

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

J. FRONTEAU

R. JACQUIER

Vers un modèle non-hamiltonien de l'oscillateur harmonique

Annales de l'I. H. P., section A, tome 16, n° 2 (1972), p. 119-132

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1972__16_2_119_0

© Gauthier-Villars, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Vers un modèle non-hamiltonien de l'oscillateur harmonique

par

J. FRONTEAU (*) et R. JACQUIER

Laboratoire de Physique
Faculté des Sciences, Tananarive

RÉSUMÉ. — Dans le cadre des tentatives d'interprétation des niveaux quantiques comme des cycles limites, les auteurs proposent un modèle dissipatif et non-linéaire qui serait susceptible de décrire l'ensemble des niveaux énergétiques de l'oscillateur harmonique.

ABSTRACT. — In the wake of the several attempts made to interpret quantum levels as limit cycles, a dissipative and non-linear model is suggested, which might possibly describe all energy levels of the harmonic oscillator.

1. INTRODUCTION

Depuis une quinzaine d'années, divers auteurs ont tenté de jeter un pont entre la mécanique quantique et la mécanique des vibrations non-linéaires, en cherchant à décrire les états stationnaires comme des cycles limites stables ([1], [2], [3], [4], [6], [7], [10], [13], [18], [19], [20]).

L'accent a surtout été mis, semble-t-il, sur l'accent *non linéaire* des mouvements, *a priori* hypothétiques, à introduire dans le cadre d'une telle recherche. Les auteurs voudraient plutôt insister aujourd'hui sur l'aspect *non-hamiltonien* des mouvements en question. Ceci va dans le sens d'une tentative d'introduction, en physique théorique, de phénomènes élémentaires dissipatifs ([16], [17], [21]) et, par là-même, pourrait peut-être rejoindre à long terme [21] l'aspect *thermodynamique* du problème des états stationnaires, au sens de la thermodynamique de la particule isolée ([5], [8], [9], [11], [12], [14]).

Dans le cas élémentaire de l'oscillateur harmonique, le présent article rappelle brièvement les propriétés de la dissipation linéaire, puis propose un modèle *dissipatif* et *non-linéaire* qui serait susceptible de décrire l'ensemble des niveaux quantiques de l'oscillateur.

(*) Actuellement, U. E. R. de Sciences exactes et naturelles, Université d'Orléans, 45-Orléans-La Source.

2. LE MODÈLE DISSIPATIF LINÉAIRE

2.1. Rappels à propos de l'oscillateur non amorti :

$$x'' + \omega_0^2 x = 0.$$

L'intégration donne :

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

$$x' = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

et ce mouvement est représenté dans l'espace R_2 d'axes (x, x') par une ellipse (fig. 1),

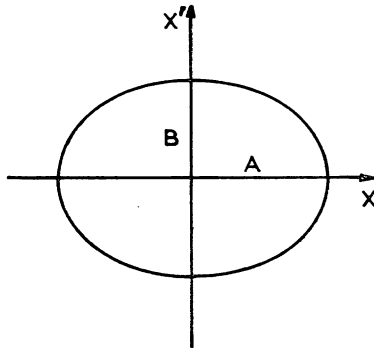


Fig. 1

dont le rapport des axes principaux est égal à la pulsation du mouvement :

$$\frac{B}{A} = \omega_0.$$

D'autre part, on montre très facilement que l'hamiltonien $H = T + V$ est de la forme :

$$H = \frac{m}{2\pi} \omega_0 S,$$

où S est l'aire de l'ellipse dans R_2 , et m la masse de l'oscillateur.

2.2. L'oscillateur fortement amorti :

$$x'' + 2\lambda x' + \omega_0^2 x = 0.$$

On dira ici que l'oscillateur est « fortement » amorti si et seulement si $\lambda^2 - \omega_0^2 > 0$.

Dans ces conditions, on pose

$$\omega = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

et l'intégrale générale s'écrit :

$$x = e^{-\lambda t} (A \operatorname{ch} \omega t + B \operatorname{sh} \omega t),$$

ce qui donne, en introduisant les conditions initiales x_0 et x'_0 pour $t = 0$,

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = e^{-\lambda t} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \omega t + \frac{\lambda}{\omega} \operatorname{sh} \omega t & \frac{1}{\omega} \operatorname{sh} \omega t \\ \left(\omega - \frac{\lambda^2}{\omega}\right) \operatorname{sh} \omega t & \operatorname{ch} \omega t - \frac{\lambda}{\omega} \operatorname{sh} \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}.$$

Soit \mathcal{E}_0 l'ellipse qui représente dans R_2 un oscillateur harmonique O_0 . La transformée de \mathcal{E}_0 par la matrice précédente sera en général une ellipse \mathcal{E} qui n'admettra pas les axes (x, x') pour axes principaux; en d'autres termes, la transformée ne représentera pas un oscillateur harmonique.

