to F_p$ opérateur différentiel d'ordre 1. De plus :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_p \circ \mathcal{D}_{p-1} \circ \varpi \circ \pi \circ \pi &= \mathcal{D}_p \circ D' \circ \pi \circ \pi = \mathcal{D}_p \circ \varpi \circ D \circ \pi \\ &= D' \circ D \circ \pi \qquad = D' \circ \pi \circ D \\ &\qquad\qquad\qquad\quad = \varpi \circ D^2 = 0 \end{aligned}$$

et

$$\varpi \circ \pi \circ \pi \text{ surjectif} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}_p \circ \mathcal{D}_{p-1} = 0.$$

On a donc construit la suite

$$P(\Omega): \quad 0 \to \Omega \to F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{D}_n} F_n \to 0.$$

Cette suite étant déterminée seulement par $\mathcal{D}_1$, et les F_p n'étant définis qu'à un isomorphisme près, pour établir l'identité de cette construction avec celle qui a été faite au paragraphe II, il reste à montrer que $P(\Omega)$ est formellement exacte.

On aura donc alors retrouvé des résultats analogues à ceux de Janet relatifs à la construction de la chaîne de systèmes $(\Sigma_1), \dots, (\Sigma_n)$.

On utilisera pour cela le « *diagramme déplié* » obtenu en rabattant sur un même plan deux faces d'un diagramme tridimensionnel dont la troisième est constituée par des suites de type $S_1(\Omega)$.

Les récurrences (1) puis (2) à partir du cas $p = 1$ déjà rencontré, montrent l'exactitude de la suite :

$$0 \to R_{n+r}(\Omega) \to J_{n+r}(F_0) \to J_{n+r-1}(F_1) \to \dots \to J_r(F_n) \to 0.$$

En effet, en remontant la partie haute du diagramme déplié grâce aux applications surjectives qui la bordent, on détermine l'application m rendant exacte la suite

$$\left(\overset{2}{\bigcirc} T^*\right) \otimes F_{p-2} \xrightarrow{\sigma_1(\psi_{p-1})} T^* \otimes F_{p-1} \xrightarrow{m} F_p \to 0.$$

Mais, D' étant induit par D,

$$\sigma_\chi(\mathcal{D}_p) F_{p-1} = \chi \wedge F_{p-1} \in F_p,$$

car

$$\delta(\chi \wedge s) = \pm\, \chi \wedge \delta s, \qquad \forall\, \chi \in T^*, \quad s \in \Lambda^{p-2} T^* \otimes g_1(\psi).$$

La suite $T^* \otimes F_{p-1} \xrightarrow{\sigma(\psi_p)} F_p \to 0$ est donc exacte :

$$(\chi \otimes \tau, \quad \to \quad \chi \wedge \tau), \quad \forall\, \tau \in F_{p-1}.$$

De plus :

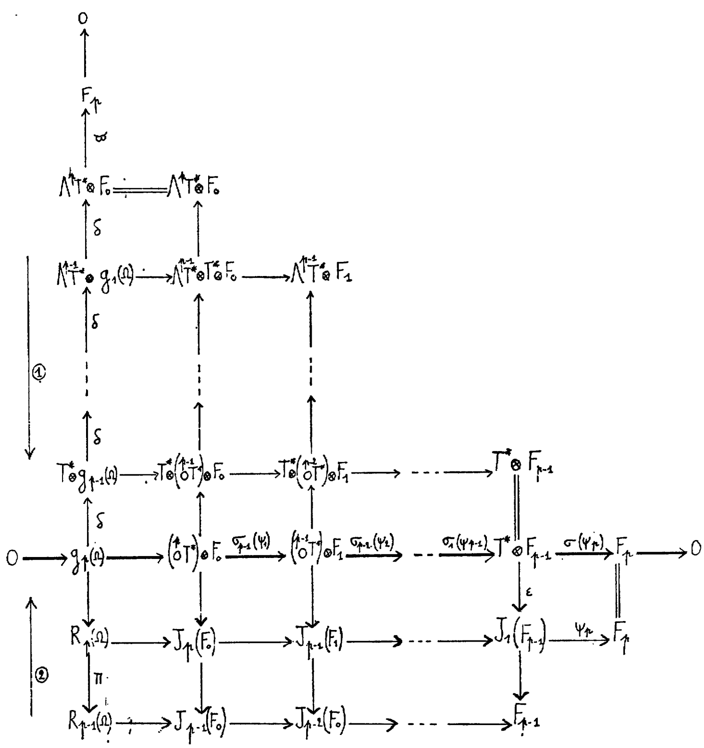
$$\sigma(\psi_p) \circ \sigma_1(\psi_{p-1}) = 0, \qquad \text{car} \quad \mathcal{D}_p \circ \mathcal{D}_{p-1} = 0.$$

