ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

P. GHEZ

Spectre du hamiltonien et équivalence algébrique des états quasi-libres du champ de fermions

Annales de l'I. H. P., section A, tome 16, nº 4 (1972), p. 235-246
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1972__16_4_235_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XVI, n° 4, 1972, p. 235-246.

Section A :
Physique théorique.

Spectre du hamiltonien et équivalence algébrique des états quasi-libres du champ de fermions

par

P. GHEZ

ABSTRACT. — We study connections between the Asymptotic ratio set introduced by Araki and Woods for classification of factors and spectrum of Tomita's modular operator of some representations of Canonical Anticommutation Relations.

INTRODUCTION

Le but de ce travail est de pousser un peu plus avant l'étude des états quasi-libres de la C*-algèbre des relations d'anticommutation canoniques (C. A. R).

Le cadre mathématique sera constitué par la donnée de la C*-algèbre des C. A. R. et d'une évolution-groupe à un paramètre réel d'automorphismes de cette C*-algèbre.

Nous démontrons que, pour tout état quasi-libre ω de la C*-algèbre des C. A. R., il y a identité, dans les cas rencontrés en physique, entre l'« asymptotic-ratio-set » du facteur obtenu dans la représentation de GNS induite par ω, d'une part et le spectre de l'opérateur modulaires de Tomita, d'autre part.

Le hamiltonien apparaît alors comme un invariant algébrique de la représentation considérée.

En conséquence, le spectre de l'opérateur modulaire est un sous-groupe multiplicatif fermé de $\mathbf{R}^+$ et il définit complètement la classe algébrique à laquelle appartient le facteur et donc l'état ω.

Dans la section I, nous rappelons sans démonstration, les principales propriétés de l'algèbre de Clifford et de ses états quasi-libres. Pour les démonstrations, nous renvoyons à [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] et [8].

Dans la section II, nous rappelons sans démonstrations les définitions et les résultats principaux concernant la propriété L'_λ de Araki [9] et l'asymptotic-ratio-set de Araki et Woods ([10], [11]).

Dans la section III, nous démontrons le théorème principal.

1. LA C*-ALGÈBRE DES C. A. R. ET SES ÉTATS QUASI-LIBRES

Soit (H, s) un espace de Hilbert réel, de dimension au plus dénombrable, muni du produit scalaire $(\psi, \varphi) \in H \times H \to s(\psi, \varphi) \in \mathbf{R}$. Dans le cas où la dimension de H est paire ou infinie, on définit une structure complexe s-permise de H par la donnée d'un opérateur J satisfaisant à

$$s(J\psi, J\varphi) = s(\psi, \varphi), \quad \forall \psi, \varphi \in (H, s),$$
$$J^2 = -\mathbf{1}.$$

Muni du produit scalaire

$$(\psi, \varphi) \in H \times H \to s_J(\psi, \varphi) = s(\psi, \varphi) + is(J\psi, \varphi) \in \mathbf{C},$$

et de la multiplication externe $(\alpha + i\beta)\psi = \alpha\psi + \beta J\psi$, (H, s_J) est un espace de Hilbert complexe.

Nous noterons $\mathcal{A}(H, s)$ l'algèbre de Clifford bâtie sur (H, s), engendrée par les éléments de la forme $B(\psi)$ où B est une application $\mathbf{R}$-linéaire vérifiant

$$[B(\psi), B(\varphi)]_+ = 2s(\psi, \varphi)\mathbf{1}, \quad \forall \psi, \varphi \in (H, s).$$

Il existe sur $\mathcal{A}(H, s)$ une involution unique rendant les $B(\psi)$ hermitiens et une norme unique de C*-algèbre [telle que $\| x^* x \| = \| x \|^2$ $\forall x \in \mathcal{A}(H, s)$] qui vérifie alors $\| B(\psi) \| = \| \psi \|$, $\forall \psi \in H$.

La C*-algèbre de C. A. R. sera obtenue en complétant $\mathcal{A}(H, s)$ par rapport à cette norme et sera notée $\overline{\mathcal{A}(H, s)}$ ou simplement $\mathcal{A}$ lorsque aucune confusion n'est possible. Lorsque la dimension de H est paire ou infinie, c'est une C*-algèbre simple.