Pour que \mathcal{E} admette les axes (x, x') pour axes principaux (c'est-à-dire pour que \mathcal{E} représente un oscillateur harmonique O) on montre facilement que la matrice doit être diagonale. Cette condition implique ici

$$\omega t = 0,$$

c'est-à-dire : $t = 0$ (pas de mouvement) ou $\omega = 0 \rightarrow \lambda^2 = \omega_0^2$, ce qui n'est pas réalisé dans le cas général.

Conclusion. — L'oscillateur fortement amorti ($\lambda^2 > \omega_0^2$) ne peut pas décrire la transition d'un oscillateur harmonique à un autre.

2.3. L'oscillateur faiblement amorti

L'oscillateur sera dit « faiblement » amorti si $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0$. On pose :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

et il vient

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = e^{-\lambda t} \begin{pmatrix} \cos \omega t + \frac{\lambda}{\omega} \sin \omega t & \frac{\lambda}{\omega} \sin \omega t \\ -\left(\omega + \frac{\lambda^2}{\omega}\right) \sin \omega t & \cos \omega t - \frac{\lambda}{\omega} \sin \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}.$$

Pour que la transformée \mathcal{E} de \mathcal{E}_0 représente un oscillateur harmonique, il faut que la matrice soit diagonale, ce qui implique ici :

$$\omega t = k \pi \quad (k \text{ entier}).$$

La transformation se réduit alors à une homothétie dans R_2 (fig. 2)

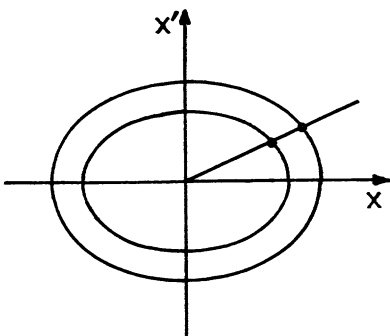


Fig. 2

$$\begin{aligned} x &= \pm e^{-\lambda t} x_0, \\ x' &= \pm e^{-\lambda t} x'_0. \end{aligned}$$

En conséquence, \mathcal{E} et \mathcal{E}_0 ont non seulement les mêmes axes principaux, mais le même rapport d'axes :

$$\frac{B}{A} = \frac{B_0}{A_0}.$$

En d'autres termes (cf. 2.1), l'oscillateur transformé a la même pulsation que l'oscillateur initial.

CONCLUSION. — *L'oscillateur faiblement amorti ($\lambda^2 < \omega_0^2$) peut assurer la transition entre deux oscillateurs harmoniques de même pulsation.* (Nous dirons que le modèle dissipatif linéaire « transmet » la pulsation originale ω_0 .)

Malheureusement, ce mouvement amorti *linéaire* n'admet pas de cycles limites autres que le repos.

3. UN MODÈLE DISSIPATIF NON LINÉAIRE

Considérons le mouvement décrit par une équation de la forme :

$$x'' + \omega_0^2 x = \mu f_1(x, x') \quad (\mu > 0),$$

où f_1 est une fonction non-linéaire de x et de x' , et μ un paramètre *petit* qui mesure le degré de non-linéarité et de dissipation du mouvement considéré.

3.1. Rappel d'une méthode de recherche des cycles limites

On appliquera à l'équation précédente la méthode de Van de Pol telle qu'elle est exposée, par exemple, dans ([15], p. 83). On reprendra même les notations utilisées dans l'ouvrage cité.

Un changement de variable $\tau = \omega_0 t$ conduit à une équation de la forme

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x = \mu f\left(x, \frac{dx}{d\tau}\right)$$

sur laquelle on raisonne. Elle présente l'avantage que l'ellipse représentative de l'oscillateur harmonique dans R_2 est une circonférence.