Alors :

$$\operatorname{im} m = F_p = \operatorname{im} \sigma(\psi_p),$$
$$\ker m = \operatorname{im} \sigma_1(\psi_{p-1}) \subseteq \ker \sigma(\psi_p),$$
$$\dim F_p + \dim \ker m = \dim T^* \otimes F_{p-1} = \dim \ker \sigma(\psi_p) + \dim F_p$$
$$\ker m = \ker \sigma(\psi_p),$$

m et $\sigma(\psi_p)$ coïncident puisque F_p n'est défini qu'à un isomorphisme près.

« Diagramme déplié » (La bordure de 0 est omise);
$p = 1, 2, \ldots, n$ ($\psi = \psi_1$).



On peut donc compléter la ligne du milieu de la partie inférieure du diagramme déplié par F_p. La récurrence (2) montre alors que cette ligne est exacte puisque la récurrence (1) avait montré que la ligne centrale, en trait gras, était exacte.

C. Q. F. D.

$$[\chi \in T^*, \chi = \chi_i\, dx^i, \sigma_x(\mathcal{D}) : A_k^{l, \mu_1 \dots \mu_n} (\chi_1)^{\mu_1} \dots (\chi_n)^{\mu_n}, |\mu| = q]$$

IV. — DIAGRAMME FONDAMENTAL

Les suites

$$0 \to R_{q+n+r} \to J_{q+n+r}(E) \to R_{n+r}(\Omega) \to 0$$

étant exactes, on en déduit l'exactitude des suites :

$$0 \to R_{q+n+r} \to J_{q+n+r}(E) \to J_{n+r}(F_0) \to \dots \to J_r(F_n) \to 0.$$

On construit donc le « *diagramme réticulé* », commutatif et exact, qui montre alors l'isomorphisme des cohomologies de $S_1(\Theta)$ et de $P(\Theta)$.

Diagramme réticulé

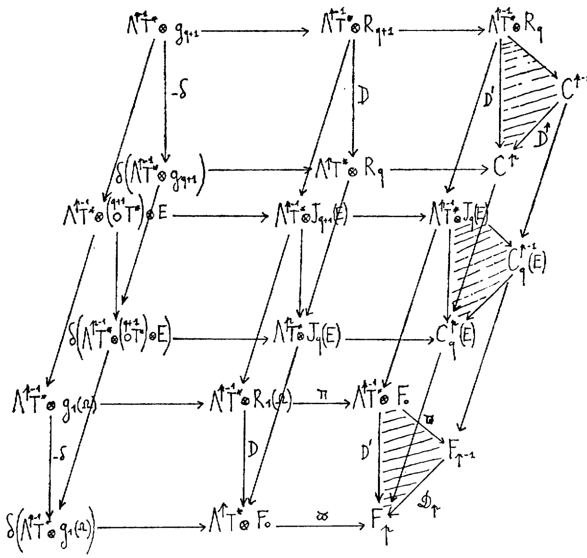
$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d, "j"] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \Theta \arrow[r, "i"] \arrow[d] & E \arrow[r, "\mathcal{D}"] \arrow[d] & F_0 \arrow[r, "\mathcal{D}_1"] \arrow[d] & F_1 \arrow[r, "\mathcal{D}_2"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\mathcal{D}_n"] & F_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & R_{q+n+r} \arrow[r] \arrow[d] & J_{q+n+r}(E) \arrow[r] \arrow[d] & J_{n+r}(F_0) \arrow[r] \arrow[d] & J_{n+r-1}(F_1) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & J_r(F_n) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & T^* \otimes R_{q+n+r-1} \arrow[r] \arrow[d] & T^* \otimes J_{q+n+r-1}(E) \arrow[r] \arrow[d] & T^* \otimes J_{n+r-1}(F_0) \arrow[r] \arrow[d] & T^* \otimes J_{n+r-2}(F_1) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & T^* \otimes J_{r-1}(F_n) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & {} & \\
0 \arrow[r] & \Lambda^n T^* \otimes R_{q+r} \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda^n T^* \otimes J_{q+r}(E) \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda^n T^* \otimes J_r(F_0) \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda^n T^* \otimes J_{r-1}(F_1) \arrow[r] \arrow[d] & {} & & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Les paragraphes II et III permettent maintenant de tracer le diagramme exact commutatif suivant où les 0 n'ont pas été indiqués pour plus de clarté.