Si J est une structure complexe s-permise sur (H, s), nous définissons les éléments $B_J^{\pm}(\psi) = \frac{1}{2}[B(\psi) \mp iB(J\psi)]$ qui satisfont aux relations d'anticommutation

$$[B_J^-(\psi), B_J^+(\varphi)]_+ = s_J(\psi, \varphi)\mathbf{1}, \quad \forall \psi, \varphi \in (H, s).$$

Soit T un élément du groupe orthogonal de (H, s). Il définit une application $B(\psi) \to B(T\psi)$ qui s'étend en un $\star$-automorphisme unique α_T de $\overline{\mathcal{A}(H, s)}$, dit monoparticulaire, et défini par

$$\alpha_T[B(\psi)] = B(T\psi).$$

On appelle évolution quasi-libre tout homomorphisme $t \to \alpha_t$ du groupe $(\mathbf{R}, +)$ dans le groupe des $\star$-automorphismes monoparticulaires de $\mathfrak{A}$, tel que l'application $t \to \alpha_t X$ soit continue pour tout X de $\mathfrak{A}$.

Il existe un sous-espace $\tilde{H}$, dense dans (H, s), pour lequel l'application $t \in \mathbf{R} \to \alpha_t B(\tilde{\psi}) = B(T_t \tilde{\psi})$, $\tilde{\psi} \in \tilde{H}$, est une fonction entière.

Si $t \to T_t$ ($t \in \mathbf{R}$) est le groupe d'opérateurs orthogonaux défini par une évolution quasi-libre, il existe un opérateur antisymétrique Z (en général non borné) tel que $T_t = e^{Zt}$ [2].

Soit $Z = J\,|Z|$ la décomposition polaire de Z. Nous ne considérerons dans ce qui suit que le cas où Ker Z est de dimension paire ou infinie. J se prolonge alors en une complexification de H et on désignera par S_z et S'_z le spectre et le spectre essentiel de $e^{-|z|}$ pour la structure complexe de H correspondante (remarquons que S_z et S'_z ne dépendent pas du prolongement de J choisi). Pour la définition du spectre essentiel, on se rapportera à l'appendice. Nous noterons d'autre part $\tilde{S}_z$ et $\tilde{S}'_z$ l'adhérence dans $\mathbf{R}$ des groupes multiplicatifs engendrés par $S_z - \{0\}$ et $S'_z - \{0\}$.

Les états quasi-libres sur $\mathfrak{A}$ sont les états ω qui s'annulent sur les produits d'un nombre impair de $B(\psi)$ et qui sont définis sur les produits d'un nombre pair de $B(\psi)$ par

$$(1) \quad \omega\left[\prod_{i=1}^{2n} B(\psi_i)\right] = \sum_{i=1}^{2n-1} (-1)^{i+1}\,\omega[B(\psi_i)B(\psi_{2n})]\,\omega\left[\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2n-1} B(\psi_j)\right] \quad [2].$$

Tout état quasi-libre détermine un opérateur unique A sur (H, s) par la relation

$$(2) \qquad \omega(B(\psi), B(\varphi)) = s(\psi, \varphi) + is(A\psi, \varphi),$$

et qui vérifie $A^* = -A$ et $\|A\| \leq 1$. Inversement, tout opérateur A vérifiant ces deux conditions détermine un état quasi-libre unique sur $\mathfrak{A}$ par (2) [4]. Les états quasi-libres seront donc notés ω_A et π_A, $\mathcal{H}_A$, Ω_A seront respectivement la représentation, l'espace de représentation et le vecteur cyclique induits par ω_A dans la construction de G. N. S.

Soit $A = J\,|A|$ la décomposition polaire de A. Comme, dans ce qui suit, J se prolonge en une complexification de H il est immédiat de remarquer que, dans la formule (1), chaque $B(\psi_i)$ peut être remplacé par un $B_J^+(\psi_i)$ ou un $B_J^-(\psi_i)$.

Tout état quasi-libre ω_A est un état produit (au sens de Powers) par rapport à la décomposition de (H, s) en somme hilbertienne

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$$

avec

$$\begin{aligned} H_1 &= \operatorname{Ker}(1 - |A|), \\ H_2 &= \operatorname{Ker}|A|, \\ H_2 &= H \ominus (H_1 \oplus H_2) \end{aligned}$$

(la restriction de ω_A à H_1 est la partie de Fock de ω_A) [7]. Un état ω vérifie la condition de Kubo, Martin et Schwinger (K. M. S.) [8], à la température inverse β, pour l'évolution α_t, si, $\forall$ X, Y $\in \mathfrak{A}$, l'application $t \to \omega(X \alpha_t Y)$ peut être prolongée en une fonction analytique de t dans la bande $0 < \operatorname{Im} t < \beta$, continue aux bords, et telle que $\omega(X \alpha_t Y)\Big|_{t=i\beta} = \omega(YX)$.