La méthode de recherche de cycles limites de l'oscillateur perturbé qui admettent la même pulsation ω_0 que l'oscillateur harmonique consiste (cf. [15]) à chercher des solutions de la forme :

$$\begin{aligned} x &= \rho(\tau) \cos[\tau - \theta(\tau)] = \rho(\tau) \cos \xi(\tau), \\ \frac{dx}{d\tau} &= -\rho(\tau) \sin[\tau - \theta(\tau)] = -\rho(\tau) \sin \xi(\tau), \end{aligned}$$

c'est-à-dire telles que

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\tau} &= \mu \Phi(\rho) = 0, \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= \mu \psi(\rho) = 0, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \Phi(\rho) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \xi, -\rho \sin \xi) \sin \xi \, d\xi, \\ \Psi(\rho) &= \frac{1}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \xi, -\rho \sin \xi) \cos \xi \, d\xi, \end{aligned}$$

ρ étant traité comme une constante sous le signe \int .

En résumé, on montre que les cycles limites (ρ_c) :

a. sont définis par

$$\rho = \rho_c, \quad \text{avec} \quad \Phi(\rho_c) = 0;$$

b. sont stables si

$$\frac{d\Phi}{d\rho}(\rho_c) < 0;$$

c. sont des oscillateurs harmoniques de pulsation ω_0 si

$$\psi(\rho_c) = 0.$$

3.2. Recherche d'une fonction $\Phi(\rho)$ qui décrive les niveaux quantiques de l'oscillateur harmonique

D'ordinaire, la méthode de Van der Pol est utilisée comme suit : on connaît la perturbation $f\left(x, \frac{dx}{d\tau}\right)$; on en déduit $\Phi(\rho)$ et $\Psi(\rho)$, puis l'on étudie ces deux fonctions pour en déduire d'éventuels cycles limites.

Ici, nous pratiquerons en sens inverse. Puisque nous connaissons les niveaux quantiques de l'oscillateur harmonique, nous chercherons — par tâtonnement — une fonction Φ susceptible de les décrire comme des cycles limites puis, connaissant Φ , nous essaierons d'en déduire la fonction perturbatrice f correspondante.

Remarquons que cette méthode, si elle nous donne une solution, ne nous permettra pas *a priori* de conclure que cette solution est unique.

Les niveaux quantiques de l'oscillateur harmonique sont de la forme :

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_0 \quad \rightarrow \quad E = (2n + 1) E_0.$$

Les aires correspondantes dans R_2 sont

$$S = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{h}{m} \quad \rightarrow \quad S = (2n + 1) S_0,$$

d'où pour le rayon ρ de la circonférence représentative dans R_2 ,

$$\rho = \rho_0 \sqrt{2n + 1}.$$

Rappelons que l'ancienne théorie du quanta donnait

$$\rho = \rho_0 \sqrt{2n}.$$

PROBLÈME. — Trouver une fonction $\Phi(\rho)$ qui admette cette double suite de zéros. Les facteurs $(2n)$ et $(2n + 1)$ rappellent les zéros de la fonction $\sin 2X = 2 \sin X \cos X$, et le radical porte à introduire un carré en argument du sinus; il reste à ajuster un certain facteur, et l'on parvient à

$$\Phi(\rho) = \sin \left[\pi \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right].$$

Vérifions que cette fonction peut être acceptée pour décrire les niveaux quantiques de l'oscillateur comme des cycles limites stables (cf. 3.1)

$$\Phi(\rho_c) = 0 \quad \rightarrow \quad \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right] \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right] = 0.$$

Première famille de zéros (F₁) :

$$\cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right] = 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi,$$

$$\rho_{c1} = \rho_0 \sqrt{2n + 1}$$

ρ_{c1} = cycles limites de type 1.

Deuxième famille de zéros (F₂) :

$$\sin \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right] = 0 \rightarrow \rho_{c2} = \rho_0 \sqrt{2n},$$

ρ_{c2} = cycles limites de type 2.

Passons à l'étude de $\frac{d\Phi}{d\rho}(\rho_c)$:

$$\Phi(\rho) = \sin \left[\pi \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right],$$

$$\Phi' = \frac{2\pi\rho}{\rho_0^2} \cos \left[\pi \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right],$$

$$\Phi' = \frac{2\pi\rho}{\rho_0^2} \left\{ \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right] - \sin^2 \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right] \right\}.$$

Famille (F₁) $\rightarrow \Phi'(\rho_{c1}) = -\frac{2\pi\rho}{\rho_0^2} < 0$, famille STABLE.