Dans ce diagramme, par définition :

$$C^p = \Lambda^p T^* \otimes R_q / \varepsilon\delta (\Lambda^{p-1} T^* \otimes g_{q+1}),$$

$$C_q^p(E) = \Lambda^p T^* \otimes J_q(E) / \varepsilon\delta \left(\Lambda^{p-1} T^* \otimes \left(\overset{q+1}{\bigcirc} T^*\right) E\right).$$



Un raisonnement analogue à celui du paragraphe III mais avec C^p à la place de F_p (remarquer la position des indices !), montrerait l'isomorphisme des cohomologies de $S_1(\Theta)$ et de $S_2(\Theta)$:

$$S_1(\Theta): \quad 0 \to \Theta \xrightarrow{j_q} C^0 \xrightarrow{D_1} C^1 \xrightarrow{D^2} \dots \xrightarrow{D^n} C^n \to 0.$$

On possède maintenant tous les éléments pour réunir $P(\Theta)$ et $S_2(\Theta)$ dans un même diagramme plan. Il suffit pour cela d'observer que, dans $P(\Theta)$, seuls les opérateurs $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$ sont du premier ordre.

On introduit donc la suite $P(\Omega)$, déjà définie, dans le « *diagramme fondamental* » où la ligne centrale, exacte, est la suite physique associée à l'opérateur :

$$0 \to E \xrightarrow{j_q} J_q(E) = C_q^0(E).$$

Application : « *Diagramme associé* ». — Utilisant le tableau $\mathfrak{T}$ et la définition du caractère $\sigma^n(\mathcal{D})$, on obtient facilement (*cf.* exemple) :

$$\dim F_p = \sigma^n(\mathcal{D}_p) + \sigma^n(\mathcal{D}_{p+1}) \qquad (\mathcal{D} = \mathcal{D}_0).$$

D'où :

$$(1) \qquad \sum_0^n (-1)^p \dim F_p = \sigma^n(\mathcal{D}).$$

« Diagramme fondamental »

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \Theta \arrow[r, "j_1"] \arrow[d] & C^0 \arrow[r, "D^1"] \arrow[d] & C^1 \arrow[r, "D^2"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "D^n"] & C^n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "j_1"] \arrow[d] & C_1^0(E) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & C_1^1(E) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & C_1^n(E) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega \arrow[r] \arrow[d] & F_0 \arrow[r, "\mathcal{D}_1"] \arrow[d] & F_1 \arrow[r, "\mathcal{D}_2"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\mathcal{D}_n"] & F_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \mathrm{cohom}\, C^1 \arrow[d] & 0 & 0 & & 0 & \\
 & 0 & & & & &
\end{tikzcd}
$$

(2) Le choix de $\chi \in T^*$ rendant minimal dim ker $\sigma_\chi(\mathcal{D})$ détermine alors l'exactitude du complexe :

$$0 \to \ker \sigma_\chi(\mathcal{D}) \to E \xrightarrow{\sigma_\chi(\mathcal{D})} F_0 \xrightarrow{\sigma_\chi(\mathcal{D}_1)} F_1 \xrightarrow{\sigma_\chi(\mathcal{D}_2)} \dots \xrightarrow{\sigma_\chi(\mathcal{D}_n)} F_n \to 0,$$

ce qui, à l'aide du diagramme associé permet de retrouver aisément une propriété de la suite des symboles associée à $S_2(\Theta)$, résultat non trivial autrement (!!!) ([17], [25]) (*cf.* exemple).

[Équivalence de l'exactitude des suites :

(1) $$0 \to E \xrightarrow{\sigma_\chi \mathcal{D}} F,$$

(2) $$0 \to C^0 \xrightarrow{\sigma_\chi(D^1)} C^1,$$

(3) $$0 \to C^0 \xrightarrow{\sigma_\chi(D^1)} C^1 \xrightarrow{\sigma_\chi(D^2)} \dots \xrightarrow{\sigma_\chi(D^n)} C^n \to 0].$$

« Diagramme associé »