Les états K. M. S. sont invariants ($\omega \circ \alpha_t = \omega$, $\forall\, t \in \mathbf{R}$), et par suite, il existe une implémentation $t \to U_t$ de l'évolution $t \to \alpha_t$ dans la représentation

$$\begin{aligned} \pi_A(\alpha_t X) &= U_t \pi_A(X) U_t^{-1}, \quad \forall\, X \in \mathfrak{A}, \quad \forall\, t \in \mathbf{R}, \\ U_t \Omega_A &= \Omega_A, \quad \forall\, t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Si H désigne le générateur infinitésimal du groupe $t \to U_t$, nous noterons S_H le spectre de l'opérateur e^{-H} et S'_H son spectre essentiel.

Si $t \to \alpha_t$ est une évolution quasi-libre de $\mathfrak{A}$ telle que la dimension de Ker $|Z|$ soit paire ou infinie, il existe un unique état K. M. S. par rapport à α_t et cet état est quasi-libre [2].

Si ω_A est un état quasi-libre dont la décomposition en état produit ne contient pas de partie de Fock, il existe une évolution monoparticulaire unique par rapport à laquelle ω_A est K. M. S. pour une température inverse β [2].

Si ω_A est un état quasi-libre K. M. S. à la température inverse β pour une évolution monoparticulaire α_t, l'opérateur Z vérifie

$$\frac{|Z|}{2} = \frac{1}{\beta} \operatorname{Arg\,th} |A| \quad [3].$$

2. ASYMPTOTIC-RATIO-SET ET PROPRIÉTÉ L'_λ

Dans ce qui suit $\left\{ \mathcal{M}_\lambda \,\middle|\, \lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \right\}$ désigne la famille à un paramètre de facteurs de type III mutuellement non isomorphes de Powers [12].

a. Asymptotic-ratio-set. — Pour une algèbre de von Neumann $\mathfrak{N}$, Araki et Woods ([10], [11]) ont introduit un invariant algébrique dit asymptotic-ratio-set de $\mathfrak{N}$ et qui est l'ensemble des $x \in [0, +\infty[$ tels que $\mathfrak{N}$ soit isomorphe à $\mathfrak{N} \otimes \mathcal{M}_\lambda$ avec $x = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ si $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $x = \frac{1-\lambda}{\lambda}$

si $\lambda \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$. C'est un ensemble fermé noté $r_\infty(\mathcal{M})$ et $r_\infty(\mathcal{M}) - \{0\}$ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbf{R}^+ - \{0\}$.

b. La propriété L'_λ. — Il s'agit d'une extension de la propriété L_λ de Powers [12] introduite par Araki [9].

Une algèbre de von Neumann $\mathcal{M}$ possède la propriété L'_λ si, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute famille finie d'états normaux $\omega_1, \ldots, \omega_n$ de $\mathcal{M}$, il existe un opérateur U dans $\mathcal{M}$ satisfaisant les conditions suivantes :

$$U^2 = 0 \quad \text{et} \quad U^*U + UU^* = \mathbf{1}, \tag{1}$$

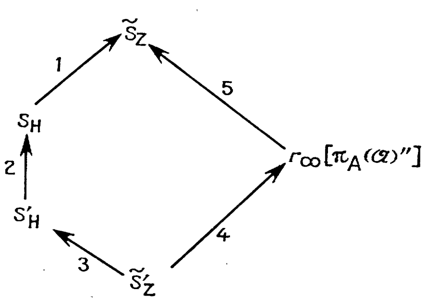
$$\begin{cases} \forall A \in \mathcal{M}, \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}, \\ |(1-\lambda)\,\omega_j(AU) - \lambda\,\omega_j(UA)| \leq \varepsilon \,\|A\|. \end{cases} \tag{2}$$

La propriété L'_λ est un invariant algébrique « équivalent à l'asymptotic-ratio-set » en ce sens que toute algèbre de von Neumann $\mathcal{M}$, sur un espace séparable, possède la propriété L'_λ si et seulement si $\frac{\lambda}{1-\lambda} \in r_\infty(\mathcal{M})$ [9].