Famille (F₂) $\rightarrow \Phi'(\rho_{c2}) = \frac{2\pi\rho}{\rho_0^2} > 0$, famille INSTABLE.

La fonction $\Phi(\rho)$ décrit tous les niveaux introduits à propos de l'oscillateur harmonique :

1° Les niveaux donnés par l'équation de Schrödinger, que l'on trouve stables;

2° Les niveaux de l'ancienne théorie des quanta, que l'on trouve instables.

3.3. Il existe une fonction f qui donne un Φ de forme voisine de la précédente

Considérons la fonction :

$$f(\rho \cos \xi, -\rho \sin \xi) = -2\rho \sin \xi \sin \left[\pi \frac{\rho^2 \cos^2 \xi + \rho^2 \sin^2 \xi}{\rho_0^2} \right],$$

c'est-à-dire

$$f = -2\rho \sin \xi \sin \left[\pi \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right].$$

Calculons la fonction $\Phi(\rho)$ correspondante :

$$\Phi(\rho) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \sin \xi \, d\xi,$$

$$\Phi(\rho) = +\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\rho \sin \xi \sin \left[\pi \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right] \sin^2 \xi \, d\xi;$$

ρ est constant sous le signe \int , d'où

$$\Phi(\rho) = \frac{\rho}{\pi} \sin \left[\pi \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right] \int_0^{2\pi} \sin^2 \xi \, d\xi,$$

c'est-à-dire

$$\Phi(\rho) = \rho \sin \left[\pi \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right].$$

Passons au calcul de $\Psi(\rho)$:

$$\Psi(\rho) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} f \cos \xi \, d\xi,$$

$$\Psi(\rho) = -\frac{1}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} 2\rho \sin \xi \sin \left[\pi \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right] \cos \xi \, d\xi,$$

$$\Psi(\rho) = -\frac{1}{\pi} \sin \left[\pi \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right] \int_0^{2\pi} \sin \xi \cos \xi \, d\xi \equiv 0.$$

La fonction $f = -2\rho \sin \xi \sin \left[\pi \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right]$ conduit ainsi à des cycles limites qui sont des oscillateurs harmoniques de pulsation ω_0 puisque $\Psi(\rho_c) = 0$.

PROBLÈME. — Ces cycles limites sont-ils les mêmes que ceux que nous cherchons ?

3.4. La fonction $\Phi = \rho \sin \left[\pi \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right]$ admet bien pour cycles limites stables les niveaux de l'oscillateur harmonique

Introduisons une notation en Φ_1 et Φ_2

$$\Phi_1 = \sin \left[\pi \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right], \quad \text{fonction étudiée en 3.2;}$$

$$\Phi_2 = \rho \sin \left[\pi \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right], \quad \text{fonction calculée en 3.3;}$$

$$\Phi_2 = \rho \Phi_1;$$

$$\Phi_2 = 0 \begin{cases} \nearrow \rho = 0, \\ \searrow \Phi_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \rho \Phi_1'; \quad \rho_{c1} = \rho_0 \sqrt{2n+1}, \quad \rho_{c2} = \rho_0 \sqrt{2n};$$

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \rho \Phi_1'; \quad \rho = 0 \rightarrow \Phi_1(0) = 0 \rightarrow \Phi_2'(0) = 0.$$

Ce cas serait incertain quant à la stabilité si $\rho = 0$ n'appartenait pas, par ailleurs, à la suite $\rho_{C2} = \rho_0 \sqrt{2n}$.

Famille (F₁) $\rightarrow \Phi_1(\rho_{C1}) = 0, \quad \Phi'_1(\rho_{C1}) < 0 \rightarrow \Phi'_2 < 0,$
famille STABLE;

Famille (F₂) $\rightarrow \Phi_1(\rho_{C2}) = 0, \quad \Phi'_1(\rho_{C2}) > 0 \rightarrow \Phi'_2 > 0$
famille INSTABLE.

Ainsi, la fonction $f = -2\rho \sin \zeta \sin \left[\pi \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right]$ conduit aux niveaux de l'oscillateur harmonique.