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
 & & 0 \arrow[r] \arrow[d] & C^0 \arrow[r, "\sigma_\chi(D^1)"] \arrow[d] & C^1 \arrow[r, "\sigma_\chi(D^2)"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\sigma_\chi(D^n)"] & C^n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r, "\sigma_\chi(j_1)"] \arrow[d, equal] & C_1^0(E) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & C_1^1(E) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & C_1^n(E) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker \sigma_\chi(\mathcal{D}) \arrow[r] & E \arrow[r, "\sigma_\chi(\mathcal{D})"] \arrow[d] & F_0 \arrow[r, "\sigma_\chi(\mathcal{D}_1)"] \arrow[d] & F_1 \arrow[r, "\sigma_\chi(\mathcal{D}_2)"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\sigma_\chi(\mathcal{D}_n)"] & F_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

CONCLUSION

Nous avons montré que, moyennant certaines modifications, la théorie de Janet (1920 !!) fournissait, en plus d'une traduction concrète du formalisme contemporain, quelques résultats nouveaux concernant l'étude des systèmes e. d. p.

Ces résultats, énoncés dans le présent article, nous permettent, dans un travail en préparation, de traiter les déformations de structures algébriques (algèbres de Lie) et de Γ-structures dans le cadre d'une même théorie que l'on appellera : « *théorie des déformations de structures mathématiques* ».

PROBLÈME

L'exactitude en F_0 n'est pas toujours vérifiée (sauf si $\mathcal{D}$ est elliptique) mais elle est toujours vraie en F_n.

Existe-t-il une caractérisation simple de l'exactitude, non de $P(\Theta)$, mais de $P(\Omega)$?

BIBLIOGRAPHIE

CRAMLET (C. M.) :

[1] *Implicit part different equations* (*Bulletin A. M. S.*, vol. 44, 1938, p. 107-109).
[2] *Systems of partial different equations* (*University of Washington Public in Mathematics*, vol. 3, 1948, p. 45-54).

GOLDSCHMIDT (H.) :

[3] *Existence theorems for analytic linear partial differential equations* (*Ann. Mathematics*, vol. 86, 1962, p. 246-270).
[4] *Prolongations of linear partial different equations :* I. *A conjoncture of E. Cartan* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 1, 1968, p. 417-444).
[5] *Formal theory of overdetermined linear partial different equations* (*A. M. S. Proc. Conf. in Global Analysis*, 1968).

JANET (M.) :

[6] *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles* (*J. Math. pures et appl.*, t. 3, 1920, p. 65).
[7] *Les modules de formes algébriques* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. XLI, 1924, p. 27-65).
[8] *Leçons sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles* (*Cahiers scientifiques*, fasc. IV, Gauthier-Villars, Paris, 1929).
[9] *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles* (*Mémorial Sc. math.*, fasc. XXI).
[10] *Équations aux dérivées partielles* (*Formulaire de math.*, C. N. R. S., fasc. VII, 1956).

KURANISHI (M.) :

[11] *Involutive systems*, Sao Paolo, 1966.

LIBERMANN (P.) :

[12] *Sur les prolongements des fibrés principaux et les groupoïdes différentiables.*
[13] *Sur la géométrie des prolongements des espaces fibrés vectoriels* (*Colloque international C. N. R. S.*, Grenoble, 1963).

RIQUIER (Ch.) :

[14] *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Gauthier-Villars, Paris, 1910.
[15] *La méthode des fonctions majorantes et les systèmes d'équations aux dérivées partielles* (*Mémorial Sc. math.*, fasc. XXXII).

RITT (J. F.) :

[16] *Differential algebra*, Dover, 1950 puis 1966.

SPENCER (D. C.) :

[17] *Overdetermined systems of linear partial differential equations* (*A. M. S.*, 1968).

THOMAS (J. M.) :

[18] *Annals of Math.*, 30, 1929.
[19] *Riquier's theory* (*Annals of Math.*, 35, 1934).
[20] *Matrices of integers ordering derivatives* (*Trans. A. M. S.*, vol. 33, 1931, p. 389).

[21] *Conditions for an orthonormic system* (*Trans. A. M. S.*, vol. 34, 1932).
[22] *Ordely different systems* (*Duke Math. J.*, vol. 1940, p. 249-290).
[23] *Systems and roots*, W. Byrd Press, 1962.

GUILLEMIN (V.) et STERNBERG (S.) :

[24] *An Algebric model of transitive differential Geometry* (*Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 70, 1964, p. 16-47).

SWEENEY (W. J.) :

[25] *The D-Neumann problem* (*Acta Math.*, vol. 120, 1968, p. 223-251).

(*Manuscrit reçu le* 15 *mai* 1972.)