3. LE THÉORÈME PRINCIPAL

THÉORÈME 3.1. — *Soit ω_A un état quasi-libre dont la décomposition en état produit ne contient pas de partie de Fock.*

Avec les notations adoptées précédemment, on a le diagramme suivant, où $A \to B$ signifie $A \subset B$:



Remarque. — Si ω_A contient une partie de Fock, les inclusions (1), (2), (3) n'ont plus de sens mais les inclusions (4) et (5) sont trivialement vérifiées.

Avant d'aborder la démonstration du théorème, examinons-en une conséquence.

COROLLAIRE 3.2. — *Dans les cas physiquement intéressants (hypothèses cu théorème* 3.3 *et théorème* 3.5 *de* [20]), *on a* $\tilde{S}'_Z = \tilde{S}_Z$ *et donc* $r_\infty [\pi_A(\mathfrak{A})''] = S_H$; *l'asymptotic-ratio-set du facteur* $\pi_A(\mathfrak{A})''$ *coïncide avec le spectre* S_H *de l'opérateur modulaire.* $S_H - \{0\}$ *est alors un sous-groupe multiplicatif fermé de* $\mathbf{R}^+ - \{0\}$.

Démonstration du théorème 3.1. — En ce qui concerne l'inclusion (1) il n'y a que deux cas à envisager puisque $\tilde{S}_z$ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbf{R}^+$. Ou bien $\tilde{S}_z = \mathbf{R}^+$, et le résultat est trivial, ou bien $\tilde{S}_z$ est de la forme $\{a^n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ avec $a \in \mathbf{N}$ et un calcul simple permet de conclure.

L'inclusion (2) est évidente d'après la définition du spectre essentiel.

Pour démontrer l'inclusion (3) nous aurons besoin de deux lemmes.

LEMME 3.3. — *Soient* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, *n éléments de* S'_z. *Il existe n systèmes orthonormés* $(\psi^1_k)_k, \ldots, (\psi^n_k)_k$ *de* H *constitués de vecteurs tous orthogonaux entre eux* ($\psi^i_k \perp \psi^j_l$, $\forall\, i, j, k, l$) *et tels que*

$$\lim_{k\,\infty} \| e^{-|z|}\, \psi^i_k - \lambda_i\, \psi^i_k \| = 0, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Démonstration. — Soient $E_1, \ldots, E_n$ les projecteurs spectraux correspondants à $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Chaque λ_i appartient au spectre essentiel de $e^{-|z|} E_i$ et il existe donc, d'après la proposition (A 4) de l'Appendice, un système orthonormé $(\psi^i_k)_k$ dans chaque $E_i H$ tel que

$$\lim_{k\,\infty} \| e^{-|z|}\, E_i\, \psi^i_k - \lambda_i\, \psi^i_k \| = 0,$$

donc tel que

$$\lim_{k\,\infty} \| e^{-|z|}\, \psi^i_k - \lambda_i\, \psi^i_k \| = 0.$$

Si $\lambda_i \neq \lambda_j$, on peut choisir un ε assez petit pour que les intervalles $]\lambda_i - \varepsilon, \lambda_i + \varepsilon[$ et $]\lambda_j - \varepsilon, \lambda_j + \varepsilon[$ soient disjoints. Les projecteurs spectraux E_i et E_j sur ces intervalles sont alors orthogonaux et les systèmes orthonormés $(\psi^i_k)_k$ dans $E_i H$ et $(\psi^j_k)_k$ dans $E_j H$ sont constitués de vecteurs tous orthogonaux entre eux.