4. INTERPRÉTATION PHYSIQUE DU RÔLE QUE JOUE LA DISSIPATION VIS-A-VIS DE LA STABILITÉ

On a rappelé en 2.1 que

$$E = H = \frac{m}{2\pi} \omega_0 S.$$

Dans la mesure où l'on vient d'établir (cf. 3.3) la conservation de la pulsation ω_0 , on peut utiliser la proportionnalité de E et de S au voisinage de tout cycle limite. En conséquence,

$$f = -2\rho \sin \zeta \sin \left[\pi \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right] = 2 \frac{dx}{d\tau} \sin \left[\pi \frac{S}{S_0} \right] \quad (\text{cf. 3.1}),$$

$$f = 2 \frac{dx}{d\tau} \sin \left[\pi \frac{E}{E_0} \right].$$

Ainsi, selon l'interprétation étudiée ici, ce serait un terme *dissipatif* $\left(\frac{dx}{d\tau} \right)$ y figure, et même en facteur) qui assurerait la stabilité des niveaux quantiques de l'oscillateur. Il est également évident que ce terme n'est pas linéaire puisque la vitesse et la position figurent au carré dans l'énergie totale, qui figure elle-même en argument du sinus.

Il nous reste à comprendre directement le rôle de la dissipation vis-à-vis de la stabilité. Pour les cycles limites, $f = 0$, c'est-à-dire

$$E = k E_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} E = (2n + 1) E_0, \\ (k > 0) \quad E = 2n E_0; \end{array} \right.$$

cas $E = (2n + 1) E_0$ (fig. 3).

Le cercle de la figure 3 est tout simplement le cercle trigonométrique, dessiné là pour fixer les idées.

$$E = (2n + 1) E_0 \rightarrow P \rightarrow f = 0 \quad (\text{cas limite hamiltonien});$$

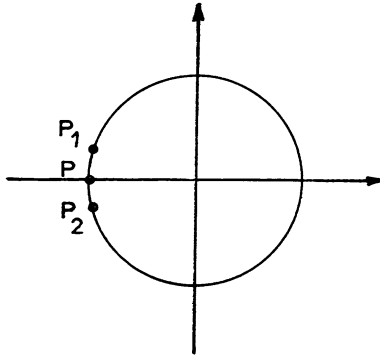


Fig. 3

$$E > (2n + 1) E_0 \rightarrow P_2 \rightarrow \sin < 0 \rightarrow f = -\varepsilon x' \quad (\varepsilon \text{ petit} > 0).$$

Le système est alors dissipatif; il perd de l'énergie et E décroît vers l'énergie d'équilibre $(2n + 1) E_0$,

$$E < (2n + 1) E_0 \rightarrow P_1 \rightarrow \sin > 0 \rightarrow f = +\varepsilon x'.$$

Le système est alors antidissipatif; il absorbe de l'énergie et E croît vers $(2n + 1) E_0$.

La stabilité est ainsi expliquée.

Cas $E = 2n E_0$ (fig. 4) :

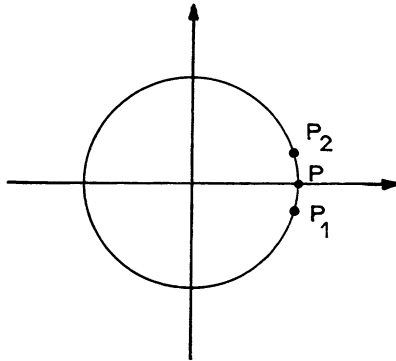


Fig. 4

$$E = 2n E_0 \rightarrow P \rightarrow f = 0 \quad (\text{cas limite hamiltonien})$$

$$E > 2n E_0 \rightarrow P_2 \rightarrow \sin > 0 \rightarrow f = +\varepsilon x'.$$

Le système est alors antidissipatif; il absorbe de l'énergie; E croît et s'éloigne de l'énergie d'équilibre $2n E_0$.

$$E < 2n E_0 \rightarrow P_1 \rightarrow \sin < 0 \rightarrow f = -\varepsilon x'.$$

Le système est dissipatif; il perd de l'énergie et E s'écarte de $2n E_0$. Cette situation est évidemment instable.