LEMME 3.4. — *Soient* $(\psi^1_k)_k, \ldots, (\psi^n_k)_k$ *n systèmes orthonormés de* H *constitués de vecteurs tous orthogonaux entre eux. Alors les vecteurs* $\pi_A(B^+(\psi^1_k) \ldots B^+(\psi^n_k))\,\Omega_A$ *sont minorés en norme par* $2^{-\frac{n}{2}}$, $\forall\, k \in \mathbf{N}$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}\| \pi_A (B^+ (\psi_k^1) \ldots B^+(\psi_k^n)\, \Omega_A \|^2 &= \omega_A(B^-(\psi_k^n) \ldots B^- (\psi_k^1) B^+ (\psi_k^1) \ldots B^+ (\psi_k^n))\\ &= \prod_{i=1}^{n} \omega_A (B^- (\psi_k^i)\, B^+ (\psi_k^i))\\ &= \prod_{=1}^{n} s_J \left(\frac{1+|A|}{2} \psi_k^i, \psi_k^i\right)\\ &\geqq \prod_{i=1}^{n} s_J \left(\frac{1}{2} \psi_k^i, \psi_k^i\right)\\ &\geqq 2^{-n}.\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant prouver l'inclusion (3). Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ n éléments de S'_z. Soient $(\psi_k^1)_k, \ldots, (\psi_k^n)_k$ les n systèmes orthonormés qui leur sont associés par le lemme 3.3. Considérons la suite des vecteurs non nuls $\pi_A (B^+ (\psi_k^1) \ldots B^+ (\psi_k^n))\, \Omega_A$. Elle constitue un système orthogonal infini dans $\mathcal{H}_A$ qui vérifie la proposition (A 5) de l'Appendice pour l'opérateur e^{-H} puisque la norme de ses vecteurs est minorée d'après le lemme 3.4 et que, d'autre part, on a

$$\begin{aligned}\lim_{k \infty} [e^{-H} \pi_A (B^+ (\psi_k^1) \ldots B^+ (\psi_k^n))\, \Omega_A\\ - \lambda_1 \ldots \lambda_n \pi_A (B^+ (\psi_k^1) \ldots B^+ (\psi_k^n))\, \Omega_A] = 0.\end{aligned}$$

Pour vérifier ce dernier point, remarquons tout d'abord que

$$\begin{aligned}&e^{-H} \pi_A (B^+ (\psi_k^1) \ldots B^+ (\psi_k^n))\, \Omega_A\\ &\quad = e^{-H} \pi_A (B^+ (\psi_k^1))\, e^{H} e^{-H} \pi_A (B^+ (\psi_k^2))\, e^{H} \ldots e^{-H} \pi_A (B^+ (\psi_k^n))\, \Omega_A\\ &\quad = \pi_A (B^+ (e^{-|z|} \psi_k^1) \ldots B^+ (e^{-|z|} \psi_k^n))\, \Omega_A.\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}&e^{-H} \pi_A (B^+ (\psi_k^1) \ldots B^+ (\psi_k^n))\, \Omega_A - \lambda_1 \ldots \lambda_n \pi_A (B^+ (\psi_k^1) \ldots B^+ (\psi_k^n))\, \Omega_A\\ &\quad = \pi_A (B^+ (e^{-|z|} \psi_n^1) \ldots B^+ (e^{-|z|} \psi_k^n) - \lambda_1 \ldots \lambda_n B^+(\psi_k^1) \ldots B^+ (\psi_k^n))\, \Omega_A.\end{aligned}$$

Il suffit donc de vérifier que

$$\lim_{k \infty} (B^+ (e^{-|z|} \psi_k^1) \ldots B^+ (e^{-|z|} \psi_k^n) - \lambda_1 \ldots \lambda_n B^+ (\psi_k^1) \ldots B^+ (\psi_k^n)) = 0.$$

Or ceci s'obtient en remarquant que, pour tout k tel que

$$\| B^+ (e^{-|z|} \psi_k^i) - \lambda_i B^+ (\psi_k^i) \| < \varepsilon, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n,$$

on a

$$\| B^+ (e^{-|z|} \psi_k^1) \dots B^+ (e^{-|z|} \psi_k^n) - \lambda_1 \dots \lambda_n B^+ (\psi_k^1) \dots B^+ (\psi_k^n) \| < n \, \varepsilon \, (\sup | \lambda_i | + \varepsilon)^{n-1}.$$

En ce qui concerne l'inclusion (4), d'après [13] (lemme 4.4), il existe un opérateur antisymétrique A_0 ($A_0^* = - A_0$, $\| A_0 \| \leq 1$) à spectre purement ponctuel, tel que

$$(1 - | A |)^{\frac{1}{2}} - (1 - | A_0 |)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad (1 + | A |)^{\frac{1}{2}} - (1 + | A_0 |)^{\frac{1}{2}}$$

soient deux opérateurs de Hilbert-Schmidt et que le spectre essentiel de A_0 coïncide avec celui de A. Si $| Z_0 | = 2 \operatorname{Argth} | A_0 |$, on a alors $S'_{z_0} = S'_z$. Dans ces conditions, [13], les représentations π_A et π_{A_0} sont quasi-équivalentes et les deux algèbres de von Neumann $\pi_{A_0} (\mathcal{A})''$ et $\pi_A (\mathcal{A})''$ ont même asymptotic-ratio-set.

On peut donc ramener le problème au cas où l'opérateur $| Z |$ a un spectre purement ponctuel.

Soit alors $\{ \psi_k, J \psi_k \mid k \in \mathbf{N} \}$ une base orthonormale de vecteurs propres de $| Z |$ correspondants aux valeurs propres λ_k.

Soit $e^\lambda \in S'_z$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe une suite $(e^{\lambda_j})_j$ d'éléments de S_z qui converge vers e^λ. Notons $\mathcal{A}_j$ la sous-algèbre involutive de $\mathcal{A}$ engendrée par les $B^+ (\psi_k)$ et $B^+ (J \psi_k)$ ($k = 1, \dots, j$).

Soit $\{ \omega_i \mid i \in I \}$ une famille finie d'états normaux de $\mathcal{A}$ associés à la représentation π_A, c'est-à-dire de la forme $\omega_i : X \to \langle \pi_A (X) \xi_i, \xi_i \rangle$ où $\xi_i \in \mathcal{H}_A$. D'après [14] (th. 4, p. 222) et [15] (2.4.8), les états $\omega_\nu : X \to \omega_A (A_\nu^* X A_\nu)$ sont associés à π_A pour tout $A_\nu \in \mathcal{A}$ et tout autre état associé à π_A est limite en norme d'une suite de ω_ν. Donc, pour chacun des états ω_i, il existe une suite $(\omega_{ij})_j$ d'états $\omega_{ij} : X \to \omega_A (A_{ij}^* X A_{ij})$ et un rang j_0 tel que

$$j \geq j_0 \quad \Rightarrow \quad \| \omega_i - \omega_{ij} \| < \varepsilon.$$

Soit l un indice tel que $A_{ij} \in \mathcal{A}_l$, $\forall \, j \leq j_0$ et soient M et N les éléments de $\mathcal{A}_l$ définis par

$$M = \prod_{k=1}^{l} B (\psi_k) B (J \psi_k),$$

$$N = M B^- (\psi_{l+1}).$$

On vérifiera aisément que M, N et la famille $\{ \omega_i \mid i \in I \}$ possèdent les propriétés suivantes :

(L 1) : M est invariant par l'évolution α_t pour laquelle ω_{A_t} est K. M. S.;

(L 2) : N est vecteur propre de α_t avec la valeur propre $e^{\lambda_{l+1} t}$;

(L 3) : M commute avec $B^-(\psi_{l+1})$;

(L 4) : N commute avec tous les A_{ij} et A^*_{ij} $(i \in I,\ j \geqq j_0)$;

(L 5) : $M^*M = MM^* = \mathbf{1}$;

(L 6) : $N^2 = 0$,

$NN^* + N^*N = \mathbf{1}$,

$\forall i \in I, \quad \forall A \in \mathcal{A}, \quad |(1 - x_{l+1})\,\omega_i(AN) - x_{l+1}\,\omega_i(NA)| \leqq \varepsilon\,\|A\|$,

avec $x_{l+1} = (1 + e^{\lambda_{l+1}})^{-1}$.

Le seul point non trivial est la dernière partie de (L 6), aussi l'examinons-nous en détail. Si $j \geqq j_0$, on a $\|\omega_i - \omega_{ij}\| < \varepsilon$ et par suite :

$$\begin{aligned} |\omega_i(AN) - e^{-\lambda_{l+1}}\,\omega_i(NA)| \leqq{} & |(\omega_i - \omega_{ij})(AN)| \\ & + e^{-\lambda_{l+1}}\,|(\omega_i - \omega_{ij})(NA)| \\ & + |\omega_{ij}(AN) - e^{-\lambda_{l+1}}\,\omega_{ij}(NA)|, \end{aligned}$$

où le premier terme est majoré par $\varepsilon\,\|A\|$, le second par $e^{-\lambda_{l+1}}\,\varepsilon\,\|A\|$ et où le troisième est nul, car