5. EXTENSION DU MODÈLE DISSIPATIF OSCILLATOIRE A LA DESCRIPTION DES TRANSITIONS ELLES-MÊMES

Jusqu'à présent, dans le cadre d'une étude de stabilité, nous avons étudié le rôle que joue la fonction

$$f = 2\mu x' \sin\left(\pi \frac{E}{E_0}\right)$$

au voisinage d'une position d'équilibre. Montrons maintenant que le phénomène de dissipation et d'absorption d'énergie garde toute son importance loin des positions d'équilibre stable, à supposer qu'un phénomène extérieur en ait écarté notablement l'oscillateur. Pour s'en convaincre il suffit de considérer l'équation

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x = 2\mu \frac{dx}{d\tau} \sin\left(\pi \frac{E}{E_0}\right) \quad (\mu > 0)$$

et celle qu'on en déduit après multiplication par $\frac{dx}{d\tau}$, à savoir :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left[\left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + x^2 \right] = 2\mu \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 \sin\left(\pi \frac{E}{E_0}\right).$$

On remarquera d'abord que le mouvement admet une infinité d'intégrales particulières :

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + x^2 \right] = k E_0 \quad (k \text{ entier})$$

et ce, *quel que soit* μ ; puis l'on raisonnera sur les deux relations ci-dessous :

$$\left. \begin{aligned} f &= 2\mu \frac{dx}{d\tau} \sin\left(\pi \frac{E}{E_0}\right) \\ \frac{dE}{d\tau} &= 4\mu E_{\text{cin}} \sin\left(\pi \frac{E}{E_0}\right) \end{aligned} \right\} \quad (\mu > 0),$$

où E est l'énergie totale : $\frac{1}{2} \left[\left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + x^2 \right]$

et E_{cin} l'énergie cinétique : $\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2$.

Les propriétés du mouvement sont résumées par la sinusoïde de la figure 5, que nous allons interpréter :

— Sur toute l'étendue d'un intervalle $(2n - 1, 2n)$ le phénomène est dissipatif (f est opposée à $\frac{dx}{d\tau}$), ce qui entraîne une décroissance de l'énergie totale E ($\frac{dE}{d\tau} < 0$). Ainsi, quelles que soient les conditions initiales, et parce que le point représentatif du mouvement reste nécessairement sur la sinusoïde :

- (a) E tendra vers l'énergie $(2n - 1) E_0$;
- (b) f tendra vers zéro.

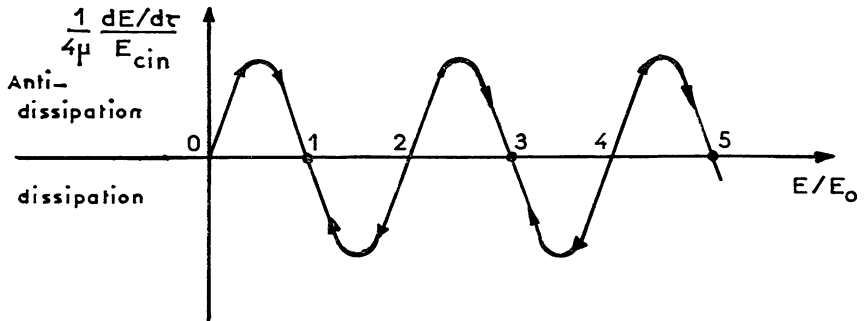


Fig. 5

Le mouvement tendra donc vers celui d'un oscillateur hamiltonien ($f = 0$) d'énergie $(2n - 1) E_0$ et de fréquence ω_0 , et il ne s'en écartera plus (sauf influence extérieure) puisque le cycle limite est stable.

— De même, sur tout intervalle $(2n, 2n + 1)$:

- (a) E croîtra vers l'énergie $(2n + 1) E_0$;
- (b) f tendra vers zéro,

d'où la même conclusion que ci-dessus.

— Il semble donc que la fonction $f = 2\mu \frac{dx}{d\tau} \sin\left(\pi \frac{E}{E_0}\right)$ soit susceptible de participer à la description des transitions quantiques elles-mêmes, et non plus seulement à la description des états stationnaires.

6. CONCLUSION GÉNÉRALE

— Dans le cadre d'une éventuelle interprétation des niveaux quantiques de l'oscillateur harmonique comme des cycles limites, nous avons démontré que :

1° Le modèle dissipatif linéaire est susceptible de participer à la représentation des transitions entre niveaux, puisqu'il transmet la pulsation originelle ω_0 . Malheureusement, ce modèle n'admet pas de cycles limites autres que le repos.

2° Il existe un modèle dissipatif oscillatoire,

$$f = 2\mu \frac{dx}{d\tau} \sin\left(\pi \frac{E}{E_0}\right)$$

qui rend compte de l'existence de niveaux quantiques de l'oscillateur harmonique, qu'il interprète comme des cycles limites stables.

3° Le même modèle interprète les niveaux de l'ancienne théorie des quanta comme des cycles limites instables.