$$\begin{aligned} \omega_{ij}(AN) &= \omega_A(A^*_{ij}\,ANA_{ij}) \\ &= \omega_A(A^*_{ij}\,AA_{ij}\,N) \quad \text{(L 4)} \\ &= e^{i\lambda_{l+1}t}\,\omega_A(A^*_{ij}\,AA_{ij}\,\alpha_t(N)) \quad \text{(L 2)} \\ &= e^{-\lambda_{l+1}}\,\omega_A(A^*_{ij}\,AA_{ij}\,\alpha_t(N))\Big|_{t=i\beta;\ \beta=1} \\ &= e^{-\lambda_{l+1}}\,\omega_A(NA^*_{ij}\,AA_{ij}) \quad (\text{car } \omega_A \text{ est K. M. S. pour } \alpha_t) \\ &= e^{-\lambda_{l+1}}\,\omega_A(A^*_{ij}\,NAA_{ij}) \quad \text{(L 4)} \\ &= e^{-\lambda_{l+1}}\,\omega_{ij}(NA). \end{aligned}$$

En définitive, on a donc

$$|\omega_i(AN) - e^{-\lambda_{l+1}}\,\omega_i(NA)| \leqq \varepsilon\,\|A\|\,(1 + e^{-\lambda_{l+1}}),$$

d'où le résultat, en multipliant les deux membres par $e^{\lambda_{l+1}}(1 + e^{\lambda_{l+1}})^{-1}$.

La preuve de (L 6) étant établie, nous pouvons affirmer que $\pi_A(\mathcal{A})''$ possède la propriété $L'_{x_{l+1}}$ de Araki et, par suite, que $e^{-\lambda_{l+1}}$ appartient à l'asymptotic-ratio-set de $\pi_A(\mathcal{A})''$. Comme cet asymptotic-ratio-set est fermé, il contient $e^{-\lambda}$ et on a $S'_z \subset r_\infty[\pi_A(\mathcal{A})'']$. Enfin l'asymptotic-ratio-set, privé de 0, étant un groupe multiplicatif, on a bien $\tilde{S}'_z \subset r_\infty[\pi_A(\mathcal{A})'']$.

En ce qui concerne l'inclusion (5) et pour les mêmes raisons que dans le paragraphe précédent, on peut se borner au cas où le spectre de $|Z|$ est purement ponctuel. $\pi_A(\mathcal{A})''$ est alors un produit tensoriel infini de facteurs de type I (ITPFI). La construction explicite de l'asymptotic-ratio-set, d'un ITPFI telle qu'elle est effectuée par Araki et Woods dans [10], donne alors directement le résultat.

REMARQUE. — Si $\tilde{S}'_Z \neq \tilde{S}_Z$, il existe au moins un cas dans lequel l'asymptotic-ratio-set $r_\infty\,[\pi_A(\mathfrak{A})'']$ et le spectre S_{II} sont distincts. On peut considérer en effet, puisque S_Z est discret, l'état produit $\omega = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \omega_i$, avec, comme matrices densités pour les ω_i :

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}$$

et

$$\rho_i = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0, \\ 0 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \forall\, i \neq 1 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2).$$

Alors λ_1, λ_2^n appartient à S'_H, alors que, dans ce cas, l'asymptotic-ratio-set ne contient que les puissances λ_2^n. On en déduit que S'_H, et donc S_{II}, ne sont pas inclus dans $r_\infty\,[\pi_A(\mathfrak{A})'']$ dans ce cas.

APPENDICE

Cet appendice est consacré à la définition du spectre essentiel d'un opérateur autoadjoint et à quelques critères équivalents à cette définition.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(A 1) *Le réel μ appartient au spectre de l'opérateur autoadjoint*

$$V = \int \lambda\, dE\,(\lambda).$$

(A 2) $\forall\, \varepsilon > 0, \quad \dim\,[E\,(\mu+\varepsilon) - E\,(\mu-\varepsilon)] = +\infty.$

(*Il revient au même de dire que μ appartient au complémentaire dans le spectre de l'ensemble des valeurs propres isolées de multiplicités finies.*)

(A 3) (Critère de H. Weyl). *Il existe une suite (f_n) d'éléments du domaine de* V *telle que*

$$\|f_n\| = 1, \quad \forall\, n,$$
$$f_n \to 0 \qquad (\langle f_n, g\rangle \to 0,\ \forall\, g),$$
$$(V - \mu\,\mathbf{1})\, f_n \to 0.$$

(A 4) *Il existe un système orthonormal (f_n) du domaine de* V *tel que*

$$(V - \mu\,\mathbf{1})\, f_n \to 0.$$

(A 5) *Il existe un système orthogonal (f_n) du domaine de* V *tel que* $(V - \mu\,\mathbf{1})\, f_n \to 0$ *et tel que les normes $\|f_n\|$ soient minorées $\forall\, n$.*

Démonstration. — Pour (A 1) $\Leftrightarrow$ (A 2) $\Leftrightarrow$ (A 3) on se référera à [18]. (A 4) $\Rightarrow$ (A 3) et (A 4) $\Leftrightarrow$ (A 5) sont triviales.

Le seul point délicat est donc (A 3) $\Rightarrow$ (A 4).

Supposons qu'il existe une suite (f_n) telle que $\|f_n\| = 1$, $f_n \to 0$ et $(V - \mu f_n) \to 0$. D'après un théorème de von Neumann [19] (th. X.2.1), on sait qu'on peut perturber l'opérateur V par addition d'un opérateur de Hilbert-Schmidt auto-adjoint H_0 de telle sorte que le spectre de $V + H_0$ soit purement ponctuel et que les spectres essentiels de V et de $V + H_0$ coïncident [19] (th. IV.5.35). Le réel μ appartient alors au spectre essentiel de $V + H_0$ et ne peut donc être qu'un point d'accumulation d'une suite de valeurs propres appartenant à des vecteurs propres orthogonaux. Il existe donc un système orthonormal (e_n) du domaine de V et une suite (μ_n) de valeurs propres de $V + H_0$ attachées aux vecteurs propres e_n telle que $\mu_n \to \mu$. D'autre part, $\|H_0 e_n\| \to 0$ puisque H_0 est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Or, nous avons

$$\begin{aligned}\| V e_n - \mu e_n \| &\leq \| (V + H_0) e_n - V e_n \| \\ &\quad + \| (V + H_0) e_n - \mu_n e_n \| + \| \mu_n e_n - \mu e_n \| \\ &\leq \| H_0 e_n \| + | \mu_n - \mu |.\end{aligned}$$

Donc

$$(V - \mu 1) e_n \to 0.$$

REMERCIEMENTS

Je remercie MM. D. Kastler et A. Grossmann pour les fructueuses discussions que j'ai pu avoir avec eux. Ma reconnaissance s'adresse également à MM. D. Testard, M. Sirugue et J. Manuceau qui m'ont grandement aidé dans ce travail.

Je remercie infiniment M. Alain Connes dont la critique m'a permis d'améliorer le théorème principal.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Shale et W. F. Stinespring, *Ann. Math.*, vol. 80, 1964, p. 365.

[2] F. Rocca, M. Sirugue et D. Testard, *Commun. math. Phys.*, vol. 13, 1969, p. 317.

[3] J. Manuceau, F. Rocca, M. Sirugue et D. Testard, *Cargèse Lectures*, Gordon and Breach, 1969.

[4] E. Balslev, J. Manuceau et A. Verbeure, *Commun. math. Phys.*, vol. 8, 1968, p. 315.

[5] R. T. Powers, *Thesis*, Princeton, 1967.

[6] M. Winnink, *Thèse*, Groningen, 1968.

[7] J. MANUCEAU, F. ROCCA et D. TESTARD, *Commun. math. Phys.*, vol. 12, 1969, p. 43.

[8] R. HAAG, N. M. HUGENHOLTZ et M. WINNINK, *Commun. math. Phys.*, vol. 5, 1967, p. 215.

[9] H. ARAKI, *Asymptotic-ratio-set and property* L'_λ, Preprint, Queen's University, Kingston, 1970.

[10] H. ARAKI et J. WOODS, *Publ. Res. Inst. Math. Sc.*, Kyoto University, Ser. A.4, 1968, p. 51-130.

[11] H. ARAKI et J. WOODS, *Publ. Res. Inst. Math. Sc.*, Kyoto University, Ser. A.4, 1969, p. 585-593.

[12] R. T. POWERS, *Cargèse Lectures*, Gordon and Breach, 1969.

[13] R. T. POWERS et E. STØRMER, *Commun. math. Phys.*, vol. 16, 1970, p. 1-33.

[14] J. DIXMIER, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[15] J. DIXMIER, *Les C*-algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.

[18] RIESZ et NAGY, *Leçons d'Analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris, 1968.

[19] KATO, *Perturbation Theory for linear Operators*, Springer, Verlag, 1966.

[20] D. TESTARD, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 12, (4), 1970, p. 329-341.

(*Manuscrit reçu le* 17 *janvier* 1972.)