4° Ce modèle dissipatif oscillatoire ramène tout état initial vers l'un des états quantiques et, comme le modèle linéaire, assure ainsi la transmission de la pulsation originelle ω_0 .

— On remarquera que le modèle dissipatif oscillatoire

$$f = 2\mu \frac{dx}{d\tau} \sin\left(\pi \frac{E}{E_0}\right)$$

rentre dans la forme générale proposée il y a dix ans par les auteurs des publications [3], [6] et [7].

REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient MM. Boubakar Ba et Paul Kessler dont les commentaires favorables, après lecture du manuscrit, les ont amenés à publier le présent article.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. ČAP, *Causal explanation of the quantum theories* (Nuovo Cimento, Suppl., t. 3, 1956, p. 418).
- [2] J. ANDRADE E SILVA, F. FER, Ph. LERUSTE et G. LOCHAK, *Quantification, stationnarité et non-linéarité* (C. R. Acad. Sc., t. 251, 1960, p. 2305).
- [3] J. ANDRADE E. SILVA, F. FER, Ph. LERUSTE et G. LOCHAK, *Échanges d'énergie dans les systèmes en voie de quantification* (C. R. Acad. Sc., t. 251, 1960, p. 2482).
- [4] J. ANDRADE E. SILVA, F. FER, Ph. LERUSTE et G. LOCHAK, *Non linéarité, cycles limites et quantification* (C. R. Acad. Sc., t. 251, 1960, p. 2662).
- [5] L. DE BROGLIE, *Sur la thermodynamique du corpuscule isolé* (C. R. Acad. Sc., t. 253, 1961, p. 1078).
- [6] J. ANDRADE, E. SILVA, F. FER, Ph. LERUSTE et G. LOCHAK, *Quantification, stationnarité et non-linéarité* (Cahiers de Physique, t. 129, 1961, p. 210).
- [7] J. ANDRADE E. SILVA, F. FER, Ph. LERUSTE et G. LOCHAK, *Problèmes de stabilité pour des systèmes à un grand nombre de degrés de liberté* (Cahiers de Physique, t. 137, 1962, p. 1).

- [8] J. ANDRADE E. SILVA et G. LOCHAK, *La thermodynamique du corpuscule isolé et la description des transitions quantiques* (C. R. Acad. Sc., t. 254, 1960, p. 4260).
- [9] G. LOCHAK, *Sur le second principe de la thermodynamique et la stabilité asymptotique au sens de Liapounov* (C. R. Acad. Sc., t. 254, 1962, p. 4436).
- [10] F. FER, *Relations entre les systèmes dynamiques à cycles limites et les systèmes différentiels linéaires à valeurs propres* (C. R. Acad. Sc., t. 255, 1962, p. 261).
- [11] L. DE BROGLIE, *Nouvelle présentation de la Thermodynamique de la particule isolée* (C. R. Acad. Sc., t. 255, 1962, p. 807).
- [12] L. DE BROGLIE, *Quelques conséquences de la Thermodynamique de la particule isolée* (C. R. Acad. Sc., t. 255, 1962, p. 1052).
- [13] G. LOCHAK, *Sur la théorie non linéaire des transitions quantiques* (C. R. Acad. Sc., t. 256, 1963, p. 3601).
- [14] L. DE BROGLIE, *La thermodynamique de la particule isolée*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.
- [15] N. V. BUTENIN, *Elements of the theory of non linear oscillations*, Blaisdell publishing Company, New-York, London, 1965.
- [16] J. FRONTEAU, *Le théorème de Liouville et le problème général de la stabilité*, C. E. R. N 65-38, 1965.
- [17] J. FRONTEAU, *L'entropie et la physique moderne*, C. E. R. N. MPS/Int. MU/EP, 66-5, 1966.
- [18] L. DE BROGLIE, *Certitudes et incertitudes de la science*, Albin Michel, Paris, 1966.
- [19] D. LEITER, *A model « hidden variable » theory for hydrogen* (Nuovo Cimento, t. 60 B, 1969, p. 107).
- [20] M. SURDIN, *L'état fondamental de l'oscillateur harmonique est-il un cycle limite?* (Ann. Inst. H. Poincaré, t. 13, 1970, p. 363).
- [21] J. FRONTEAU, *Apports de chaleur et mécanique dissipative* (Nuovo Cimento, t. 2 B, 1971, p. 107) et t. 4 B, 1971, p. 347.

(Manuscrit reçu le 29 novembre 1971).
